МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Н. В. Михайлова

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ПОСТГЁДЕЛЕВСКОЙ МАТЕМАТИКИ

МОНОГРАФИЯ

МИНСК 2009

УДК 510.21
ББК 87+22.1
М69

Рекомендовано к изданию Советом Учреждения образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
(протокол № 2 от 25.02.2009 г.)

Р е ц е н з е н т ы:

П. И. Монастырный, доктор физико-математических наук
профессор, лауреат Государственной премии БССР,
профессор кафедры численных методов и программирования
Белорусского государственного университета,
В. В. Шлыков, доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии,
декан математического факультета Белорусского
государственного педагогического университета им. М. Танка,
Я. С. Яскевич, доктор философских наук, профессор,
директор Института социально-гуманитарного образования
Белорусского государственного экономического университета

Михайлова Н. В.

М69 Философско-методологические основания постгёделевской математики: монография / Н. В. Михайлова. – Мн.: МГВРК, 2009. – 156 с.

ISBN 978-985-526-042-5

Монография посвящена актуальной проблеме философии математики – философско-методологическим основаниям постгёделевской математики. Предлагаемый в работе подход к анализу действующих философско-методологических программ обоснования современной математики рассматривает формализм и интуиционизм как равноправные составляющие естественного процесса развития неклассической и постнеклассической математики. Для этого в концептуальном решении проблемы оснований математики используются философско-математическая идея двойственности.

Адресуется студентам, магистрантам и аспирантам философских, математических и инженерных специальностей, а также преподавателям философских и математических дисциплин и всем тем, кто интересуется философскими проблемами математики.

УДК 510.21
ББК 87+22.1

ISBN 978-985-526-042-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В философии науки и техники отражаются общефилософские тенденции, свойственные всей философии познания. Философия и методология современной математики фокусируют проблемы природы языка, истины и знания, поскольку математика – это не только описание абстрактных конструкций, но также и феномен человеческой культуры. Актуальность философского и методологического анализа оснований математики обусловлена тем, что классическая математика не смогла решить некоторые проблемы существования чисел наряду с существованием множеств, а также выяснить философско-математическое содержание понятия бесконечного множества. Поэтому в этой работе делается акцент на философские и методологические высказывания профессиональных математиков, совместным трудом которых создавались направления развития современной математики.

В широком смысле к классическому направлению в математике относятся те математические теории, в которых используется абстракция актуальной бесконечности, а для логических выводов применяются аппараты классической логики, которые в своих главных чертах следуют традиции, восходящей к Аристотелю. Критику классической математики традиционно связывают с философским направлением, получившим название “интуиционизм” и возникшим в прошлом веке конструктивным направлением в математике. Все это способствовало развитию новых направлений математики, которые можно объединить термином “неклассическая математика”, где наряду с традиционно количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер. При этом в силу единства математики, под “классической математикой” сейчас понимается классическое направление в математике, а неклассическое направление в современной математике ассоциируется с интуиционизмом и некоторыми его конструктивистскими реализациями.

Важнейшие философские проблемы оснований математики связаны с эпистемологическим статусом математических утверждений и сложным онтологическим вопросом о существовании математических объектов, которые изменяются по ходу познания. Модернизация традиционных направлений философии математики не проясняет новый образ научного знания, складывающийся в современной философии познания. Современный этап развития математики отличается от классического этапа усилением роли алгоритмического в математических теориях. Поэтому в настоящее время особый интерес для математической практики представляет философский анализ оснований математики, с точки зрения ее частичной конструктивности, и прояснение представлений о допустимых подходах к обоснованию современных математических теорий неклассического и постнеклассического периодов развития рационально-научного знания.

Опыт размышления о философско-методологических проблемах математического познания имеет, по меньшей мере, столетнюю историю. Из выдающихся зарубежных математиков, занимавшихся философией математики, необходимо в первую очередь назвать Л. Брауэра, Г. Вейля, К. Гёделя, Д. Гильберта, Ж. Дьедонне, Л. Заде, Г. Кантора, П. Коэна, С. Мак-Лейна, Б. Мандельброта, Дж. Неймана, А. Пуанкаре, Р. Тома, Г. Харди, К. Г. Якоби и др. Среди отечественных математиков, внесших значительный вклад в методологию современного математического знания и математического образования, можно выделить А. Д. Александрова, В. И. Арнольда, Ф. Д. Гахова, Ю. Л. Ершова, А. Н. Колмогорова, Ю. И. Манина, А. А. Маркова, Ю. В. Матиясевича, А. Н. Паршина, П. К. Рашевского, В. Л. Рвачева, В. А. Садовничего, В. М. Тихомирова, В. А. Успенского, И. Р. Шафаревича и др. Философско-методологическое исследование современного развития науки, невозможное без анализа отличительных признаков математической практики, проведено в работах философов и историков математики Л. Витгенштейна, В. Э. Войцеховича, Л. Гординга, С. С. Демидова, В. А. Еровенко, А. А. Зенкина, В. Н. Катасо-нова, М. Клайна, Ф. А. Медведева, В. В. Налимова, В. Я. Перминова, Г. И. Рузавина, Дж. Фанга, Д. Хофштадтера, В. В. Целищева и многих других современных исследователей науки.

Для понимания проблемы обоснования математики следует уяснить смысл самого этого понятия. В разные периоды под обоснованием математики понимались различные философско-методологические проблемы. Например, для древнегреческой математики это была проблема неизмеримых величин, для математики XVII века – проблема интерпретации иррациональных и мнимых чисел, для математики XVIII века – проблема строгости доказательства в теории дифференциального исчисления. На рубеже XIX и XX веков Г. Кантор и Д. Гильберт впервые сформулировали совершенно новое понимание проблемы обоснования математики, рассматривая ее как проблему непротиворечивости новых математических теорий. Решение проблемы обоснования как философско-методологической проблемы математики в такой постановке зависит от выбора методологических и философских оснований математической теории. Множество исходных математических предложений является собственным основанием математической теории, а законы и правила логики, по которым из этих предложений выводятся утверждения математической теории, составляют ее логические основания. Вопрос о том, какая из логик может быть логическим основанием, относится к методологическому основанию математической теории, а пригодность той или иной логики и критерии обоснованности теории относятся к философскому основанию математики.

Философы науки начала прошлого века подвергли логистическое направление в философии математики принципиальной критике, основанной на том, что если основной тезис логицизма верен, то математика становится чисто логико-дедуктивной наукой, заключения которой следуют из законов мышления, необъяснимым образом охватывающих все разнообразие применений математики. После того, как математика достигла впечатляющих успехов, начиная с 30-х годов XX века, дух дружеского соперничества между различными философско-методологическими школами уступил место новым спорам о том, что, собственно, следует считать философией математики – формализм, интуиционизм или саму теорию множеств. Невозможность доказать непротиворечивость наносила серьезный удар по формалистической философии математики Гильберта, хотя эта трудность задевала не только его программу. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не был исключением. Философы и логики, работающие в области оснований математики, сошлись на том, что математика, как продукт человеческой деятельности, не может быть логически безупречной. Еще конкретнее высказался австрийский математик Курт Гёдель: “Роль пресловутых “оснований” сравнима с той функцией, которую в физических теориях выполняют поясняющие что-либо гипотезы… Так называемые логические или теоретико-множественные основания теории чисел или любой другой вполне сформировавшейся математической теории по существу объясняют, с не обосновывают их…” (цит. по [60, с.568]). Поэтому неудивительно, что профессиональные математики, хорошо осведомленные в пробелах оснований математики, предпочитают держаться в стороне от философских проблем.

Традиционные взгляды на философию математики, ориентированные ранее на вопросы о природе математических объектов, претерпевают значительные изменения в сторону эпистемологической ориентации на вопросы математического познания. В современной философии математики появились новые модификации обосновательных программ, в которых первичные представления математики покоятся на идеализациях, имеющих значение для соответствующей предметной онтологии в контексте конструирования и существования. В постгёделевской математике приемлемы любые содержательные системы понятий, имеющие внутреннюю и внешнюю значимость, что свидетельствует о своевременности обращения к философско-методологическому анализу отдельных разделов современной математики и концептуальному выявлению нового образа математического знания. Несмотря на методологические трудности, связанные с непротиворечивостью аксиоматических теорий, это все же те вопросы, которые необходимо обсуждать философам математики.

Природа и предмет математического знания, начиная еще с античной эпохи, привлекали внимание многих математиков и философов. Особую актуальность философский вопрос о природе математических понятий и сущности математических доказательств приобретает в конце XIX – начале XX веков, когда были обнаружены первые парадоксы теории множеств. Эти парадоксы свидетельствовали о шаткости фундамента здания всей классической математики, на роль которой претендовала теория множеств. Чтобы найти выход из трудностей, были предложены различные программы обоснования математики. В начале прошлого века наиболее влиятельными направлениями нового обоснования математики стали логицизм, интуиционизм и формализм, причем интуиционизм противопоставлялся формализму как попытка ограничения канторовской свободы математики. Поэтому в неклассической математике все большее распространение получают идеи конструктивного направления, поскольку в чрезмерной формализации математики содержатся “скрытые” определения и двусмысленности.

Наука, как особая интерпретационная деятельность, по своему эпистемологическому статусу не отличается от других культурных феноменов. В математике это не только методы, но и новые математические образы, новые стандарты обоснования знания, а также математическая деятельность в целом, включающая эстетику, интерпретацию и проблему понимания знания. Философ науки академик В. С. Степин считает, что соответствующее воздействие “может быть представлено как включение различных социокультурных факторов в процесс генерации собственно научного знания” [124, с.41]. Философско-методологический анализ научных исследований последней трети XX века, которые представляют постнеклассический тип рациональности, учитывает мировоззренческие установки, определяемые в той или иной степени отдельными социокультурными факторами развития науки. Это предопределяет тот эпистемологический поворот в исследованиях по основаниям математики, который происходит в целом и в философии математики, поскольку, вообще говоря, математическое мышление не свободно от интуитивных допущений, требующих для своего уяснения выхода за пределы математики.

Интенсивные исследования по основаниям математики за последние сто лет, кроме того, что они дали ценные математические результаты, пролили новый свет и на многие методологические и философские проблемы обоснования классической математики. Исходя из философско-методологического анализа практической двойственности классического и неклассического направлений развития математики, в этом исследовании предложен синтез основных программ обоснования математики второй половины XX века – интуиционизма и формализма. Целостный смысл методологически достигается в синтезе различных аспектов структуры современного математического знания. Новые исследования по этим вопросам дают возможность более конкретно подойти к анализу всего комплекса проблем, связанных с аксиоматическим методом, и в особенности таких, как условия и границы применения аксиоматического метода, сущность и значение формализации в математике. Такой анализ дается в первой главе монографии.

С аксиоматизацией математики непосредственно связана философская проблема математической истины и критерии установления истинности математических предложений и теорий. Стандарты строгости доказательства, разработанные современной математической логикой, могут служить конкретным примером таких критериев. Однако как само понятие строгости доказательства, так и способы логического вывода меняются с развитием науки, испытывая определенное влияние философии. Особое значение методологический и философский анализы приобретают при выяснении особенностей математической абстракции и проблемы существования абстрактных объектов. Наконец, любая программа обоснования математики существенным образом зависит от определенного истолкования категории бесконечности вообще и математической в особенности. Разный подход к этим понятиям в формалистской математике, с одной стороны, и в интуиционистской – с другой, предопределяет их отношение и к проблемам существования, и к законам логики, и к доказательствам математики. Эти вопросы будут рассмотрены во второй главе.

Современный этап исследований по основаниям математики характеризуется тем, что многие вопросы, которые прежде рассматривались в рамках чисто умозрительных принципов, теперь удается решать с помощью точных логико-математических методов. Именно в связи с этим математическая логика играет доминирующую роль в таких исследованиях. И все же многие фундаментальные проблемы обоснования математики нельзя решать в изоляции от других наук и философии, поскольку именно инфинитные экстраполяции, а также неподдающиеся конструктивной интерпретации абстракции бесконечности придают математическому аппарату "непостижимую эффективность". Вот почему возникает необходимость в специальном, философском обсуждении проблем обоснования математики, а также в анализе и общей оценке различных программ такого обоснования. Это проблемное поле исследований обсуждается в третьей главе.

Многие математики ничего не знают о работах по обоснованию математики, поскольку специалисты по основаниям математики настолько углубились в свою область исследования, что их просто невидно в общем потоке математических публикаций. Поэтому, продолжая пользоваться методами традиционной математики, они трудятся, не интересуясь ни ее обоснованием, ни ее проблемами. Так, согласно гёделевским результатам, при аксиоматико-множественном подходе к теориям, содержащим теорию натуральных чисел, неизбежно появление "пробелов". Теорема Гёделя о неполноте показала, что аксиоматизация имеет свои пределы, что отличается от господствовавшего ранее представлении о математике как о совокупности аксиоматизированных теорий. Неоднозначность трактовок гёделевской незавершенности аксиоматических систем содержится и в ироническом высказывании немецкого математика Германа Вейля: "Гёделю с его истовой верой в трансцедентальную логику хочется думать, что наша логическая оптика лишь немного не в фокусе, и надеяться, что после небольших коррекций мы будем видеть четко, и тогда всякий согласится, что мы видим верно" (цит. по [60, с.559]). В любом случае программа Г1ёделя свидетельствует о том, что любая система аксиом не позволяет доказать или опровергнуть все теоремы того раздела математики, для которого она создавалась. Другими словами, математическую реальность невозможно включить в абстрактные аксиоматические системы.

Способность понимания опережать соответствующее объяснение связана с постепенным ростом убежденности в своей правоте, хотя достижение такого понимания не поддается точной датировке. Если рассматривать современную математику как совокупность абстрактных структур и соответствующих правил вывода, то проблема обоснования математики сводится к установлению непротиворечивости ее теорий и обоснованию надежности ее доказательств. Проблема обоснования неклассической математики представлялась как обоснование бесконечного на основе конечного, затем акценты сместились на отделение бесконечного, которое нуждается в соответствующем обосновании, от такого бесконечного, которое имеет непосредственное онтологическое обоснование. Заметим, что программа обоснования сама нуждается в обосновании, то есть в философском анализе соответствия своей задаче. Проблема обоснования математики все еще далека от своего решения, поскольку любая программа обоснования содержит в себе дополнительные допущения, имеющие как математический, так и философский характер.

Выявление обосновательного слоя в математике, гарантирующего надежность научного знания, требует глубокого философского анализа понятия бесконечности, принципиально важного для преодоления существующей методологической неопределенности в основаниях математики, поскольку актуальная бесконечность, как и потенциальная бесконечность, укоренена в основания современного математического мышления. Кроме того, введение одной из них предполагает использование другой, а в рамках канторовской теории потенциальную бесконечность можно интерпретировать как актуально бесконечную систему конечных множеств. Важным обстоятельством, определяющим актуальность этой темы, является то, что понятия, лежащие в основании математических теорий, остаются содержательно неясными до тех пор, пока эти теории способны развиваться. Эта особенность математического знания диктует необходимость исследования изменения философско-методологических оснований математики.

Откуда берется уверенность в правильности знания и определенности математического доказательства, если мы не способны ощутить абстрактные методы математики и ее понятий? “Математическое описание мира, – по мнению математика академика В. И. Арнольда, – основано на деликатном взаимодействии непрерывных (плавных) и дискретных (скачкообразных) явлений” [8, с.1311]. Некоторые математические описания всегда будут неполными, поскольку какие-то аспекты мира на границах человеческого понимания могут “сопротивляться” полному описанию. По существу в этой сложности, в духе обобщенной концепции дополнительности, проявляется недостаточность формальных методов описания математических процессов и явлений. Философские суждения о рациональности и внерациональности в математике в контексте проблемы соответствия средств целям, вообще говоря, строго не определены, что связано с неопределенностью границ применимости противоположных концепций обоснования. Есть еще и философско-методологические вопросы глобального характера, а являются ли новые разделы математики математикой, а именно, совместимы ли они с природой математики? Эти вопросы относятся к проблеме обоснования математики.

Постгёделевская программа обоснования математики стремится охарактеризовать природу математического познания с помощью выбора объектов исследования, признаваемых математическим сообществом, и соответствующей регламентации способов рассуждений о них. Уточняя понятие “постгёделевских программ” заметим, что предыдущие ведущие программы обоснования для нее это не некие предпосылки последующих, а непосредственные составные части новых программ обоснования математики. Проблема отыскания закономерностей и тенденций развития различных направлений современной математики распадается на ряд сопутствующих ей методологических подпроблем в контексте реальных изменений философско-методологических оснований современной математики. Трудность удовлетворительного практического решения соответствующих задач состоит в том, что среди математиков и философов нет единого мнения относительно природы математической реальности. Природа математики никогда не была вполне понятной. Это старейшая и труднейшая проблема метафизики, от способов решения которой зависит дальнейшее развитие современной философии математики.

Общим для философов и математиков стало приобретение понимания силы целостного подхода к проблемам, в отличие от их детальных доказательств. Из различия между формальным и содержательным знанием следует, что целостная наука развивается в контексте философской концепции дополнительности, что должно отражаться как в математических теориях нового типа, так и в современной философии математики. Исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, также как недостижима полная теория познания других сложных явлений, что указывает на необходимость их сосуществования в рамках расширенной концепции дополнительности. Данная гипотеза находит свое подтверждение в ходе анализа современных тенденций развития математического знания и реконструкции философско-методологических оснований математики, поскольку в них отражаются такие фундаментальные двойственности как формальное и реальное, актуальное и потенциальное, непрерывное и дискретное, вычислимое и невычислимое, конечное и бесконечное.

Даже если некоторые математики игнорируют проблемы оснований, словно этих проблем ни когда и не было, то все равно они не достойны осуждения, поскольку многие из них озабочены не менее важной проблемой реального применения математики. Даже если в математике не существует вечных истин, как считает французский математик Андре Вейль, занятие математикой необходимо продолжить: “Для нас, чьи плечи ноют под тяжестью наследия греческой мысли, кто идет по стопам героев эпохи Возрождения, цивилизация немыслима без математики” (цит. по [60, с.562]). В действительности профессиональные математики, пусть и косвенно через свои математические работы, продолжают бороться с проблемами, возникающими в ее основаниях, инстинктивно пытаясь дополнить и укрепить основания своей науки. Такая работа по философскому осмыслению оснований математики, безусловно, является откликом на естественные проблемы теоретической и прикладной математики. Обратная связь проявляется в том, что исследования по математике раскрепощают научно-философскую мысль. Например, если бы такой глубокий философ как Иммануил Кант, с большим вниманием следил за развитием современной ему математики, то возможно он не стал бы настаивать на единственно возможных, точнее только евклидианских, пространственных ощущениях, допустимых нашим разумом.

* * *

Основные результаты проведенного исследования по философско-методологическим основаниям постгёделевской математики можно обобщить с помощью следующих положений.

- Философско-математическое обоснование математики в процессе содержательного развития классических направлений математики во второй половине прошлого столетия осуществлялись в рамках проблемного поля взаимодействия точной науки и философии. В ходе реконструкции философских программ интуиционизма, формализма и их современных модификаций разработана новая концепция системного обоснования математического знания в контексте философско-методологической концепции дополнительности.
- Интуиционистской математике свойственен примат внутреннего истолкования математических теорий, тогда как философская составляющая формалистической концепции связана с абсолютизацией внешних аспектов теории по отношению к ее внутренним истолкованиям. В ходе сравнительного анализа классического и неклассического направлений математики, проведенного в контексте фундаментальных двойственностей математического познания, выявлены рациональные аргументы, определяющие границы надежности и строгости классических программ обоснования математики.
- Философско-методологический анализ роли математических структур в обосновании неклассического знания показал, что данная проблема связана с поиском пределов формализованного математического мышления. После своеобразного решения знаменитой континуум-гипотезы стало ясно, что необходимо говорить о дополнительном объяснении при использовании математических терминов и понятий формализованных математических

теорий, которые проявляют себя в способах употребления языка современной математики.

- Решение проблемы бесконечности связано не только с проблемой обоснования математики, но и с философско-методологической проблемой непротиворечивости идеализаций. С точки зрения постгёделевской философии математики, решение этой проблемы должно учитывать современные требования нечеткости и неоднозначности основных понятий. Разрыв между бесконечностью, заложенной в математические понятия, и практической реализуемостью алгоритма требует решения проблемы оптимальной финитизации, которая по своей философской сущности есть поиск математических способов преобразования бесконечного в конечное.
- Попытки обоснования математики зависят от подхода к проблеме натурального ряда и проблеме бесконечности с точки зрения теоретико-множественного языка и методов обработки информации. Вычисление и рассуждение представляют собой фундаментальную двойственность математического познания, которая находит отражение в обосновании математических теорий и современной философии математики. Постгёделевский этап развития математики, указывая на тупиковые пути обоснования, не закрывает других путей внутреннего обоснования непротиворечивости отдельных частей математики.

Напомним, что математический анализ – один из самых тонких и практически полезных разделов классической математики – был в начале построен по существу на не вполне ясных в то время логических основаниях арифметики. Более того, вся история математики показывает, что не существует универсального эпистемологического метода, который можно знать наперед, поскольку у каждого обоснования есть некое необъясненное основание, на котором это обоснование стоит. Поэтому формализации и строгому логическому обоснованию должен предшествовать долгий период осмысления и созидания, не стесняемого никакими философско-методологичскими ограничениями. Но анализируя проблему оснований постгёделевской математики, не следует принижать роль философии, способствующей концептуальной ясности. Современный философ может попасть в ловушку так называемых “метафизических предпосылок”, заполняющих пробелы слабых мест. Поэтому философско-математическое исследование должно исходить из внутренней “проблемной ситуации” в современной математике. Для реализации этой идеи необходим системный метод, то есть философский метод, задающий условия познания, которые могут стать соединяющим фактором примирения противоположностей современных программ обоснования математики.

ГЛАВА 1
ИНТУИЦИОНИЗМ И ФОРМАЛИЗМ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ: ДИНАМИКА РАЗВИТИЯ

Важнейшим следствием переосмысления математического знания в конце XIX века стало провозглашение ряда крупных философско-математических концепций и программ. Первой такой концепцией была “теоретико-множественная” программа немецкого математика Георга Кантора. Г. Кантор выдвинул идею актуальной бесконечности в качестве фундаментальной идеи своего учения, заложив, таким образом, основу для теоретико-множественного обоснования всей математики. После работ Кантора математикам казалось, что их наука получила окончательное обоснование. Однако уже при жизни Кантора в теории множеств были обнаружены парадоксы, что резко изменило отношение математиков к его теории. Назрела острая необходимость пересмотреть свои взгляды на такие вопросы, как сущность математических доказательств и тех критериев, которые позволяют отличать истинные доказательства от ложных.

Разрешение парадоксов требовало переосмысления ряда принципиальных идей математики и отказа от некоторых старых концепций. Возникают различные направления и школы, каждая из которых начинает по-своему решать вопросы обоснования математики. Эти обстоятельства в значительной мере повлияли на философские взгляды Лёйтзена Брауэра, который выступил против теоретико-множественного обоснования математики. Свою методологическую программу Брауэр назвал интуиционистской. Именно ему неклассическая наука обязана открытием новой “интуиционистской логики”. Это был, по сути, еще один путь в развитии математического знания, дополнительный по отношению к классическому математическому обоснованию. Новое направление в математике и логике получило название интуиционизма. “Переход к неклассической науке, – как считает философ науки Я. С. Яскевич, – был подготовлен всем ее предшествующим развитием, где в процессе становления дисциплинарного естествознания зарождались нетрадиционные идеалы научного знания, включались идеи развития, необратимости, случайности, непредсказуемости” [142, с.512]. Выдвижение Брауэром своей позитивной программы интуиционистской математики и логики способствовало изменению взглядов на аксиоматические теории.

Традиционная критика классической математики интуиционистами непосредственно связана с особым пониманием существования математических объектов. Отвергая канторовскую концепцию актуальной бесконечности, интуиционисты обращаются к бесконечности потенциальной. В числе математиков, не согласных с программой Лёйтзена Брауэра, был Давид Гильберт, которым впервые была поставлена задача формализации классической математики, а также доказательства непротиворечивости полученной формальной всеобъемлющей теории. С помощью формализации математики Гильберт пытался преодолеть возникшие трудности ее обоснования, а также защитить ее от разрушительной критики интуиционистов. Гильберт вновь обращается к аксиоматическому методу, но уже значительно усовершенствованному и дополненному теорией доказательства, или метаматематикой. Успешное осуществление программы, выдвинутой Гильбертом, означало бы окончательное обоснование классической математики. Но при доказательстве непротиворечивости формальных систем обнаружилась принципиальная невозможность осуществления его программы в первоначальном виде.

Результаты Курта Гёделя ясно показали, что попытки обоснования математики в рамках самой этой науки, попытки охватить всю математику единой всеохватывающей аксиоматической системой, обречены на неудачу. Вопросы, касающиеся проблем обоснования математики с помощью аксиоматизации, были в центре внимания философов математики XX в. В данной главе проанализируем, как в дискуссии программ обоснования интуиционистов и формалистов отражена специфика математики и, в частности, различный статус математических и физических теорий по отношению к опыту. Для этого надо выявить вклад каждого направления в решение проблемы обоснования математики, а также исследовать философско-методологическое значение результатов, полученных различными школами обоснования математики.

1.1. Интуиционизм как преодоление классического стиля математического мышления

Природа и предмет математического знания начиная еще с античной эпохи привлекали внимание многих математиков и философов. В XVII столетии Лейбниц фантазировал о логической системе, столь всеобъемлющей, что она могла бы решить не только математические, но также философские и моральные проблемы. Задача науки, считал Исаак Ньютон, состоит в том, чтобы раскрывать блистательные замыслы творца. Подобно Ньютону, Лейбниц рассматривал свою разнообразную деятельность как возложенную на ученых божественную миссию. Известный французский математик Александр Гротендик сказал о них так: “Иногда думаешь: счастье, что такие люди, как Ньютон, Лейбниц, … имели возможность творить свободно, не оглядываясь на каноны” [30, с.108]. Отличаясь уникальной разносторонностью, Готфрид Лейбниц, как Рене Декарт и Блез Паскаль, был не только математиком, но и выдающимся философом. Методологические приемы Лейбница сыграли определенную эвристическую роль в его математических исследованиях, в том числе и в открытии исчисления бесконечно малых.

Даже боровское понятие индивидуальности, проявляющееся в дополнительном характере описания атомных явлений, по мнению философа физики И. С. Алексеева, “обнаруживает близкую аналогию с лейбницевским понятием монады” [3, с.99]. Путь к современному математическому анализу был открыт тогда, когда, как сказали Бурбаки, “повернувшись спиной к прошлому”, Ньютон и Лейбниц искали оправдание новым методам не в строгих доказательствах, а в согласованности разнообразных результатов. Достижения Готфрида Лейбница, также как и Рене Декарта, особенно значительны в усовершенствовании математического аппарата и понимании единства математики, хотя их подходы к “согласованности математики” существенно различались. Декарт стремился сделать алгебру основной математической наукой, против чего довольно энергично выступал Лейбниц, создававший свою универсальную математику на широкой основе, близкой к современной. Универсальная математика, считал он, является “логикой воображения” и должна заниматься всем, что в области воображения поддается точным определениям. Предвосхищая будущее развитие математики, он, уточняя согласованность отдельных математических наук, выделил фундаментальное понятие изоморфизма, которое назвал “подобием”. Его понимание сущности и общности математики было по достоинству оценено только в середине XIX века, когда стало возможным переходить от одних теорий или моделей к другим адекватным изменением терминологии.

Обнаружение изоморфизма между двумя известными структурами большая удача для математика. Это еще один шаг в теории математического познания, поскольку именно такие открытия не только порождают новое “значение”, но и способствуют поискам нетривиальных путей развития математики. Изоморфизмы бывают самых разных типов, поэтому не всегда ясно, с чем мы имеем дело. В широком понимании слову “изоморфизм”, как и вообще всем словам, присуща некоторая расплывчатость, что, однако, является одновременно и его достоинством, и его недостатком. “Понятие изоморфизма относительно: говорить об абсолютном изоморфизме систем – значит входить в противоречие с диалектическим принципом всеобщего развития и изменения” [140, с.81]. Если отказаться от требования взаимной однозначности элементов и отношений, то мы придем к понятию гомоморфизма, которое является обобщением изоморфизма. Этот переход, в другом контексте начатый в работах Лейбница, неожиданно для традиционного мышления того времени, наиболее полно был представлен в работах Кантора. В них по существу почти полностью отсутствуют элементы вычислений, а используемые символы – это скорее аналоги опорных этапов логических рассуждений.

С другой стороны, теория множеств воплощала в себе невиданную до того в истории математики степень абстрактности новой математической дисциплины, которая по степени общности сравнялась с логикой, но в отличие от последней оперировала с бесконечными классами объектов. Хотя при этом нарушались многие привычные для математиков нормы мышления. Например, высказывание “целое больше своей части” теряло свой прежний смысл. Конец XIX века можно считать важнейшим этапом в процессе онтологизации математических сущностей. Это было время создания Георгом Кантором теоретико-множественных представлений, официальное провозглашение которых фундаментом математики содержалось в речи Жака Адамара на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе (1897). Создание теории множеств отразилось прежде всего на методологических проблемах обоснования математики. Важнейшей из них был отказ от прежних форм мышления и переход от вычислений к рассуждениям Созданная Кантором теория множеств претендовала на построение оснований всей математики. Она породила новые парадоксы в математике начала XX века. Необходимо тщательно различать математические и метаматематические предложения, чтобы не прийти к парадоксам. Самый ранний из них принадлежит Эпимениду. В качестве примера парадоксов канторовской теории множеств чаще всего приводится антиномия Рассела, возникшая внутри самой математики. В ней идет речь о том, что множество тех множеств, которые не являются собственными элементами, содержит само себя тогда и только тогда, когда оно не содержит себя.

Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличивают. Например, парадокс Рассела имеет аналогию в арифметике, если предположить, что существует самое большое целое число. “Эти парадоксы взбаламутили целое море общих мест, содержавших еще меньше мыслей”, – считает американский специалист по основаниям математики Георг Крайзель [64, с.203]. Заметим, что Рассел открыл свой знаменитый парадокс, размышляя над диагональной процедурой Кантора. Даже формулировку своего парадокса в “Принципах математики” (1903) он облек в форму, заимствованную из диагонального аргумента. Математики и логики искали спасение в аксиоматизации, а философы, в духе старого вопроса Канта о принципиальной возможности того или иного понимания, обратились к общей теории познания. Заметим, что связь математики и философии для Кантора, в отличие от многих математиков XIX века, была вполне естественной. Он даже привлекал теологическое оправдание для теории множеств и придерживался платоновских представлений в понимании науки. Заметим, что в теологии сложились две традиции, которые противоречат и вместе с тем дополняют друг друга. В одной из них утверждаются за Богом предикаты положительного существования, а в другой они отрицаются. Фактически психологией работающих математиков, отвлекающихся от “отражающего аспекта модели” и умеющих погружаться в мир разрабатываемых теорий, является платонизм. Психология человека такова, что придуманные им структуры он считает атрибутами самого мира, что является источником многих конфликтов нашего времени.

В генезисе математических структур важно понять активную роль субъекта. Рассматривая математические структуры как продукты мысли, математику можно исследовать и в контексте активности по созданию таких структур, опирающихся на глубинные структуры психики. Даже “чувственный образ множества” возник в математике благодаря нашей способности мыслить совокупность как единое целое. Математические структуры обладают той уникальной и отличительной способностью, что, будучи однажды сформулированными, они могут логически развиваться без дальнейшего обращения к действительному миру. В качестве примера можно рассмотреть формирование понятия интеграла Лебега, которое не было связано с целью изучения материальной действительности, а происходило по внутренним, чисто математическим причинам. Действительно, для инженерных и физических проблем того времени было достаточным то определение интеграла, которое было дано французским математиком Огюстеном Коши и немецким математиком Бернардом Риманом. Французский математик Анри Лебег ввел новое понятие интеграла, решая математическую задачу о наиболее общем классе функций, в котором сохраняется связь между производной и первообразной, определяемая формулой Ньютона-Лейбница. Отметим, что сам Лебег считал, что математика – это “внутренняя наука” рождающаяся и развивающаяся от “столкновения ума с умом”, а вне человечества ее вообще не существует. Затем венгерский математик Фридьеш Рисс указал на существенную роль интеграла Лебега при доказательстве полноты класса интегрируемых функций как метрического пространства. В итоге интеграл Лебега понадобился и физикам, например, при обосновании квантовой механики, а многие другие математические понятия так и не вышли за пределы математики.

Теоретико-множественная программа немецкого математика Георга Кантора основывалась на его учении о множествах и развитии идеи актуальной бесконечности. Сам Кантор подчеркивал, что к идее введения актуальной бесконечности в математику он пришел, конфликтуя с ценностными для него традициями. Канторовские теоретико-множественные построения по существу актуализировали старую философскую проблему: может ли человеческий ум мыслить бесконечное? Для формулирования суждений о мире мы “охватываем” бесконечность “гипотетическим интеллектом”. Чтобы проверить математическое суждение с бесконечной операцией, математики предполагают, что та или иная операция может быть повторена бесконечное число раз, хотя проделать этого никто не может, то есть такая процедура рассматривается в завершенном, актуально бесконечном виде. При этом мы рассуждаем о математических формализмах, например, числах, последовательностях, многообразиях, но, на первый взгляд, ничего не говорим о наблюдении или сознании в математике. Однако и за формальными математическими системами стоят определенные интуитивные принципы доказательства. Математики пытаются по возможности не предполагать существования “абсолютного мира”, который можно было бы считать основанным на “бесконечном разуме”. Например, абсолютный мир натуральных чисел не является столь уж сложным понятием, даже без включения в него понятия множества, а для бесконечного разума он вообще ясен и понятен.

В математику понятие бесконечности проникло в связи с открытием несоизмеримых величин. Даже если рассуждения древних греков о бесконечном были вполне для них удовлетворительными, они все равно пытались обойтись без них, поскольку сама идея бесконечности приводила их в сильнейшее замешательство. Затруднения, возникающие при использовании абстрактных понятий бесконечного и непрерывного того времени, противоположных понятиям конечного и дискретного, проявились в парадоксах Зенона Элейского, которые до сих пор привлекают внимание философов и математиков. Именно критический рационализм Зенона породил творческий рационализм в науке. Отношение к бесконечным множествам всегда было критерием размежевания математиков. Известные логические парадоксы и антиномии были далеки от проблем прикладной математики потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми в математике рассуждениями. По этой причине парадоксы Зенона не производили на математиков впечатления “демонстрации серьезных трудностей”, ради чего собственно они и были придуманы. Трудности такого рода можно отнести к исторической стадии развития понятия формальной системы. “Я склонен считать, – говорит американский математик Пол Коэн, – что многие из этих проблем исторически связаны с переходным периодом от классической философии к нынешней математике” [63, с.170]. Хорошей рекомендацией метода, с точки зрения математики, является множество интересных и содержательных теорем, которые можно доказать с помощью этого метода.

Поэтому традиционная реакция математиков на появление противоречия в связи с применением какого-нибудь метода состоит в анализе всех шагов, приводящих к нему. После чего все доказательства, содержащие подобные шаги, объявляются недостоверными, если их нельзя исправить с помощью новых методов. Новая математическая методология проявилась в новоевропейской науке XVII столетия при работе с формальными актуально бесконечными объектами, например, рядами и интегралами. Наиболее плодотворным для современной математики оказался подход немецкого математика Георга Кантора, согласно которому актуальная бесконечность принимается как существующая в природе и используется как инструмент математического познания. Трудами немецких математиков Карла Вейерштрасса, Рихарда Дедекинда и итальянского математика Джузеппе Пеано, а также других выдающихся математиков, к концу XIX века были определенным образом уточнены основы классического математического анализа. Большое значение для реализации этого уточнения имели работы Кантора по теории множеств, которые представлялись в то время естественным фундаментом грандиозного здания математики. Этот проект казался настолько успешным, что Анри Пуанкаре заявил даже о том, что в математике достигнута “абсолютная строгость”.

В рамках теоретико-множественной программы все без исключения математические объекты должны были определяться как множества, удовлетворяющие определенным условиям, а рассуждения об этих объектах должны были проводиться по правилам аристотелевской логики. Последняя включает в себя “закон исключенного третьего”, а значит, метод рассуждения “от противного”, и следовательно, доказываемые на его основе, принципиально неконструктивные “чистые” теоремы существования. В самом начале XX века с критикой программы Кантора выступил голландский математик Лёйтзен Брауэр, поставивший себе целью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением. Свою программу он назвал “интуиционистской”, в связи с тем, что предложил строить математику на основе интуитивно ясных и потенциально осуществимых “умственных” рассуждений, не пользуясь при этом представлением о “множестве”. Именно Брауэру неклассическая наука обязана выдающемся открытием, совершившем переворот в такой казалось бы незыблемой и устоявшейся науке, как логика. Он обнаружил, что при интуиционистском подходе к его построениям закон исключенного третьего и метод от противного утрачивают традиционно приписываемый им статус “общелогических норм”. По существу это был еще один путь в развитии математического знания, дополнительный по отношению к классическому математическому обоснованию, а в науке о способах умозаключений рядом с классической логикой стала новая, интуиционистская логика.

Каждая из этих и других программ открывала определенное направление в развитии математики. Еще до теоремы Гёделя о неполноте математики заметили, что понятия “существовать” и “построить” стали заметно различаться, то есть появились “чистые” теоремы существования, в которых нет построения объекта, чье существование доказывается. Одно время казалось, что соответствующие трудности обусловлены аксиомой выбора, и это было действительно справедливое обвинение. Однако принципиально другой подход к рассмотрению этой проблемы предложил Лёйтзен Брауэр. Критически анализируя идеи Бертрана Рассела о сведении математики к логике, он пытался доказать, что математика не только не зависит от логики, и даже, более того, логика зависит от математики. Поддерживая Анри Пуанкаре в критике абстракции актуальной бесконечности, он отмечал в то же время ее ограниченность. Нужно либо полностью отказаться от бесконечных совокупностей объектов, либо перейти к другой логике, либо признать идеальный характер математических утверждений без какого-либо содержательного смысла. После публикации диссертации Брауэра “Об основании математики” (1907) и статьи с полемическим названием “О недостоверности логических принципов” (1908) в математике и логике появилось новое направление – “интуиционизм”. Новая логика, по мнению Брауэра, интуитивно понятнее, чем классическая, поскольку описывает математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как предложения о возможности выполнить некоторое “умственное построение”.

Математическое доказательство в этом контексте состоит из соответствующего конструктивного построения с помощью эффективных методов и его обоснования. Основой интуиционистской философии математики является натурфилософия бесконечного. “Суть ее в том, – считает философ математики В. Я. Перминов, – что человек практически не имеет дела с бесконечностью, а, следовательно, и не может мыслить о бесконечности, не теряя достоверности” [112, с.131]. Поскольку адекватных понятий для выражения новых методологических идей в европейской науке в те времена еще не было выработано, например, тогда не существовало точного понятия алгоритма, то Брауэр сослался на интуицию, как “инструмент” понимания новых математических сущностей. Учитывая роль конструкций в предлагаемой модификации математики и логики, он употреблял также и другое название – конструктивная логика и математика. Затем эти термины разошлись, в частности, конструктивизмом стали характеризовать направление в математике, отдающее приоритет понятию задачи и конструкции, а не истины и обоснования. С точки зрения интуиционизма, некоторые объекты математики и математические операции ясны во всех своих свойствах. Здесь можно проследить связь с философией Канта, его теорией “чистого созерцания”, универсального и непогрешимого.

Центральная идея интуиционизма заключается в конструктивном понимании утверждений о существовании математических объектов. Для Брауэра математика была скорее “умственной деятельностью”, чем наукой, которую все-таки можно изучать научными методами. Поэтому математические построения он считал необходимым исследовать “как таковые”, не интересуясь “метафизической” природой конструируемых объектов и их независимостью от нашего знания о них. Тезис Брауэра “существовать – значит быть построенным” (разумеется, потенциально), произвел огромное впечатление на его современников. Из этого тезиса о доказательстве экзистенциального высказывания вытекают все ограничения, налагаемые интуиционизмом на допустимые методы математики. Объекты исследования в интуиционистской математике, не удовлетворяющие требованию конструктивности, например, известные бесконечные множества, взятые в качестве законченных, объявляются “несуществующими”. Основным конструктивным объектом своей математической теории интуиционисты считали понятие “свободно становящейся последовательности”. Математики полностью игнорируют “незавершенность” человеческого знания и “незавершенность” или, как говорил Брауэр, “становящийся характер” многих математических объектов.

Например, иррациональное число рассматривалось не как процесс получения все более точных приближений, а как уже существующая бесконечная десятичная дробь. Вопрос об экзистенциальных математических высказываниях, то есть о высказываниях, утверждающих существование математических объектов, представляет интерес не только в связи с проблемами, поднятыми в программе Брауэра. С такой же остротой он стоит и в физических теориях. Основная методологическая проблема состоит в понимании взаимоотношения математического мира с физическим миром. Развитие современной квантовой физики показывает, что “макроскопическая” интуиция скрывает “микроскопические” явления совсем другой природы. Философские проблемы современной математики, с учетом критики классической математики, проведенной Брауэром, концентрируются на некотором “среднем” плане практического построения и обоснования математики. Аналогичные проблемы возникают и при исследовании “мезомира”, то есть области физических явлений между классическим макромиром и квантовым микромиром, в котором не исключены “смешанные” или классически-квантовые состояния и процессы. Логика мезомира исключает многие мыслимые, но физически невозможные состояния макромира. “Именно поэтому мезомир, – писал академик Б. Б. Кадомцев, – это очень подвижный и живой мир сложно организованных коллективных явлений” [55, с.494]. Из-за разнообразия конкретных физических условий, в которых возможно сочетание классических и квантовых процессов, не существует, вообще говоря, универсального “рецепта” для описания мезомира. Подобное заключение можно сделать и по поводу всеобъемлющей аксиоматической теории множеств.

Описание мира, предлагаемое физикой, является приближенным или феноменологическим. Если для каких-то целей физики используют какую-то новую математическую структуру, то веру в ее непротиворечивость они обретают изначально из ее употребления. Но, с точки зрения математики, проблема непротиворечивости этим не решается, а только ставится. Математики постараются включить эту структуру в уже существующую систему математического знания и дать ей некую интерпретацию в терминах уже разработанных теорий, то есть провести математическое обоснование теории, результаты которого мало зависят от ее успешного применения. Кроме того, физик-теоретик И. Ю. Кобзарев и математик Ю. И. Манин обращают внимание на следующую трудность: “В математизированной теории зачастую оказывается, что переход к теории нового уровня влечет полную смену основных математических структур, используемых в описании” [61, с.85]. Так, например, по их мнению, суть специальной теории относительности не в систематическом способе вычисления малых релятивистских поправок к классическим законам движения, а в том, что она вводит группу Пуанкаре в качестве основной группы пространственно-временных симметрий физики. В то же время, описание состояний как векторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве в квантовой теории и представление измеримых наблюдаемых эрмитовыми операторами в этом пространстве, то есть использование понятий функционального анализа, вообще не имеют аналогов в предшествующей физической парадигме.

С точки зрения реалистических взглядов на математические объекты конструктивный тезис Брауэра дал новый подход к известному со времен Зенона Элейского концептуальному противоречию в математической модели пространства, предполагающей существование точек и вместе с тем бесконечную делимость пространства. Брауэр показал, что точки вводить необязательно. В частности, существование точек ставит под сомнение апория "Стрела", а бесконечную делимость пространства – апория "Ахиллес и черепаха". На самом деле "движение" Ахиллеса и черепахи выглядит достаточно наглядно в геометрических построениях. "Однако, поскольку Зенон представил эту проблему в терминах взаимнооднозначного соответствия в арифметико-алгебраическом (понятийном) языке, – замечает американский философ математики Джоанг Фанг, – описание состояния превратилось в парадокс или, по крайней мере, – в апорию" [132, с.8]. Зенон усомнился не в самом факте движения, а в возможности его непротиворечивого объяснения, не нарушающего старых аксиом, что позволило философам приблизиться к противоречивому миру бесконечного. Схожую проблему представляло собой восприятие иррационального числа корня из двух через геометрическое изображение диагонали квадрата со стороной, равной единице, и его описание на арифметико-алгебраическом языке.

Важно заметить, что в классической математике понятия "утверждения" и "отрицания" хорошо дополняют друг друга, в том смысле, что отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи есть истина, в результате чего двойное отрицание возвращало все на исходную позицию. Даже при конструктивном определении математического существования такая симметрия могла быть сохранена, если бы отрицание было бы определено как невозможность построения. Однако, по Брауэру, отрицание – это, по существу, доказательство абсурдности самого предположения о возможности существования этого объекта. Это принципиально "неклассический" подход, по отношению к классической дихотомии истинности и ложности. Его основное отличие в том, что "если утверждается существование конструкции, то предполагается, что онтологически имеется потенциально осуществимый процесс построения этой конструкции" [32, с.15]. Доказательство истинности суждения включает в себя соответствие методов доказательства предмету исследования. Например, пока теорема Ферма не была доказана, интуиционист не мог утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, поэтому пока проблема Ферма не была решена, эта дизъюнкция считалась неправомерной.

Таким образом, в интуиционистском понимании математических высказываний утрачивал свой универсальный статус логического принципа, то есть верного в любом конкретном случае, важнейший закон аристотелевской логики – закон исключенного третьего. Нуждается ли современная математика в опровержении закона исключенного третьего? В контексте интуиционистской логики эта проблема сводится к пониманию утверждения и его отрицания с точки зрения логики математического мышления и, в итоге, к философской проблеме назначения и сущности математики. Анализируя этот методологически важный вопрос можно придти к выводу, что требование содержательности не проистекает из функции математики и поэтому не может определять логику математического мышления. В защиту Брауэра заметим, что закон исключенного третьего экстраполирован на бесконечные совокупности, исходя из его понимания в конечных ситуациях, а многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств, хотя бы такое, что всякая собственная часть меньше целого. Кроме того, применение закона исключенного третьего к конечным множествам с большим числом элементов может привести к неконструктивным доказательствам существования. Кроме того, философская трактовка бесконечного для нас всегда окрашена пафосом непонятного и неизвестного, но, как говорил философ Мераб Мамардашвили, “человек есть существо, больное бесконечностью”.

Замысел Брауэра сопоставляют иногда с кантианской трактовкой геометрии, которую Иммануил Кант основывал на чистой интуиции пространства. Но это не означает, что Брауэра следует трактовать как неокантианца. Интуиционистская доктрина Брауэра ассоциируется в сознании математиков с нападками на теоретико-множественные определения и гильбертову трактовку формальных правил вывода теорем. Положительной стороной программы интуиционистов, которую не выделял даже сам Брауэр, было стремление сделать основным объектом исследований в основаниях математики не только формальные выводы, но и саму умственную деятельность по построению доказательств. Существенный элемент этой программы состоит в новом понимании логических операций как отображений доказательств в доказательства. Вопрос об оценке концепции Брауэра с философской и, прежде всего, математической точек зрения довольно сложен. Поскольку она представляет собой реформу, а не анализ классической математики, то опыта одной традиционной математики, вообще говоря, недостаточно. Тем не менее, некоторые положения интуиционизма конкретизируются теоремами Гёделя о неполноте, хотя сам Брауэр, после появления результатов Гёделя, принципиально не желал ими пользоваться для обоснования своих конструкций, так как не относил их к сущности классической математики. В определенной мере он был прав, поскольку программа Гёделя имеет отношение к достаточно богатой формализации любой математической теории.

С точки зрения сторонников интуиционистской доктрины, никакая формальная система не способна охватить все верные методы доказательства, но вторую теорему Гёделя о неполноте тоже можно интерпретировать в этом смысле, а именно, что никакая система не может “охватить” всех методов, использующих ее собственную корректность. Кроме того, хотя Лёйтзен Брауэр и не предполагал, что формальной непротиворечивости достаточно для “корректности” системы, он все же не указал на ее ограниченность, как это удалось сделать Гёделю. В главе седьмой книги четвертой “Метафизики”, в которой формулируется закон исключенного третьего, Аристотель писал: “И, по-видимому, положение Гераклита, утверждающее, что все существует и не существует, делает все истинным; напротив, учение Анаксагора приводит к тому, что есть нечто посредине между противоречащими утверждениями, так что все оказывается ложным: в самом деле, когда произошло смешение, тогда смесь это уже не будет ни – хорошее, ни – нехорошее, так что < о ней уже > ничего нельзя сказать правильно” [6, с.102]. Поэтому можно понять, почему критики концепции Брауэра возражали против ограничений, наложенных им на применяемые обычно в математической практике логические средства. Они считали интуиционистские ограничения “парализующими” математику. А. Н. Колмогоров и К. Гёдель одни из первых выявили “тривиальность” такого рода возражений, поскольку математики и логики научились строить “основную часть” математики, эффективно используя интуиционистские методы.

Тем не менее, указанным возражениям до сих пор доверяют многие математики, так как принципиальный недостаток логики Брауэра, который тоже мало известен, по мнению Гёделя, состоит в том, что получение результатов, построенных по интуиционистским формальным правилам, имеет тот же порядок сложности, что и для соответствующих “классических” систем. Можно предположить, что первоначальное впечатление о логических свойствах концепции Брауэра было почти столь же ошибочно, как и представления Рассела и Гильберта об их концепциях. Большинство математиков игнорировали новое “неклассическое” направление, поскольку Лёйтзен Брауэр подчеркивал неформализуемость интуиционистской математики, не желая явно выписывать ее аксиомы в соответствии со сложившейся практикой развития математики. Нетрудно понять, почему такие декларации вызывали раздражение Давида Гильберта, который считал, что Брауэр “выплескивает вместе с водой и ребенка”. Обратим внимание на еще одну сторону рассматриваемой проблемы. Требование интуиционистов по отношению к закону исключенного третьего может создать затруднения в задачах, связанных с конечными множествами. Даже в простейшей ситуации, когда допустим кто-то, закрыв глаза, достает из урны шар, в которой имеются три белых и три черных шара, и тут же бросает этот шар обратно при условии, что никто не видел этот шар, мы не имеем возможности узнать, какого цвета он был. Но вряд ли можно всерьез оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо черного, либо белого цвета. История развития математики подтверждает, что довольно легко впасть в заблуждение, когда к бесконечным совокупностям применяли метод, допустимый в финитной области.

Примеры подобных ошибок хорошо известны из математического анализа. Например, правильность вывода при переносе теорем, справедливых для конечных сумм и произведений, на бесконечные суммы и произведения подтверждается специальными исследованиями сходимости. Основное эмоциональное возражение Гильберта против интуиционизма выделяет характерные для классической математики методологические подходы. Запретить математику использовать принцип исключенного третьего, считал он, все равно, что, например, запретить астроному пользоваться телескопом. Гильберт настаивал на том, что нереальные, “идеальные” предложения необходимы для “полноты” математических теорий, хотя и соглашался с Брауэром в том, что немалое количество математических предложений не основано на очевидности. Складывалось впечатление, что Брауэр хотел вывести математику за пределы общей естественнонаучной концепции европейского рационализма, а с другой стороны, заодно пересмотреть в ней “правила игры”, как остроумно заметил Н. Н. Непейвода, “превратив ее из европейского бокса в нечто более похожее на восточные единоборства” [107, с.416]. После того, как программа Брауэра получила широкую известность, к ней примкнул один из самых выдающихся учеников Давида Гильберта немецкий математик Герман Вейль, серьезно огорчив тем самым своего учителя, который к тому времени остро полемизировал с Брауэром в связи с крайней настроенностью против теоретико-множественных взглядов последнего.

Герман Вейль писал: “Л. Э. Я. Брауэр своим интуиционизмом открыл нам глаза и заставил увидеть, насколько далеко общепринятая математика выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности” [17, с.506]. Вейль сожалел, что Гильберт никогда открыто не признавал, насколько он, равно как и другие математики, в долгу перед Брауэром за его открытие. Косвенным оправданием может служить то, что Гильберт увидел и наметил в общих чертах тот путь, который, без принесения “тяжелых жертв”, которых требовала точка зрения Брауэра, позволит избежать “жестоких увечий” математики. Он был уверен, что, несмотря на признаки колебаний в среде математиков, абсолютную строгость можно восстановить, не “совершая предательства” по отношению к математической науке. Отказываясь от требования Брауэра отбросить все, что не имеет смысла, Гильберт старался доказать не истинность отдельного математического предложения, а непротиворечивость системы. Однако, как будет показано в следующем параграфе, реализация этой программы Гильберта столкнулась с серьезными трудностями.

1.2. Метаматематическая программа обоснования формалистической концепции математики

Интенсивные исследования по обоснованию математики пролили новый свет и на многие методологические и философские проблемы математики. К их числу, несомненно, следует отнести в первую очередь проблемы, связанные с аксиоматическим построением математического знания. Программа Гильберта обоснования математики способствовала появлению ряда новых ценнейших результатов в области оснований математики, например, таких как знаменитые теоремы Гёделя. Проследим, как эти новые исследования дают возможность более конкретно проанализировать весь комплекс проблем, связанных с аксиоматическим методом, и в особенности таких, как условие и границы применения аксиоматического метода, сущность и значение формализации в математике. С аксиоматизацией математики непосредственно связана проблема математической истины и вместе с этим определение стандартов строгости доказательства, как одного из примеров критериев установления истинности теорий.

Проанализируем, как само понятие строгости доказательства меняется с развитием науки, испытывая значительное влияние философии. А также исследуем, как различный подход к понятию математической бесконечности в теоретико-множественной математике, с одной стороны, и в интуиционистской – с другой, предопределяет их отношение и к проблемам существования абстрактных объектов, и к законам логики, и к доказательствам математики. Программа Гильберта предназначалась для “реабилитации” математики в связи с критикой программы интуиционистов обоснования математики. Соглашаясь со своими оппонентами в том, что не все утверждения математики имеют непосредственный смысл, и даже предлагая более жесткие, чем у интуиционистов, критерии осмысленности математических высказываний, Давид Гильберт тем не менее не считал, что надо кардинально изменить некоторые устоявшиеся приемы доказательств. Например, аксиомы, положенные Эрнестом Цермело в основание своей системы, содержат некоторые содержательные предложения, принимая которые, мы переходим в область проблематичного, опирающуюся на мнения различных людей.

Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Гильберт выбрал новый путь для решения проблем обоснования. В докладе “Проблемы обоснования математики” (1928), прочитанном на Международном математическом конгрессе в Болонье, Давид Гильберт сказал: “С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо может быть названо теорией доказательства, я надеюсь с вопросами обоснования математики, как таковыми, покончить тем, что каждое математическое высказывание я превращу в конкретно предъявляемую и строго выводимую формулу и тем самым перемещу весь комплекс вопросов в область чистой математики” [25, с.450]. Программа перестройки оснований математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач. Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории на основе “очищенной” от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода.

Другая задача представляла собой радикально новое в то время предприятие – доказать непротиворечивость полученной всеобъемлющей теории. Отметим, что, как и в принципе дополнительности, только обе эти задачи совместно дают полную информацию об основаниях математики. Кроме того, каждая из задач, взятая в отдельности, недостаточна для решения проблемы обоснования математики, предложенной Гильбертом. Он первым понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Например, пересекаясь, хотя бы частично, с областью интуитивной математики, нельзя уже говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости математики. Как утверждает латвийский философ и логик К. М. Подниекс, “нельзя даже пытаться доказывать непротиворечивость интуитивной теории, поскольку утверждение о непротиворечивости относится к множеству всех теорем, доказуемых в теории, то есть к совокупности, четкого определения которой мы как раз не имеем” [115, с.34]. Гильберт предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, то есть сознательно ограничивал круг средств, которые он считал допустимыми и надежными.

Идеальные объекты необходимы для эффективности нашего мышления, поэтому возникает необходимость хотя бы в принципе обосновать их устранимость из выводов реальных утверждений, даже невзирая на увеличивающуюся сложность получающихся преобразований. Примером идеальных элементов служат мнимые величины, используемые для придания простого вида теореме о существовании и числе корней уравнения. Введением идеальных элементов, а именно – бесконечно удаленных точек и одной бесконечно удаленной прямой, можно добиться того, чтобы теорема о том, что две прямые всегда пересекаются в одной и только в одной точке, была справедлива во всех случаях. Реально устранять идеальные объекты никто и не собирался, но доказательство возможности такого устранения должно было удовлетворить и “классиков”, и “интуиционистов”, а также и представителей направлений других толков. Такие средства Гильберт назвал “финитной установкой”. Это тот круг средств, которые он считает допустимыми и надежными, хотя никогда не описывает это ограничение в четкой форме.

Вот характерный образец подобного рода рассуждений, взятый из доклада “О бесконечном” (1925), который был прочитан Давидом Гильбертом на съезде математиков, организованном Вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память Вейерштрасса: “И вообще, с финитной точки зрения экзистенциальное высказывание вида “существует число, обладающее таким-то и таким-то свойством” имеет смысл лишь частичного высказывания, то есть части более детального высказывания, которое, однако, таково, что точнее содержание его во многих случаях несущественно” [26, с.441]. Хотя Гильберт не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, он, по-видимому, надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся рассуждение или нет. К финитным высказываниям, считал он, мы должны будем присоединить идеальные высказывания для того, чтобы сохранить простую форму законов обычной аристотелевской логики. Согласно программе обоснования Гильберта математическое утверждение является осмысленным, то есть реальным, высказыванием, если оно само или его отрицание могут быть установлены каким-нибудь финитным рассуждением. Даже Брауэр заявлял, что он не возражал бы против такого обоснования классической математики, лишь бы сами математики классического направления перестали говорить о реальном смысле, стоящем за идеальными объектами и утверждениями.

Целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в обосновании с помощью чисто математических средств. В действительности ее цель была скромнее, чем принято было считать, из-за неявного предположения о том, что “реальны” лишь те задачи в основаниях, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. При этом, чтобы соответствовать своей философской установке, нельзя сужать класс финитных рассуждений, требуя от последних не только самоочевидности, но и других дополнительных свойств. С точки зрения философии математики Гильберта, важно понимание финитного рассуждения как любого совершенно несомненного рассуждения. Однако работы Герхарда Генцена показали, что расширяя финитизм некоторыми, принимаемыми математиками, принципами можно показать непротиворечивость арифметики и анализа, обоснование которых на базе финитизма оказалось не выполнимым. Тем не менее, Давид Гильберт уловил самую суть проблемы, положив в основу своих попыток построения “абсолютных” доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием.

Он поставил общую методологическую задачу развития специального метода, позволяющего проводить доказательства непротиворечивости с той же степенью убедительности, что и доказательства, использующие конечное число структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Суть подхода Гильберта состояла в том, что классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. С этой точки зрения позиция Гильберта – это наиболее известная разновидность формализма хотя, в отличие от мнения большинства, это не единственный его вид. Согласно его философии непротиворечивости и полноты системы условие непротиворечивости математической теории поддается не только философской, но и арифметической трактовке. Давид Гильберт надеялся, что доказательство полноты и непротиворечивости удастся найти с помощью финитных методов рассуждения, признаваемых большинством математиков. Именно эта математическая цель – доказательство правильности всех математических методов путем использования лишь нескольких из них – занимала умы многих великих математиков в первое тридцатилетие XX столетия. И только в начале прошлого века, точнее в 1931 году, Курт Гёдель опубликовал свою знаменитую работу, подорвавшую методологические основы гильбертовой программы.

Теоремы Гёделя о неполноте способствовали распространению мнения о том, что аксиоматический метод недостаточен для реконструкции содержательного математического мышления. Даже первой теоремы Гёделя о неполноте достаточно для того, чтобы исключить "окончательное решение" в подходе Гильберта. Для окончательности оно должно было бы предъявить метод, разрешающий любую финитистскую задачу, но это, например, как показал молодой русский математик, будущий академик, Ю. В. Матиясевич не относится, вообще говоря, к диофантовым уравнениям. Отношение второй теоремы Гёделя о неполноте к программе Гильберта с методологической точки зрения более сложное. Во-первых, в реальной математической практике для любых формальных аксиом, действительно используемых математиками, всегда имеется некоторая убедительная абстрактная интерпретация, обеспечивающая их непротиворечивость. Во-вторых, вторая теорема Гёделя о неполноте опровергает широко распространенное в начале XX столетия убеждение, сформулированное Гильбертом, которое в каком-то смысле дополнительно к гипотезе об окончательном решении, а именно то, что теоретико-множественные и другие абстрактные понятия – это лишь способы выражения, а потому соответствующие трудности могут быть непосредственно устранены.

Пока математики не умели еще эффективно использовать теоретико-множественные методы, убеждение Гильберта согласовывалось с имеющимся "эмпирическим опытом", но это никак нельзя было признать за обоснование для формальных систем, пытающихся доказать свою собственную непротиворечивость. Вторая теорема Гёделя о неполноте указывает соответствующий класс контпримеров. Математикам хорошо известен такой парадокс: если даже элиминировать, то есть каким-то образом устранить или удалить абстрактные понятия из доказательств, то обнаруживается "философский дефект" такой процедуры, а именно, теряются дополнительные знания, содержащиеся в исходных предложениях. С точки зрения математической практики, если система непротиворечива, но не полна, то существует несоответствие между символами системы и их интерпретациями, а возможно, система недостаточно мощна, чтобы оправдать данную интерпретацию. Говоря о программе Гильберта, следует иметь в виду, что она осмысленна только в ситуациях, когда его программа может быть проведена. Поэтому, используя терминологию Гильберта, математики и философы должны "верить" в его программу. Для работающих математиков Давид Гильберт логичен, последователен и ясен, а аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил мышления.

После того как выяснилось, что значительная часть математики может быть выражена на языке аксиом Цермело-Френкеля с добавлением аксиомы выбора, появилась вера в “теоретико-множественный платонизм”, то есть в существование мира реальных множеств. Вот что пишет по этому поводу один из создателей теории категорий Сандерс Мак-Лейн: “Мое мнение, однако, состоит в том, что идея реального мира множеств – это миф, хоть и удобный, но все же миф” [66, с.151]. Математикам хотелось бы считать, что математические понятия описывают некоторую реальность, придавая тем самым дедуктивным заключениям большую убедительность. Отдельные примеры множеств, например, канторово множество, его плоский аналог – ковер Серпинского, их пространственный аналог – универсальная кривая Менгера и тому подобные хитроумные математические объекты, далеки от воображаемой реальности мира множеств Цермело-Френкеля. Даже математическая эффективность теоретико-множественного формализма не является аргументом в пользу существования платоновского мира. Возвращаясь к проблеме гильбертова идеала чистоты метода, заметим, что если не ограничивать себя полными системами, то гёделевские результаты теряют всю свою философско-методологическую остроту.

Во времена Сократа говорили, что действительность состоит из сущностей, а не из явлений, и то, что вещь есть в действительности, высказано в определении. Поэтому, зная определение, мы тем самым, познаем сущность вещей. “Сущности бессмертны”, – считал Лейбниц, поскольку они касаются только возможностей. С сущностью математики, как и любой другой развитой науки, непосредственно связан вопрос об истинности математических утверждений. Как правило, профессиональные математики основывают идею истинности на строгом доказательстве в рамках той формальной системы, в которую входит рассматриваемое высказывание. Не всегда это удается сделать с первой, казалось бы, вполне убедительной, попытки. Например, долгое время считалось, что в мемуаре французского математика Энри Дюлака “О предельных циклах” (1923) получено доказательство конечности числа предельных циклов для уравнений, рассмотренных Давидом Гильбертом во второй части его 16-й проблемы. Только в начале 80-х годов специалист по дифференциальным уравнениям Ю. С. Ильяшенко обнаружил ошибку в доказательстве Дюлака. Так его обзор по этой теме , после формулировки проблемы конечности, начинается словами: “Эта проблема конечности не решена до сих пор” [54, с.41]. Позднее он получил доказательство этой теоремы конечности, хотя вопрос об оценке сверху числа предельных циклов и их расположения остается открытым.

Говоря об опасности, к которой приближает человечество технологическая цивилизация, и о той роли, которую играет в этом “строгая” наука с идеологией “духа математизации”, академик И. Р. Шафаревич указывает на ту сторону математики, которая “глубоко связана с эстетическим чувством” и способна служить в некотором смысле естественным противоядием тенденции абсолютизации “алгоритмического машинообразного мышления” [137, с.78]. Даже французский математик Анри Пуанкаре в работе “Математическое творчество” говорил о том, что математическое рассуждение имеет “род творческой силы” и тем отличается от цепи силлогизмов. Пуанкаре в отличие от Гильберта не верил в формализацию всей математики. Эта проблема была предметом интересной дискуссии в начале XX века между Гильбертом и Пуанкаре. И только после теоремы Гёделя о неполноте стало ясно, что, по-видимому, в этом споре позиция Пуанкаре выглядит достаточно убедительно. Анри Пуанкаре, способствовавший появлению новых взглядов в обосновании математики, был одним из наиболее крупных математиков периода безраздельного господства классической математики. Его подход к философским проблемам науки и методологии научного познания, опирающийся на его опыт построения одной из евклидовых моделей для неевклидовой геометрии, можно считать реакцией на математический платонизм.

Философская научная доктрина Пуанкаре получила название “конвенционализма”. Основные положения и принципы научной теории, с точки зрения этого направления, не являются ни априорными синтетическими истинами, как например, у Канта, ни моделями и отражениями объективной реальности, а суть соглашения, единственным необходимым условием которых является непротиворечивость. Свобода выбора соответствующих теорий ограничена, с одной стороны, практикой их применения, а с другой стороны, потребностью нашей мысли к максимальной простоте и эффективности теории. Заметим что, размышляя о самой себе, математика размышляет и о возможностях человеческого ума. Соглашаясь с философами в том, что, выигрывая в строгости, математика может потерять в объективности, Анри Пуанкаре в работе “Ценность науки” развил это общее утверждение следующим образом: “Сделавшись строгой, математическая наука получает искусственный характер, который поражает всех; она забывает свое историческое происхождение; видно, как вопросы могут разрешаться, но уже не видно больше, как и почему они ставятся” [116, с.213]. Если бы математика была лишь собранием силлогизмов, она была бы доступна всем – для этого нужна лишь хорошая память, а большинству людей математика дается с трудом.

Поэтому “наука доказывать не есть еще вся наука”, считал Пуанкаре, и интуиция должна дополнять логику, как ее “противовес и противоядие”. Традиционные ассоциации во многом исходят из противопоставления логики и интуиции, но с развитием первой для этого остается все меньше оснований. Математические структуры обладают определенной внутренней красотой, поэтому чтобы понимать математику, надо научиться видеть эту красоту, а это требует незаурядных эстетических способностей. Отметим также, что сами эстетические суждения тоже имеют двойственную функцию: в качестве посредников между пониманием и разумом и в качестве уравновешивающей силы между кантовскими антиномиями разума. Уместно отметить, что одной из причин стремления к строгости была преподавательская деятельность математиков XIX века. При исправлении ошибок математики надеются, что соответствующие изменения уже сами по себе приведут их к нужным для систематической науки концепциям. Эта надежда неявно опирается на “логический приоритет истинности”, который является сущностью любой систематической теории доказательств. Один из наиболее устойчивых “мифов” математического образования состоит в том, что преподавание математических дисциплин в рамках теоретико-множественной концепции – это наиболее простой и естественный процесс, с точки зрения интуиции и традиций априорного характера геометрических истин.

С другой стороны, трудно избавиться и от определенных “педагогических натяжек” не только с точки зрения приблизительных определений и адаптированных доказательств, но и некоторого “воинствующего догматизма” аксиоматического изложения теорий. Современная образовательная система делает слишком большой упор на том, что известно, и слишком мало внимания уделяется тому, что еще неизвестно и, возможно, вообще не может быть познано. Развитию методологии мышления способствует понимание содержательных аспектов категорий дополнительности. Анализировавшие этот вопрос специалисты по методологии физики О.Н. Голубева и А.Н. Суханов пришли к выводу, что “методологические категории целостности и дополнительности оказываются чрезвычайно значимыми факторами в процессе построения новых образовательных систем” [27, с.7]. Задачей преподавания математических дисциплин, наряду с приобретением соответствующих практических навыков, является введение в мир фундаментальных идей математики, иногда скрытых за научными формулировками. Базовой дисциплиной в математическом цикле большинства университетов мира, с помощью которой можно проследить основные идеи развития математики, является математический анализ.

Немецкий математик XIX века Карл Вейерштрасс впервые с достаточной строгостью заложил основы математического анализа. После прояснения ситуации с определением основных понятий математического анализа, таких как сходимость, предел последовательности, непрерывность и так далее, выяснилось, что некоторые из понятий, реконструированных в терминах “эпсилон-дельта”, обладают неожиданными свойствами, которых не было у их интуитивных прообразов. Желание подвести под математику прочный фундамент было всеобщим увлечением выдающихся математиков. Например, для использования числовых рядов необходимо было корректно определить понятие сходящейся числовой последовательности, а затем найти условия сходимости ряда. Именно с помощью функционального ряда был построен знаменитый пример Вейерштрасса – непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доставивший немало огорчений многим математикам, не допускавшим такой возможности. Хотя вначале, сумме сходящегося функционального ряда отказывали даже в праве называться функцией. Точно неизвестно, когда Карлу Вейерштрассу удалось построить свой знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке. Этот и похожие примеры впервые показали, что понятие непрерывности намного шире, чем дифференцируемости и, таким образом, непрерывность предстала как вполне самостоятельный объект исследований.

Конструкция Вейерштрасса стала возможной потому, что при построении анализа в силу необходимости за основу было взято локальное определение непрерывности в точке, пренебрегая при этом интегральными свойствами. Непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции, применяются в теории случайных процессов типа броуновского движения. Теперь это вполне "добропорядочные" математические объекты, хотя вначале у Анри Пуанкаре эти функции вызывали отвращение, что он даже называл их "язвой". Для XX века характерен новый подход к понятию функции, рассматриваемой, например, как элемент гильбертова пространства и, следовательно, являющейся лишь представителем некоторого класса эквивалентных функций. Отметим также устойчивый интерес Вейерштрасса к теории множеств Кантора, с помощью которой было доказано, что "большинство" непрерывных функций нигде не дифференцируемы, но от этого не стало легче приводить примеры таких функций. Современное развитие математики изобилует примерами абстрактных обобщений, вдающихся в несущественные детали, хотя для большинства приложений математики лучше подходят относительно "грубые" классификации и эквивалентности. Зная, что проблема классификации конечномерных многообразий очень трудна, а в действительности неразрешима, какой смысл решать подобную проблему для бесконечномерных многообразий?

Даже современная теория дифференциальных уравнений в частных производных с ее последовательными "дуализациями" и с построением вспомогательных функциональных пространств порой выглядит уходящей в "мир платоновских призраков". Философско-методологическая точка зрения на направление развития функционального анализа, высказанная одним из лидеров современной математики Рене Томом, состоит в том, что его основная цель – помогать решать конечномерные задачи дифференциальной и топологической природы, а сам функциональный анализ должен быть дополнен таким образом, чтобы рассматриваемые в нем функциональные пространства несли "следы своего происхождения". Доказуемость, бесспорно, важный критерий истинности, даже если она основывается только на логической выводимости утверждений и теорем из аксиом, истинность которых в рамках формальной системы не рассматривается. Однако наряду с критерием доказуемости используются также критерий интуитивной очевидности, критерий непротиворечивости и критерий полезности математической модели. Критерий интуитивности занимает видное место в философии интуиционистов или реалистов. Речь идет о некоторой внутренней естественной уверенности, гарантирующей “существование” исследуемых математических объектов.

“Если бы математики были лучше знакомы с взглядами таких мыслителей, как Декарт, Паскаль и Кант, – заметил американский историк и философ математики Морис Клайн, – то интуиционистское направление в основаниях математики, считавшееся, по крайней мере в первые годы после его возникновения, весьма радикальным, шокировало бы их гораздо меньше” [60, с.400]. Практически работающие математики, даже склонные к философскому анализу методов исследования, вряд ли будут прилагать много усилий для разрешения проблемы существования в математике. Прагматичное объяснение в конечном счете сводится к тому, что существование самой математики не зависит от решения этой и подобной ей проблем. С точки зрения прикладной математики, слабость теоретико-множественной математики по отношению к приложениям состоит в том, что этой теорией можно пользоваться лишь тогда, когда прикладная задача переведена на соответствующий математический язык. Но даже после этого возникают проблемы чисто экзистенциального характера, поскольку во многих теоремах существования ничего не говорится о том, как такое решение может быть точно или приближенно найдено. Поэтому математики различают два дополнительных взгляда на существование математических объектов. В частности, в прикладной математике он идентифицируем и конструируем, то есть существует как математическая модель реального объекта.

И формалисты и интуиционисты теряют интерес к проблеме, как только она оказывается теоретически разрешимой, но с точки зрения прикладных математиков задача не решена, пока еще нужны дополнительные соображения для получения требуемого знака. “Практическая реализуемость” – это важнейшее понятие, достойное философских рассуждений. С точки зрения феноменологического подхода, в духе единства идеального предмета и смысла, математикам, чтобы избежать путаницы пока еще не унифицированных понятий, подобно тому, как это делают физики, следует использовать оба различных смысла. В действительности, даже “понятие существования, на которое безраздельно опирается наивная теория множеств, на самом деле не является само собой разумеющимся” [12, с.27]. Проблема расширения границ практических возможностей обусловлена существующим барьером между тем, что можно сделать в принципе и тем, что можно реализовать на практике. Возросшая абстрактность современной математики породила и более серьезную проблему о внутренне непротиворечивой системе аксиом, в которой нельзя вывести противоречащие друг другу утверждения. Если речь идет об аксиомах, описывающих хорошо известную область математических объектов, то эта проблема не представляется столь уж актуальной. Возможно, с этим связаны попытки объяснить математическое существование через непротиворечивость, то есть считать, что в математике реально все, что не является невозможным.

Заметим, что конструктивизм не признает ряд важных математических объектов и тоже ставит задачу объяснения существования конструкции. Существование конструктивного объекта, например, в рамках концепции, предложенной советским математиком и логиком А. А. Марковым, предлагалось понимать как потенциальную осуществимость. Если отвлечься от философских метафор, типа платоновского мира идей, то, рассуждая о попытках отождествления существования с непротиворечивостью, можно воспользоваться и такой физической аналогией: хотя фактическое не является невозможным, тем не менее, возможное существует не всегда. “Проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств – это своего рода “любимая мозоль” специалистов по данному вопросу. Ее пытаются решить, но “добровольно” признаваться в том, что она пока еще не решена, у них как-то не принято”, – пишет в предисловии “Размышления и воспоминания” математик и философ Н. М. Нагорный [68, с.XVI]. Иногда вместо верной импликации в качестве верного утверждения преподносится ее заключение, что приводит к курьезным утверждениям о ее “решении” в положительном смысле. Например, иногда утверждают, что аксиома выбора не может быть ни доказана, ни опровергнута в теории Цермело-Френкеля, забывая добавить, что этот “факт” верен лишь при предположении непротиворечивости данной теории, поскольку в случае противоречивости теории в ней было бы доказуемо любое утверждение, в том числе и аксиома выбора.

Критерий непротиворечивости, несмотря на его существенную роль в аксиоматических системах, как формального, так и содержательного характера, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и доказуемость. История математики знает немало случаев, когда противоречивые понятия и теории были весьма полезными для развития науки, например, дельта-функция и лейбницев анализ бесконечно малых, которые впоследствии на новом теоретическом фундаменте были строго обоснованы в рамках современных теорий обобщенных функций и нестандартного анализа. С точки зрения физика, дельта-функция Дирака представляет собой точечную единичную массу бесконечной плотности. Для математика такое представление – это абстрагированный вариант из категорий “внутренней” семантики физической теории. Однако, осознав внешний аспект дельта-функции как функционала на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций, французский математик Лоран Шварц включил ее в формализм функционального анализа, а как частный теоретико-множественный объект – в общематематические теории.

В классическом анализе обобщенные функции, рассматриваемые как “расширение” классического понятия функции, позволили в соответствующей математической форме выразить такие идеализированные понятия, как, например, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке и так далее. Теория Шварца имела много предшественников и сравнима в этом отношении и по своей значимости с дифференциальным исчислением Ньютона-Лейбница. Хотя выдающиеся математики Европы середины XVII века умели решать многие задачи, в которых теперь используется дифференциальное и интегральное исчисления, никому из них не удавалось создать формализм, избавляющий от частных рассуждений в отдельных случаях. В математическом формализме понятия обобщенной функции отражен реальный факт невозможности определения плотности вещества в точке, поэтому, условно говоря, обобщенная функция определяется своими “средними значениями” в окрестностях каждой точки. Физики, исходя из интуитивных соображений, часто определяют и используют произведение двух обобщенных функций. Как показывает на примере специалист по дифференциальным уравнениям с частными производными Ю. В. Егоров “иногда это приводит к неверному результату” [35, с.4]. Поэтому в последние годы в работах французского математика Жана Коломбо и ряда его последователей развивается новая теория обобщенных функций, в которой определено их произведение и даже можно вычислить значения других нелинейных функций от них.

Новое пространство обобщенных функций содержит обобщенные функции пространства Шварца, но в отличие от последнего, в нем имеет смысл, например, формальное выражение для квадрата дельта-функции или куба дельта-функции. Построение обобщенных функций пространства Коломбо основывается на довольно естественной конструкции, в каком-то отношении более простой, чем теория распределений Шварца. Лоран Шварц высказывался также в том духе, что до Гильберта вообще не было строгой математики, хотя для большинства математиков евклидова геометрия является исторически первым образцом строгости. Однако методологический парадокс состоит в том, что практический путь формирования понятия обобщенного решения, а затем и понятий обобщенных функций противоречит методологической установке Гильберта, согласно которой предметом математики является только непротиворечивая система. Характерной особенностью метаматематики является то, что философская рефлексия рассматривается в ней исключительно в математической перспективе. С этой точки зрения метаматематика – это реконструкция математического мышления в рамках только математического мышления.

Давид Гильберт противостоял попыткам ограничения математики устоявшимися методами, выступая в защиту свободы творчества в математике. Он критиковал интуиционистов за то, что, пытаясь “спасти математику” и выбрасывая за борт все, что причиняло им беспокойство, они могли потерять большую часть наших “самых ценных сокровищ”. В зените своей славы, Давид Гильберт представил собранию Швейцарского математического общества в Цюрихе программный доклад “Аксиоматическое мышление” (1917), в котором он развил свое понимание аксиоматического метода, как общего метода исследования, занимающего важнейшее место во всей современной математике. “Чтобы восстановить репутацию математики как эталона строгой науки, – говорил Гильберт, – недостаточно просто избавляться от имеющихся противоречий: принципиальное требование аксиоматической теории должно простираться дальше, а именно надо знать, что внутри данной области знания, построенной на основе принятой системы аксиом, никакие противоречия вообще невозможны” [25, с.414]. Сущность аксиоматического метода состоит в том, что все объекты исследования, достигшие уровня зрелости, достаточного для оформления в теорию, прибегают к аксиоматическому методу, а через него, хотя и косвенно, к математике.

Какую пользу может принести аксиоматизация? Во-первых, подправить интуицию, исправить неточности, двусмысленности и парадоксы, неконтролируемые бессознательными процессами мышления. Во-вторых, она позволяет исследовать отношения между основными положениями и принципами теории, с точки зрения их зависимости или независимости, а также анализировать связь этих положений с доказанными утверждениями теории в контексте необходимости ее аксиом. В-третьих, аксиоматизация позволяет иногда установить недостаточность формальной теории для некоторых естественно возникающих в ней проблем. Философская составляющая формалистских концепций математики связана с абсолютизацией ее внешнего аспекта, в котором содержание отождествляется с формой. Можно привести различные аргументы в оправдание такого подхода. Например, один из создателей квантовой теории английский физик Поль Дирак, размышляя о причинах фундаментальной особенности природы, согласно которой, основные физические законы описываются математической теорией, в статье “Эволюция физической картины природы” (1963) писал: “Ситуацию, вероятно, можно было бы описать, сказав, что Бог является математиком очень высокого ранга и что он при построении Вселенной использовал математику высшего уровня” [18, с.128]. Пониманию сущности программы математики Гильберта мы обязаны, прежде всего, трудностям теории множеств Кантора.

Радикальный план “спасения” теории множеств, выдвинутый Гильбертом, состоял в предложении аксиоматизировать эту теорию с помощью разработанной им теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость построенной системы аксиом. В таким образом формализованной теории парадоксы были бы невозможны, но и не было бы соответствия этой теории, пусть и противоречивому, но первоначальному замыслу “наивной ” теории множеств Кантора. Это труднейшая задача, поставленная Гильбертом, не решена и по сей день. Согласно первой теореме Гёделя никакое исчисление такого рода, определяемое конечным числом аксиом, недостаточно для того, чтобы включить в себя все истинные утверждения арифметики и теории множеств. Известный математик академик В. И. Арнольд назвал формализованный аксиоматический метод, являющийся развитием программы Гильберта, "самоубийственным демократическим принципом". Однако следует отметить, что методологические следствия теорем Гёделя зависят от различных толкований понятий "финитный", "конструктивный", "содержательный" в программе формализма. С точки зрения интуиционизма даже при аксиоматическом изложении теории проникновение в суть непротиворечивости достигается с помощью интуитивных рассуждений, основанных на очевидности.

Даже сам Гильберт, по мнению Германа Вейля, был "строгим формалистом" в математике и, в тоже время, "строгим интуиционистом" в метаматематике. После того, как в "Основаниях геометрии" (1899) Гильберт доказал совместимость выделенных им аксиом, для которых противоречия в дедуктивных выводах сказывались бы и на системе действительных чисел, а вопрос непротиворечивости аксиоматики последней, с помощью понятий теории множеств, был сведен к такому же вопросу для целых чисел, возникла определенная эйфория от того, что удалось наконец поставить математику на аксиоматический фундамент. Начиная с аналитической геометрии Декарта, математики уверены в том, что для большинства их конструкций необходимо поле вещественных чисел. В частности, любое противоречие в евклидовой геометрии должно проявиться как противоречие в аксиомах арифметики, на которых основаны операции с действительными числами. Герман Вейль считал, что до Давида Гильберта никто "так ясно этой мысли не высказал". Вопросы, касающиеся арифметической сущности математики и проблем обоснования с помощью аксиоматизации, были в центре внимания философов математики XX века. Большинство работающих математиков понимают под словом "аксиоматизация" вовсе не пересмотр основ математики, которые, вообще говоря, не имеют непосредственного отношения к их научным интересам в области математики и поэтому не очень их волнуют.

Тем не менее, вопросы непротиворечивости теории множеств входят в обширную область трудных проблем теории познания, связанных с математикой. Характеризуя эту область, Гильберт упомянул о следующих пяти важнейших проблемах философии математики: принципиальной разрешимости каждого математического вопроса, дополнительной проверке результатов математического исследования, критериев простоты математических доказательств, соотношении содержательного и формального в математике и логике, разрешимости математических задач с помощью конечного числа операций. Именно последнее требование, ограничивающее математические рассуждения финитными средствами, оказалось чрезмерно сильным и наиболее часто обсуждаемым философами, поскольку оно затрагивает сущность математического мышления. Хотя теоремы Гёделя запрещают полное доказательство непротиворечивости арифметики на основе финитных соображений, они, тем не менее, не закрывают других путей внутреннего обоснования непротиворечивости математики, что, безусловно, укрепляет веру математиков в непротиворечивость арифметики в целом. Исторически теория доказательств Гильберта создавалась как средство преодоления трудностей, обнаружившихся в теоретико-множественной программе Кантора. Когда казалось, что бесконечное “в своем отважном полете” достигло “головокружительной высоты”, по мнению Гильберта, произошло нечто совершенно аналогичное тому, что уже случалось в математике при развитии теории исчисления бесконечно малых. Увлекшись обилием новых результатов, математики ослабили критическое отношение к допустимым логическим средствам, что и привело к так называемым парадоксам теории множеств.

Сложившееся в то время положение в математике Давид Гильберт эмоционально охарактеризовал так: “Подумайте: в математике, – этом образце надежности и истинности, – понятия и умозаключения, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?” [26, с.438]. Кроме того, Брауэр, подвергший критике не только антиномии, но и всю теорию множеств в целом, предложил возводить математику на базе умственных математических построений, показав, что для их рассмотрений требуется применять особую интуиционистскую логику, в которой ни закон исключенного третьего, ни закон снятия двойного отрицания не могут претендовать на роль универсальных логических принципов. Поэтому теории доказательств Гильберта отводилась еще и роль противовеса этой программе обоснования. Заметим, что в этой дискуссии отражена специфика математики и, в частности, различный статус математических и физических теорий по отношению к опыту. Исходя из внутренних потребностей математики, в ней допустимы такие свободные гипотезы, как неевклидовы геометрии, неархимедовы метрические пространства или нестандартный анализ, а в физике не строят, к примеру, немаксвелловскую теорию электричества, как возможную для других миров.

Задача установления непротиворечивости классической формальной арифметики была впервые решена учеником Гильберта немецким математиком Герхардом Генценом только в 1936 году, причем средствами, не укладывающимися в финитную установку Гильберта. Он использовал аксиому трансфинитной индукции, в которой, в отличие от обычной индукции, использующейся в математике, рассуждения ведутся не по натуральным числам, а по ординальным числам, обозначающим бесконечные совокупности чисел. Вейль назвал доказательство Генцена “пирровой победой” из-за того, что ему удалось это сделать, “лишь значительно снизив требования Гильберта к очевидности”. К настоящему времени известны и другие доказательства непротиворечивости арифметики, но совместимость этих доказательств с финитной установкой Гильберта и степень их конструктивности анализируются далеко не всегда, а отдельные математики демонстративно считают этот вопрос “проблемой субъективной природы”. При этом нельзя забывать и о второй теореме Гёделя о неполноте, согласно которой утверждение о непротиворечивости арифметики, формально выраженное в языке самой арифметики, не охватывается аксиомами арифметики в том смысле, что ни само это утверждение, ни его отрицание недоказуемы в формализме арифметики, если не использовать каких-то допущений, выходящих за ее пределы. Если к этому добавить первую теорему о неполноте, то можно сказать, что Гёделем была фактически доказана не только невозможность полной непротиворечивой ее аксиоматизации, но и, в определенном точном смысле слова, невозможность средствами, формализуемыми в ней самой, доказать ее непротиворечивость.

Сам Гильберт, накануне публикации результата Генцена, считал, что результаты Гёделя на самом деле показывают, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована “некоторым более сильным образом”, чем при рассмотрении элементарных формализмов. Что же касается проблемы установления непротиворечивости анализа, решение которой прояснило бы судьбу теории доказательств, то она не решена до сих пор, как и проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Специфика математики в отношении ее непротиворечивости проявляется в ее согласованности со структурами, обладающими, по мнению математиков, высокой степенью непротиворечивости с арифметикой и логикой. Поэтому, можно сказать, что одной из главных целей программы Гильберта было доказательство автономии этой элементарной математики. Во избежание некоторых недоразумений следует помнить, что бывают “самые настоящие” доказательства непротиворечивости в том смысле, что используемые математические методы явно более элементарны, чем те интерпретации, которые привели к изучаемым формальным системам. После результатов Курта Гёделя о невозможности полной формализации всей существующей математики и даже невозможности доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами развеялась надежда на принципиальную реализуемость программы Гильберта в полном объеме.

Хотя, когда была построена система аксиом для целых чисел, многие математики были вполне удовлетворены тем, что “число стало миром в себе” и на его основе можно оперировать, не оглядываясь на реальность, в которой даже не встречаются сверхбольшие числа. Обращение к нефинитным методам, с частичным отказом от ограничений Гильберта, все же позволяет доказать непротиворечивость формализованной теории целых чисел. Тем не менее, несмотря на отрицательные результаты Гёделя, принципы оснований математики Гильберта по-прежнему важны и интересны для современной математики. Рене Декарт мечтал о том, чтобы история математики, разбросанная по многим томам и “в целом еще не завершенная”, была бы вся собрана в одной книге, поскольку авторы многое заимствуют друг у друга. Реализовать этот грандиозный проект уже в XX веке не смогла даже группа Бурбаки. Можно даже сказать так, что Декарт – это историческая предтеча Бурбаки. Хотя лидеры Бурбаки были универсальными математиками, практически они были ближе к алгебраическим методам. Интегральное и дифференциальное исчисление они рассматривали как раздел функционального анализа, хотя в то время уже началась геометризация анализа на основе современной дифференциальной геометрии и топологии. “Они не увидели (или не захотели увидеть и отразить в своем трактате) начавшееся в семидесятые годы (на той же основе) слияние теоретической физики и математики, в частности вокруг квантовой механики” [123, с.11]. Поэтому, хотя, в определенной мере, группе Бурбаки удалось реализовать свой начальный замысел описания всей математики на единой основе в первых пяти томах “Фундаментальных структур”, их дальнейшие публикации уже не смогли охватить все новые направления современной математики.

В математике, взявшей за образец греческий способ конструирования науки, проблема смысла решается унифицировано, с помощью систем аксиом и их теоретико-множественных моделей. Сто лет назад математики и философы осознали, какие бездны проблем открываются перед ними в связи с теорией бесконечности Кантора. Главный шаг при размышлении о некоторой проблеме – это выбор идеи, которая сработает. Давид Гильберт, используя формализацию языка, предложил эффективный метод развития математики. Ранний период его теории доказательств был вполне удовлетворительным, и результаты начала прошлого века остаются самыми интересными в математике. К ним можно отнести: математическое уточнение Гильбертом широко распространенного аксиоматического метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и исследование вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами; установление с помощью адекватной формализации того, что убеждение относительно роли формальных правил в математике верно для многих областей математической практики того времени; опровержение теоремами Гёделя о неполноте оптимистических надежд Гильберта на полное решение вопросов обоснования математики на указанном им пути.

Теория доказательств с самого начала возникла на стыке двух конфликтующих концепций – интуиционизма и формализма, каждая из которых пользовалась своей логикой, в связи с их подходом к проблеме выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях. Вот что пишет по этому поводу Н. М. Нагорный: “В самом деле, высказывание, оказавшееся истинным в рамках одной логики, вполне могло оказаться ложным в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, истинное в рамках обеих логических систем, в действительности доказывается в них по-разному, так что доказательство, приемлемое в рамках одной из этих систем, будет отвергаться в рамках другой, и наоборот” [104, с.107]. Ограничительные результаты Курта Гёделя показали, как хрупка грань между осмысленным и неосмысленным, между правильным и неправильным в математике. Поэтому при анализе столь сложного вопроса, как непротиворечивость формальной математической теории, следует учитывать все, возникающие в связи с этим, дополнительные проблемы, в том числе и соотношение формализуемой теории с ее формализацией. Однако дальнейшее развитие теории доказательств не вызвало интереса ни среди математиков, ни среди основной массы логиков, даже несмотря на существующую генценовскую теорию доказательств. Одна из причин осторожного отношения к таким работам связана с тем, что цели гильбертовской теории доказательств исходят из опровергнутых представлений о математике.

Если математическая теория не формализована, она все же ограничивает средства, допустимые для решения своих проблем, хотя математические структуры имеют определенную произвольность. Возможно, что ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему “достоверных” положений обоснования, не учитывая их дополнительный характер взаимодействия. То есть в них не выдерживался принцип “логического консенсуса”, одинаково приемлемый и для формалиста, и для интуициониста. Один из высших уровней рефлексии традиционно называется метафизическим, но метафизика, в первую очередь, концентрирует наше внимание на абстрактной системе отношений, присутствующей во всяком формализованном знании. Научное исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, так же как недостижима полная теория познания других явлений. Поэтому оценку систем обоснования математики целесообразнее проводить по критерию полезности, а не по произвольному истолкованию на основе метафизических предпочтений. Определение “истины” в математике, вообще говоря, не должно зависеть ни от каких метафизических допущений. Если математик и вынужден принять такое допущение, то он скорее предпочтет формальные теории, пусть и ориентированные на платонизм, но зато находящиеся в большем согласии с привычной математической практикой.

В формализациях математики, ориентированных на интуиционизм, подобно тому, как это происходит в современных физических теориях, важен действительный смысл произведенных операций. Вообще говоря, формализм допускает сосуществование различных видов математики. Академик А.Н. Колмогоров в своей статье “О принципе tertium non datur” (1925) установил, что для широкого класса математических рассуждений закон исключенного третьего не может быть источником парадоксов, так как парадоксы, содержащиеся в теории, воспроизводились бы и в аналоге такой теории, не использующей этот закон. Затем в начале тридцатых годов Аренд

Гейтинг предложил формализацию арифметики, которая согласуется с интуиционизмом. Интуиционистскую математику нужно изучать как часть математики, считал он. Гейтинг обосновывал эту точку зрения тем, что крайний финитизм дает максимальные гарантии против опасности непонимания, но, с другой стороны, он влечет за собою такое отрицание понимания, которое трудно принять многим математикам. Несколько позже Курт Гёдель выяснил, что, аналогично полученному Колмогоровым результату, все противоречия классической арифметики, если такие существуют, воспроизводятся и в интуиционистской арифметике.

Таким образом, если считать интуиционистскую арифметику финитно обоснованной по построению, то, с одной стороны, Гёдель вслед за Гейтингом показал что классическую арифметику можно интерпретировать в интуиционистской арифметике, а с другой стороны, он осуществил финитное доказательство, которое “запрещено” теоремами о неполноте. Вот что, в связи с этим, пишет специалист по конструктивной логике Хаскелл Карри: “Таким образом, непротиворечивость классической арифметики удается доказать интуиционистскими методами, тогда как строго финитное доказательство этой непротиворечивости противоречило бы теореме Гёделя о неполноте. Поэтому с финитной точки зрения в интуиционистской арифметике есть некий неконструктивный элемент; в чем именно он заключается, я не знаю” [58, с.37]. Один из возможных выводов, следующих из содержательного анализа “финитной части” доказательства Гёделя, может состоять в том, что оно финитное потому, что оно полностью не формализовано. Но тогда, опираясь на бесспорные содержательные рассуждения, можно даже пренебречь “трансфинитным элементом” в обосновании непротиворечивости арифметики. Кроме того, понятие “интуитивно верного доказательства” не может быть охвачено никакой единой формализацией, поэтому, как считает Хаскелл Карри, теорема Гёделя свидетельствует о том, что, с интуиционистской точки зрения, математическое доказательство является примером “становящегося” понятия, подобно бесконечным множествам.

Заметим, что интуиционизм имеет два аспекта – метафизический и конструктивный, поэтому, если с тезисов интуиционистов снять их “метафизический налет”, то они могут оказаться приемлемыми и для формализма. Именно математическая формализация привела к более ясному осознанию природы самой математики, способствуя тем самым ее применению к нечисловым и непространственным объектам, например, к естественным и искусственным языкам и программам для вычислительных машин. Однако следует отметить, что любая хорошая формализация неизбежно обедняет исследуемый объект и ради успешной работы игнорирует его многочисленные несущественные черты. Поэтому, помня о стоящей задаче, целесообразно использовать различные дополнительные виды формализации, которые, отличаясь друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно. В таком контексте формализм не исключает другие содержательные математические программы. Произошедший во второй половине XX века взлет современной математики, а также переосмысление сущности самой математики в трудах Гильберта, Брауэра, Вейля, Гёделя, Бурбаки и других выдающихся математиков – все это последствия того “переворота”, который был совершен Георгом Кантором.

Концепция Кантора построения всей математики на базе теории множеств была воспринята сначала с большой настороженностью, потом многими, в том числе и Давидом Гильбертом, с восхищением, а затем она была подвергнута критике, отголоски которой слышны до сих пор. Понимание функции математики в науке в настоящее время решается в пользу уточненной позиции Кантора и Гильберта, согласно которой в математике могут применяться любые непротиворечивые системы понятий, имеющие внутреннюю или внешнюю содержательную значимость. Один из выдающихся представителей методологии гильбертовского формализма Джон фон Нейман говорил: “В конце концов, именно классическая математика позволяет получать результаты, которые как полезны, так и красивы, и хотя прежней уверенности в ее надежности не стало, классическая математика все же, покоится на столь же прочном основании, как, например, существование электрона” [106, с.92]. Гильбертова программа формализации по-прежнему остается единственной вполне точной точкой зрения в этих вопросах. В основе расхождения интуиционистов и конструктивистов с “классиками” лежит понимание границ математики, оправдываемых их представлениями о научности и истинности.

Что это по существу означает для математики? – спрашивает академик В. А. Садовничий. “Если и не отказ от классического, основанного на аксиомах, чисто логического вывода, в качестве единственно возможного способа доказательства, то, по крайней мере, – говорит он, – признание права на такую же математическую достоверность и доказательность за другими схемами рассуждений” [121, с.19]. Поскольку оценка полезности теории зависит от ее назначения, то для реализации различных целей можно воспользоваться по-разному построенными теориями, то есть интуиционистская и классическая математики могут сосуществовать. В споре теоретико-множественной и интуиционистской математики не оказалось победителя. Они существенно дополняют друг друга.

Анализировать философские и методологичские основы математики, значит рассматривать математическое знание в эпистемологической перспективе. Методологическая точка зрения на основания математики, отражающая деятельный аспект науки, позволяет рассматривать современную математику как комплексный исследовательский процесс. Философская составляющая в этом процессе связана с интерпретацией убеждений на тему природы математического познания.

Теория множеств Кантора дала новый универсальный метод, быстро охвативший всю математику. Однако дальнейшее развитие математики показало, что аксиоматический метод служит лишь для анализа таких понятий, которые обладают устойчивым и фиксированным содержанием. Поэтому он не может быть всеобщим методом познания, а методы формализации будут играть вспомогательную роль в процессе познания. Творческая интуиция и научный опыт ученого по-прежнему будут определяющим фактором такого исследования.

Развитие исследований по основаниям современной математики показало, что аксиоматический метод, во-первых, сам нуждается в обосновании посредством других методов, и, во-вторых, возможно и неаксиоматическое обоснование и построение математики. Необходимость обращения к другим методам рассуждений, отличным от аксиоматических, особенно важно в метаматематике. Так при обращении к конструктивному методу для обоснования математики можно не ограничивать себя лишь финитными рассуждениями, как поступают формалисты, а использовать некоторые нефинитные методы современной математики, в частности, абстракцию потенциальной бесконечности.

Все это указывает на то, что развитие и разработка новых методов мышления, отличных от аксиоматического, дает возможность правильно оценить условия и границы применения аксиоматического метода. Таким образом, все выше сказанное, показывает, к каким трудностям приводит одностороннее преувеличение той или иной формы математических абстракций. Поэтому задача состоит не в том, чтобы противопоставлять эти понятия друг другу, а скорее, в том, чтобы рассматривать их в философско-математическом синтезе как понятия, дополняющие друг друга при таком допущении.

Соответствующий методологический подход в обосновании современной математики берет свое начало от общепринятых философских аксиом, базирующихся на общих постулатах теории познания. Методология в таком широком понимании является по сути метанаукой, знание которой полезно всем исследователям для адекватного восприятия математической реальности. Философские проблемы, которые не находят приемлемого ответа на основе собственных исследовательских проектов, нуждаются для их решения в новых метадисциплинах.

ГЛАВА 2.
АНАЛИЗ ПРОГРАММЫ ОБОСНОВАНИЯ НАУЧНОГО ЗНАНИЯ В ПОСТГЁДЕЛЕВСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Исследования в области обоснования математики, начатые в конце XIX – начале XX веков, были связаны с такими большими философскими программами, как логицизм, интуиционизм и формализм. Однако начиная с 50-х годов XX века, когда были исчерпаны ресурсы традиционных подходов к обоснованию, философия математики оказалась в кризисе. Последняя четверть века прошла в поисках новых направлений в философии математики, целью которых является попытка разрешить проблемы, связанные с эпистемологическим статусом математических утверждений, а также с соответствующим онтологическим статусом математических объектов.

На философию и общую методологию математики влияет также эволюция общих философско-мировоззренческих и естественнонаучных установок. Подобно тому, как в концепции дополнительности Бора были выделены рациональные аспекты противоречивых воззрений, в философии неклассической математики была осознана неосуществимость единой программы обоснования математики гильбертова или брауэрова типа. Для этого понадобился анализ того, каким образом теоремы Гёделя о неполноте оказали влияние на выбор возможных путей обоснования математики. Одним из наиболее влиятельных философских направлений является структурализм, согласно которому математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. В таком контексте на первый план выдвигаются вопросы: что такое структура с онтологической и эпистемологической точек зрения; и является ли это понятие более фундаментальным, чем все остальные понятия математики.

Поэтому целесообразно рассмотреть понятие математической структуры как полезного методологического средства в математике, а также выявить роль абстрактных структур в формировании новых исследовательских программ. Общая тенденция в обосновании математики связана с поворотом философии математики по направлению к практике. В свете этого появляются новые взгляды на сущность доказательства и строгости в математике, а именно, строгости в зависимости от времени, места и множества других вещей. Возможно, что использование компьютеров в доказательстве есть своеобразная нетрадиционная версия строгости в постнеклассической математике. Известно, что логические рассуждения лежат в основе математического доказательства. Однако обратим внимание на то, что в действительности “вычисление” и “рассуждение” неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического познания.

Исследования, проведенные Т. Сколемом в серии работ 30-х годов прошлого века, выявили новые методологические “изъяны” в современной математике. В частности, рассматривается, каким образом результат Сколема приводит к убеждению, что использование математических терминов “не схватывается” аксиомами и нуждается в дополнительном объяснении. Это дополнительное объяснение сводится к различным способам употребления математического языка. Сравнительный анализ классической и альтернативной точек зрения на проблемы нечеткости и неоднозначности, возникшие в постгёделевской математике, дает возможность оценить сложность и важность этих проблем, а также степень их влияния на дальнейшее развитие математики.

2.1. Структурализм и математическая двойственность: границы математического познания

Полученные результаты в математической логике, а именно теоремы Гёделя, ограничивают достижение целей, выдвинутых в классических программах обоснования, но, вообще говоря, не подрывают основной идеи обоснования непротиворечивости математики. Всего несколько столетий назад математика больше всего привлекала Рене Декарта, “твердостью и очевидностью своих основных положений”, он даже удивлялся, “что на таком прочном основании не возведено более величественного здания” [139, с.1336]. Теоремы Гёделя о неполноте опровергли методологическое предположение о “безвредности” теоретико-множественных методов даже для доказательства теоретико-числовых результатов.

По существу совместная работа математиков и логиков в теории доказательств показала, что особенно сильно они заблуждались именно в тех разделах математики, где, казалось бы, у них не было разногласий. Это выяснилось в связи с работой по конкретной реализации теоретико-доказательственной программы Гильберта. Математики рассматривают свое поле деятельности как некоторый особый вполне реальный мир, живущий по своим законам. Он не подчинен “физической действительности”, что делает возможным его самостоятельное изучение, хотя и непосредственно связан с ней, поскольку основная идея математического моделирования состоит в том, чтобы выводы дедуктивной модели совпадали с реальностью. То, что такой путь приводит к полезным результатам в физике, иногда называют “принципом Вигнера”, или точнее “непостижимой эффективностью математики в естественных науках”.

С другой стороны, как заметил академик И. М. Гельфанд “существует еще один феномен, сравнимый по непостижимости с отмеченной Вигнером непостижимой эффективностью математики в физике – это столь же непостижимая неэффективность математики в биологии” [7, с.232]. Тем не менее, указанный принцип можно рассматривать как расширение понятия “математической реальности”, которое является одной из основ психологии математического творчества. Возможно, что ответ на трудности применимости традиционных методов науки для понимания наследственности и других базовых биологических проблем содержится в высказываниях Нильса Бора. Он считал, что как физикам, пытавшимся понять поведение электрона, пришлось справляться с принципом неопределенности, точно так же биологи столкнутся с фундаментальными ограничениями, когда начнут "слишком глубоко прощупывать" живые организмы. Что касается "мира абстрактной математики", то он, как и прежде, редко бывает открыт для непосредственного восприятия, поэтому его нельзя отождествить с "миром математических идей". Воплощение идеи в математические утверждения с допустимыми дедуктивными выводами, способными доступно передавать информацию, требует немалых сил и терпения.

В определенном смысле подобного рода психологические трудности преодолевали и создатели квантовой теории. Физическая теория, описывающая квантовые частицы, появилась благодаря общефилософской концепции дополнительности в теории познания, для создания которой был необходим непредвзятый и свободный взгляд. В математике, с точки зрения анализа и синтеза, можно встретить ситуации, напоминающие ситуацию в квантовой механике. Несмотря на успешное развитие математической терминологии, можно лишь сожалеть, что история математики не знала человека, подобного Бору. Речь идет о том, что характеристики людей, даже культур и цивилизаций, с точки зрения их целостности, требуют типично дополнительных способов описания, поэтому развитие терминологии показывает, что мы имеем дело не с "туманными " и "непонятными" аналогиями, а с определенными принципами логической связи. Наиболее полно суть принципа дополнительности сформулирована в одной из посмертных работ Нильса Бора: "Невозможность объединения наблюдаемых при разных условиях опыта явлений в одну-единственную картину ведет к рассмотрению таких по-видимости противоречивых явлений как дополнительных в том смысле, что они – взятые совместно – исчерпывают все доступные определению сведения об атомных объектах" [135, с.119]. Дополнительность, по Бору, – это необходимость взаимоисключающих, с точки зрения классической физики, двух систем описания, каждая из которых не может быть объявлена "более правильной".

В этой концепции для математиков существенно то, что классическими системами описания достигается определенное понимание неклассической сути явления. Перенос "дуализма Бора" на другие области знания требует определенного логического обоснования такого способа описания. Заметим, что при онтологическом обосновании "логики дополнительности" речь идет, прежде всего, об особенностях существования объектов познания, а при гносеологическом обосновании – чаще всего об особенностях познания соответствующих объектов. С точки зрения математического формализма факт корреляции взаимно дополнительных характеристик проявляется в отсутствии коммутируемости соответствующих операторов, то есть эти операторы неперестановочны между собой. Поэтому конечный результат зависит и от порядка действия указанных операторов. Специфика математического метода состоит в том, что процесс дедуктивного вывода не поддается прямому сопоставлению с описываемой реальностью, кроме того, для большей части математического символизма не существует ни материальных объектов, ни физических процессов.

"Идеи, которые оказываются весьма плодотворными в решении одной проблемы, часто заимствованы из других разделов математики, – пишет французский математик Жан Дьедонне, – что делает очевидным глубокое единство математики и с другой стороны – поверхностное и устарелое ее деление на алгебру, геометрию и анализ" [34, с.12]. Для развития математики важна идея единства математики. В математике разработана специальная технология, называемая моделированием, которая, в применении к "реальному миру", может быть полезной, а иногда может приводить к самообману. Поскольку отдельные факты известны только с некоторой долей вероятности или с некоторой точностью, то любой модели присуща идеализация, согласно которой эти факты признаются верными и принимаются за "аксиомы". Наряду с такими вопросами, как непротиворечивость и полнота рассматриваемой аксиоматики, приходится исследовать и область ее задания. Такая область, точнее совокупность таких объектов и таких отношений, которая удовлетворяет всем требованиям рассматриваемой системы аксиом, называется моделью этой системы. В широком понимании модель – это множество элементов, находящихся в некоторых отношениях друг с другом. В частности, модели аксиоматических теорий множеств дают теоретико-множественную интерпретацию этой аксиоматики.

Система аксиом называется совместной, если она имеет модель. Совместность системы аксиом является достаточным условием ее непротиворечивости. Это теорема математической логики. Поскольку модели отражают существующие объекты и процессы с помощью аналогий, гомоморфизма или изоморфизма, то в гносеологическом смысле неясно, какая модель, например, для аксиом геометрии будет для нас более убедительной. Такие математические объекты, как точки, прямые, плоскости, не присутствуют в окружающем нас пространстве как реальные физические объекты. Они существуют лишь как мысленные объекты, поэтому вопрос о непротиворечивости исследуемой аксиоматики должен решаться без обращения к этим объектам. Их онтологическая сущность, их право на существование как раз и вытекает из непротиворечивости. Кроме того, для интерпретации большей части важных для математики систем понятий необходимы бесконечные модели, но такие описания могут содержать скрытые противоречия. Поэтому, предъявляя мысленную конструкцию, состоящую из бесконечного числа элементов, мы должны ответить на вопрос: законно ли мы оперируем с мысленными представлениями и не приведет ли это к противоречию или неясности? "Ответить на этот "проклятый вопрос" исчерпывающим образом скорее всего невозможно", – считает авторитетный математик и логик В. А. Успенский [131, с.28]. Тем не менее, математики пользуются такими представлениями, если многовековая практика их использования до сих пор не приводила к противоречию.

Хотя, по мнению некоторых физиков, математика – это единственный способ понять реальность, возможно, что когда-нибудь ученые при моделировании будут меньше зависеть от математики и будут черпать метафоры и аналогии из новых источников. Развитию математической науки в целом присуща фундаментальная двойственность, состоящая, по авторитетному мнению Давида Гильберта, в непрекращающемся обмене двоякого рода: с одной стороны – это новые утверждения и формулы, полученные из аксиом посредством формального вывода, а с другой стороны – это добавление новых аксиом с доказательством их непротиворечивости с помощью содержательного вывода. Поэтому математика столь же далека от своей окончательной обоснованности, как и всякое другое знание. Сегодня понятие формальной системы целесообразно интерпретировать, как состоящую из двух дополнительных частей: формального языка и формальных правил. Даже после генценовского доказательства непротиворечивости арифметики, теоретико-числовая практика не использует всю силу классической арифметики и доказательство Герхарда Генцена осталось лишь "оправданием" для возможных, а не действительных теоретико-числовых рассуждений.

Наиболее важный философский аспект обоснования математики – влияние теорем Гёделя на выбор возможных путей надежного обоснования. Даже отношение Лёйтзена Брауэра к этой проблеме было не столь однозначным, как можно было бы предположить, в связи с его критикой программы Гильберта. Например, выступая против формализаций, Брауэр тем не менее поддерживал Гильберта в самое критическое время дискуссий, когда примитивно понятая теорема Гёделя о неполноте казалась мировому научному сообществу крахом программы Гильберта формализации и обоснования математики. Неопределенность методологических установок позволяет утверждать, что вопрос о возможности достоверного обоснования непротиворечивости арифметики не решен окончательно теоремами Геделя в отрицательном смысле. Противоположное впечатление возникало потому, что обычно теоремы Гёделя о неполноте обсуждаются при неявно предполагаемом дополнительном тезисе, что финитно оправданы только те арифметические выражения непротиворечивости, которые используются в теореме Гёделя, и дополнительном предположении, что всякое доказательство, выходящее за пределы финитизма, заведомо недостоверно.

Математики С. С. Гончаров, академик Ю. Л. Ершов и философ К. Ф. Самохвалов, исследовавшие постгёделевские модификации программы

Гильберта, утверждают, что “вторая теорема Гёделя о неполноте не только не противоречит программе Гильберта, но и является косвенным подтверждением ее разумности” [28, с.216]. Если трактовать программу Гильберта как поиск арифметических выражений непротиворечивости, то теорема Гёделя в таком контексте направляет этот поиск, указывая тупиковые пути. Однако, после публикации теоремы Гёделя, она была воспринята как окончательный приговор неосуществимости первоначальной программы формализации, и такое мнение утвердилось в философской и математической литературе. Наиболее распространенные негативные интерпретации теорем Гёделя смешивали логическое рассуждение о невозможности вывода в формальной теории утверждения, выражающего непротиворечивость этой теории, с довольно общим гносеологическим положением, согласно которому непротиворечивость достаточно богатой математической теории вообще не может быть обоснована с достоверностью. Последнее никак не следует из первого, более того, от финитного рассуждения в программе Гильберта требуется в конечном итоге только лишь его очевидная достоверность, а основной результат Гёделя никак не затрагивает такого расширенного эпистемологического предположения программы.

Интересный эффект был обнаружен в проблеме непротиворечивости в пятидесятых годах прошлого века российским логиком А. С. Есениным-Вольпиным. Напомним, что традиционная и в целом верная трактовка второй теоремы Гёделя состоит в том, что непротиворечивость какой-либо формальной логической системы не может быть доказана средствами самой этой системы. Ей можно дать более развернутое толкование, а именно, если непротиворечивая формальная логическая система настолько богата выразительными средствами, что в ней “можно записать утверждение о ее собственной непротиворечивости” то, это утверждение не может быть выведено в этой системе. То есть речь идет о том, что можно предъявить некоторое совершенно конкретное “знакосочетание”, которое трактуется и признается как утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы. Однако, по Есенину-Вольпину, можно привести другое “знакосочетание”, которое тоже можно трактовать как выражающее непротиворечивость, но которое все же можно доказать в этой системе, например, в арифметике. Наблюдение А.С. Есенина-Вольпина показывает, что традиционное понимание второй теоремы Гёделя нуждается в существенном уточнении. Потенциальная осуществимость указанного “знакосочетания” оказывается недостаточной для заявлений о его невыводимости, то есть требуется в контексте “эффекта Есенина-Вольпина” большего – указать конкретное знакосочетание.

“Однако при таком подходе, – по мнению В. А. Успенского, – формулировка второй теоремы теряет свою философскую привлекательность” [130, с.90]. Как поясняет он такое положение, сказать, что “существует выражающее непротиворечивость знакосочетание, которое недоказуемо”, очень мало, потому что лучше было бы заменить “существует” на “всякое”, но это, по

Есенину-Вольпину, невозможно. Это еще раз подчеркивает ту тенденцию развития современной математики, согласно которой после Брауэра вхождение в новую сферу рациональности является традиционным направлением развития науки. Например, вопрос о том, насколько убедительно доказательство Генцена, чтобы считаться финитным, решается в зависимости от индивидуальных воззрений специалистов-математиков. С эпистемологической точки зрения важнейшая характеристика финитного рассуждения состоит в распознавании его безошибочности. Для придания соразмерности "рабочим" целям программы Гильберта, которые с точки зрения философских вопросов теории познания не столь уже необходимы ее "конечной" цели, в философско-математической литературе рассматриваются различные ее модификации. Один из новых императивов программы Гильберта состоит в том, что для новой интересной математической проблемы следует искать систему с обычными правилами вывода, в которой эта проблема представима в виде осмысленной задачи, и уже затем искать для такой системы финитное доказательство ее непротиворечивости в соответствии с прежним императивом программы Гильберта. В духе принципа неопределенности, философские воззрения на современную математику не могут быть сформулированы как нечто окончательное в рамках одной концепции математики, сколь бы убедительной она в начале не представлялась, так же, как не может достичь завершенности и сама математика.

Логицизм Фреге, интуиционизм Брауэра, формализм Гильберта и другие концепции внесли существенный вклад в развитие современной им философской мысли, но удовлетворительного решения проблемы "единообразного" построения математики они не дали. Поэтому группа математиков, преимущественно французских, объединившись в 1937 году под псевдонимом "Никола Бурбаки", поставила перед собой грандиозную задачу – дать с единых позиций изложение современной математики. Замысел Бурбаки можно сравнить с замыслом Евклида, который систематизировал все достижения математики своего времени. Но как выбрать все фундаментальные теоремы? Свою программную работу "Архитектура математики" (1948) Бурбаки начинают так: "Дать в настоящее время общее представление о математической науке – значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала" [14, с.245]. Исходя из убежденности о внутреннем единстве всей математики, они пришли к идее, что объектами современной математики являются математические структуры. Заметим, что в математическом смысле, как математические структуры, неевклидовы геометрии равноправны с евклидовыми, но в контексте восприятия мира их нельзя отождествить психологически. Хотя возможно, что в других условиях опыта, требующих использования неевклидовых геометрий, соответствующий формализм стал бы, в конце концов, столь же психологически комфортным.

Начиная с Гильберта, было известно, что большая часть математики может быть, исходя из небольшого числа тщательно подобранных аксиом, изложена красиво и понятно. Это привело к общей идее математической структуры. “Я не говорю, что это была оригинальная идея Бурбаки, – пишет один из активных создателей и авторов группы Жан Дьедонне. – Не приходится и говорить о том, что у Бурбаки что-либо было оригинальным. Бурбаки вовсе не стремятся создать новое в математике, и если в их томах имеется теорема, то она уже была доказана 2 года, 20 или 200 лет назад. Бурбаки случалось лишь уточнять и обобщать идеи, появившиеся намного раньше” [33, с.209]. В широком понимании понятие “структура” относится к распознанию некоторого единства и взаимосвязи частей, образующих целое и относящихся к реальным объектам познания. Под математическими структурами, если говорить упрощенно, понимают множества, в которых определены те или иные операции и отношения, удовлетворяющие определенным аксиомам, системы подмножеств и тому подобное. После принятия этой идеи надо было решить, какие структуры наиболее важны в математике. В настоящее время общепринято, что основными или фундаментальными структурами, которые лежат в основании современной математики, являются алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры.

Вот традиционный и доступный всем пример простейшей структуры. На первых стадиях математического образования нас учат, что целые числа обладают следующими свойствами: 1) $n + (m + p) = (n + m) + p$ для любых целых чисел n, m и p (ассоциативность); 2) для любых целых чисел n и m существует единственное целое число x такое, что $n + x = m$ (существование нулевого и обратного); 3) $n + m = m + n$ для любых целых чисел n и m (коммутативность). Любое множество X, оснащенное операцией «+», удовлетворяющей аксиомам 1)–3), образует одну из простейших математических структур, называемую “коммутативной группой”. Таким образом, целые числа образуют коммутативную группу относительно сложения. Введение в математику понятия группы было одним из главных достижений уже более чем 150 последних лет. Но целые числа можно не только складывать, но и умножать. При этом выполняется свойство: 4) $(n + m)\cdot p = n\cdot p + m\cdot p$, $p\cdot(n + m) = p\cdot n + p\cdot m$ для любых целых чисел n, m и p. Структура, в которой имеются две операции сложение «+» и умножение «·», удовлетворяющие свойствам 1)–4), называется кольцом. На множестве целых чисел определена операция вычитания (это свойство описано во второй аксиоме), но на этом множестве, вообще говоря, не определено деление. Поэтому мы естественно приходим к рациональным и, соответственно, действительным числам, которые можно складывать и вычитать, перемножать и делить. Если к коммутативной группе добавить аксиомы ассоциативности и коммутативности умножения, а также аксиому однозначности деления, получится структура, называемая “полем”. Заметим, что аксиомы, которые характеризуют поле, с чисто алгебраической точки зрения являются самыми важными.

Математические структуры являются “орудием математика” в том смысле, что, когда он замечает некоторые аналогии между отношениями, изучаемых им объектов, и аксиомами структуры определенного типа, он может воспользоваться всеми известными теоремами, относящимися к структурам этого типа. Формальную систему можно рассматривать как “лингвистическое выражение математической мысли” в подходящем специальном языке, но тогда возникают естественные препятствия в виде изначальной многозначности языка. Дополнительный к этой точке зрения подход состоит в рассмотрении формальной системы самой по себе как “простой математической структуры”, объекты которой связаны друг с другом фундаментальными математическими структурами, что позволяет проводить формализацию внутри самой математики. Значение фундаментальных структур математики состоит в том, что за каждой из этих структур стоит фундаментальная идея, отражающая одно из основных свойств реального мира. Например, алгебраические структуры отражают идею операции и вычисления, порядковые структуры – идею порядка, а топологические структуры – идею непрерывности. Каждая из названных структур обеспечивает не только полное, но и одновременно наиболее прозрачное выражение этих идей в рамках сложившихся направлений развития математики.

Структурализм, согласно которому математика говорит не об отдельных математических объектах, а о структурах, является одним из наиболее влиятельных направлений в современной философии математики. Математический формализм Гильберта фактически предвосхитил весь структурализм XX века, включая и идеологию машинной математики. Философ математики В. В. Целищев спрашивает: “Но что такое структура с онтологической и эпистемологической точек зрения? И является ли это понятие более простым или удобным, или более фундаментальным, чем понятие абстрактного объекта?” [136, с.49]. Бурбаки предполагали, что понятие структуры является наиболее фундаментальным, чем все остальные понятия математики. Но теперь это понятие перекрыто понятиями “категории” и “функтора”, представляющими его в более общей форме. Теорию категорий математик Ю. И. Манин даже назвал “социологическим подходом”, поскольку это как бы структуры без элементов. Поэтому в философии математики структуралисты избегают давать определение структуры, которое само не является теоретико-множественным понятием, поскольку оно не очень-то соответствует базисному онтологическому понятию, и в тоже время не снимает эпистемологических проблем математического познания. Понятие “математической структуры” не претендует на объяснение успехов “математизированного мышления”. Возникшее как способ систематизации приемов внутреннего развития математики, оно затем превратилось в современный язык математики, воспринимаемый сейчас в значительной мере подсознательно как вполне естественное явление.

Уместно заметить, что идея Бурбаки об окончательности некоторых уровней общности в математике не противоречит представлению о творческом процессе неограниченного восхождения к абстрактному. Не следует забывать и о дополнительном смысле математического понятия, отличном от его формального определения, а именно, о наборе основных примеров и модельных задач, являющихся для математиков одновременно мотивировкой и содержательным определением. Среди континуума мыслимых множеств с заданными в них отношениями или структур реально привлекает математиков очень редкое, дискретное подмножество и смысл вопроса как раз и заключается в том, чтобы понять, чем же особенно ценна эта исчезающе-малая часть. Несмотря на введение понятия структуры, предназначенного, по замыслу его создателей, для плодотворного развития различных математических теорий, математика упорно сопротивляется разбиению ее на отдельные разделы. Даже традиционное разбиение ее на алгебру, геометрию и анализ уже давно устарело. Тем не менее, понятие математической структуры как полезного средства ориентации в мире математики осознано не только математиками, но также физиками и философами. Абстрактные математические структуры играли эвристическую роль в формировании квантовых исследовательских программ. В результате такого взаимодействия было осознано новое понимание математики как источника структурных схем для теоретического отображения физической реальности. Эти особенности математики послужили основой для принципа Вигнера о “непостижимой эффективности математики”.

Негативная реакция на теорию множеств, как “основу всех основ”, проявляется в требовании большей гибкости самой конструкции теории множеств, то есть в том, что исходные элементы “структурализованны.” С этой точки зрения “математический мир” наполнен не элементами, по отдельным свойствам которых образуются множества, а структурами и категориями с образующими их свойствами. Однако до сих пор отсутствует содержательное исследование структуры всего “математического универсума”, а после результатов Гёделя его, скорее всего, невозможно реализовать в рамках самой математической теории. Эту новую для математики ситуацию литературный герой романа Апостолоса Доксиадиса “Дядя Петрос и проблема Гольдбаха” профессор Петрос Папахристос поясняет своему племяннику, интересующемуся математикой, с помощью следующей метафоры “потерянного ключа”. Можно представить себе, что некий друг куда-то засунул в доме ключ и просит помочь его найти, причем он не дает повода сомневаться ни в его памяти, ни в его честности. Если к тому же выясняется, что больше никто в дом не заходил, то естественно предположить, при условии “конечности” дома, что рано или поздно ключ найдется. Такая уверенность питала “врожденный оптимизм” математиков. Но если предполагаемый друг мог, например, страдать амнезией или даже мог не страдать ею, но не было способа узнать это наверняка, то “в этом случае, возможно, что “потерянного ключа” вообще никогда и не было!” [31, с.141]. Согласно теореме Гёделя о неполноте любое недоказанное утверждение может в принципе быть недоказуемым. Поэтому нельзя, с точки зрения интуитивистов, быть уверенным в том, что формальная система правильно выражает математические мысли.

Дополнительная трудность состоит в том, что, как показывает теорема Гёделя о неполноте, любая непротиворечивая система, формализующая теорию натуральных чисел, может быть непротиворечиво дополнена различными способами. Настаивая на “едином” языке обоснования математики, будь то язык теории множеств или теории категорий, мы навязываем математике чисто формальное единство. Даже сами Бурбаки, говорившие об “упрочении единства” различных частей математической науки, достигнутом с помощью порождающих их структур, признавали, что довольно большая часть математики, не попавшая в их трактат, не “составлена” из этих структур. Например, в некоторых отношениях прикладная математика может оказаться сложнее чистой математики, так как вместе с теоретической подготовкой она требует так называемого “прикладного чутья” наряду с владением дедуктивным и рациональным мышлением. Кроме того, сама программа Бурбаки не затрагивает дополнительных структур мышления в контексте дихотомии объективного и субъективного взгляда на математическую реальность. Обратимся к свидетельству одного из лидеров группы Бурбаки шестидесятых годов Александра Гротендика: “Все еще помню свое удивление, когда, в 1970 г., я обнаружил, до какой степени само имя Бурбаки стало непопулярным в широких слоях математического мира… Для многих людей оно ассоциировалось со снобизмом, узкой догматичностью, культом “канонической” формы (в ущерб живому восприятию математической реальности), заумностью, выхолощенной искусственностью изложения и массой других неприятных вещей!” [30, с.150]. Основной просчет самого замысла группы, по мнению Гротендика, кроется в том, что по статьям и книгам, вышедшим из-под пера Бурбаки, не было видно, что их писали “живые” люди. “Канонические тексты”, написанные в соответствии со строгими правилами группы, были слишком “педантичными и скучноватыми”, поэтому сами по себе они не давали ни малейшего представления о том, в какой обстановке они были составлены.

Александр Гротендик неоднократно подчеркивал, что замысел группы Бурбаки в целом осуществился и их совместная работа “обернулась редкой удачей”. Безусловно, труд Бурбаки способствовал тому, чтобы математика XX века стала тем, чем она есть. И в этом смысле группа Бурбаки наилучший представитель мировоззрения классической математики. Но пытаясь вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств – в самом ли деле Бурбаки всегда пользуются системой аксиом Цермело-

Френкеля, свободной от рефлексивных парадоксов? Речь идет о том, что некоторые теоремы огромного трактата Бурбаки, возможно, нуждаются в менее жесткой "интуитивной" теории множеств, тем более что сами члены группы не считали себя "формалистами", поскольку аксиоматическая теория множеств, как показал Курт Гёдель, в отношении формальной надежности не лучше других систем исчисления. Возможно, что смелый замысел Бурбаки не удался из-за того, что он хотел соединить несовместимое – логику и практическую математику. По существу речь идет о дополнительности логики и интуиции математического познания, поскольку с развитием практики математических исследований изменяется и математическая интуиция.

В статье "О некоторых особенностях математики XX века" методолог математики В. М. Тихомиров описал интересный диалог, состоявшийся в начале семидесятых годов прошлого века между выдающимися математиками В. И. Арнольдом и Ж. Дьедонне. Первый из них спросил: "Почему "добурбакистская" математика была понятной и целесообразной, а современная математика стала малопонятной и малоосмысленной". Второй ответил, что "достигнутое в математике после 1939 года (когда начал печататься Никола Бурбаки) по меньшей мере сопоставимо с тем, что было сделано в математике со времен Фалеса (которого принято считать первым математиком в истории) до 1939 года" [128, с.446]. Возможно, это и не имеет отношения к дискуссии о пользе и вреде программы Бурбаки, но то, что в любом смысле со времен Фалеса до XX века в математике было сделано меньше, чем в одном только последнем веке, безусловно впечатляет и отчасти проясняет возникающие при этом трудности выделения наиболее содержательной части математики. Кроме того, рост абстрактности математики вошел в противоречие с представлением о ее предмете. Подобный процесс в физике воспринимался вначале как отход от ее истинного предназначения, но затем была понята и ее роль в предсказании и объяснении явлений, исходя из минимального количества понятных принципов. Построение математических структур, полезных для моделирования реальных процессов и отношений, характерно для аналогичных изменений, произошедших в математике.

Однако с функциональной точки зрения математика не может пренебрегать логическими средствами, даже если они выводят ее за пределы интуитивной ясности. Поэтому, сталкиваясь, например, с неполнотой, математики могут сделать соответствующую формализованную систему более мощной, добавляя к ней новые аксиомы, или изменить интерпретацию имеющейся системы аксиом, но это все равно не гарантирует полноту системы. Возникающую в связи с этим познавательную дилемму американский математик и философ Даглас Хофштадтер иллюстрирует с помощью следующей аллегории. Если мы не можем узнать известную мелодию, то вправе сделать вывод, что что-то должно быть не в порядке – или пластинка, или проигрыватель. Качество пластинки можно проверить, прослушав ее на другом проигрывателе, а качество проигрывателя – с помощью другой пластинки. “Каково будет наше заключение, – спрашивает Хофштадтер, – если тест выдержат оба?” [134, с.102]. Например, математический язык теоретической физики “живет в двойном бытии”, точнее имеет двойную семантику, одну с точки зрения математиков послеканторовского периода, а другую – как некое рассуждение о физической реальности. Поэтому противопоставление “формальное – реальное” вытекает из возможного несовпадения синтаксиса языка с синтаксисом реальности и несовместимости соответствующих семантик. Концепция математического мышления, основанная на понятии математической структуры, не предполагает, что все сферы реальности доступны структуризации. А что недоступно для структуризации в нашем мире? По существу, это вопрос о пределах математического мышления, который не имеет пока окончательного решения.

Следует отметить, что наиболее плодотворные периоды обоснования математики проходили при обращении к философским вопросам онтологии и теории познания. Проблемы обоснования математики, в этом смысле, наиболее яркий пример взаимодействия точной науки и философии. Математике изначально присуща фундаментальная двойственность, привлекающая к ней и философов-онтологов, и философов-эпистемологов: с одной стороны, ее суждения выглядят как абсолютно достоверные, а с другой стороны, ее объекты не существуют как предметы внешнего мира или как внутренние ощущения. Исторически решение этих проблем и привело к формированию оснований математики – дисциплины со специфическим объектом исследования и специфическим рабочим аппаратом математической логики. В этом смысле, с точки зрения теории познания основания математики представляют собой некоторый точный фрагмент ее методологии. Поэтому вопросы оснований математики все еще занимают значительное место в философии математики, поскольку некоторые их этих вопросов имеют важные последствия для развития логики. Брауэровская концепция о роли языка и логики оказала влияние на эволюцию воззрений Людвига Витгенштейна, в результате чего он начал пересматривать и перерабатывать принципиальные положения своей концепции языка, которые он до этого считал непоколебимыми.

Читая в Кембридже цикл лекций по основаниям математики, Людвиг Витгенштейн с самого начала мотивировал правомерность заниматься этими проблемами ему, нематематику. Однако Витгенштейн, даже имея к тому времени репутацию выдающегося философа, тем не менее, специально подчеркнул, что будет стремиться избегать такого подхода и вмешиваться в профессиональные дела математиков, поскольку собирается говорить об интерпретации, а не предлагать новой интерпретации математических символов. Различие между возведением нового здания и уяснением оснований проектируемого здания нигде так четко не проявляется, как в математике. Поэтому вполне естественно постоянное обращение Витгенштейна к математике для иллюстрации своих философских взглядов. Математические сущности, пребывающие в мире чистых форм, служат иногда идеальным полем для “философских спекуляций”. Критически оценивая вклад философских работ Витгенштейна в основания математики, В. А. Успенский отмечает, что если понимать основания математики как специфическую математическую дисциплину, то тогда влияние Витгенштейна на основания математики прослеживается с трудом.

Заметим, что когда комментарии к витгенштейновской философии математики принимаются собственно за философию математики, то к этому нужно относиться весьма скептически. Следует учитывать также и то обстоятельство, что научный опыт, необходимый для альтернативного критического обсуждения философских проблем математики, вообще говоря, не может быть усвоен в “массовом масштабе”. Возможно поэтому, Витгенштейн, пытаясь предложить что-нибудь подобное такой альтернативе, использовал только примеры из элементарной математики. Вообще говоря, элементарного математического опыта недостаточно для анализа философских концепций оснований математики, но, с другой стороны, интересующиеся математикой начинают задаваться вопросами оснований, когда они знают еще довольно мало – на уровне школьной математики или древних греков. Если трактовать термин “основания математики” более объемно, охватывающим философию математики или, по крайней мере, как подчеркивает Успенский, ощутимо с ней пересекающимся, то тогда уже можно говорить и о вкладе Витгенштейна. А как часть общей философской концепции Витгенштейна, его философия математики в равной мере разделяет и все ее достоинства, и все ее недостатки. Дихотомия субъекта и объекта, в контексте математического познания, тесно связана с дихотомией символа и объекта, которая была глубоко изучена Витгенштейном в начале XX столетия.

Для понимания этого различия позже были введены термины “использование” и “упоминание”. Согласно Витгенштейну, интересно именно то, как мы “употребляем” математические предложения, хотя само понятие “предложение” не слишком отчетливо. Поэтому, по Витгенштейну, “понимать математическое предложение” – тоже “очень зыбкое понятие”. Людвиг Витгенштейн по существу предложил новый способ философствования, определявший многие годы направления исследований западной философии. Философия не может состоять из научных предложений, поскольку, в отличие от конкретных наук, не исследует факты. Поэтому цель философии состоит не в формулировании философских предложений, а в логическом прояснении мыслей. Философский аналог принципа неопределенности Гейзенберга был сформулирован в последнем трактате Витгенштейна, который издатели назовут “О достоверности”. Он сформулировал его следующим образом: “…вопросы, которые мы ставим, и наши сомнения зиждутся на том, что для определенных предложений сомнение исключено, что они словно петли, на которых держится движение остальных предложений” [19, с.362]. Иначе говоря, поясняет он, то, что некоторые вещи “на деле” не подлежат сомнению, связано с логикой научных исследований. Суть не в том, что мы не в состоянии исследовать все и поэтому “вынуждены довольствоваться” некоторыми предпосылками.

С помощью метафоры “дверных петель” Витгенштейн раскрывает ее в следующем афоризме: “Если я хочу, чтобы дверь отворялась, петли должны быть закреплены”. То есть для того чтобы сомневаться в чем-бы то ни было, нечто должно оставаться несомненным. С точки зрения здравого смысла часть положений и выводов любой программы обоснования математики, в том числе и программы Гильберта, кажется сомнительной, поэтому для придания осмысленности используемой в них терминологии, что-то приходится принимать на веру. Людвиг Витгенштейн исписал несколько тетрадей по различным философским проблемам математики, делая это параллельно с подготовкой “Философских исследований” (1953). Извлечения из пяти математических тетрадей были впервые опубликованы уже после его смерти под названием “Замечания по основаниям математики” (1956). Можно выделить следующие три наиболее существенных элемента во взглядах Витгенштейна на проблемы обоснования математики: роль веры в математике, спокойное отношение к противоречию и настороженное отношение к объектам очень большого размера. Здесь уместно пояснить, что “вера” понимается не в религиозном смысле, а под “большим размером” может оказаться, например, и очень длинное необозримое доказательство.

Аргументировано рассуждать о проблеме веры с точки зрения логических оснований науки довольно сложно, поскольку за пределами математики никакое определение этого понятия нельзя признать точным. Поэтому, проще всего согласиться с тем, что вера “есть то, что она есть”, вне зависимости от того имеет ли она какие-нибудь практические проявления или не имеет. Вера в обычном понимании не противопоставляется доказательности. Под верой можно понимать упорство в признании тех или иных положений, предпочитаемых любым доводам разума. Безусловность такого предпочтения вызывается различными практическими потребностями, например, для уверенности в деятельности или для умаления аргументов логики, разрушающих уверенность в единомыслии. Право на любую веру является необходимым условием свободы и творческой эффективности мысли. Теоретико-множественный платонизм – это тоже вера в то, что сведение математики к теории множеств позволит ей иметь базис, заслуживающий большего доверия. Обоснование с помощью теории множеств придало бы формальную ясность тому, что философы понимают под утверждением об “априорности математики”. Основной гносеологический вопрос сводится к соотношению веры и знания, точнее насколько обоснованной является вера в непротиворечивость математических теорий.

Проблема противоречий и непротиворечивости занимала Витгенштейна в его исследованиях на темы оснований математики. Его размышления о диагональном методе созвучны развернувшимся на эту тему дискуссиям в современной философско-математической литературе. “Диагональный метод Кантора, – отмечал Витгенштейн, – не выявляет некое иррациональное число, отличное от всех других чисел в системе, а придает смысл математическому положению, гласящему, что такое-то число отлично от всех других чисел в определенной системе” [20, с.63]. Один из выводов упомянутой дискуссии состоит в том, что вопрос о счетности или несчетности множества всех действительных чисел сводится к вопросу о вере. Опыт осмысления оснований математики привел Витгенштейна к выводу о том, что традиционная трактовка математики слишком идеализирована, поскольку математики и философы математики чаще всего исходят из платоновского представления о вечном и неколебимом основании математики и неопровержимости математического знания. Но, как говорил Витгенштейн, на дне “обоснованной веры” лежит “необоснованная вера”, поэтому и для основателей интуиционизма, и сторонников формализма эта вера была исходным пунктом всех размышлений. В заслугу Витгенштейну необходимо также поставить исследование ряда философских проблем через тщательный анализ языковой практики, через выяснение близости научных предложений и предложений повседневной жизни.

Именно благодаря ему философы математики, возможно к своему немалому удивлению, узнали, что основания математики, которыми они интересовались, – это вовсе не “основания” всего многообразия математического знания, а всего лишь один из небольших разделов математики со своими внутренними проблемами. Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что основания математики являются не фундаментом всего здания математики, а, вероятнее всего, его верхним этажом. Поэтому его необустроенность не мешает нормальному функционированию здания математики в целом. Устойчивость такой конструкции проверяется ее эффективностью в практическом функционировании. Вместе с достижениями формалистского анализа эта философия математики создала определенную систему ложных верований, в которых достоверность стала отождествляется с финитностью. Поспешные негативные выводы из теорем Гёделя тоже были сделаны в духе крайних идей формалистской философии. Тем не менее, в постгёделевском периоде развития модифицированных программ Гильберта аксиоматизации математики, “основания математики” воспринимаются математиками как некая вещь в себе.

Заметим, что эпистемологические установки Давида Гильберта близки к кантовской теории познания, поскольку он тоже считал, что при создании специальных теоретических областей необходима некоторая априорная интуиция. Можно даже утверждать, что в математику входит некоторая доля интуиции, имеющая существенно лингвистическую природу и опирающаяся на естественное развитие опыта, поэтому математический формализм должен быть дополнен “семантическими” рассмотрениями платонистского характера.

Новое в науке порождает эффект, не согласующийся с самой сутью научной рациональности, когда оно противоречит уже установленным законам и правилам. Речь идет о наличии противоречивых составляющих математической или физической теории, находящейся в стадии становления. В качестве примеров подобного рода чаще всего приводят дифференциальное исчисление Лейбница и модель атома Бора. "Наука и ее язык, – отмечает философ науки Т. Б. Романовская, – представляют собой систему, где сосуществуют иногда взаимно противоречащие положения" [120, с.95]. Деятельность исследователей гораздо более свободна и менее парадигматична, чем иногда думают философы науки. Следует также помнить о неформализуемости употребления понятий в естественном языке, которое, оставаясь содержательным, часто противоречит узко понимаемому формализованному смыслу.

Фундаментальная двойственность "формальное – реальное" возникает на стыке несовпадения синтаксиса языка с синтаксисом реальности. Например, язык квантовой механики, являясь математическим по самому своему существу, ведет "двойное бытие", поскольку имеет двойную семантику. С одной стороны, как математическая сущность в конструкциях послеканторовского периода, а с другой стороны, как рассуждение, обращенное к физической реальности. Кроме того, на способы аргументации научного знания влияют ограничения классической науки, поскольку, например, даже "постклассическое развитие физики предполагает неизбежное обращение к понятиям классической физики" [141, с.101]. При анализе математических работ, в которых "предвосхищались" будущие плодотворные идеи и теории, историки математики сталкиваются иногда с феноменом "отхода от дедуктивного метода рассуждений", когда соответствующие умозаключения получали с помощью недедуктивных рассуждений, а именно, обращаясь к математическим объектам, создаваемым отчасти в процессе рассуждения и подлежащим конструированию в дальнейшем. Подобно тому, как в физическое рассуждение включаются новые экспериментальные данные, в математическом рассуждении могут использоваться элементы будущего понятия и способы оперирования с ним. Веру в исключительную дедуктивность математики расшатывали сами математики. Поэтому неудивительно, что едва ли не самый главный термин в математике "доказательство" не имеет точного определения. Кроме того, с точки зрения постгёделевской математики, финитистски ограниченная схема доказательства недостаточна, чтобы "разрешать" предложения несчетной математической системы. Тем не менее, суть математического доказательства и основания его убедительности определяются прежде всего тем, что оно представляет собой определенную последовательность действий по строго заданным правилам с конечным числом элементов.

Объяснение специфики математического доказательства является одной из центральных тем витгенштейновской философии математики. Доказательство

Людвиг Витгенштейн рассматривает как последовательность предложений, с помощью которых получается образ определенного вида математического эксперимента. Практическая уверенность достигается за счет того, что вызывающие сомнения предложения, входящие в доказательство, сопоставляются с уже известными утверждениями, возможно и из других разделов математики. Включение известного в сложное доказательство приводит к тому, что доказательство по существу составляется “из кусков”. В математике, считает он, в некотором смысле как бы экспериментируют с различными образцами вычислений, некоторые из которых становятся “парадигматическими” в силу своей полезности. То, что показывает математическое доказательство, по Витгенштейну, представляется его внутренним отношением. Хотя в задачу философии не входит пояснение или уточнение специальных математических понятий, что вполне по силам только профессиональным математикам, он все же пытается привлечь внимание своих читателей к тому, что доказательства бывают разными и, более того, каждое новое доказательство в математике расширяет понятие доказательства. Только математическое доказательство показывает, что может служить критерием недоказуемости. Доказательство – это часть системы операций и игры, считал Витгенштейн, в которой данное предложение употребляется и показывает свой смысл.

В таком контексте непонимание философской сложности проблемы соответствия между предложением и фактом, а также границ применимости математических утверждений может привести к математическим ошибкам. В духе сократического метода вопросы Витгенштейна иногда бывают интереснее его ответов. Например, он спрашивает: Что общего у математического предложения и математического доказательства? Что математического есть в недоказанном предложении? Что общего между аксиомой и математическим доказательством? В этом же ряду стоят его размышления о том, что устанавливает смысл предложения и если доказательство найдено, то изменяется ли смысл. Действительно ли смысл, суть математического предложения становятся ясными, как только мы можем следовать за доказательством? Последнее замечание можно пояснить следующим образом. Доказательство требуется, если утверждение теоремы не очевидно. Если же доказываемое предложение не может быть ни истинным, ни ложным, то доказательство служит для установления смысла доказываемого предложения. С такой ситуацией математики неожиданно встретились при доказательстве континуум-гипотезы.

Одна из важнейших проблем логики и мышления состоит в том, что акт математического познания использует не просто бесконечность дискретного счетного типа, а именно континуум. Проблема континуума является одной из любимых тем философствующих математиков и физиков. В ней сконцентрированы фундаментальные дополнительные понятия теории познания. Как лучше описывать мир – с помощью вещественных чисел, поделенных на актуально бесконечно малые величины, или целых чисел? Реальность в различных масштабах непрерывна или дискретна? Почему в современных компьютерах все представляется только в целых числах (единицах и нулях)? Ньютоновская физика ограничивалась вещественными числами, а квантовая механика предполагает, что в очень малых диапазонах материя и энергия, возможно, состоят из неделимых частей. После открытия немецким физиком Максом Планком кванта действия произошел кардинальный пересмотр всей физической картины. “Согласно квантовой механике, объекты уже не могут быть непрерывно наблюдаемыми, и взаимодействие между объектом и измерительным прибором становится дискретным: фотоны, например, испускаются и поглощаются” [110, с.663]. Это взаимодействие квантованно и происходит спонтанно. Значительная часть физики может продолжать развиваться по-прежнему, а в квантовой физике получение нового знания связано с глубокими философскими вопросами относительно пределов знания. Например, принцип неопределенности Гейзенберга проявляется на атомных масштабах, когда измерения с высокой точностью приобретают решающее значение. Подобные процессы происходят и в современной математике.

В то время как философы математики и логики ведут доступные узкому кругу посвященных дискуссии о неразрешимости, в том числе и проблемы континуума, основная часть математического сообщества продолжает свои исследования, не обращая внимания на то, что происходит у философов науки и логиков. Постановка проблемы континуума явилась кульминацией творчества Георга Кантора. Условно говоря, знаменитую проблему Кантора можно сформулировать в следующем виде: существует ли множество, более мощное, чем множество всех целых чисел, но менее мощное, чем множество всех действительных чисел? Проблема континуума стояла первой в списке проблем, которые, по мнению Давида Гильберта, должны были определить направления развития математики XX века. Несмотря на то, что столь высокая оценка значения проблемы континуума не лишена некоторой доли субъективности, попытки ее решения показали, что она является одним из принципиальных вопросов логического обоснования математики. Приведем одну из эквивалентных формулировок континуум-гипотезы: любое несчетное множество действительных чисел имеет мощность континуума. В математике она часто рассматривается в более общем смысле – это, так называемая обобщенная континуум-гипотеза: для любого кардинального числа k, кардинальное число 2^k следует непосредственно за k. В 1940 году Курт Гёдель опубликовал работу “Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы” [24], в которой исследована проблема континуума в некоторых специальных аксиоматических системах.

Основной ее результат состоит в том, что во многих аксиоматических системах обобщенная континуум-гипотеза либо верна, либо является независимым утверждением. В частности, он показал, что присоединение обобщенной континуум-гипотезы к аксиоматике Цермело-Френкеля в качестве дополнительной аксиомы не приводит к противоречию, даже независимо от того, включала или нет исходная система аксиому выбора. Но более двадцати лет оставалось неясным, является ли континуум-гипотеза логическим следствием аксиом Цермело-Френкеля. Многие математики были убеждены в том, что неразрешимые, в связи с теоремами Гёделя о неполноте, утверждения находятся где-то на периферии математического знания и потому, возможно, никогда не встретятся ни одному математику. Курт Гёдель показал лишь, что такие утверждения существуют, но не привел ни одного соответствующего примера. Английский математик Годфри Харди, рассуждая о математической теории и определенных "философских импликациях" писал: "Человек, который мог бы дать убедительное описание математической реальности, разрешил бы очень многие из труднейших проблем метафизики" [133, с.77]. В 1963 году американский математик Пол Коэн разработал метод, позволяющий в некоторых специальных случаях обнаруживать конкретные неразрешимые вопросы.

Теоретический "кошмар", предсказанный Гёделем, стал явью. Пол Коэн доказал, что и гипотеза континуума, и аксиома выбора независимы от остальных аксиом системы Цермело-Френкеля, если те непротиворечивы, то есть они не могут быть доказаны на основе остальных аксиом этой системы. Более того, гипотеза континуума и, соответственно, обобщенная гипотеза континуума не могут быть доказаны в системе Цермело-Френкеля, даже если ее дополнить аксиомой выбора, хотя аксиома выбора следует из этой системы, дополненной обобщенной гипотезой континуума. Поэтому истинность или ложность классической проблемы континуум-гипотезы не может быть установлена средствами современной теории множеств. Результат П. Коэна, оказавшийся своеобразным "решением" континуум-гипотезы, в свою очередь подтолкнул математиков к поиску новых путей обоснования математического знания. Различные направления этих новых исследований будут проанализированы в следующем параграфе.

2.2. Теоретико-числовые исследования и алгоритмические проблемы в обосновании математики

Математический мир был потрясен не только работами Курта Гёделя и Пола Коэна. В серии работ, начатых шведским логиком Леопольдом Лёвенгеймом в 1915 году, а затем усовершенствованных норвежским математиком Туральфом Сколемом в 1920–1933 годы, была выявлена новая проблема относительности понятия мощности множества. Суть их основного результата, получившего название "теоремы Лёвенгейма-Сколема", сводится к следующему. Если непротиворечивая аксиоматическая система имеет модель, то есть теоретико-множественную интерпретацию этой аксиоматики с помощью совокупностей, являющихся множествами в ней, то она имеет и счетную модель. Отсюда следует поразительный вывод, называемый “парадоксом” Сколема, согласно которому, понятие мощности множества, как и понятие множества, не является абсолютным, а зависит от той аксиоматики, в которой рассматривается данное множество.

Признав, что для избежания парадоксов теории множеств необходимо рассматривать аксиоматические теории множеств, математики вплоть до “парадокса” Сколема не осознавали того, что таким же образом должно определяться и понятие его мощности. Внесение в совокупность тех или иных отношений между ее элементами, что и превращает ее во множество какой-то аксиоматической системы, в контексте теоремы Лёвенгейма-Сколема изменяет ее мощность (или, условно говоря, “число” элементов). Отсюда следует далеко не тривиальный вывод о том, что, вообще говоря, не существует абсолютной несчетности, поскольку множество, счетное в одной аксиоматике, может оказаться несчетным в другой. Теорема Лёвенгейма-Сколема столь же поразительна и удивительна, как и теорема Гёделя о неполноте. По существу теорема Лёвенгейма-Сколема утверждает, что любая непротиворечивая система аксиом не устанавливает пределов для интерпретаций, или моделей, в том смысле, что интерпретации любой из таких аксиоматических систем могут быть неизоморфны – отличаться не только терминологией, но и не совпадать по существу.

Одна из причин появления подобных “побочных” интерпретаций связана с существованием “дополнительных” неопределяемых понятий, содержащихся в каждой аксиоматической системе, которые могут трансформироваться заранее непредсказуемым образом. Рассматриваемые аксиоматические системы, разумеется, должны быть неполными, так как в противном случае неизоморфные интерпретации были бы невозможны. Из теоремы Гёделя о неполноте вытекает, что поскольку непротиворечивая аксиоматическая система неполна, то в ней существуют неразрешимые утверждения. Поэтому, добавляя к ней одно из таких утверждений или его отрицание, получим две более широкие системы аксиом, которые существенно различны и их интерпретации не могут быть изоморфны, то есть они “некатегоричны”. Можно утверждать, что теорема Лёвенгейма-Сколема содержит даже более сильное отрицание “категоричности”, поскольку и без введения какой-либо дополнительной математической аксиомы существуют принципиально различные, то есть неизоморфные, интерпретации системы, или модели. Возможно, это обстоятельство может отчасти свидетельствовать в пользу интуиционизма. В свете результатов Сколема ясно, что проблема континуума имеет смысл только по отношению к какой-либо конкретной аксиоматической теории множеств.

Следует, однако, заметить, что в важнейшей аксиоматике Цермело-Френкеля результат Коэна получен при дополнительном и весьма существенном предположении о существовании модели для этой аксиоматики. Тем не менее, такого рода “решение” проблемы континуума, стоявшей первой в списке гильбертовских проблем, Гёделем и Коэном является одним из значительнейших достижений XX века. Необычность этого результата в том, что гипотезу континуума в рамках соответствующей аксиоматики теории множеств нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Возможность строить равноправные теории континуума отчасти дискредитируют платонистские взгляды в математике, поскольку такая тенденция может, хотя и с малой вероятностью, привести теорию множеств к расщеплению на несколько ветвей в зависимости от принятой мощности континуума. Удивительно и то, что философско-математические трудности континуум-гипотезы не поколебали веру математиков в ценность и “реальность” математических объектов теории множеств. Представление о множестве, состоящем из элементов, может оказаться адекватным только для конечных и счетных множеств, в отличие от “высших бесконечностей” как абстракций другого типа. Поэтому не исключено, что благодаря более глубокому изучению внешнего мира, может появиться новая концепция континуума, в которой континуум не имеет никакой “мощности”.

Несмотря на то, что континуум-гипотеза является, по выражению Пола Коэна, “драматическим примером” абсолютно неразрешимого суждения, важнейшим препятствием для удовлетворительного развития философии математики является гёделевская теорема о неполноте. Людвиг Витгенштейн свою задачу, в связи с теоремой Гёделя, видел в том, чтобы выяснить, что означает в математике предложение типа “предположим, что это можно доказать”. Основу аппарата и языка любой специальной области математики, согласно Бурбаки, составляют фундаментальные структуры математики, отражающие в наиболее полной форме важнейшие общие черты математизируемой реальности. Несмотря на стилистические различия, имеются определенные аналогии во взглядах Витгенштейна и Бурбаки по поводу тех свойств доказательств, которые выделяются в традиционных основаниях. Скептицизм Витгенштейна распространяется на теоретико-множественные основания, а Бурбаки, подчеркивая важность своих структур, стараются избегать упоминаний о их связи с теорией множеств. Однако понятие структуры не решает, а скорее “рассасывает” эпистемологические проблемы в духе витгенштейновской терапии.

Логические “основания” анализируют истинность математических аксиом и правил, опираясь на концепции природы математики, а в дополнительных к ним математическим “основаниям” истинность подразумевается и, выбирая подходящий язык, математики пытаются сделать формальные рассуждения доступными пониманию. Шведский математик Ларс Гординг в философском диалоге математика от имени фон Неймана говорит: “Иногда тот или иной философ возражает против нашего способа понимания, но философы ставят под вопрос все, и можно не обращать внимания на то, что они говорят. У них никогда не бывает упорядоченного набора аксиом. Если бы математика содержала противоречие, оно было бы возможно только на ее философской периферии и могло бы быть устранено за счет небольших изменений” [29, с.216]. Парадоксы в обосновании математики никак не отразились на устойчивости ее “продвинутых” теорий, однако люди, которые мало что знают о современной математике, почему-то обеспокоены ее целостностью. В теореме Гёделя о неполноте речь идет не о вечных истинах, а о некотором способе перечисления утверждений в логической системе. Любая полностью формализованная логическая система, согласно Гёделю, должна содержать, по крайней мере, одну антиномию.

Классические исследования Альфреда Тарского показали, что естественный язык плюс обычная двузначная логика уже образуют противоречивую систему, поскольку в двузначной логике из противоречия может следовать все что угодно, а в естественном языке есть, например, пользующийся наибольшей известностью из нематематических парадоксов так называемый парадокс лжеца. Тарский отмечал, что парадокс лжеца вместе с некоторыми противоречиями, открытыми на рубеже XX века, все еще анализируется и обсуждается, оказывая существенное влияние на развитие современной логики. Скептически оценивая затею подвести под математику особо прочный фундамент, Людвиг Витгенштейн считал, что она порождена неверным философским образом математики как особого, исключительно надежного знания, поскольку, если что-то ненадежно в самой математике, то и любое ее обоснование будет столь же ненадежным. Концепции и результаты, будучи парадоксальными и бросающими вызов времени, с точки зрения последующих поколений математиков, могут стать банальностями. Нильс Бор говорил, что работа науки – это сведение всех тайн к тривиальностям. Тем не менее, парадоксы сыграли важную роль в эволюции математики. “Несомненно, парадоксы захватывают. Они также льстят, провоцируют, забавляют, злят и соблазняют. Важнее то, что они вызывают любопытство, стимулируют и мотивируют” [144, с.963]. Парадоксы и антиномии интересны, прежде всего, как проблемы для философских дискуссий и размышлений. То, что математики на протяжении последних ста лет довольно сдержанно относятся к сосуществованию с парадоксами теории множеств – это уже, скорее всего, проблема не математики, а психологии всего научного познания.

Математики фундаменталистского направления не хотят отказываться от пользования законами аристотелевской логики по причине их простоты, они, не смотря ни на что, образовывают экзистенциальные суждения и продолжают пользоваться законом исключенного третьего. Если же профессиональный математик отказывается от закона исключенного третьего на том основании, что его схема используется в парадоксе лжеца, то возможно, что за таким отказом стоит не столько логическая и философская неудовлетворенность, а причины нравственного и психологического “страдания”. Однако основная задача теории познания состоит в онтологическом, а не в психологическом анализе процессов сознания. В таком контексте принято говорить о великом конфликте между объективным и субъективным, но он становится менее острым и драматичным после его конкретизации в математических примерах. Можно указать на столь близкие отношения между объектами и методами в некоторых разделах математики, что рассматриваемые объекты могут быть даже охарактеризованы в терминах методов. Для понимания реальной проблемы этого отношения можно сравнить физические объекты, видимые для невооруженного глаза, с теми, которые невидимы, хотя "видимость" не относится к характеристическому свойству большинства физических явлений. "В экономических приложениях, – отмечал известный математик и экономист академик Л. В. Канторович, – первостепенное значение приобретает концепция двойственности функциональных пространств" [57, с.11]. В качестве иллюстративного примера можно привести известный математический принцип проективной двойственности, который по существу является метаматематическим, так как представляет собой утверждение о языке проективной геометрии.

Следование с должной строгостью законам современного математического языка делает математическую теорию более отчетливой и позволяет, в известном смысле, сформулировать "невыразимое", а также "поймать в сети языка" ускользающую или неясную сущность некоторых объектов математического мира. Дополнительная сторона этой замечательной возможности чисто психологического толка, поскольку мысль, опередившую свое формальное воплощение в духе совершенной точности современных доказательств, сейчас математики не рассматривают всерьез. Нужен достаточно убедительный набросок доказательства или, на худой конец, конкретные гипотезы. В отличие от словесных тавтологий, укорененных в различных языковых играх, математические процедуры приводят к открытиям. Согласно формалистской точке зрения, разрабатываемой в духе программы Гильберта, математику можно рассматривать как чисто формальную игру с единственным требованием, чтобы она не приводила ни к какому противоречию. Однако для полного описания формальной игры потребовалось уточнить правила математической логики, после чего математики, специализировавшиеся на проблемах обоснования математики, занялись доказательством непротиворечивости различных аксиом. Когда Гильберта обвиняли в стремлении свести математику к сплошной игре, он указывал, в частности, на то, что введение идеальных элементов для достижения полноты является не только общим методом для всех областей математики.

Даже в физике – фундаментальной науке, смежной с математикой, – тоже экспериментально не проверяют отдельные утверждения, поскольку, в соответствии с основными методологическими выводами концепции дополнительности, только вся система в целом может в принципе сопоставляться с научным опытом. Когда операционный подход послекантоpовского периода распространился на современную физику, привлекательность формальных языковых систем, возможно, увеличилась. Согласно Бурбаки, математика в своей аксиоматической форме представляется через математические структуры и оказывается, что некоторые аспекты экспериментальной действительности в результате лейбницевой “предустановленной гармонии”, хотя и непонятно почему, укладываются в некоторые из этих форм. Однако использование математических терминов не схватывается аксиомами или формальными выводами и поэтому нуждается в дополнительном объяснении. Это дополнительное объяснение выявляется в способах употребления математического языка, хотя само по себе это объяснение, как “иррациональный” фрагмент математики может не осознаваться. Например, в плодотворной идее использования сопряженных уравнений, по мнению академиков В. С. Владимирова и Г. И. Марчука, “прямое расширение определения сопряженного оператора с линейного случая на нелинейный приводит к неоднозначности его” [21, с.165]. Заметим, что неклассичность физики XX века связана с появлением новых соотношений между описываемым явлением и его описанием, а также осознанием разрыва между тем и другим. Этот разрыв анализируется философами-физиками и философствующими математиками, которые исследуют не только идеализированную объективизацию в теории, но также и предпосылки возможности такой объективизации.

Ни в какой реальной деятельности невозможно полностью полагаться на математические дедукции. Небольшое изменение аксиом, в которых мы окончательно не уверены, способно, вообще говоря, привести к другим выводам, даже малое изменение параметров изучаемых явлений может совершенно изменить результат. Но дополнительное объяснение не может быть чем-то инвариантным и общим для всех моделей теории, содержащих объяснение. Это реакция на попытки рациональной интерпретации теории и еще одно подтверждение обоснованности разговора об “иррационализме” математики. В чем же тогда состоит прогрессивный характер развития математики? На интуитивном уровне понятно, что он присущ математике, по крайней мере, в Новое время. Иногда прогресс математики трактуют как рост “важного математического знания”, которое эффективно служит широким целям математической практики, в том числе и для самих математических теорий. Проблема в том, что определить эффективность использования нового знания можно только спустя какое-то время, иногда довольно значительное, а с другой стороны, оценка эффективности, как правило, не легче чем оценка важности. Например, “на практике приходится иметь дело и с такими случаями, когда неизвестны законы, позволяющие составить дифференциальное уравнение, и поэтому необходимо прибегать к различным предположениям (гипотезам)” [4, с.6]. Введение новых средств в математике важно прежде всего для ее развития, поэтому определение новых понятий это не просто “сокращения”.

Вообще говоря, всегда существовало и существует глубокое различие между тем, что можно сделать в математической теории в принципе, и тем, что можно реализовать на практике. Поэтому не только удачные обозначения, как, например, арабские позиционные выражения для цифр, но и принципиально новые подходы к уже известным понятиям могут существенно расширить границы практических возможностей применения математического формализма. Например, квант теории информации – это бинарная единица, или бит, который является посланием, представляющим вариант выбора: да или нет, ноль или единица. В великих открытиях не всегда удается провести грань между теоретическим и практическим. Речь идет о знакомстве Готфрида Лейбница с двоичной системой древнекитайской математики, в понимании важности которой проявилась органичная связь Лейбница-философа и Лейбница-математика. Для подлинного признания этого открытия, в котором он увидел “Образ творения” и указал на применимость двоичного исчисления для счетных машин, необходимо не только понять, но и осознать, что было известно о системе знаков до Лейбница. В новогоднем послании герцогу Рудольфу-Августу он назвал свое открытие “Тайной творения”, так как одним из основных пунктов христианской веры является творение Всемогущим Господом всех вещей из ничего. Теологическая аргументация идеи творения из ничего опирается на то, что Бог не был бы столь велик, если бы использовал уже имеющийся материал и был бы похож на “мастерового человека”. Величие Бога в том, что он творит из ничего. Возникновение чисел, представленное Лейбницем с помощью нулей и единиц, то есть, как он говорил, ничем, выразит это как ничто другое на свете наилучшим образом. Великие мыслители прошлого были озабочены секретами искусства правильного понимания.

Современная логика затрагивает наиболее фундаментальные вопросы знания. Поэтому закономерно, что работой последних лет жизни Курта Гёделя было логическое доказательство существования Бога, хотя он и не стал публиковать свое доказательство. Вопрос о соотношении религиозных убеждений ученого и его научного творчества до последнего времени рассматривался, как правило, в негативном плане, хотя от религиозных взглядов могут зависеть моральные принципы ученого и принимаемая им картина мира. Рост абстрактности математики обострил проблему содержательности математики. Крайнюю точку зрения выразил логик Крэйг Сморински, безапелляционно заявивший о “гротескных попытках Л. Э. Я. Брауэра превратить математику в религию” [122, с.10]. Язык математики часто оказывается эффективным именно потому, что математика к нему не сводится. Сила математики сосредоточена в мощных методах обработки и преобразований записанной на ее языке информации. Язык математики служит не только для выражения мыслей, но и создает условия для возникновения мысли и в этом смысле язык, однажды возникнув, приобретает особый вид автономии.

Основная задача языка математики состоит в точном и удобном определении математического понятия. Язык современной теоретико-множественной математики может осуществлять роль “языка-посредника” благодаря его уникальной способности одновременно формировать пространственные и кинематические образы через их математическое содержание в формализме. В теоретической математике начинают с простых предложений, доступных нашему пониманию, а затем с помощью определенных правил вывода, называемых логическими, строятся все более сложные символические предложения, которые предполагаются истинными, если были истинны исходные положения. Как правило, необходимо обладать определенной математической квалификацией, чтобы понять, что полученные предложения “значат”, и как в них выражена математическая мысль. Соответствие выводов теории эксперименту остается в сфере чисто абстрактных математических построений. Возможно, поэтому известный физик-теоретик А. А. Ансельм говорил: “Я уверен, что “классическим философам” сегодня не остается ничего другого, как учить “новые языки”, основанные на математике” [5, с.206]. За всю многовековую историю математики неоднократно осуществлялись попытки создания идеального или универсального языка. В этом состояла идея немецкого мыслителя Готфрида Лейбница – решать споры с помощью вычислений на универсальном языке в подходящей символической системе.

“Все можно вычислить!” – вот подлинный пафос замысла Лейбница. Всеобщая наука мыслится им как образ “философии истины”, объемлющий все науки, мораль и искусство в форме универсальной математики. Трудность создания грандиозного проекта универсального языка, включающего универсальную символику и логическое исчисление, состоит в том, что это должен быть искусный язык, свободный не только от неточностей естественного языка, но и от неизбежных смысловых искажений слов. Одной из причин появления парадоксов теории множеств было то, что математический диалект естественного языка перестал удовлетворять требованиям компактности и удобства при записи формулировок теорем, а также при применении этих формулировок. Напомним, что представители интуиционизма считают, что аксиоматический метод и формализация скрывают за языковой формой сущность математики в конструктивном обобщении человеческого опыта. При этом нужно быть готовым к некоторой дополнительности, поскольку более эффективные математические процедуры могут потребовать более мощных принципов доказательства корректности решения. В таком контексте даже конструктивная традиция математики может оказаться под подозрением в том смысле, что любое ограничение, запрещающее неконструктивные методы доказательства, может помешать установлению правильности эффективных процедур.

Важную роль в интуиционистской математике играют вычислимые операции, или алгоритмы, в соответствии с которыми осуществляются математические построения. В математическом обиходе под алгоритмом, по определению знаменитого логика А. А. Маркова, предложившего собственную программу построения математики, названную им “конструктивной”, принято понимать точное “предписание”, определяющее вычислительный процесс, который ведет варьируемые исходные данные к искомому результату. Уподобление вычислений, в соответствии с некоторым алгоритмом, работе некоторой “машины” не может пониматься буквально, поэтому в математической теории алгоритмов используется некоторая идеализация этого понятия. “Тем не менее, наглядные образы и понятия, выработанные в связи с развитием теории вычислительных машин дискретного действия, – подчеркивал академик А. Н. Колмогоров, – могут быть полезны для общей ориентировки в проблеме рационального определения понятия алгоритма” [62, с.7]. Теория алгоритмов, то есть процессов вычисления и математического вывода по тем или иным указанным правилам, возникла еще до появления электронных вычислительных машин. Хотя среди математиков нет методологического единства в отношении существования математических объектов, все они согласны с тем, что алгоритмы, или конструктивные процедуры, весьма эффективны и важны.

Алгоритмы существуют в математике с момента ее возникновения, как правила сложения и умножения чисел, как геометрические решения задач на построение, даже само понятие вещественного числа в реальной вычислительной практике сводится к алгоритму. В качестве типичного примера алгоритма в математической литературе приводят известный алгоритм Евклида для разыскания наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Когда математика стала оперировать абстрактными теориями, не имеющими прямого прообраза в действительности, в обосновании математики обозначились три основных направления: формализм, интуиционизм и логицизм. Математические понятия, с точки зрения логицизма, следует определять в терминах логики. Первым, кто рассматривал логику как науку, лежащую в основе других наук, был Готфрид Лейбниц. Логические рассуждения, лежащие в основе математического доказательства, – это форма деятельности человека. На первый взгляд, кажется парадоксальным, что именно Лейбниц и призывал вычислять вместо того, чтобы рассуждать. В действительности, “вычисление” и “рассуждение” неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического познания. Иммануил Кант тоже защищал интуитивный и конструктивный подход к определению математических понятий, одновременно настаивая на универсальной значимости основных логических принципов. Верность или неверность теорем не только напрямую зависит от возможностей форм деятельности человека, но и определяется через эти возможности.

Дедуктивная составляющая, включающая рассуждения и доказательства, и алгоритмическая составляющая, связанная с вычислениями и методами решения задач, как дополнительные понятия, всегда присутствовали в математической теории на всех этапах ее развития. Хотя в истории математики можно выделить периоды, когда предпочтение отдавалось, то методам вычисления, то проблемам обоснования. Сущность такого подхода выяснилась только в первой половине XX века. Логические рассуждения, представлявшиеся вначале совершенно строгими и неограниченными в возможностях и средствах, стали приводить в некоторых крайних случаях к парадоксам и противоречиям теории множеств. С другой стороны, понятие алгоритма в интуиционизме используется в "неуточненном" виде, поскольку адекватность произведенного уточнения математически не может быть доказана в принципе. После формализации понятия доказательства, в контексте методологической программы Гильберта, следовало установить полноту рассматриваемой формальной теории. Однако, согласно теореме Курта Гёделя, никакая достаточно сильная непротиворечивая аксиоматическая теория не может быть полной.

Одной из целей программы Гильберта было построение "вычислительного устройства", которое определяло бы, является ли теорема, записанная в некотором формальном языке доказуемой. "Мы сегодня занимаемся вычислениями, – отмечает известный специалист по теории сложности вычислений А. А. Разборов, – поэтому для нас более интересна теорема Чёрча (1936)" [117, с.128]. Американский математик и логик Алонзо Чёрч доказал, что не существует никакого алгоритма, который по утверждению автоматически проверял бы, является ли это утверждение доказуемым или нет. Одна из тавтологических версий "тезиса Чёрча" состоит в том, что математические задачи можно решать только математическими методами. Это, безусловно, одно из важнейших положений в философии математики. Пока речь шла о построении конкретных алгоритмов для решения каких-то конкретных задач, математики могли пользоваться несколько расплывчатой формулировкой этого понятия. Но как только появились предположения о возможной неразрешимости какой-либо алгоритмической проблемы, математики столкнулись с необходимостью уточнения общего понятия алгоритма, как математического эквивалента понятия компьютерной программы.

Произведенное уточнение в 30-х годах прошлого века дало немедленный эффект: были опубликованы доказательства невозможности алгоритмов для различных алгоритмических проблем и в математической логике. Так, например, в 1936 году Алонзо Чёрчем и английским математиком и инженером Аланом Тьюрингом была доказана "неразрешимость" проблемы разрешимости для классического исчисления предикатов, которую в то время Давид Гильберт считал главной проблемой математической логики. "Естественно возникал вопрос, – отмечает академик С. И. Адян, – не являются ли неразрешимые алгоритмические проблемы специфическими для самой теории алгоритмов?” [1, с.923]. На этот принципиальный вопрос дали ответ в 1947 году советский математик А. А. Марков и американский математик Эмиль Пост. Они независимо друг от друга доказали неразрешимость проблемы равенства для полугрупп, показав, что не существует алгоритма для решения вопроса об эквивалентности двух данных слов при произвольно заданных алфавите и словаре, поставленной в 1914 году норвежским математиком Алексом Туэ. Это был первый пример неразрешимой алгоритмической проблемы собственно математического, а не логико-математического, характера. Кроме того, уже в 1952 году академик П. С. Новиков доказал алгоритмическую неразрешимость в общем случае одной из классических проблем алгебры – проблемы тождества слов в конечно определенных группах, поставленной в 1912 году немецким математиком Максом Дэном задолго до появления в науке различных уточнений понятия алгоритма.

Этот результат специалиста по математической логике в области алгебры и полученные затем многочисленные следствия из него показали, что неразрешимые алгоритмические проблемы широко распространены в математике. А существует ли универсальный алгоритм, решающий разные задачи из элементарной геометрии? С точки зрения результатов Курта Гёделя, если в теории выразимы натуральные числа, то она может оказаться неразрешимой, то есть некоторые математические описания всегда будут неполными, поскольку какие-то аспекты познания всегда будут сопротивляться формальному описанию. Но если теория “работает” с действительными числами, которых значительно больше, чем натуральных, то интуиция подсказывает, что у такой теории ещё больше шансов оказаться неразрешимой. Тем не менее, польский математик Альфред Тарский в 1948 году обосновал существование алгоритма, проверяющего доказуемость утверждений элементарной геометрии. В связи с этим можно заключить, что подобно тому, как теоремы Гёделя не закрывают других путей внутреннего обоснования непротиворечивости отдельных частей математики, отсутствие общего алгоритма для целого класса задач не означает отсутствия частных алгоритмов и, тем самым, принципиальной разрешимости этих задач. Тарский доказал теорему о существовании алгоритма, но как долго будет запрограммированный алгоритм решать задачу из школьного учебника и что при этом произойдет, уже не имеет прямого отношения к математике и логике. Это как раз то место, с которого начинается теория сложности вычислений, которая интересуется не просто существованием алгоритмов для конкретной задачи, а тем, насколько они эффективны.

Все определения сложности имеют недостатки, поскольку само понятие сложности несколько туманно и каждый представляет ее по-своему. Кроме того, по теореме Тьюринга, доказанной в 30-е годы, проблема остановки неразрешима, то есть не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы определить остановится когда-нибудь данная программа или нет. “Вопрос “как сосчитать?”, – говорит известный специалист в области теории чисел Ю. В. Нестеренко, – всегда сопутствовал теоретико-числовым исследованиям” [108, с.87]. Благодаря широкому применению электронных вычислительных машин и запросам криптографии исследования по алгоритмическим вопросам теории чисел в последние десятилетия переживают период бурного и плодотворного развития. Именно в 60-е годы XX столетия, когда появились “настоящие” компьютеры, было осознано, что одни алгоритмы могут быть лучше других, и была понята необходимость построения некоторой математической теории сложности вычислений. Вопрос практической проверки утверждения сводился бы к оптимизации данного алгоритма и хотя бы в принципе, таким образом, для математики была бы осуществима мечта Лейбница: “вместо того, чтобы спорить, вычислять”. Алгоритмическую неразрешимость некоторых арифметических высказываний, для которых не существует, например, программы для машины Тьюринга, можно рассматривать как дополнение к результату Гёделя. Так могут ли математики узнать то, что они не могут знать? Это проблема не только математического мышления, но и по существу расплывчатости границы между теоретико-множественным языком и естественным языком общения.

Еще Готфрид Лейбниц хорошо понимал, что никакой научный прогресс не сможет сделать человеческое познание совершенным. В силу самой природы человека оно ограничено, и поэтому не может охватить все бесконечное многообразие терминов и дефиниций. Однако из-за своей “ограниченности” человеческие знания, как истинные, так и ложные поддаются исчислению, поэтому Лейбниц мечтал об универсальном синтезе всей науки. Именно этому и должны были способствовать его максимы искусства открытия. Максима – это правило или принцип. Принципами Лейбниц называл все фундаментальные истины, достаточные для того, чтобы в случае необходимости получить из них все заключения, после того как с ними “поупражнялись” и достаточное время их применяли. Образно говоря, познаваемый мир предстает перед нами как закодированный текст, который надлежит осмыслить и открыть. Возможно, что из такого понимания мира идут известные метафоры: “Книга Природы”, “Книга Жизни”, “Книга Бытия”. Со временем точка зрения Лейбница изменилась, и он, отходя от “финитных иллюзий молодости”, уже говорит о роли бесконечности в познании. Вот его слова: “И как в иррациональных отношениях разложение идет в бесконечность, хотя и приближается так или иначе к общей мере, давая при этом некие ряды, хотя и бесконечные, – точно так же в силу того же самого процесса случайные истины требуют бесконечного анализа, который один только Бог способен доводить до конца” [65, с.496]. В рукописном наброске “О мудрости” Готфрид Лейбниц среди своих максим познания формулирует признак совершенного знания, когда не остается ничего, чему нельзя было бы дать объяснения и чего нельзя было бы предугадать заранее. Говоря об анализе вещей или разделении трудностей на части, он откровенно замечает, что еще никто не научил искусству того, как это можно сделать.

Когда физики пытались объяснить реальный мир с помощью всеобъемлющей формальной теории, Лейбниц утверждал, что если бы были известны положение и скорость любой элементарной частицы, то тогда можно было бы предсказать будущее развитие мира. Доказав, что принципиально невозможно одновременно точно определить положение и скорость даже одной частицы, Вернер Гейзенберг тем самым не опроверг допущение Лейбница, а показал, что его основное условие неосуществимо. Немного позднее Курт Гёдель доказал, что любая, представляющая интерес содержательная формальная система содержит утверждения, истинность или ложность которых нельзя установить средствами соответствующей системы. В максиме, вставленной Лейбницем позднее, поясняется, что не так уж трудно завершить анализ истин в отличие от окончательного анализа вещей, поскольку анализ истины, вообще говоря, завершен, когда найдено ее удовлетворительное доказательство. Блез Паскаль утверждал, что долг математика – определять все мало-мальски сомнительные истины. Лейбниц по этому поводу заметил, что он бы хотел, чтобы Паскаль указал так же, как определить границы, за которыми понятия и высказывания перестают быть темными или сомнительными. Эпохальные открытия в развитии фундаментальной науки практически всегда были связаны со снятием некоторых запретов на границы познания или отказом от определенных общепринятых убеждений.

На всех периодах своего развития математика предъявляла убедительные примеры того, что познавательная способность человека может выходить за пределы его "предназначения". В методологическом плане развития математики нет жесткой границы между объектами математики и миром естествознания даже при непрерывном возрастании уровня ее собственной абстрактности. Наиболее характерный пример такого рода можно найти в истории математического анализа, точнее у одного из основоположников этой науки – Готфрида Лейбница. Один из принципиальных моментов современного нестандартного анализа, в который наиболее существенный вклад внес математик и логик Абрахам Робинсон, состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины, то есть как функции, стремящиеся к нулю, а как величины постоянные. Готфрид Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными, хотя и воображаемыми или идеальными, величинами особого рода. Именно он сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления. Такой подход хорошо согласуется с интуицией естествоиспытателя, поскольку бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и тому подобные величины мыслятся не как переменные, а просто как очень малые, почти что равные нулю. Но строгое логическое обоснование интуитивно правильные математические рассуждения Лейбница получили лишь почти триста лет спустя.

Одно из основных практических занятий философов-рационалистов, придерживающихся картезианских традиций, состояло в последовательном поиске совершенного языка, а также ясных и четких понятий. Готфрид Лейбниц жил во времена великих открытий. Это было время, когда математические триады древних греков: "аксиома – теорема – доказательство", а затем "определение – теорема – доказательство" вновь стали оказывать влияние не только на естествознание, но и на новые области философии. Математической философией Евклида была хорошо организованная система, в которой, отталкиваясь от принятых априори элементарных истин, можно с помощью логических операций прийти к строгому доказательству всех истинных утверждений. Пользуясь языком формальной логики, позволяющим изучать саму математику, Гильберт объявил, что пора довести эту древнюю мечту до ее окончательного воплощения, все еще надеясь, что в математике любое истинное утверждение доказуемо. Таким образом, святая троица "аксиома – теорема – доказательство" стала применяться не только к математическим сущностям, но и к самим теориям. Против немотивированных определений в такой схеме уже в наше время активно выступает академик В. И. Арнольд. Например, распространение дедуктивно-акиоматической математики привело к отказу от обычной в физике схемы, когда исследуемая модель опиралась на результаты наблюдений, а выводы – на проверку наблюдениями, и замене ее схемой: определение – теорема – доказательство. Поэтому попытки обойтись без вмешательства физики и реальности в математику могут разрушить образ математики как полезной человеческой деятельности.

Высшим искусством во всем, что относится к мышлению, Лейбниц считал экономичное употребление человеческого разума с помощью символов и знаков. "Беспримерный взлет новой математики, – пишет швейцарский математик Эрвин Энгелер, анализировавший особенность развития событий этого периода, – существенно опирался на освобождение от размышлений о содержательном значении математических знаков и на возможность производить вычисления с этими содержательными значениями в самом подлинном смысле этого слова" [138, с.13]. Совокупность правил вывода и логических операций вычислений на символическом языке Лейбниц называл универсальным исчислением. Для этого надо было создать искусство легко и безошибочно рассуждать, то есть такое исчисление, в котором естественные доказательства можно было бы заменить формальными вычислениями. Такому исчислению нужна была хорошая символика, прежде всего новых определений и понятий математики, чтобы избежать, как говорил Лейбниц, наиболее ощутимого злоупотребления, состоящего в том, что со словами не связывают никакой ясной идеи.

Готфрид Лейбниц стремился создать такой символической язык, с помощью которого можно было бы избежать подобных трудностей, а также двусмысленного или неточного толкования. Даже свое дифференциальное исчисление он рассматривал как шаг к некоему универсальному методу в математике. Он был убежден в том, что люди, мало касавшиеся труднейшего “математического поприща”, имеют недостаточное представление о том, что есть истина и что есть доказательство. Важнейшей функцией языка математики является сжатие информации с помощью формул. Готфрид Лейбниц предполагал, что человеческое рассуждение совершенствуется применением “некоторого рода знаков”, или характеров. С помощью характеров, то есть оптимальных обозначений или знаков, полезных тем, насколько адекватно они выражают свойства обозначаемого предмета, моделируются определенные процессы и ситуации. Идеалом искусства “характеризации” Лейбниц считал математику, поскольку в ней реализована функциональная простота обозначений, во многом благодаря однозначности понимания математических характеров.

Идея универсальной характеристики Лейбница состоит в сопоставлении понятиям, то есть терминам, числовых значений, то есть характеров. Составным терминам сопоставляется произведение числовых значений, входящих в него терминов. Проверка истинности утверждений сводилась к условию делимости соответствующих чисел. Его знаменитое – “давайте посчитаем” – опиралось на идею универсального средства для ответа на все вопросы. На эту тему у Лейбница имеется большое количество разрозненных текстов. Отметим интересное и глубокое наблюдение известного математика и философа А. Н. Паршина, что “нечто вроде нумерации Гёделя, с использованием простых чисел и разложения целых на простые множители, было введено в XVII в. Лейбницем в его знаменитой универсальной характеристике” [111, с.101]. Универсальная характеристика Лейбница является в этом смысле предвосхищением нумерации Гёделя, использованной в знаменитой теореме Гёделя о неполноте, но в содержательном плане, рассматривая ее как некое “универсальное “вместилище” для языка всех его высказываний, можно обнаружить также некоторую параллель и с координатным пространством Декарта. Формальный язык, в котором все вопросы можно было бы, по Лейбницу, решать вычислением, остался лишь мечтой, а после логических достижений XX века математический язык сам стал частью математики.

У всякого человека, владеющего естественным языком, имеется некоторое представление о потенциальной бесконечности, чего нельзя сказать об актуальной бесконечности. Начиная со времен Пифагора, в математике нет прямых доказательств утверждений о бесконечности любых множеств как актуальной, так и потенциальной. Более того, в математике от канторовского понимания бесконечности, например, множеств мощности больше, чем мощность континуума, почти ничего не используется, хотя диагональная процедура и позволяет, на первый взгляд, “увеличивать” множества. Проблема бесконечности впервые была поставлена эллинскими мыслителями и является общефилософской, поэтому один лишь ее математический анализ не может привести к постижению сущности бесконечного. Напомним, что утверждение Аристотеля “Infinitum Actu Non Datur”, что в переводе с латинского означает: “Понятие актуальной бесконечности – внутренне противоречиво”, активно поддерживали представители интуиционизма и конструктивизма. Алгоритмическую суть своего тезиса Аристотель формулирует так: “Бесконечное существует через полагание одной вещи после другой; то, что полагается, всегда остается конечным, но всегда другим и другим” [53, с.157]. В переводе на язык современной математики утверждение Аристотеля означает, что все бесконечные множества являются потенциально-бесконечными. Оно не доказано и основано на интуиции, но вместе с аристотелевским определением понятия потенциальной бесконечности из него следует, что бесконечное множество не содержит всех своих элементов. Не взирая на профессиональные возражения против актуализации бесконечности, Георг Кантор сформулировал дополнительный тезис: “Существует актуальная бесконечность”, то есть все бесконечные множества современной математики, включая любую аксиоматическую теорию множеств, являются актуально-бесконечными множествами.

Хотя, с другой стороны, квантовая физика – это мир абстракций, вообще говоря, другого типа. Полагая, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности, Георг Кантор не только стал изучать бесконечные множества как “готовые”, но и занялся задачей классификации бесконечных множеств. Актуальная бесконечность, по определению Кантора, есть “вещь-для-себя” и она никогда не становится “вещью-для-нас” [59, с.63]. Концепция Кантора понятия бесконечности основывалась на двух дополнительных потоках идей, один из которых был чисто математического содержания, а другой – философского. Полемизируя с философами, он использовал свои новые математические конструкции, пытаясь обосновать ограниченность прежних представлений, а говоря с математиками, был вынужден использовать философскую терминологию в оправдание своих нетрадиционных подходов. Основная идея проекта Кантора сводилась к установлению взаимнооднозначного соответствия между множествами. В соответствии с этим, он определил бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить во взаимнооднозначное соответствие со своим собственным подмножеством, отличным от всего множества.

Критика концепции Кантора способствовала созданию новых направлений в обосновании математики, связанных с отрицанием фундаментальной идеи теоретико-множественной математики – идеи актуальной бесконечности, например, интуиционизма и конструктивизма. Положительный вклад интуиционистов выразился в том, что они, проведя тщательный анализ многих трудностей, с которыми столкнулась математика в своем развитии, указали на различие между конструктивным и неконструктивным в математике. Одно из самых уязвимых мест канторовской концепции – это понимание экзистенциальных математических высказываний, то есть высказываний о существовании математических объектов. Такой объект в современной математике представляет собой некоторое множество, но в теории Кантора нет определения понятия множества, которое обычно разъясняется лишь на примерах. “Теория – это высшая, самая развитая организация научных знаний, которая дает целостное отображение закономерностей некоторой сферы действительности и представляет собой знаковую модель этой сферы” [11, с.131]. С точки зрения общей методологии науки теория Кантора, вообще говоря, не соответствует этому определению.

Давид Гильберт предложил довольно искусный выход из такого положения, который легче всего понять на примере “чистой” теории чисел, или арифметики Пеано. В докладе “О бесконечности” он сказал, что арифметика – это “чистейшее и наивнейшее дитя человеческого духа”. Даже в начальной школе учащиеся понимают, что такое натуральные числа, и принимают как естественный факт, что последовательность натуральных чисел может быть продолжена бесконечно. Натуральный ряд, по Кантору, определяется как множество, описываемое аксиомами Пеано, поэтому Давид Гильберт предложил существование натурального ряда понимать как непротиворечивость описывающих его аксиом. Условие непротиворечивости поддается не только философской, но и арифметической трактовке. Напомним, что одно из первых доказательств непротиворечивости “чистой” арифметики было дано Герхардом Генценом и то лишь средствами, не укладывающимися в финитную установку Гильберта. В рассматриваемом примере формальная система арифметики представляется как соединение на специальном “логико-арифметическом” языке некоторой версии неформальной теоретико-множественной аксиоматики натурального ряда с аристотелевской логикой в виде классического исчисления предикатов. Существенной чертой этой логики является принятие ею закона исключенного третьего, влекущего допустимость доказательств методом “от противного”, что обуславливает как неконструктивность некоторых понятий самой арифметики, так и базирующихся на ней математических теорий.

Современная математика достигла строгости путем принятия таких идеализаций, которым действительное, вообще говоря, строго не соответствует. Поэтому проблема соотношения формализуемой теории с ее формализацией оказалась не столь простой, как это представлялось в период становления теории доказательств. После опубликования теоремы Гёделя о неполноте, логики искали такой математический пример неполноты в арифметике Пеано, который был бы математически прост и интересен, не требуя при этом числового кодирования понятий из логики. Первые примеры верных, но недоказуемых в арифметике Пеано, строго математических утверждений о натуральных числах были получены Джефом Парисом. В этот “драматический” финал, для математиков исключительно формалистского направления, внес свой вклад и Лео Харрингтон, показавший, что доказательство Париса проходит для простого обобщения конечной теоремы Рамсея, порожденной старой задачей о светском приеме. Соответствующие формулировки приведены в главе “Теорема Рамсея” книги “Вычислимость и логика” американских математиков и логиков Джорджа Булоса и Ричарда Джеффри. В частности, отмечают они, удивительным является то обстоятельство, что “конечная версия теоремы Рамсея, соответствующим образом закодированная, может быть доказана в Z”, то есть в элементарной арифметике Пеано [13, с.348]. Возможно, что именно расхождение в языках формализма Гильберта и аксиоматики Пеано о натуральных числах обусловило, в соответствии с результатом Гёделя, неполноту формальной арифметики.

С точки зрения интуиционизма, натуральные числа – объекты чистого мышления, порожденные изначальной интуицией, тогда как в духе формализма принято говорить не о “натуральных числах”, а о множестве или системе натуральных чисел. Определяя бесконечное множество, Георг Кантор опирался в качестве исходного представления о бесконечности на последовательность натуральных чисел, однако понятие “натурального ряда” столь же неопределимо, как и понятие натурального числа. Даже аксиомы итальянского математика Джузеппе Пеано, разработанные в конце XIX века, не дают возможности отличить натуральный ряд, как единственную совокупность некоторых однозначно понимаемых сущностей, называемых натуральными числами, от совокупности всех простых чисел. Хотя эти аксиомы на это и не претендуют. Они претендуют на то, чтобы определить натуральный ряд с точностью до изоморфизма. Следует отметить, что никакая система математических аксиом не определяет какую-либо структуру однозначным образом, в лучшем случае – с точностью до изоморфизма. Понятие натурального ряда выступает в современной математике в разных качествах и применениях, поэтому одна из актуальных философских проблем математики состоит в выявлении свойств, явно или неявно приписываемых натуральному ряду. Пока логика была бессильна классифицировать рассуждения со многими натуральными рядами, математика была вынуждена рассматривать во всех случаях один и тот же натуральный ряд. То, что конечное число аксиом Пеано содержит в себе много неожиданного, объясняется возможностями повторных применений этих правил по существу в неограниченном числе комбинаций.

В знаменитой философской работе Пола Бенацеррафа “Чем не могут быть числа” [143] выясняется, могут ли числа быть объектами, обладающими некоторой реальностью. Проблему эпистемологического статуса математических объектов можно сформулировать в виде следующей дилеммы:

либо математика не говорит о числах, либо математики обладают неестественными способностями познания. Обе они не слишком привлекательны с точки зрения традиционной математики. Может быть, наряду с существованием множеств надо признать существование чисел? Последовательность объектов, сводящаяся к последовательности натуральных чисел, обладает дополнительными свойствами, которые не связаны со свойствами чисел, поэтому трудно решить, что выражает сущность натуральных чисел. Ситуация с натуральным рядом, отвлекаясь от реальности, похожа на ситуацию с евклидовым пространством, в котором, предположительно, мы живем. С одной стороны, его нельзя однозначно определить никакими аксиомами, а с другой стороны, известная система аксиом Гильберта определяет это пространство с точностью до изоморфизма, то есть реальное евклидово пространство одно из целого класса изоморфных между собой пространств. Поэтому проблема с натуральным рядом имеет, вообще говоря, универсальный характер. Физический натуральный ряд, скорее всего, отличается от своей математической модели – математического натурального ряда.

Ситуация с натуральным рядом в настоящее время сравнивается с положением евклидовой геометрии в XVIII веке, когда она считалась абсолютной истиной, поскольку была единственной геометрической теорией, обязательной и для математиков, и для физиков. Можно говорить об интуиции натурального ряда, которая без использования аксиом проявляется в рассуждениях о натуральных числах, или о “евклидовой интуиции”, которая делает вполне определенной и наглядной геометрию. Теория натурального ряда берет за основу в идеализированном виде процесс реального счета физических предметов, который в достаточно простых случаях можно довести до конца, распространяя эту ситуацию до бесконечности. “Духу физики, – писал известный советский геометр П.К. Рашевский, – более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобрели бы в каком-то смысле “размытый вид”, а не являлись строго определенными членами натурального ряда” [118, с.244]. Такого рода реформа числового ряда должна будет сопровождаться реформой числовой прямой, которая будет отличаться от обычной некоторой размытостью своих элементов, поскольку последняя будет передаваться и дробям с большими знаменателями.

В свете этих результатов можно сказать, что различные попытки нового обоснования математики в существенной степени зависят от подхода к проблеме натурального ряда и к решению проблемы бесконечности вообще. Давид Гильберт однажды заметил, что “математическая литература переполнена бессмыслицами и нелепостями, проистекающими из бесконечности”. Единственным законным основанием запретить подобные порывы математической интуиции является логическая несовместимость свойств бесконечных математических сущностей.

Под влиянием известных результатов К. Гёделя, обнаружившего границы структуралистского мышления математиков, возникла новая “архитектурная программа” для математики, в которой ведущую роль играет понятие доказуемости вместо понятия истинности. Но следует признать, что математики при этом используют неявное условие об идеальной приспособленности натурального ряда для описания различных сколь угодно больших математических совокупностей. При этом математические методы оказываются столь эффективными, возможно потому, что наш мир пронизан смыслом.

Проблема континуума является одной из главных проблем, которые должны были определить направления развития математики XX века. В ней сконцентрированы фундаментальные дополнительные понятия теории познания: актуальная и потенциальная бесконечности, непрерывность и дискретность. Попытки ее решения показали, что она является одним из принципиальных вопросов логического обоснования математики. Вместе с тем результаты, полученные К. Гёделем и П. Коэном явно показали, что истинность и ложность классической проблемы континуум-гипотезы не может быть установлена средствами современной теории множеств.

Полученные результаты привели к появлению новых работ, среди которых необходимо отметить теорему Лёвенгейма-Сколема. По существу данная теорема утверждает, что любая непротиворечивая система аксиом не устанавливает пределов для интерпретаций, или моделей. Одна из причин появления “побочных” интерпретаций связана с существованием “дополнительных” неопределяемых понятий, содержащихся в каждой аксиоматической системе, которые могут трансформироваться.

Дедуктивная составляющая, включающая рассуждения и доказательства, и алгоритмическая составляющая, связанная с вычислениями и методами решения задач как дополнительные понятия всегда присутствовали в математической теории на всех этапах ее развития. Логические рассуждения всегда традиционно лежат в основе всякого математического доказательства. Но в действительности понятия “вычисление” и “рассуждение” неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического познания.

Занятия философией математики требуют, кроме понимания общефилософских положений, ясности в методологических вопросах современного математического знания. Методологические основания математики стали настолько многообразны, что подтверждаются сомнения в возможности существования универсального метода неклассической математики. По существу это вопрос об общефилософских принципах, реализуемых в математическом познании, поскольку после гёделевских ограничительных результатов уже нельзя философски поддерживать устаревшие представления о науке.

ГЛАВА 3
ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СУЩНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Эволюцию современной научной картины мира принято рассматривать в динамике развития от классического к неклассическому и постнеклассическому знанию. Классическая картина мира, основанная на достижениях Галилея и Ньютона, господствовала вплоть до конца XIX столетия. Основным условием описания объектов становилось требование элимнации всего того, что относилось либо к субъекту познания, либо к возмущающим факторам и помехам. Строго однозначная причинно-следственная зависимость укрепляла претензии научной рациональности на обнаружение некоего общего правила или единственно верного метода построения истинной теории. Кризисы конца XIX века пошатнули постулаты классической картины мира. Ей на смену пришла неклассическая картина мира.

Переход к неклассическому мышлению был осуществлен в период революции в естествознании на рубеже XIX-XX веков в связи с открытием законов термодинамики и под влиянием теории относительности Эйнштейна. Случайные процессы уже не оказываются чем-то внешним и побочным. Случайное событие – это новый фактор, имеющий важнейшее значение в развитии системы. Изменения, произошедшие в это время в философских основаниях научного познания, коснулись и классического рационализма. Новым императивом следующего этапа развития науки, постнеклассики становится включенность ценностно-целевых структур в процесс познания. В современной постнеклассической картине мира устраняется ориентация на линейную однозначность и тотальную предзаданность сюжетов последующего развития. Это делает будущее принципиально неопределенным и открытым для новообразований.

Практическая деятельность человека раздвигала интеллектуальные границы окружающего мира, выявляя в нем все новые математические подробности. Так, например, натуральный ряд вначале мыслился лишь потенциально бесконечным, но с конца XIX века математики постепенно склонялись к признанию бесконечных множеств как актуально существующих, даже независимо от того описаны или нет способ их образования. В современной математике эта точка зрения возобладала, хотя не все направления философии математики ее разделяют. Поэтому продолжаются теоретические дискуссии об актуальной и потенциальной бесконечности, в которых “мостом” между двумя пониманиями натурального ряда выступает аксиома математической индукции.

В методологическом плане интересно то, что находится в промежутке двух крайностей – между детерминированным и случайным, между логическим и парадоксальным, между интуитивным и формальным. Заметим, что само понятие “интерес” происходит от латинского понятия “inter-esse”. Буквально это означает “быть между или в промежутке”. Нас чаще всего интересует такая философская идея, в которой, при всем ее рациональном содержании, есть что-то необычное и странное, выходящее за границы здравого смысла. Логика современного мезомира исключает многие мыслимые, но физически невозможные состояния макромира. Именно поэтому мезомир – это очень подвижный и живой мир сложно организованных явлений на языке математических структур. Анализ онтологических оснований математического мышления оправдывает априорность и реальность математического знания. Однако трудность такого анализа состоит в том, что онтологические характеристики не могут быть определены только в логических и математических терминах.

Методологические притязания на то, что математическая теория всецело выводима из самой себя, едва ли хорошо обоснованы. Каждая содержательная научная теория возможна лишь при допущении, что законы природы каким-то образом уже заданы, что и позволяет теории работать. Это рассуждение в свою очередь основано на другом допущении, согласно которому методологические принципы математики могут выступать в качестве онтологических принципов. Проблема в том, что философы математики знают, что хорошая методология может затем превратиться в плохую онтологию. К обсуждению попыток финитизации математической бесконечности в контексте новых обосновательных стандартов в математике мы перейдем в следующем параграфе.

3.1. Финитизация бесконечного в методологии неклассической математике

В сущности, любая обоснованная теория феноменологична, так как абсолютное проникновение в природу вещей в принципе невозможно. Гораздо удивительнее то, что последовательность целых чисел, простейший математический объект, рожденный самим разумом, становится столь же расплывчатым и несовершенным, когда его рассматривают с аксиоматической точки зрения. Интуиционистская арифметика не выходит за пределы конечного для обеспечения ее предельной достоверности и тем самым достоверности тех теорий, которые интерпретируются в ее понятиях. Однако критики интуиционизма утверждали, что очень большие конечные множества столь же недоступны для проверки, как и бесконечные множества. Заметим также, что граница между проверяемым и непроверяемым в математике – это сложнейшая проблема современной философии математики, для решения которой необходимо переосмысление онтологического основания всего математического знания.

Натуральный ряд чисел, как идеализация количественных закономерностей, для больших совокупностей искажает реальную ситуацию.

Даже аксиома Архимеда, говорящая, что для любых двух чисел $a, b > 0$ найдется такое n, что $na > b$, предполагает существование бесконечно больших натуральных чисел. Но, как это часто бывает в науке и жизни, осознанные нежелательные следствия очень долго не замечаются, возможно, поэтому математики и не говорили о “числах” другой природы, отличной от чисел натурального ряда. Формально выписанные очень большие числа теряют всякий реальный смысл. Рубеж, отделяющий “истинные” числа, указать невозможно, хотя обычно указывается интервал от 10^{100} до 10^{200}, например, число всех элементарных частиц во Вселенной порядка 10^{108}, а число всех взаимодействий элементарных частиц за всю историю Вселенной порядка 10^{150}. Поэтому, применяя в прикладной математике предельные переходы и оценки, полученные в “чистой” математике, необходимо переосмысливать некоторые привычные представления, так с точки зрения математического анализа $\lim \lg\lg x = \infty$ при $x \to \infty$, однако, $\lg\lg 10^{100} = 2$. В связи с развитием абстрактной теории дискретных автоматов типа машины Тьюринга указанная проблема сколь угодно больших натуральных чисел влияет и на отношение понятия “конструктивности” к оценке конечного числа шагов тех или иных преобразований, которые заведомо не реализуемы. Физики и инженеры получают иногда удовлетворяющие их результаты, обращаясь с расходящимся рядом или интегралом, как со сходящимся. Бесконечность такого ряда может означать невозможность окончания некоторого реального процесса, а его физическая или технически обусловленная “конечность” указывает на то, что хотя он и бесконечен, он все же “схватывается” конечным числом этого процесса. Кроме того, из естественнонаучных соображений следует, что реальные большие натуральные числа размываются и являются представителями семейства “близких” им чисел.

Еще до квантовой механики переворот в философско-математическом осмыслении реальности был связан с теорией относительности. Используя теорему сложения скоростей в специальной теории и отказываясь от аксиомы Архимеда о неограниченности числовой оси, украинский математик академик В. Л. Рвачев строит неклассическую модель натурального ряда. По этому натуральному ряду с помощью релятивистских арифметических операций по стандартной схеме вводятся рациональные и иррациональные числа, а затем рассматриваются элементарные функции, даже операторы дифференцирования и интегрирования, которые соответствуют предположению о существовании наибольшего числа c, то есть такого числа, больше которого чисел нет в процессе реализации любых алгоритмов. Выбор величины c осуществляется из конкретных физических или математических соображений, например, в теории относительности c – это скорость света. “Сравнение результатов данной работы с высказанными П. К. Рашевским прогнозами, касающимися свойств гипотетического натурального ряда, – отмечает В. Л. Рвачев, – показывает их хорошее согласование” [119, с.884]. В неархимедовы арифметические операции и другие конструктивные средства входит в виде параметра число $\alpha = c^{-1}$, причем в пределе при стремлении $\alpha \to 0$ получаются математические операции и операторы, соответствующие общепринятому представлению о натуральном ряде чисел. Система “релятивистских” арифметических операций, включающая сложение $x \dotplus y$, вычитание $x \,—\, y$, умножение $x \circ y$ и деление $x : y$, где, например,

$$x \dotplus y = (x + y)/(1 + \alpha^2 xy) \quad \text{и} \quad x \,—\, y = (x - y)/(1 - \alpha^2 xy),$$

определяет на $(-c, c)$ поле с обычным нулем и единицей. Заметим, что в духе предсказания Рашевского сферы больших радиусов, близких к c, относительно метрики $\rho(x, y) = |x \,—\, y|$, становятся с евклидовой точки зрения почти неразличимыми. Эту модель неархимедовой арифметики можно рассматривать как один из финитных формализмов структуры реальности. Подобного рода эффекты, хотя и совсем другой природы, существуют и в области очень малых протяженностей благодаря тому, что свойства пространства на столь малых расстояниях не описываются евклидовой геометрией.

Согласно Блезу Паскалю, “двойная бесконечность”, а именно “бесконечность в малом” и “бесконечность в большом”, присуща вещам и существам природы. Развитие квантовой механики показало абсурдность естественной геометрической интуиции. Для этих целей используется формализм неархимедова анализа, в основе которого лежит поле p– адических чисел. С другой стороны, физические величины, уменьшенные сверх некоторых границ, в силу их квантовых свойств, могут быть лишены смысла, поэтому физики вводят “физические” бесконечно малые величины, которые с математической точки зрения можно отнести к объектам актуальной бесконечно малой величины. В современных математических курсах это понятие строго обосновано в рамках нестандартного анализа. Знаменитые ограничительные результаты Гёделя исходят из неявного убеждения, что, сколько бы ни продолжать построение метаматематических формул, для “хорошо формализованной” математической теории, принципы пересчета и упорядочения формул подчиняются схеме обычного натурального ряда. Поскольку метаматематические формулы выводятся математиками, возможно, с использованием электронных вычислительных машин, то можно сказать, что это некоторый реальный физический процесс, но теорема Гёделя о неполноте имеет весьма отдаленное отношение к физике. По существу результаты Гёделя опираются на дополнительное условие об идеальной приспособленности натурального ряда для описания сколь угодно больших совокупностей. Поэтому в программе Гёделя речь идет об идеализированном развитии математического процесса, когда при пересчете формул, невзирая на их количество, считается вполне естественным применять схему натурального ряда, хотя финитные конструкции Гёделя становятся при этом чрезвычайно сложными и при полной расшифровке сокращений даже явно не выписываются. “Реформированная” числовая прямая тоже должна отличаться от обычной некоторой размытостью своих элементов, поскольку точные рациональные приближения вещественных чисел возможны благодаря тому, что элементы стандартного натурального ряда считаются точно определенными при любом удалении по нему.

В теории Кантора множество рассматривается как “единство”, в котором нет взаимодействия элементов, а имеет место лишь внешняя унификация. Одной из важнейших особенностей прикладной математики и математизируемых областей знания является использование понятий, которые с точки зрения “чистой” математики не являются однозначно определенными, то есть это размытые и нечеткие понятия. “Нормативы точности, ясности и однозначности складываются исторически, – считает философ науки В. Ф. Берков, – а поэтому являются относительными” [10, с.31]. Проблема “снятия” неопределенностей важна и с точки зрения развития современных компьютерных технологий. Неопределенность можно трактовать в контексте дополнительных понятий, как недостаток информации о некотором явлении и как свойство самой информации. Центральным звеном компьютерных технологий является субъект познания – человек, а ему присущи психологические и физиологические характеристики, которые в своем большинстве им не осознаются. Тем не менее, человеческий мозг способен на эффективное абстрагирование даже в том случае, когда соответствующая задача не сформулирована математически корректно. Предельное огрубление человеческой логики и излишняя ее конкретизация может оказаться тупиковым направлением в логике искусственного интеллекта. Это одна из причин внимания к проблеме статуса нечеткости в логике, а также к многозначным и нечеткозначным логикам в работах по искусственному интеллекту.

В интуиционизме математики не только опираются на существенную неполноту имеющихся знаний, но и стремятся использовать эту недоопределенность как положительный фактор. Американский специалист в области теории управления Лотфи Заде считает, что “нечеткость, присущая процессу мышления человека, наводит на мысль о том, что в основе этого процесса лежит не традиционная двузначная или даже многозначная логика, а логика с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода” [52, с.7]. Он ввел понятие “нечеткого множества”, расширяющее базовое понятие математики – множества, которое может служить дедуктивной моделью некоторых размытых понятий, используя степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и полной непринадлежностью. Характеристическая функция множества $A \subseteq X$ – это функция $\mu_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\mu_A(x) = 0$, если $x \notin A$, значения которой указывают, является ли $x \in X$ элементом множества A. Нечеткие множества являются естественным обобщением обычных множеств, когда приходится отказываться от бинарного характера значений характеристической функции, то есть 1 или 0. Нечеткое множество A на совокупности объектов $X = \{x\}$ задается функцией принадлежности $\mu_A(x)$, которая каждому x сопоставляет некоторое число из интервала [0,1], являющееся степенью принадлежности x к A. Точнее говоря, нечеткое множество A – это совокупность пар вида $\{(x, \mu_A(x))$: $x \in X\}$, где функция принадлежности $\mu_A : X \to [0,1]$. Конкретный вид функции принадлежности носит в значительной мере субъективный характер. Чем ближе значение $\mu_A(x)$ к единице, тем выше степень принадлежности x к множеству A, а чем меньше величина $\mu_A(x)$, тем ниже степень принадлежности точки x к A.

Отличие используемого Лотфи Заде формализма от вероятностного математического аппарата в том, что последний не охватывает неопределенностей, по существу, онтологического характера, определяемых отсутствием границ свойств объектов. “Категория нечеткости и связанные с ней модели и методы очень важны с мировоззренческой точки зрения, поскольку с их появлением стало возможно подвергать количественному анализу те явления, которые раньше либо могли быть учтены только на качественном уровне, либо требовали использования весьма грубых моделей” [51, с.110]. При таком подходе происходит изменение операций и отношений между множествами и возникает некоторая новая многозначная, точнее бесконечнозначная, логика, обобщающая обычную двузначную. Хотя в математическом плане теория Заде не предлагает принципиально новых идей, методологическое значение этой теории состоит в прикладной интерпретации некоторых полярных категорий.

Основным объектом альтернативной теории множеств чешского математика Петра Вопенки является понятие нечетко заданной бесконечной совокупности. Совокупности, образуемые на основе какого-либо естественного свойства, почти всегда выделяются нечетко. Это новые объекты в основаниях математики, отличающиеся от нечетких множеств Заде, в которые объекты попадают лишь с определенной “мерой”. Идеология интуиционизма в обосновании математики способствовала преодолению страха перед понятием бесконечности. Канторовская теория множеств – это теория четко заданных актуальных бесконечных совокупностей, в том смысле, что их элементы хорошо различимы для созерцания. Поэтому все структуры, изучаемые в математике, основанной на канторовской теории множеств, априорно жестко заданы. “Именно поэтому, – считает Петр Вопенка, – математики столь беспомощны в постижении таких неточных по самой своей сути понятий, как реализуемость, взаимоотношение непрерывного и дискретного и т.д.” [23, с.14]. Конструкции, которые изучает современная математика, не единственно возможные. После того, как было обнаружено, что “множество всех множеств” является нечетко заданной совокупностью, оно было просто запрещено, а, с другой стороны, аксиома выбора, постулирующая существование функции выбора, имеющей явно нечеткий характер, активно используется в современной математике. Неоднозначность функции выбора контрастирует с установкой классической теории множеств, использующей аксиому выбора, на четкость и однозначность исследуемых объектов.

Неожиданное решение континуум-гипотезы, позволяющее развивать такие теории, в которых континууму могут соответствовать различные мощности, также плохо согласуется с изначальной позицией Георга Кантора об актуальных бесконечных множествах как однозначно определенных объектах реальности. Но если рассматривать феномен бесконечности в согласии с опытом при наблюдении больших и необозримых множеств, то тогда бесконечность в природе будет означать лишь невозможность конца или возможность его отсутствия, а бесконечность процесса не обязана означать чрезмерного обилия его событий. Даже, когда говорят о горизонте познания, сам он признается четким явлением, но то, что довольно близко находится перед ним, выделяется нечетко. В философии математики обсуждается гипотеза, согласно которой “проблемы классической теории множеств являются не столько проблемами изучаемой “реальности”, сколько проблемами неадекватности идеализаций, которые соответствуют этим реалиям” [114, с.98].

Поскольку развитие канторовской теории множеств не снимает феноменов нечеткости и неоднозначности, то сравнительный анализ классической и альтернативной точек зрения будет способствовать пониманию этих проблем. С точки зрения современной философии математики проблема бесконечности заключена в ее актуальности и нечеткости. Современные исследователи философии математики говорят о бесконечности не только как проблеме актуальной и потенциальной бесконечности или проблеме континуума, но и в более широком контексте, как проблеме не-измеримости, не-разрешимости и не-вычислимости.

Активное внедрение вычислительной техники, даже в некоторые области математических доказательств, требует осмысления новых подходов к современной математике. Известный математик В. М. Тихомиров по этому поводу пишет: "Существует разрыв между бесконечностью, заложенной в математические понятия (числа, функции, отображения, уравнения и пр.) и практической реализуемостью, которая всегда требует конечного (и притом "небольшого") числа арифметических действий, итераций, шагов алгоритма и т.п. ... Это побуждает к обсуждению проблем оптимальной финитизации – преобразования бесконечного в конечное" [127, с.177]. Зачастую функции как решения различных дифференциальных, интегральных, разностных уравнений и их комбинаций "зашифрованы" в виде задач, а поскольку в большинстве случаев ответ не выражается в конечном виде, то его приближенное выражение, по существу, – это финитизация. Поэтому Давид Гильберт предполагал, что можно дать финитное обоснование непротиворечивости математических теорий как наиболее достоверное. Но имеет ли "невинное допущение", выражаемое в финитистской точке зрения, ту гносеологическую ценность, на которую претендует? Как показал Курт Гёдель, понятие "доказуемой истины" является более узким, чем понятие "абстрактной истины", восходящей к идее бесконечных проверок. Гносеологический анализ прикладных аспектов математического знания позволяет понять взаимоотношение математического творчества с гёделевским ограничением.

Одним из основных источников оснований математического знания является вера в адекватность физической интерпретации формализма, позволяющая постулировать математические истины, недоступные "чистой" интуиции. Вообще говоря, нет никаких философских оснований предполагать, что ограничения, накладываемые финитизмом Гильберта, столь уж необходимы для исключения вызывающих сомнение элементов математического мышления. Несмотря на то, что были получены финитные доказательства непротиворечивости довольно значительного фрагмента элементарной теории чисел, вопреки первоначальным ожиданиям Давида Гильберта, так и не удалось финитно установить непротиворечивость арифметики в полном объеме, а тем более для анализа и теории множеств. Причины подобного рода неудач отчасти стали проясняться благодаря второй теореме Гёделя о неполноте. Однако результаты Гёделя не затрагивают основного положения программы Гильберта о возможной реабилитации тех фрагментов математики, которые подверглись критике интуиционистов. Поэтому в философии математики рассматриваются постгёделевские модификации программы Гильберта с точки зрения соразмерности рабочих целей этой программы, например, финитного обоснования теории множеств, с ее конечной целью, а именно, обоснования почти всей современной математики.

Поскольку споры о бесконечности в XX веке практически не оказали существенного влияния на развитие большинства математических дисциплин, то академик А. Д. Александров даже высказал гипотезу о том, что через 200-300 лет теория множеств будет восприниматься примерно так же, как сегодня воспринимается средневековая схоластика. В качестве основных источников затруднений математиков, требующих вмешательства философов, Людвиг Витгенштейн выделяет следующие два. Это, во-первых, стремление трактовать математику как своеобразную естественную науку и соответствующее понимание ее утверждений по аналогии с эмпирическими, а, во-вторых, это нарастающая тенденция к чрезмерному обобщению, игнорирующая специфику конкретных или отдельных случаев. Дополнительным параметром в определенности языка науки является человеческая практика. Это напрямую связано с идеей Витгенштейна о том, что значение не может превзойти употребления. Поэтому стремление к последовательному обобщению должно уравновешиваться и сдерживаться бережным отношением к частным теориям, поскольку, если общие теории не способствуют систематизации и разъяснению сравнительно более элементарных вопросов, то они теряют весь свой смысл.

Естественные науки, как бы их ни трактовали в духе наук о материальном мире, имеют дело только с тем миром, который они описывают. Поэтому приходится считаться с “интуитивными установками”, которые могут формироваться даже тогда, когда еще нет языковых средств их выражения. Например, утверждения о множествах, если они являются удачными языковыми формулировками соответствующих интуитивных установок, как бы обладают некоторой силой, заставляющей считать их истинными. Когда математики осознали, что натуральные, вещественные числа и многое другое можно трактовать как множества, то это побудило их заняться общей теорией множеств. В частности, по поводу фундаментального в математике понятия “множества” тополог А. В. Архангельский говорит: “Опыт современной математики и анализ ее оснований показывают, что множества служат тем основным элементарным материалом, из которого строятся все основные математические объекты. Отсюда вытекает универсальность идеи множества и языка теории множеств для математики” [9, с.6]. Кроме того, понятия теории множеств по степени общности сравнялись с понятиями логики, хотя при этом пришлось расстаться с привычными нормами мышления. Например, в теории бесконечных множеств высказывание “целое больше своей части” потеряло свой прежний смысл.

Серия философских определений понятия множества содержится в переписке Георга Кантора с Давидом Гильбертом (1897-1900), где вводится понятие “завершенного множества”, которое, по словам Кантора, является “актуально существующей целостностью”. В книгах по современной математике, посвященных “наивной теории множеств”, избегают точного определения понятия множества. “Если исходить из канторовского определения множества, то “целое”, которое объединяет многие элементы в множество, становится “существеннее” составляющих его частей, и потому, например, множество не может сводится к механической сумме отдельных элементов” [15, с.24]. Тем не менее, трудности специальной математической терминологии для профессионалов не так уж сложны и их всегда можно устранить. Так математика для Людвига Витгенштейна это не только область знания, но также и деятельность, поэтому “ложные ходы” в ней могут существовать только в виде исключения. Говоря о знании в математике, он предостерегал, что здесь важен не “внутренний процесс” или “состояние”, а интересно именно то, как мы употребляем математические предложения. На естественные науки можно смотреть как на системы ответов на вопросы, но излишнее вопрошание, точнее вопросы, имевшие смысл в прошлом и отражавшие привычки мышления, могут препятствовать развитию науки. Учитывая некоторые внутренние механизмы самоорганизации науки, можно объяснить эффект распознавания нового знания, частично интерпретируя тем самым и известный парадокс Менона. Заметим, в связи с этим, что даже представление о памяти как о хранилище впечатлений, не является достаточно полным, хотя и выглядит вполне естественным. Человек может основательно забыть то, что он хотел бы вспомнить. Его “акт воспоминания” относится к тому моменту, в котором он должен узнать то, что хранится в его памяти.

Для объяснения внутренней силы нового знания математикам иногда не хватает вкуса к философии. Говоря же о специфике философии математики, можно вспомнить известное мнение, восходящее к Платону, согласно которому в определенных ситуациях философское рассуждение может оказаться более необходимым, чем математическое, поскольку последнее покоится на условных допущениях, а философия претендует на безусловность. Однако формальная проблема о методах решения не является проблемой философии математики, хотя и представляет философский интерес с точки зрения моделирования математической деятельности. Идеализация дедуктивной составляющей математических рассуждений способствовала развитию логико-математической теории доказательств и представлению о математике как исключительно дедуктивной науке. Но математика не сводится только к доказательствам. Интуиция сохраняет в ней свою роль как дополнение или как “противовес” логики. Польский математик и логик Альфред Тарский считал, что “вплоть до конца девятнадцатого столетия понятие доказательства имело главным образом психологический характер” [126, с.142]. Творческая мысль ассоциативна, поэтому в ней важную роль играет прослеживание самых разнообразных связей, участвующих в любом осознанном понимании довольно сложного доказательства. Это задача не только методологии, но и психологии. Умение предсказывать правильный результат основывается на мнемонических дополнительных ассоциациях сходства и различия, сопоставления и противопоставления, продуктивного и непродуктивного. По существу, на аргументы, применяемые при доказательствах, не накладывалось никаких ограничений, кроме интуитивной убедительности, хотя уже и начала ощущаться потребность в анализе самого понятия “доказательства”.

Такой анализ был проделан логиками, так что, начиная с работ немецкого математика Готлоба Фреге, который первый в явной форме ввел в математическую логику кванторы и систематически использовал их, было определено новое понятие формального доказательства. Осуществив дедуктивное аксиоматическое построение математической логики и применив ее в качестве метода обоснования арифметики, Фреге представил математику как продолжение логики. Подход Фреге к арифметике можно мотивировать его антипсихологизмом. Обнаруженный Бертраном Расселом парадокс поставил под сомнение возможность построения логического основания арифметики. Если отказаться от строго формалистской методологической установки “все обосновать логически”, то гносеологическую задачу обоснования отсутствия противоречий в арифметике можно считать решенной. Тем не менее, в методологическом контексте, в виду отсутствия общепринятого критерия достоверности, непротиворечивость арифметики все еще рассматривается как проблема философии математики. Тем не менее, за исключением некоторых элементарных теорий, Альфред Тарский делает вывод о несовпадении понятий истинности и доказуемости относительно всех формализованных теорий, имеющий почти универсальный характер. То, что философские следствия этого результата негативны по своему характеру, нисколько не уменьшает его эпистемологического значения. Даже в области математики понятие доказуемости, вообще говоря, не замещает понятия истинности. Однако именно доказательство по-прежнему остается единственным методом в любой математической теории, используемым для утверждения истинности ее предложений.

Теоремы Гёделя о неполноте и результат Тарского о невозможности определения понятия истинности в формализованных языках свидетельствуют о внутренней ограниченности формализации. Проблема доказательства непротиворечивости математики рассматривается в рамках расширенной программы обоснования Гильберта, учитывающей трудности строго финитивного обоснования трансфинитного, которые сводятся к известному противопоставлению “онтологическое – лингвистическое”. Неклассическое явление, вскрытое теоремами Гёделя и Тарского, состоит в понимании ограниченности потенциальных возможностей человека с точки зрения его алгоритмической и эвристической деятельности. Непротиворечивость теории контролируется мысленными опытами, играющими важную роль в процессе создания самой теории. Но с другой стороны, например, некоторые психологические рассуждения Брауэра и его последователей апелируют в основном к элементарному самонаблюдению, не принимая в расчет достижений научной психологии. Ощущение противоречивости возникает еще и от того, что Брауэр, по словам философа математики В. Э. Войцеховича, “пытался оторваться от платонизма, порвать с античной традицией математиков оперировать идеальными объектами подобно материальным предметам” [22, с.501]. Тем не менее, интуиционистско-неплатонистский стиль способствовал созданию новых направлений в философии математики.

Философская компонента современного математического доказательства включает и такие сугубо “человеческие” характеристики, как обозримость, убедительность и понимание. У математического доказательства нет “точного” определения, поэтому роль субъективного элемента в его понимании и восприятии, как “убедительного” рассуждения, зависит от методологических установок ученых-математиков. Тем не менее, вполне возможно, что современная математика, выдвигающая новые стандарты строгости рассуждений, представляет, с точки зрения будущей математики, альтернативный вариант математического доказательства. Хотя канторовская теория множеств стала “миром”, вместившим почти всю математику, постепенно угасает тот восторг, который охватил многих математиков после канторовского “прорыва в бесконечность”. Отдельные математические дисциплины “ответственность” за свою непротиворечивость “возложили” на теорию множеств. Сложность создавшейся ситуации состоит в том, что теория множеств привнесла в математику целый набор частных случаев актуальной бесконечности, большинство из которых нельзя разумно интерпретировать в реальном мире. С философской точки зрения математику можно использовать для выражения мыслей, предваряющих знание, которые в дальнейшем нельзя иногда проверить. После того, когда огромная работа, проделанная математиком и философом Георгом Кантором и другими математическими мыслителями, такими как Лёйтзен Брауэр и Давид Гильберт, стала достоянием истории, некоторым математикам стала казаться вполне естественной мысль о том, что, как и всякое сложно устроенное “творение ума человеческого”, математика должна быть “возведена” на достаточно прочном основании.

Первым реальную идею сознательно продуманной “архитектурной программы” для современной математики предложил именно Кантор. Сам Георг Кантор отмечал, что столь трудная и всеобъемлющая тема как проблема бесконечности была объектом самых различных мнений и толкований, но ни математики, ни философы не пришли здесь к полному согласию. В своей прощальной речи “Познание природы и логика” (1930), произнесенной в Кёнигсберге, Давид Гильберт сказал о реальности бесконечного: “И хотя в действительности очень большие числа встречаются часто, …, нескончаемость, или бесконечность, поскольку она представляет собой именно отрицание повсеместно господствующего положения вещей, представляет собой чудовищную абстракцию, которая реализуется лишь путем сознательного, а то и подсознательного применения аксиоматического метода” [25, с.459]. Такая трактовка бесконечного, считал он, делает беспредметными кантовские антиномии, связанные с пространством и с безграничной делимостью. В канторовской теории важную роль играет различие между множествами и совокупностями, не обладающими статусом множества. Для обозначения первых Георг Кантор использовал термин "завершенное", "трансфинитное" множество, а вторые называл "абсолютно-бесконечными" или просто "множественностями". Например, подобной множественностью является "совокупность всего мыслимого". Понятие "завершенной бесконечности" двойственно в том смысле, что соединяет в себе как бесконечное, так и конечное. Однако, законы двузначной логики, бесспорные в области конечного, могут привести к противоречиям при их применении к актуально бесконечным совокупностям.

На неразрывную связь двух основных онтологических противоположностей – конечного и бесконечного, указывал еще Блез Паскаль. Альфред Тарский, рассмотрев около десятка различных определений понятия конечного множества, пришел к выводу, что эквивалентность многих из них друг другу может быть установлена только с помощью аксиомы выбора. Для современной математики понятие бесконечности не просто существенно важно, но и является необходимым, так как большинство математических утверждений, не имеющих отношения к абстрактной бесконечности, можно, с точки зрения абстрактно-теоретического оснащения математики конца XX века, считать тривиальными. С другой стороны, появление большого комплекса вычислительных наук, в силу своей специфики, должно учитывать финитность ресурсов вычислительной компьютерной техники, а это формирует естественное стремление к финитизации математики, что явно проглядывает у интуиционистов и конструктивистов. Представители разных направлений философии математики стараются избежать явных определений конечности и бесконечности, в отличие от попыток математиков конца XIX - начала XX веков. Хотя и на этом и предшествующих этапах развития математики так и не были выработаны дефиниции конечности и бесконечности, удовлетворившие бы большинство ученого сообщества. Заметим, что конечное дополняет бесконечное, но не противостоит ему, так как может быть конечным в одной модели и рассматриваться как бесконечное в другой.

Вопрос об отношении теории множеств и теории доказательств к реальности, с философско-методологической точки зрения, сводится к вопросу об отношении конечного и бесконечного и, соответственно, вычислимого и невычислимого. Последний успех в решении математических проблем Гильберта, история которых исчисляется целым столетием, связан с отрицательным решением проблемы Римана-Гильберта для фуксовых систем линейных уравнений, полученным академиком А. А. Болибрухом. Несмотря на значительные математические достижения, в начале XXI века решение проблемы парадоксов осталось столь же недосягаемым для современной математической логики, как и в начале XX века. И все же основную трудность в стремлении теории множеств быть достаточно надежным фундаментом современной математики представляют не ее парадоксы и даже не то, что гильбертовская программа ее реабилитации осталась нереализованной. Это проблема отсутствия в канторовской теории множеств ясного “рабочего” определения ее основного понятия и расплывчатости границы между теоретико-множественным языком и естественным языком общения.

Под влиянием результатов Курта Гёделя, обнаружившего границы структуралистического мышления, возникла новая “архитектурная программа” для математики, в которой ведущую роль играет понятие доказуемости вместо понятия истинности. Напомним, что второй в списке нерешенных проблем Гильберта стояла проблема доказательства непротиворечивости системы аксиом обычной арифметики. Позднее Давид Гильберт дал более общую постановку этой задачи, известную как проблема разрешимости: найти общий метод, позволяющий определить, выполнимо ли данное высказывание на языке формальной логики, то есть установить его истинность. В контексте логической доказуемости аналог этой проблемы Гильберта можно сформулировать так: существует ли метод, при помощи которого, исходя из множества логических аксиом, можно определить доказуемо ли данное математическое утверждение. Алонзо Чёрч разработал непротиворечивый формальный язык, названный “ламбда-исчислением”, в котором можно представить большой класс математических функций, в том числе и использованные в гёделевском доказательстве. Кроме того, он показал, что если существуют невычислимые в ламбда-исчислении функции, то метода определения доказуемости не существует, и даже построил логическое выражение, которое в его системе было недоказуемо. Алан Тьюринг независимо от Алонзо Чёрча установил еще одну связь проблемы Гильберта с идеей вычислимости функции, с помощью построенной простой модели процесса вычисления – машины Тьюринга. Его вывод о том, что не все функции вычислимы, опирается на результаты о мощности множеств в теории Кантора.

В 60-х годах XX столетия машина Тьюринга играла заметную роль в теории вычислений и помогла установить границы сложности вычислений. Если функции можно вычислить и время их вычисления растет полиномиально с ростом длины слова, то их относят к классу P, или классу эффективно вычислимых функций. Задачи, не принадлежащие классу P, с точки зрения прикладных математиков, принято считать не поддающимися решению. Современная теория сложности вычислений началась с определения класса NP, как класса языков, которые распознаются переборными алгоритмами за полиномиальное время. Более научно, переборные алгоритмы называют недетерминированными. Пока еще никто не смог доказать, что задачи класса NP сколько-нибудь труднее задач класса P. По мнению американского математика Стива Смейла, вопрос о том, отличается ли класс P от класса NP, то есть проблема $P \neq NP$, будет одной из ключевых проблем компьютерной математики XXI столетия. Эта проблема приобрела большое значение из-за того, что переборные алгоритмы возникают почти всюду. Физика процесса, в результате которого происходит раздвоение недетерминированной работы пока не ясна, так как таких машин в реальности нет.

Одним из самых значительных достижений последних лет в теории сложности стало формирование квантовой модели вычислений. Квантовые компьютеры, существование которых не вызывает принципиальных возражений у современных физиков, являются кандидатами на роль недетерминированной машины. Английский специалист в этой области физик Эндрю Стин отмечает, что “квантовые вычисления не заменят классические по той простой причине, что квантовая физика не стремится заменить физику классическую” [125, с.97]. Идеи классической теории информации дополняют квантовую механику и способствуют более глубокому пониманию фундаментальных законов Природы. Между проблемами обоснования математики, поставленными Гильбертом, и задачами, стоящими перед квантовой теорией информации, существует некоторая параллель. Подобно тому, как большинство исследований в квантовой физике были связаны с изучением эволюции отдельных физических систем, большинство математических работ до программы Гильберта было связано с доказательством или опровержением различных гипотез и проблем. В математике всякий вопрос имеет не только вопрошающую, но и утверждающую часть, делающую вопрос возможным. Величайшая заслуга Давида Гильберта состоит в том, что он впервые попытался определить общий вид математического утверждения, поддающегося математическому доказательству. Поскольку квантовая механика – это математическая структура, которая, можно сказать, охватывает почти всю физику, то ее исследователи, в духе модифицированной программы Гильберта и с учетом результатов Гёделя, тоже стараются понять общий вид эволюции, возможный при каких-либо квантово-механических условиях.

Математика, с точки зрения индивидуального творчества, не сводится к формальной логике, но в коллективном сознании, несомненно, присутствует в виде потенциально завершимой огромной логической конструкции. Если этот образ постоянно “размывается” заведомо приближенными рассуждениями, компенсирующими приближенность в описании модели, соответствующей реальному процессу, то и восстанавливающие его тенденции тоже достаточно сильны. Этому способствует и компьютерная реальность с очень жесткими требованиями к логической структуре математического обеспечения. Современные компьютеры не являются машинами Тьюринга, хотя и имеют много общего, а их процесс развития до последнего времени был связан с размерами и быстродействием, но не касался основных принципов структуры и работы компьютера. Именно с позиций квантовой философии рассматривается вопрос о возможности подобных изменений. В “квантовом компьютере”, как полагает американский ученый Дэвид Дойч, предложивший первую приближенную схему работы такого компьютера, в принципе может быть достигнут некий квантовый параллелизм, который позволит решать задачи быстрее, чем классические компьютеры.

Главный методологический урок квантовой механики для философии познания заключается в том, что физические явления каким-то образом формируются теми вопросами, которые задают исследователи, изучающие их. Большинство математиков считают, что их работа в принципе отличается от работы компьютера, поскольку прогресс математики всегда зависел от гибкости воображения. Это проблема и была по существу предметом дискуссии между Анри Пуанкаре и Давидом Гильбертом, только ставилась она в начале XX века иначе: формализуема ли математика? С определенными оговорками в контексте постгёделевского развития математики, можно утверждать, что их позиции дополняют друг друга. Раскрытие сущности бесконечного невозможно в пределах специальных философских программ обоснования математики, например, интуиционисты отрицают возможность интуитивного восприятия какой-либо бесконечной категории. Современная философия математики пытается преодолеть ограниченность двузначности и искать между "существует" и "не существует", то есть вступает в область знания постнеклассической математики.

В начале XX века в естествознании возникла неклассическая наука, а в конце его – постнеклассическая. В математике происходили аналогичные процессы и развивалась, например, математика интуиционистского направления и, соответственно, фрактальная геометрия, в которой есть структура, но нет элементов, что не свойственно теоретико-множественной математике. В современное постнеклассическое математическое знание в отличие от классической и неклассической математики включен идеальный мыслящий субъект. Так американский математик Бенуа Мандельброт, придумавший термин "фрактал" и создавший новое направление в математике, считает, что численный результат измерения зависит от отношения объекта к наблюдателю и тем самым вписывается в понятия современной физики, а фракталы являются их превосходной иллюстрацией. Речь идет об отказе от "субъект-объектного" расщепления бытия и утверждении его единства. "Именно фрактальная геометрия, созданная для нужд естествознания, – считает Бенуа Мандельброт, – совершенно неожиданно объединила несколько старых и благородных (хотя и узких) математических направлений в единый поток и пробудила от спячки еще несколько" [67, с.131]. Заметим, что множество Мандельброта, как наиболее известный фрактал, поразивший воображение математического сообщества, не является полным и законченным созданием компьютера. Его даже невозможно вычислить. Но сам факт выполнения удачного алгоритма еще не свидетельствует о понимании происходящего процесса, поскольку одно дело наблюдать за фрактальными образцами и совсем другое – определять причину этого явления. Тем не менее, фрактал позволяет вообразить бесконечность. На примере фракталов видно, как простые математические конструкции порождают сложные “самоподобные” структуры. Это предельно высокий уровень абстрактности, позволяющий сделать следующий гносеологический вывод: в основе многих сложных явлений лежат иногда простые формально-логические соотношения, поддающиеся строгому и эффективному математическому анализу.

В современной математике, наряду с проблемой формализации методов отыскания доказательств, важнейшая роль отводится исследованиям о практической осуществимости различных способов обоснования математических рассуждений. В связи с этим в философско-методологической проблеме эффективности метода можно выделить еще одно дополнительное требование к математической аргументации – это его обозримость и ясность. Заметим, что еще Блез Паскаль, так же как и Рене Декарт, связывал признак совершенства знания с его ясностью и простотой, но, в отличие от Декарта, еще с самоочевидностью для чувств. Но подобного совершенства знания с его всеобщим характером нет в опытных науках. Проблема состоит еще и в том, что иногда мало эффективный метод доказательства легче описать с точки зрения понимания его убедительности и правильности. Поэтому ясность аргументации метода и его практическая осуществимость являются дополняющими друг друга аспектами творческой математической деятельности. Это созвучно с гносеологическим кредо Блеза Паскаля, согласно которому, мы постигаем истину не только разумом, но и сердцем, имеющим не только абстрактно-умозрительное, но и опытное происхождение.

Математическое сообщество никогда не было склонно к пессимистичным выводам по поводу перспектив развития своей науки, считая, что математические границы, идентифицированные Куртом Гёделем могут только обогатить ее, создавая новые ветви математики. В контексте программы Гёделя в современной математике нет логических средств для доказательства непротиворечивости ее важнейших теорий, но это не означает, что эти проблемы не могут быть в принципе решены другим способом. Высокий уровень непротиворечивости математики подтвержден всей историей ее развития. Даже некоторый методологический скептицизм по поводу путей обоснования современной математики все же не ставит под сомнение ее практическую строгость и существование рациональных путей ее обоснования. После фундаментальных открытий Курта Гёделя можно считать общепризнанным, что проблема обоснования математики все еще не решена. С точки зрения эпистемологии следует разделять оправдание математики через ее использование и обоснование. В этом одно из существенных отличий математики от других наук, в том смысле, что вопрос о ее обосновании не может быть решен только на аргументах опыта. Основная трудность заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия “обоснования”, а также в разногласиях по поводу допустимых логик.

Для понимания сущности современной математики необходимо глубже понять природу математического мышления. Математики уже сталкивались с подобной философско-методологической проблемой, когда длительное неприятие неевклидовых геометрий было обусловлено не наличием математических ошибок, а определенными философскими представлениями. Поэтому и сегодня любой математик, защищающий “классическую” строгость, найдет немало союзников своей правоты. Что можно сказать сегодня об исторической перспективе развития математики? Вряд ли кто возьмется ответить сегодня на этот вопрос так, как это сделал на рубеже XX столетия Давид Гильберт. Не вызывает сомнения то, что математика XXI века будет не только сложнее и абстрактнее, но и новые методологические подходы будут, возможно, выходить за границы сегодняшних представлений. Но чтобы понять будущее, как показывает практика, надо переосмыслить с современных позиций борьбу методологий и философских мировоззрений прошлого. Философские проблемы современной математики не сводятся только к методологическим следствиям теорем Гёделя о неполноте, хотя в первой половине XX века и наблюдался явный крен в сторону развития математической логики. Несмотря на то, что до сих пор в наиболее значительных фрагментах математики используется традиционный теоретико-множественный язык, философия математики предпринимает попытки выйти за эти рамки, опираясь на реальную практику развития науки, позволяющую понять безошибочность новых форм доказательства, которых, согласно Гёделю, вообще говоря, должно быть бесконечно много.

С точки зрения опыта современной математики наиболее существенные свойства математических проблем становятся обозримыми только тогда, когда она погружается в более широкую фундаментальную теорию. Возможно, поэтому Давид Гильберт придавал столь большое значение математическим проблемам как основным источникам прогресса математики. В преддверии прошлого столетия он опубликовал список из 23 проблем, которые, по его мнению, математики смогут решить в новом веке. Хотя не все поставленные Гильбертом проблемы равноценны и в ряде случаев некоторые гипотезы не подтвердились, их решение представляет наиболее содержательный период в истории математики прошлого века. Никто не ожидает столь же успешной попытки обозрения проблем существенной части всей математики XXI столетия. Тем не менее, Стив Смейл, взяв из гильбертовского списка две проблемы – гипотезу Римана о нулях дзета-функции и вопрос о числе предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка, предложил список из 18 таких задач в работе “Математические проблемы следующего столетия” [145]. Хотя постановка различных проблем, относящихся к отдельным областям математики, является обычной практикой в среде наиболее успешно работающих математиков, ранее никто ни до, ни после Гильберта не рисковал говорить обо всей математике.

Только опыт покажет, насколько успешной окажется новая попытка заглянуть в будущее математики с помощью ряда нерешенных проблем, решение которых будет формировать важнейшие направления ее развития.

Если бы математики, работавшие, например, над доказательством Великой теоремы Ферма, ссылались бы на Гёделя, то интерес к этой проблеме и другим знаменитым задачам давно бы пропал. Убежденность Давида Гильберта в неограниченных возможностях человеческого разума и разрешимости каждой математической проблемы является большим подспорьем в работе математиков. Математическая проблема, считал он, должна быть достаточно трудной, чтобы привлекать и обогащать знания, а с другой стороны, не совсем недоступной на пути к "сокрытым истинам". Формальные правила вывода из аксиом вызвали в прошлом веке живой интерес и разожгли воображение математиков и философов. Хотя эти новые правила реально не были нужны для математической практики, использующей математическую строгость методов прикладной математики, они привели к преувеличенным надеждам на описание законов мышления, пока не было открыто их подлинное значение. Каждую новую математическую теорию можно считать за благо, но бесцельные переходы к новым понятийно усложненным теориям не приветствуются даже математическим сообществом.

Французский математик Рене Том утверждает: "Из гильбертовской аксиоматики еще не извлекли истинный урок, в ней заключающийся: абсолютной строгости можно достичь, лишь исключая содержание. Абсолютная строгость возможна только и благодаря отсутствию смысла. Но если надо выбирать между строгостью и смыслом, я, не колеблясь, выберу смысл" [129, с.15]. В настоящее время, несмотря на заинтересованность специалистов по математической логике, непротиворечивость ни одной из распространенных аксиоматик теории множеств не доказана. Но если непротиворечивость, например, системы Цермело-Френкеля будет доказана, то математикам, возможно, придется от нее отказаться, из-за многочисленных результатов о "независимости", поскольку в ней будут недоказуемы: ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание, ни аксиома выбора, ни ее отрицание и так далее. Чем более общий характер имеют исходные прогнозы относительно некоторого результата и его значимости для математики, тем труднее обойтись одной теорией и для понимания исходного замысла, возможно, необходима совокупность нескольких таких теорий.

Математику можно рассматривать как особую область эмпирических открытий, работающую с непосредственно данными объектами, к которым в математике скорее относятся формальные языки, чем бесконечные множества. Мир классической математики с позиций неклассической науки кажется простым и очевидным, но, по сути дела, он никогда не был ни простым, ни очевидным. Сказанное можно продемонстрировать на таком сравнительно недавно открытом явлении как изменение некоторых важных характеристик математической модели, например, таких как непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров, при эквивалентных, в классическом смысле, ее преобразованиях. Начиная с открытия в начале XX столетия Жаком Адамаром класса некорректных задач, считалось, что все задачи математической физики делятся на два класса – корректных и некорректных задач. В конце XX столетия выяснилось, что существует третий своеобразный класс “задач-перебежчиков”, то есть перебегающих из класса корректных в класс некорректных задач при эквивалентных преобразованиях.

3.2. Онтологические проблемы философско-математического познания: перспективы исследования

Онтологический характер философско-методологических оснований математики делает проблематичным сравнение математических построений, даже в том случае, когда они относятся к одному и тому же объекту или процессу. Онтологический анализ абстрактных математических утверждений, начинающийся с философского вопроса «что это?», заставляет нас свыкнуться с тем, что существует множество вариантов ответа на важнейший вопрос «почему?». Этот вопрос при рассмотрении его с «философским пристрастием» оказывается весьма неоднозначным, поэтому может повлечь за собой различные ответы в зависимости от того, в каком эпистемологическом контексте он поставлен. Необходимость онтологического анализа программ обоснования математики становится более очевидной, когда требуется решить, какая из аргументаций является наиболее убедительной.

Кроме того, следствием онтологического анализа неклассической и постнеклассической математики является философско-методологическая необходимость трактовать математической знание как «набор фактов» содержательно зависящих от точки зрения исследователя. Одной из главных предпосылок философско-методологического анализа современного знания является трактовка познания как процесса его изготовления в общекультурном контексте. Поэтому философов интересуют «онтологические аспекты», а именно, взаимосвязь внешнего мира и особого идеального мира, который создают математики, и который независим лишь условно для простоты рассмотрения интересующих нас свойств. Философское и математическое познание вместе взятые занимают две области всего априорного познания. Математика, несомненно, априорна, так как она не основывается на опыте, в том смысле, что никакие повторные испытания не обеспечивают достоверность, например, арифметических утверждений, и в этом смысле она похожа на философию, которая тоже не нуждается в таких испытаниях. Классик немецкой философии Иммануил Кант считал, что философское познание несущественно отличается от математического познания, даже в гораздо меньшей степени, чем философия отличается от математики.

Тенденция к философскому осмысливанию математических результатов была в высшей степени свойственна одному из самых выдающихся математиков первой половины XX столетия Герману Вейлю, который в начале испытывал сильное влияние философии Иммануила Канта. Математики вполне солидарны с ним, когда он утверждает, что «в настоящее время математика в отведенном ей участке духовного мира является более дееспособной, чем, например, музыка или же находящиеся в столь плачевном состоянии новые языки на их фронтах» [16, с.89]. Глубокую связь математики и философии обосновывают тем, что обе они занимают фундаментальное положение в классификации наук по объему познания, как разрабатывающие общие законы познания, исследуя вещи и процессы в их предельном положении и состоянии, стремясь к наиболее высокому уровню абстракции и оперируя наиболее общими понятиями. Математика учит нас правильно оперировать понятиями, изменяя тем самым, как говорят философы, нашу понятийную деятельность.

Важнейшая особенность математической абстракции состоит в том, что абстрагирование здесь чаще всего осуществляется через ряд последовательных ступеней обобщения, то есть в математике преобладают «абстракции от абстракций». Абстрактность математики, однако, не означает ее отрыва от внешнего мира. Непредубежденно рассмотрев основные точки соприкосновения математики и философии, мы будем вынуждены признать методологическую полезность философии для математики и еще большую полезность математических исследований для развития философии в XX веке. На чем основана такая убежденность? Прежде всего, на невероятной приложимости математических построений к областям реальности, что неизменно привлекало и привлекает внимание философов и математиков. Начнем с философских ценностей. Здесь нам опять никак не обойтись без исконно греческого вопроса «что это такое?». Если обратить его к самой философии, то вряд ли кого-нибудь устроят бессодержательные формулировки подобно: «философия есть искусство называния того, чем люди занимаются» или «знать, что ты не знаешь, – это и есть философия».

Продукты деятельности тех, кого причисляют к профессиональным философам, настолько многообразны, что сложно выявить в них то общее, что как раз и составляет специфику именно философии. Поэтому профессиональный философ при обсуждении любого вопроса вынужден предъявлять свою мировоззренческую позицию и объяснять, в рамках какой философской дисциплины он ищет ответ. У фундаментального вопроса «что такое философия?» есть много аспектов и различных точек зрения. Глубокий неослабевающий интерес к этому вопросу демонстрирует практически вся история философии. Рассматривая философию вглубь, дать убедительный ответ на этот вопрос невозможно, хотя несть числа попыткам ответить на этот вопрос именно из глубины. Обратим внимание на термин «философия». Античная традиция приписывает его употребление знаменитому математику и мыслителю Пифагору по отношению к людям «стремящимся к мудрости».

Немецкий философ Фридрих Ницше с изрядной долей сарказма писал в «Веселой науке»: «Скромность изобрела в Греции слово “философ” и уступила комедиантам ума роскошную спесь называть себя мудрыми» [109, с.274]. Человек не обладает мудростью, так как она недостижима для него, но, во всяком случае, ценит ее. Мудрость у человека есть лишь некая идея, которую он не может реализовать. Называя себя философом, загадочный даже для современников Пифагор подчеркивал, что он против того, чтобы его называли мудрецом, а о себе он может только сказать, что «любит мудрость». Философия означает буквально не столько учение мудрости, сколько стремление к нему. Мудрость, по-гречески, – «софия», а любовь к ней – «философия». То, что древние мыслители относили к мудрости, сейчас можно соотносить с мировоззрением. Это хорошо известные историко-философские факты и нет нужды более останавливаться на них, тем более, что математик вправе сказать: «а какое мне дело до этой любви?», и будет по-своему прав.

Еще Аристотель сказал, что «известное известно немногим». Призовем также на помощь Иммануила Канта, который в последней и незавершенной работе «Opus postumum» писал, что «хотя философия все же уступает математике в степени неоспоримого внутреннего преимущества характера (способа мышления) человека, однако его талант образа мыслей гораздо важнее по своему значению». Философия ценна для математики и наук в целом своим умением и нацеленностью, выделять то общее, что способно формировать обобщенный взгляд на многие проблемные объекты и явления. Интеллект в целом характеризует способность применять метод обобщений ко всем доступным явлениям природы и общественной жизни. Философия с этой точки зрения, подобно математике, определена не предметом, а только способом рассуждения и познавательными возможностями. Вопросы познания разумом посредством понятий, Иммануил Кант называет философскими, а задачи разума, решаемые посредством конструирования понятий – математическими.

Советский геометр и философ математики академик А. Д. Александров говорил по поводу вопроса об истине в математике, что такой проблемы нет: «Математика создает свои аппараты, и бессмысленно говорить о том, истинны они или ложны: аппарат либо работает, либо не работает, а если работает, то либо продуктивно, либо плохо» [2, с.250]. Поэтому к математике неприменимо понятие «истинности в смысле опытного подтверждения», так как математическая теория сама по себе не истинна и не ложна, и только на уровне «эмпирической интерпретации» становится проверенной в опыте. Методология математического познания не может быть свободной от соответствующего онтологического содержания – в этом его зависимость от философского познания. Как и математическая теория, онтологическая схема не истина и не ложна, а только полезна или бесполезна. Философские утверждения не являются проверяемыми описаниями, поэтому не могут оцениваться как истинные или ложные.

Для преодоления философских разногласий важно определиться, какого рода «онтологический ремонт» необходим для достижения консенсуса в различных направлениях философии математики. Математики, обладающие основательной философской культурой, встречаются также редко, как и философы, имеющие обширные познания в математике. Говоря о разнородности их занятий, Иммануил Кант сетовал на то, что «добившийся в своей области хороших успехов математик нередко с пренебрежением и сочувствием видит философа в затруднительном положении в занятии, которое едва ли принесет ему удачу» [56, с.524]. Философию можно рассматривать как парадигму принципиально неразрешимых, но с постоянным упорством решаемых проблем, хотя для них нельзя дать окончательное решение, в отличие от математики как парадигмы разрешимых проблем. Показательной для философов в этом отношении является проблема смысла жизни. Математик, подобно художнику или поэту, создает образы, в случае необходимости заново определяя, что считать решением проблемы.

Согласно учению Платона, специфика математического мышления связана с изначальной опорой на образы, тогда как подлинное философское умозрение отличается от математического познания тем, что оно не является образным. Долговечность математических образов связана с тем, что они состоят из идей. Различая математику и философию, следует исходить не из смутных представлений о сущности математического и философского знания, а из понятийного аппарата науки и способах решения научных проблем, которые являются для нас все же более определенными. В науке мы ценим то, что делает нас умнее, поэтому особенно важна ясность и точность выражения мыслей. Понятийный аппарат хорошей математической теории расширяет наши интеллектуальные возможности при решении, казалось бы, несвязанных между собой задач. Поэтому «онтологию математических понятий» можно охарактеризовать как проблему связи их содержания с существованием прототипа или соответствующей интерпретации во внешнем мире. Самый общий ответ на поставленный вопрос заключается в том, что различие между философией и математикой проходит не по линии категорий «содержание» и «форма», а заключается в способах описания действительности – в методе и языке описания процессов внешнего мира.

Хотя математические теоремы часто могут быть успешно применены к описанию внешнего мира, сами эти теоремы по существу абстракции, принадлежащие миру, далекому от человеческих страстей. Этот мир, как когда-то заметил английский философ и логик Бертран Рассел, который пришел к философии через математику, далек даже от жалких фактов, заимствованных у Природы, «где чистая мысль может существовать естественно, и где человек, по крайней мере, человек, наделенный благородными порывами, может укрыться от унылого изгнания реальности». Американский специалист в области занимательной математики Мартин Гарднер считал, что выражение «улыбка без кота», которую Алиса увидела в Стране Чудес, – это неплохое метафорическое описание чистой математики. Но отделить улыбку Чеширского кота от него самого также невозможно, как отделить абстрактную математику от прикладной математики. Например, геометрические методы функционального анализа – это геометрические методы, оторванные от евклидовой геометрии, – «кот давно ушел, а его улыбка осталась».

В закономерном процессе на пути к единству знания математика оказывается одним из мостов, объединяющих гуманитарное и естественнонаучное мышление. Внося дух тщательного математического исследования в области точного познания, мы пытаемся снизить уровень метафизической тревоги по поводу интеллектуальной познаваемости физического мира. Первым примером целенаправленного применения математики в объяснении явлений природы и мироздания в целом явилось учение Пифагора. Он пытался применить математику для нужд своей философской системы. Взгляды пифагорейцев, согласно которым числовые свойства выражают сущность явлений, на многие столетия определили взаимосвязь философии и математики. Пифагорейская математика и философия проникнуты понятием «гармонии», которое стала у пифагорейцев математическим понятием. Они понимали гармонию как выражение гармонии числовых отношений и пропорций, далеко выходящей за пределы искусства. В духе пифагорейской традиции философы осознали необходимость перехода от Эйдоса к Логосу.

Немецкий математик и философ математики Герман Вейль предполагал, что в природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим, по его мнению, объясняется, почему природные явления удается предсказывать с помощью наблюдений и математического анализа, поскольку мир гармонически упорядочен посредством нерушимых законов математики. Математическая гармония целого не только позволяет лучше характеризовать отдельные части, но и сообщает этим частям некоторое единство. Напомним, что через изучение математики эллины выражали свою «любовь к мудрости». Полагая, что «математика есть философия», а «философия есть математика», пифагорейцы считали математику и философию единым и неразличимым знанием. Убеждения пифагорейцев были основаны на том, что, занявшись математическими науками, они не только продвинули их вперед, но и, воспитываясь на них, стали считать их «началами всех вещей».

Заметим, что пифагорейский взгляд на математику был господствующим в античной философии. Притягательность математики для философии связана, прежде всего, с феноменальной устойчивостью на протяжении многих веков математических результатов. По существу, только математикам удалось придать своим теоретическим конструкциям столь общепризнанный и неопровержимый характер, хотя и трудно в целом обозреть всю математику, подобно тому, как гласит пословица «за деревьями леса не видно». Но если отбросить громоздкие и нехарактерные детали, то тогда возникает общая теория, которая может оказаться проще и яснее отдельных примеров. Если философия есть общая наука о содержании, то математика – это наиболее общая и точная наука о форме. Всякое точное объяснение того или иного явления математично, а любое математическое описание явления – это описание на подходящем для этого языке математики. Можно сказать, что философия дополняется математикой, поскольку математика помогает философии углубляться в понятия числа, пространства и времени, используя для этого соответствующий математический язык, который в редких случаях оказывается языком обычной логики.

Бертран Рассел иногда употреблял выражение «логический ад», вкладывая в него чрезвычайную сложность и трудноуловимость логических проблем. Математика и философия относятся к наукам одного уровня, на котором выявляются общие закономерности реального и виртуального мира, заменяющего саму действительность и выдающего себя за нее, подобно «мифу платоновской пещеры», а так же мышления и познания, поскольку в основе всякого объяснения лежит модель, то есть абстрактная схема реальности. Миф о пещере – это уникальное средство делать наглядными фундаментальные онтологические отношения. Ценность математической модели определяется факторами, которые пришлось учесть, описывая наиболее существенные свойства реально или виртуально существующего объекта. Мир математики – это отражение окружающего мира в зеркале нашего мышления. В отличие от философии математика никогда не стыдилась определять границы своих возможностей. Например, методы теории вероятностей нельзя применять без разбора к любым интересующим исследователя вопросам.

Существуют определенные границы их применения. Особенно остро вопрос о границах применимости математики встал в XX веке в связи с проблемой обоснования математики, а также кризисом физики и последовавшим за этими событиями философским смятением умов. После тщетных попыток поиска универсального универсального формализма математики опыт осмысления оснований математики в XX веке привел к выводу, что традиционная трактовка математики слишком идеализирована. С присущим им критицизмом, математики совместно с логиками выявили шаткость теоретико-множественных оснований математики, что еще раз свидетельствует об их исключительной интеллектуальной смелости и самокритичности. Австрийский математик и логик Курт Гёдель доказал знаменитую теорему о неполноте. Согласно этой теореме, если система аксиом математики содержит элементарную арифметику и непротиворечива, то тогда из нее можно вывести такое утверждение, которое недоказуемо и его отрицание тоже недоказуемо. Это означает, что в таком случае система аксиом неполна.

В частности, это означает также, что условия непротиворечивости и полноты математики в целом несовместимы. Более того, система аксиом остается неполной, если добавить к ней дополнительные аксиомы. Это был шок, после которого в математическом сообществе по-новому взглянули на многие нерешенные проблемы. В частности, стало понятно, почему нельзя в исчерпывающей общности ответить на вопрос о доказуемости произвольного математического утверждения. Французский математик Рене Том пояснил, как это повлияло на математическое образование в целом: «Истинная проблема, с которой сталкивается преподавание математики – это не проблема строгости, а проблема построения смысла, проблема “онтологического оправдания” математических объектов» [129, с.15]. Математики по-другому взглянули и на представления о строгости, которая понималась ими в духе простой формулы «логика плюс арифметика». Именно после теоретико-множественного бума в современной математике выяснилось, что логико-арифметический подход тоже ненадежен, так как страдает неполнотой.

По сути дела гёделевские результаты обосновывали в некотором смысле нелогичность самой математики, точнее невозможность создания универсального логического формализма, который позволил бы выводить все истинные утверждения из заданной системы аксиом. Кроме того, теоремы Гёделя о неполноте указали на пределы возможностей аксиоматического метода в самой математике и неустранимость субъекта в математическом познании. В математическом фольклоре можно встретить следующее высказывание на эту тему, приписываемое Герману Вейлю: «Бог существует, поскольку математика несомненно непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем». Хорошо известно, что в математике нет легких путей. Даже негативные результаты в математике можно использовать как важный методологический прием, следуя известному афоризму: «Да послужишь ты Господу и своими дурными помыслами». Важно видеть и осознавать границы возможностей, потому что знание собственной ограниченности может уберечь человеческий разум от роковых ошибок.

Если предположить, что формальные идеализации современной математики отражают не вневременную природу математического знания, а естественным образом исторически сложившиеся идеалы, нормы и ценности этой науки, то в таком случае разделительная грань между математикой и философией, а также между математикой и гуманитарным знанием, начинает стираться. Математика в этом смысле становится похожей на другие нематематические дисциплины. Похожи в том смысле, что математика, как и все другие научные дисциплины, занимается поиском ответов на вопросы, поставленные общественной жизнью. В таком контексте формальные аспекты математического познания – это именно аспекты, целиком подчиненные движущей силе мысли, хотя они редко становятся источником этой силы. Их главная задача состоит в том, чтобы «вести идею» и не создавать ненужных помех в процессе ее развития и созревания.

Здесь вполне уместно вспомнить любимую сентенцию древнегреческого философа и моралиста Плутарха: «Самомнение – спутник одиночества». С точки зрения фундаментального образования традиционно считалось, что если философия математики выявляет «суть предмета», то философ должен владеть этим предметом. Даже образ действий работающих математиков существенно отличается от образа действий философов математики. Американский философ математики Джоанг Фанг видит это различие в следующем: «Первые работают в духе “понемногу”, “одно вослед другому”, находя специфический подход к каждой проблеме в данное конкретное время. Вторые действуют в духе “раз и навсегда”, что, в сущности, означает подход “с точки зрения вечности”. Этот подход в большей степени является философским» [132, с.6-7]. Необычность математических объектов и их отличие от объектов теоретического естествознания оправдывает подход к своему объекту в математике с теоретико-мировоззренческих позиций.

Важнейшей особенностью математического объекта является его конечная определимость, то есть его заданность конечным числом свойств. Эта особенность проистекает из сущности математической теории как формальной системы. Кроме того, именно эта особенность отличает математические объекты от эмпирических и философских объектов, которые можно считать бесконечными в том смысле, что их определения лишь некоторая интерпретация сущностных свойств объекта, не исключающая дальнейших уточнений и изменений в принятом определении. Одной из причин философского интереса к теоремам Гёделя о неполноте, относящимся к проблеме обоснования аксиоматико-дедуктивных теорий, является, по общему убеждению, то, что они говорят нечто очень важное о возможностях человеческого мышления. Работающие математики практически не сомневаются в том, что математика в целом непротиворечива, а также в том, что более или менее интересный фрагмент математики, который является предметом их исследований, тоже непротиворечив.

Это уже область интересов математиков-философов, для которых математика и ее методы существуют не ради самих себя, а в качестве орудия познания законов природы. В наше время уже не математика, а математики разделяются по своим интересам и творческой направленности. Одни стремятся преодолеть трудности, связанные с решением проблемных задач, а другие пытаются постичь построение математических основ гуманитарного знания. Без дедуктивных рассуждений в гуманитарных исследованиях невозможно обойтись при работе с абстрактными или отвлеченными понятиями и, особенно, с конкретными фактами. Но вопрос о доказательности этих утверждений, допускающих различные истолкования, решается иначе, чем в математике. Доказательство в математике несет в себе определенный заряд дополнительной «онтологической убедительности», что также способствовало осознанию методологического значения математических дисциплин.

Математика – это универсальный образец рационалистического анализа и построения не декларированных, а обоснованных концепций, что особенно ценно в условиях дефицита рациональности сознания. Современная математика настолько многолика в своих приложениях, что, как считал известный методолог науки профессор В. В. Налимов, «философское обновление придет через математику». Математику можно трактовать как общезначимую культуру теоретических исследований, а важнейшая черта теоретического уровня сознания – это его рефлексивность. Анализ интеллектуального поведения профессионального сообщества математиков, вряд ли может сообщить что-нибудь существенное об обуславливающих его социальных процессах.

Непонятно каким образом профессионал выделяет из первоначального беспорядка проблему, разрешимую в рамках его компетенции. Это особый тип рефлексии, связанный со способностью размышлять над тем, что ты делаешь, в тот момент, когда ты это делаешь.

С точки зрения неклассического подхода, учитывающего соотнесенность характеристик объекта и средств познания, используемых субъектом, математическая теория не рассматривается больше как отражение реальности один к одному, а как идеализация, рационализация и упрощение. Поэтому основная черта неклассической методологии – рефлексия над методом. В начале 30-х годов XX века, благодаря работам самих математиков после гёделевских результатов произошло расщепление математического бытия и математического сознания, которое создало предпосылки для противоположения в математическом познании субъекта и объекта, а также для наступления рефлексии математического познания и затем для возникновения подлинной философии математики. Заметим также, что возникавшие в теоретической математике противоречия нельзя считать «онтологическими противоречиями бытия», поскольку они являлись результатом человеческой деятельности, создавшей эти противоречия. Поэтому с философской точки зрения можно сказать, что проблемы оснований математики суть не онтологические проблемы, а проблемы математической деятельности.

Если мы говорим о взаимодействии математики и философии, то, как бы само собой, напрашивается вариант под названием «математика философии», как математической рефлексии над философией. Если «философия математики» предполагает рассмотрение математических проблем, выходящих за рамки математики и требующих обращения к философским мировоззренческим установкам, то, в силу симметрии словосочетания, математика философии должна заниматься философскими проблемами, выходящими за рамки философии и требующих дополнительного привлечения математико-мировоззренческих средств. Попытку показать, как возможно использование языка математических представлений в раскрытии философской мысли, используя предпосылки близкие к метафизике Платона, предпринял профессор В. В. Налимов в статье «Как возможна математизация философии?». В своих философских работах он опирался на математические представления в раскрытии философской мысли, надеясь математизировать философию так, как это имеет место в физике и космологии.

Однако его вариант математики философии, как и сама возможность постановки метафилософских вопросов, не вызвал энтузиазма у профессиональных философов, поскольку философия для них – это предмет исключительно философской рефлексии. Не последнее слово в этом вопросе принадлежит Иммануилу Канту, который вполне определенно сказал, что «философские принципы математики возможны столь же мало, как и математические принципы философии» [56, с.519]. Но «чувство онтологическогоодиночества», как показало дальнейшее развитие философии и математики не безысходно. Правильнее было бы говорить о «совместном онтологическом одиночестве» математики и философии, учитывая глубину рефлексии, поднимаемых ими проблем. Философская рефлексия имеет общую область исследования с математическими дисциплинами в пространстве формализованного мышления, но кроме математических начал есть еще и метафизические начала науки о природе. Формализация проблемы, представленная математическим опытом – это хорошая возможность точного видения проблемы, являющаяся методологическим ключом к ее решению.

В наше время все возрастающей специализации необходимы интегрирующие области науки, которые связали бы их вместе и выработали общие принципы познания природы и общества. Именно фундаментальная наука стремится к установлению общих принципов, а важнейшими интегрирующими областями науки являются современная математика и философия. С точки зрения философов математики, обретя внутреннюю специфику и самостоятельность, философия математики осознала себя как область, имеющая значение для решения не только чисто философских проблем. Хотя полученные результаты не привели к общему согласию в главных вопросах оснований математики, они позволили лучше понять, что можно и чего нельзя сделать с помощью математических методов. Например, идеи философии математики, связанные с понятиями непротиворечивости и полноты, достигли статуса всеобщих философско-методологических принципов построения абстрактных теорий, имеющих высокий уровень теоретической общности.

С усложнением жизни философские образы из обыденной жизни «семантически истощаются». Поэтому для развития философии нужны новые образы. По мнению профессора В. В. Налимова мировоззренческие горизонты нужно постоянно расширять: «Их можно, как мне представляется, заимствовать из математики и современной физики, которая также математична. Наконец нам стало ясно, что человек так странно устроен, что воспринимает Мир через математические представления – через число во всем многообразии его проявления; через время, исчисляемое числом; через пространство, задаваемое множеством геометрии; через вероятностную меру, исчисляемую опять-таки числом, и, наконец, через логику, смыкающуюся с математикой…» [105, с.284]. Из кантовской «Критики чистого разума» следует, что образ созерцаемого нами мира не просто копия реальности, а ее реконструкция. Но только единство научного знания, включающее математику, естественные и гуманитарные науки, дает основание для осмысления такой реконструкции реальности. Специфика философского знания состоит в том, что ее определяет сам человек. Именно поэтому философско-гуманитарное познание вращается в своеобразном «гносеологическом круге», в котором мыслящий человек изучает сам себя. Не удивительно поэтому, что влияние математики на гуманитарные специальности не столь очевидно. Между тем, с точки зрения познания, математика – важнейший дополнительный фактор влияния на гуманитарное знание.

Когда происходит абстрагирование мысли, отрыв ее от конкретного содержания, то всегда происходит обратный процесс поглощения явного неявным, что можно назвать онтологическим основанием рассматриваемой операции. Существует определенная дихотомия типов рациональности в онтологии познания, конструирующих математику и естественные науки как познание мира в данности, а гуманитарные науки как познание мира в возможности. Это различие обусловлено тем, что гуманитарные науки в «знаниевом аспекте» представляет собой менее определенные и потому боле сложные гносеологические образования, чем естественные науки. Хотя уже общепринято, что теория множеств в некотором смысле унифицирует современную математику, она не является ее «онтологическим основанием» и, возможно, однозначно понимаемое обоснование современной математики вообще недостижимо. Возможно поэтому, в контексте философско-методологического обоснования математики это впоследствии привело к либерализации и ослаблении ограничительных требований, допустимых с точки зрения онтологической истинности математических представлений. Отказ от претензий понимания природы вещей в себе, от постижения окончательной истины, от разгадки сущности мира, может быть, психологически тягостен для некоторых энтузиастов, но на самом деле он оказался плодотворным для развития научной мысли.

Опыт осмысления оснований математики в XX веке привел Людвига Витгенштейна к выводу о том, что традиционная трактовка математики слишком идеализирована, поскольку математики и философы математики издавна исходят из платоновского представления о вечном и неколебимом основании математики, а также о сверхнадежном и неопровержимом характере математического знания. Поэтому при оценке математического идеала и программ обоснования математики философы науки призывают отнестись к этим проблемам более реалистично. Философско-методологической программе обоснования современной математики, как характеристике полноты целого, придает действительность ее внутренняя противоречивость. Поскольку чистая математика преимущественно развивается как «наука о бесконечном», то платонизм работающих математиков может стать тем соединяющим фактором, который может замкнуть бинарную оппозицию программ формализма и интуиционизма в системную триаду программ обоснования неклассической математики, реализации которой посвящена работа автора [103]. В связи с этим основная задача философии математики по обоснованию сводится к анализу дополнительных требований, которым должны удовлетворять формалистские основания математики.

Невозможно провести четкие границы между формалистскими и интуиционистскими стандартами обоснования, но это не значит, что их нельзя различать в философско-методологическом смысле. Но именно их практическая связанность ведет к формированию некоторых синтетических подходов к программе обоснования. Различного рода критерии математической истинности могут рассматриваться только как некоторые приближения к понятию онтологической истинности, полезные для решения частных задач. В конце концов, важна не столько истинность, сколько эффективность, подобно тому, как для нас важна не истинность прибора, а важно только работает он или нет. Неклассическая математика как целостное знание не является совокупностью методологических требований, а является как раз тем, что сводит их в целостную систему, для понимания которой одного рационализма явно недостаточно. Возможно поэтому онтологическое обоснование, унифицирующее современную математику, скорее всего, невозможно. Необходим философский способ понимания предмета исследования, который способствует удвоению понимания: как того, что понято, так и того, что в принципе понимаемо.

При рассмотрении онтологических проблем обоснования математики к рациональным доводам ума необходимо добавлять иррациональные чувства интуиции, дотягивающие до общефилософских смыслов целостную картину развития математики. Онтология абстрактных математических понятий связана с вопросами существования моделей и интерпретаций математической реальности. В таком контексте методы классического направления в математике более онтологичны, чем методы неклассического и даже постнеклассического направлений, поскольку последние характеризуются еще и наблюдением.

* * *

Когда философы и математики пытаются познать бесконечность, то она отвечает на эту дерзость парадоксами, хотя проблема выяснения сущности бесконечного достойная задача для самого изощренного человеческого разума. Однако главные математические трудности связаны не с переходом от конечного к бесконечному, а с переходом от счетного к несчетному, сопровождающемуся потерей метода математической индукции. Исследование проблемы бесконечности смещается с анализа диад к синтезирующим триадическим структурам.

Формальный язык, в котором все вопросы можно было бы решать вычислением, остался лишь мечтой, а после достижений математической логики XX века математический язык сам стал частью математики. Философские следствия из идей обоснования математики настолько усложнены, что в философии математики наметился переход к новой стадии в программе обоснования неклассической математики – синтезированию, ясности и простоте, которая опирается на онтологические представления, как необходимые условия математической деятельности в подходящем мировоззренческом контексте.

С точки зрения современной философии математики проблема бесконечности заключена в ее актуальности и нечеткости. Сравнительный анализ классической и альтернативной точек зрения на теорию множеств будет способствовать лучшему пониманию этой проблемы. В этом контексте внедрение вычислительной техники даже в некоторые области математических доказательств требует осмысления новых подходов к современной математике, что в свою очередь побуждает к обсуждению проблем оптимальной финитизации.

Онтологический анализ методологических проблем современной математики позволяет понять, что то, что разъясняется и посредством чего разъясняется, в значительной мере, зависит от нашего представления об окружающем нас мире и накопленных знаний о нем. В математическом познании онтологический контекст разъяснения при помощи формальных процедур и структур математики надо дополнять соответствующими эпистемологическими рассуждениями, объясняющими познавательные возможности математических процедур.

Раскрытие сущности бесконечного невозможно в пределах специальных философских программ обоснования математики. Современная неклассическая философия науки, преодолевая методологическую ограниченность двузначности, ищет между «существует» и «не существует». Математические структуры, в силу высокой степени абстрактности, дают бесконечную смысловую перспективу, поэтому довольно трудно изложить философско-математические концепции в конкретных понятиях классической философии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возникший в конце XIX – начале XX века кризис оснований математики дал толчок к поиску путей выхода из этого кризиса, что в свою очередь способствовало возникновению новых направлений обоснования математики. Новые математические методы и идеи, выдвинутые школами интуиционизма и формализма, во многом обогатили наши знания о таких фундаментальных понятиях и методах математики как число, множество, функция, доказательство, аксиоматический и конструктивный методы и другие. Современная философия математики вступила в период, когда проверяется ее способность дать адекватный ответ на важнейшие вопросы обоснования математики. Общая тенденция развития теории познания и философии науки привела к необходимости переосмысления современных концепций обоснования математики. История математики знает немало примеров, когда ушедшие в прошлое споры оказывались вновь созвучными современному уровню развития науки.

Философское осмысление математики XX века приводит к выводу о том, что современная математика изменила не только представления об окружающем нас мире, но и подвергла сомнению идею о “безграничных возможностях человека”. Кроме того, хотя достижения математики в XX столетии превосходят все, что было сделано в ней за предшествующие более чем две с половиной тысячи лет, в неклассической математике была обнаружена недостаточность традиционных схем обоснования математического знания, элиминирующих субъективные факторы исследования основных понятий идеальных объектов. Современная математика способствует формированию нового культурного поля научных исследований – она перестает быть лишь средством описания и выступает также как способ обоснования и получения истины.

Первостепенное значение на рубеже XIX-XX веков приобрело философское осмысление оснований математики, перестройка ее фундаментальных понятий и принципов, а также механизмов формирования новых стандартов обоснования математического знания. Проведенное исследование показывает, что именно основания математики до сих пор остаются наиболее проблемным полем взаимодействия точной науки и философии. Это в первую очередь связано с тем, что, хотя математические суждения выглядят абсолютно достоверными, математические объекты существуют не в том смысле, в каком существуют предметы внешнего мира. Историко-философский анализ показывает, что наиболее плодотворные периоды развития оснований математики проходили при возобновлении дискуссий об онтологическом статусе понятия множества и особом внимании к философским вопросам познания.

В работе выявлены исходные посылки, лежащие в основе логики и математики, позволяющие распознавать “проблемные” аксиомы и положения как следствия концепций интуиционизма и формализма. Интуиционизм, отвергая попытки обоснования математики всецело лишь с позиций актуальной бесконечности, признает единственно допустимой в математике только бесконечность становящуюся, или потенциальную, полагая, что только она имеет право на существование, зафиксировав тем самым расхождение понятий “существование” и “построение”. Методологический анализ стандартов обоснования математического знания позволяет сделать с философских позиций вывод о том, что интуиционистской математике свойственен примат внутренней интерпретации математических теорий, тогда как философская компонента формалистической концепции связана с абсолютизацией внешних аспектов теории, дополнительных к внутренним аспектам. Это подобно тому, как описание правил употребления слова “множество” дополнительно к его определению.

Ошибка этих программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему положений обоснования, не учитывая дополнительный характер их взаимодействия. Проведенное исследование показывает, к каким трудностям приводит одностороннее преувеличение той или иной формы математической бесконечности. Исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, так же как недостижима полная теория познания других сложных явлений. Поэтому оценку систем обоснования математики целесообразно проводить с учетом критерия полезности, а поскольку такая оценка теории зависит от ее назначения, то для реализации различных целей можно воспользоваться по-разному построенными теориями, то есть интуиционистская и теоретико-множественная математики могут сосуществовать в контексте расширенной концепции дополнительности.

Современная математика в своей аксиоматической форме представляется через математические структуры, то есть математика, в том числе и неклассическая, состоит из структур. Структурализм, согласно которому математика говорит не об отдельных математических объектах, а о структурах, является одним из наиболее влиятельных направлений в современной философии математики, способствующим более глубокому пониманию эталонов обоснования, отличных от этого направления. Концепция математического мышления, основанная на понятии математической структуры, не предполагает, что все сферы реального доступны структуризации, поскольку даже содержательно интерпретируемая теоретико-множественная математика является, вообще говоря, “логически незаконным” обобщением непосредственного человеческого опыта. С учетом активной роли субъекта в генезисе математических структур вопрос о структуризации сводится к вопросу о пределах математического мышления, который не имеет пока окончательного решения.

Примененный в работе методологический прием позволил обосновать тезис о том, что использование математических терминов не схватывается аксиомами или формальными выводами и поэтому нуждается в дополнительном объяснении. Такое дополнительное объяснение выявляется в способах употребления математического языка. Однако представители структурализма в философии математики избегают давать строгое определение понятия структуры, поскольку теория множеств изучает лишь одну из многих всевозможных структур, и поэтому можно сделать вывод о том, что понятие структуры тоже не подходит на роль базового онтологического понятия современной математики. Это обстоятельство указывает на сложный двойственный характер современного этапа развития математики. В контексте изменения стандартов обоснования математического знания это означает, что даже строгое доказательство может содержать утверждения, которые “выполнены” в реальной ситуации лишь приближенно.

Специфика математической теории состоит в том, что она включает в себя алгоритмическую составляющую, связанную с вычислениями и методами решения задач. Проведенный в работе историко-философский анализ показывает, что законность применения алгоритмических методов гарантируется при соблюдении двух основных условий: финитная часть математики, допускающая содержательную интерпретацию, должна быть полной, а нефинитная часть, лишенная содержательной интерпретации, должна быть непротиворечивой. В основе формалистской концепции математического доказательства как способа обоснования лежат чисто формальные рассуждения, а интуиционистской – способ построения, или вычисления, хотя возможность алгоритмического построения сама по себе может устанавливаться и классическими средствами, а не только предъявлением такого построения. В работе обосновывается тезис о том, что “вычисление” и “рассуждение” неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического познания.

В работе, вопреки утвердившемуся в философско-методологической литературе мнению о “провале” программы формализации в связи с принципиальными трудностями, создаваемыми теоремами Гёделя, обосновывается положение, согласно которому вторая теорема Гёделя о неполноте не только не противоречит программе формализации, в русле которой развивается значительная часть современной математики, но и является косвенным подтверждением ее разумности. Постгёделевский этап развития математики, указывая на тупиковые пути обоснования, предостерегает философов от поиска арифметических выражений непротиворечивости. Тем не менее, теоремы Гёделя о неполноте не закрывают других путей внутреннего обоснования непротиворечивости отдельных частей математики. В таком контексте алгоритмическую неразрешимость, то есть отсутствие общих алгоритмов для целого класса задач, некоторых арифметических высказываний можно рассматривать как дополнение к результатам Гёделя.

Анализ различных точек зрения в современной философии математики позволяет сделать вывод о том, что проблема бесконечности заключена в нечеткости понятия бесконечного множества. Это проблема не только актуальной и потенциальной бесконечности или проблема континуума, но и в более широком контексте проблема не-измеримости, не-разрешимости и не-вычислимости. С точки зрения философии математики можно сделать вывод о том, что не исключено принятие новой концепции континуума, согласно которой он не будет иметь никакой “мощности”, а представление о множестве, состоящем из элементов, может оказаться адекватным лишь для конечных или счетных множеств. Разрыв между бесконечностью, заложенной в математические понятия, и практической реализуемостью алгоритма побуждает также к обсуждению философско-методологической проблемы оптимальной финитизации, то есть к анализу математических способов преобразования бесконечного в конечное.

Несмотря на то, что были получены финитные доказательства непротиворечивости довольно значительного фрагмента элементарной теории чисел, так и не удалось в полном объеме финитно установить непротиворечивость арифметики и аксиоматической теории множеств. Основной вывод диссертационного исследования состоит в том, что ответить на вопрос о стандартах доказуемости математического утверждения или о методологии обоснования в рамках только классической математики невозможно. Поэтому, принимая во внимание, что математические абстракции являются не только естественнонаучными, но и философскими, современная философия математики пытается своими методами преодолеть эту двузначность на границе между “существует” и “не существует”. Сравнительный анализ классической и неклассической теорий в контексте философской концепции дополнительности способствует пониманию онтологических и эпистемологических проблем, относящихся к основаниям и обоснованию математики.

Поэтому из этого анализа можно заключить, что в философско-методологическом обосновании современной математики системный подход позволяет говорить о непротиворечивости математических теорий, в принципе недоступных для логического обоснования. Современная математика стала важнейшим принципом научного знания, хотя при построении основ своих теорий профессиональные математики давно уже осознали сложность выбора нужного и убедительного для всех направлений математики «слова». Общий вывод из сказанного состоит в том, что философы должны снять неоправданные ограничения на программу обоснования математики, присущие первоначальной программе Гильберта. Задача философии математики состоит как раз в том, чтобы избавиться от «пустого скептицизма», препятствующего выявлению оснований математического мышления и допустимых подходов к обоснованию математических теорий.

Идеал рациональности, связанный с логическим обоснованием, в силу гёделевских результатов, имеет ограничительный характер. Поэтому концептуальные идеи оснований математики, встроенные в философско-математические рассуждения проблемы обоснования, должны быть альтернативными. Без этого требования к формулировке концептуальных идей любая теоретическая схема вырождается в тавтологию. Поскольку основания никогда не могут быть обоснованы, то математический ум превращает увеличение строгости в увеличение содержания. Философское представление о программах обоснования составляется их трех взаимосвязанных частей: из его действительных свойств, из его идеальных свойств и из его возможных свойств, определяемых важнейшими закономерностями развития математического знания. Так как принцип полноты нереализуем, он делает математическое знание открытым, не подвергая при этом сомнению преимуществ, связанных с применением различных логических законов для вывода математических утверждений.

Вырастая из прежних концепций обоснования, новой парадигме приходится преодолевать естественный скептицизм, идущий от методологической привычки отрицания, поскольку сложившиеся в бинарной парадигме понятия не сразу встраиваются в соответствующую триадическую структуру. Но к чести человеческого разума философы науки, не отвергая непонятное, начинают осваивать общечеловеческий принцип приятия: «признание – сочувствие – доверие». В любой жизнедеятельности наше совместное существование создает гармонию и порядок. Естественное стремление увидеть предустановленную гармонию, как предполагаемую сокровенную взаимосвязь целого есть цель любого фундаментального знания. Именно современная математика, как наука о бесконечном, открывает для мыслящего человека путь к рациональному источнику гармонии мира. Но вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой постгёделевская философия математики в целом, остается пока открытым.

Абсолютная согласованность, как и абсолютная неупорядоченность математических теорий одинаково ведут к их методологическому бессилию в новых областях знания. Математическое познание сводится к свободному поиску идеальных структур, обладающих изяществом и красотой, избранной самой природой. В таком творческом философско-математическом процессе приоритет принадлежит не только абстрагирующей или интуитивной, но и символической способности мышления, которые все вместе опираются на приоритеты ума, тела и сердца, которые многозначно раскрываются через знаменитую семантическую триаду «рацио – интуицио – эмоцио». Непротиворечиво предугадать все разнообразие путей развития математики невозможно, поэтому философы математики сознательно оставляют открытыми пути решения проблем, которые невозможно решить в рамках строго формализованных программ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В СОВРЕМЕННОЙ МЕТОДОЛОГИИ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Сомнения относительно надежности классической математики кажутся большинству еще более сомнительными, чем она сама. Тем не менее, сравнительно недавно были открыты системы уравнений, эквивалентные между собой в классическом смысле, но не эквивалентные в расширенном, или неклассическом, смысле, сохраняющем свойства устойчивости. Суть открытого феномена состоит в том, что эквивалентные преобразования не изменяют решение исходной системы, но вовсе не обязаны оставлять неизменными свойства ее окрестности. Несмотря на сравнительную редкость такого рода систем уравнений в, казалось бы, хорошо обоснованном разделе классической математики, современная теория корректных задач оказалась не такой строгой, как это ранее представлялось большинству математиков.

Весь опыт философствования XX века показывает, что серьезные трудности поджидают исследователя программ обоснования математики уже на первом этапе анализа. Это связано с тем, что сам предмет исследования представляет собой исторически сложившееся «культурное сцепление» различных направлений реальной математической деятельности. Речь идет в первую очередь об основных направлениях, развиваемых в современной математике – формализме, интуиционизме и его конструктивном направлении, осознанно дистанцирующемся от неконструктивных разделов математики. Как при таком методологическом разграничении можно говорить об обосновании всей математики, если она тем самым, в зависимости от философских взглядов, разделяется на обоснованную и необоснованную или приемлемую и неприемлемую математику? Для адекватного описания методологической проблемы обоснования математики в современной философии используется системный синтез научных знаний. Именно такое обобщенное неклассическое знание становится идеалом современного математического познания. Методологический смысл, который вкладывается в слово «синтез», в контексте обоснования математики отличается от простого соединения философско-математических принципов тем, что он представляет собой концептуально новое образование в новый философско-методологический принцип.

Основные трудности системного обоснования математики связаны с методологическим анализом стратегий обоснования, поскольку наиболее известные классические программы обоснования ориентированы на различные задачи и цели математического исследования. Сошлемся на мнение специалиста по онтологическому обоснованию математики В. Я. Перминова, который утверждает: «Все программы обоснования математики являются априористскими в том смысле, что они постулируют абсолютную истинность некоторых утверждений и абсолютную надежность некоторых методов рассуждения. Они постулируют, таким образом, наличие обосновательного слоя, который не подлежит обоснованию вследствие своей абсолютной надежности» [1, с.78]. Поскольку сказанное относится ко всем программам обоснования, то их объединяет методологическая трудность определения природы и границ «онтологического слоя» в каждой программе обоснования математики.

Например, нестандартный анализ, который нельзя отнести к какому-то одному философскому направлению в математике, способствовал формированию новых подходов к решению проблем математического анализа, что в свою очередь привело к противоположным точкам зрения на проблему обоснования математики. При создании нестандартного анализа наличие неоднозначного описания чисел, как идеальных объектов, математическими средствами было использовано для расширения множества действительных чисел таким образом, чтобы при этом сохранялись математические свойства «стандартных» чисел. Это новое обоснование позволило реабилитировать нестрогие методы начала становления анализа бесконечно малых величин. В частности развитие нестандартного анализа показало, что чем эффективнее математическая теория, тем более абстрактный характер методологических понятий требуется для ее обоснования. Воспользуемся для обоснования математики философским понятием системной триады.

Философское определение системы, включающее целостность как существенное свойство, рождалось в длительных методологических спорах, поскольку понятие целостности не удавалось объяснить в привычных для математиков и философов терминах. Напомним, что «система» есть упорядоченная совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, объединенных в единое целое, что тесно связано с понятием структуры, обозначающим внутреннее строение объекта в рамках целостного образования. В интеллектуальных структурах можно выделить два типа целостности, во-первых, «дифференцированную целостность», которая отличается особой структурой составляющих ее независимых частей, функционирующих более или менее автономно, а во-вторых, «интегрированную целостность», когда составляющие ее части оказываются в состоянии стабильной взаимосвязи, хотя такое деление все же довольно условно. По мнению математика и методолога науки Р. Г. Баранцева в философии и методологии науки идет смена идеала, речь идет «о переходе к целостности как более фундаментальному понятию, чем полнота» [2, с.28]. Формальные описания различных сторон исследуемых теоретических моделей в таком контексте становятся важнейшими этапами на пути рационального постижения целостных объектов.

Могут ли в научном познании скрываться элементы иррационализма? При чисто логико-формальном подходе число цепочек, составленных из звеньев типа «посылка–вывод», растет с их длиной, по меньшей мере, экспоненциально, тогда как те из них, которые приводят к решению, образуют исчерпывающе малую долю от этого числа. Каким образом можно выявить такое ядро в обосновании математики? Все программы обоснования математики, так или иначе, восходят к древнегреческой математике, а также к Георгу Кантору как некоему первоисточнику, хотя и в разной степени критикуют его подход. Философско-методологические дискуссии по поводу канторовских бесконечных множеств, аксиомы выбора, континуум-гипотезы и других аналогичных базовых понятий современной математики сводились к основному вопросу: «в каком смысле можно утверждать, что абстрактные математические понятия существуют?» Например, Георг Кантор, как последователь Платона, полагал, что математические идеи существуют в некоем объективном «мире идей», не зависящем от человека. В частности это означает, что и математический платонизм тоже может быть полезен для обоснования и объяснения специфики математических истин.

В интерпретации известного математика и физика Роджера Пенроуза, взгляды которого на математические идеи вызывают большой интерес у философов науки, платонистский подход имеет вполне аргументированное право на существование: «Я не скрываю, что практически целиком отдаю предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком “рукотворном” критерии; а математические объекты обладают свойством собственного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта» [3, с.104]. Неклассическая математика отличается от классической тем, что она не является полной в том смысле, что современному математическому анализу поддаются отдельные фрагменты процессов и явлений, исследуемые теорией, но не теория в целом со всей совокупностью ее основных принципов. Если бы математическая система Гильберта, основанная на формальном доказательстве вопроса о справедливости или ложности любого математического утверждения, была полной, то тогда существовал бы общий метод выяснения истинности любого такого рассуждения.

Но это находилось бы в противоречии с результатами Гёделя о том, что ни одна система, реализованная по схеме Гильберта, не может быть полной в обсуждаемом смысле. Полнота фактически достигается только на математических моделях, поэтому после работ Гёделя интерес к обоснованию математики несколько уменьшился. Целостное познание как всеобщее единство включает в себя необозримое множество процессов, состояний и структур, существующих в их конкретности и целостности. Целостность и системность могут служить показателями достаточно высокого уровня развития мировоззренческого сознания. Системные соображения полезны для развитой математической теории, помогая убедиться в том, что глубокие противоречия в такой теории маловероятны. Они помогают прояснить степень достоверности содержательных выводов, основанных на рассмотрении эволюции математических теорий. В силу сложности абстрактных математических объектов и структур для исследования программ обоснования математики нужен определенный методологический подход. Такой методологический подход существует в теории познания и называется системным. Системный подход к обоснованию математики основан на понимании эволюции математических структур.

«Системный подход» – это такое направление в методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение исследуемых объектов как систем, ориентирующих на раскрытие целостности объекта, во всем многообразии его внешних и внутренних связей. Системный подход вытекает из исторического развития математических теорий и соответствующих математических структур, понимаемых как развивающиеся системы. Системные идеи позволяют по-новому взглянуть на проблему обоснования математики, с которой не может справиться редукционистский метод в обосновании. Рассмотрим новую методологию обоснования математики, открывающую в рамках системной триадической структуры дополнительные возможности анализа природы математического мышления на основе хорошо известных основных философско-методологических программ обоснования современной философии математики: формализма, платонизма и интуиционизма. Новый подход, в свою очередь, потребовал уточнить понятие «математического платонизма» с точки зрения современного понимания математики.

Несмотря на все попытки, философия математики, возникшая в начале XX века, не смогла строго очертить границы логико-онтологического обоснования математики. В связи с этим вполне естественным может оказаться вопрос, какого философского мировоззрения придерживаются математики? Математическое мировоззрение, которого придерживается известный логик и математик Н. Н. Непейвода, можно охарактеризовать как «умеренный скептический платонизм». В отличие от традиционного математического платонизма, предполагающего, что математические понятия реально существуют в мире идей, он считает «данное воззрение профанацией платоновского взгляда и самопереоценкой человека и его научного мышления» [4, с.XXIII]. «Умеренный платонизм» не предполагает первичности математического платонизма, а состоит в признании активности субъекта и определенной совокупности его знаний и представлений, имеющих исторический характер видения реальности. Системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих идей, недоступных человеку, но математика дает возможность некоторого приближения к ним. Этой трактовки платонизма мы будем придерживаться в дальнейших рассуждениях.

Под «платонизмом» понимался особый тип реализма, соотносящего математические понятия с философскими идеями из определенного рода «внечувственной» реальности. Согласно учению Платона, наблюдаемый нами мир, как мир чувственно воспринимаемых вещей, является лишь отражением «мира идей», которые вечны и неизменны, в отличие от непостоянных и изменчивых чувственных вещей. С точки зрения платонизма, математические объекты реально существуют, а человеческий ум имеет уникальную способность их познавать. Один из аргументов Аристотеля против концепции Платона состоит в том, что «идеальный мир» предназначен для того, чтобы с его помощью объяснить мир чувственно наблюдаемого, но как реализуется это объяснение – это тот мировоззренческий вопрос, на который Платон не дает убедительного ответа. Тем не менее, несмотря на теологические претензии, платонизм выжил благодаря математикам, которые предпочитают иногда называть его «скептическим платонизмом». Напомним, что скептицизм – это лишь первый шаг умствования, а согласно Платону, именно с математики начинался путь бесконечного постижения истины.

Ценность математической теории состоит в ее способности транслировать истину и переводить одну систему содержательных математических допущений в другую, благодаря логической совместимости своих принципов. Как формируются истинные утверждения при ответе на вопросы из области математики? Восприятие математической истины может осуществляться различными способами. Проблемой математической истины интересовались еще древнегреческие мыслители, которые в равной мере владели философским и математическим знанием своего времени. В XX веке эта проблема стала особенно актуальной после рефлексивных результатов австрийского логика Курта Гёделя. Он показал, что достаточно широкая система аксиом и правил вывода, содержащая арифметические теоремы, например, «последнюю теорему Ферма», и свободная от противоречий, должна включать утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках формализма данной системы. Поэтому истинность таких утверждений не может быть выяснена с помощью методов, допускаемых этой формальной системой. В частности, из результатов Гёделя следует, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем. Важнейшее условие, при котором была доказана теорема Гёделя о неполноте, состоит в непротиворечивости системы аксиом математической теории. Гёдель показал, что доказать непротиворечивость системы аксиом в рамках самой системы нельзя, то есть утверждение о непротиворечивости само по себе является «неразрешимым».

По существу вопрос идет о том, являются ли данные абстрактные понятия характеристиками реального мышления и в какой степени они являются стандартными нормами человеческого мышления, воплощенными в компьютерной программе. Следует предостеречь от излишне радикального истолкования результата Гёделя, поскольку такой подход исходит из ошибочного допущения, что теоремы Гёделя истинны для всех формальных выражений, которые могут быть истолкованы в качестве утверждений о непротиворечивости теории. Развитие математики в направлении все увеличивающейся строгости, пониманию которой способствовал своими результатами Гёдель, а также критика математического платонизма привели к постановке до тех пор не стоявших философско-методологических вопросов. Например, такого: «что такое конструктивный математический объект, то есть результат, как говорят, эффективного математического построения?» [5, с.130]. В частности, сюда же можно отнести и вопросы осуществимости математического доказательства, вычислимость математических формул, достижимость и реальность существования чисел. Поэтому достаточно убедительная философско-методологическая программа обоснования современной математики не может быть построена в рамках упрощенной теории познания.

Постоянный философский интерес к теоремам Гёделя обусловлен тем, что само развитие математического знания подтверждает, что они говорят нечто методологически важное о пределах возможностей абстрактного мышления человека. В связи с проблемой «искусственного интеллекта» человеческое мышление сопоставляется с возможностями компьютерного анализа, но, поскольку сами компьютеры являются продуктом человеческой деятельности, то фундаментальное различие между возможностями «творца» и его «творения» отчасти характеризуется теоремой Гёделя о неполноте. Этот результат состоит в том, что для арифметики Пеано строятся неразрешимые предложения, в силу чего его называют «теоремой Гёделя о неполноте формальной арифметики Пеано натуральных чисел». В указанном контексте самого Гёделя можно охарактеризовать как убежденного платониста, даже если бы он и сомневался в абсолютности существования всех мыслимых математических конструкций. Возникающее при этом затруднение связано с тем, что понятия непротиворечивости и полноты используются и для характеристики мышления человека. В действительности Гёдель доказал, что математика – это не произвольные несистемные поиски, определяемые прихотью математиков, а нечто абсолютное, которое не изобретается, а открывается. Такая платоническая точка зрения была существенна для Гёделя, но не менее существенной она является в нашем подходе к проблеме обоснования математики.

Еще в начале прошлого века философы математики были уверены в возможности редукции математики к логике, а к концу века математики и философы окончательно убедились в несостоятельности программы обоснования логицизма. В новый век философия математики вошла с убеждением, что содержание современной математики далеко выходит за пределы логических понятий, хотя математические идеализации, несомненно, обладают необходимостью для мышления. Все же именно «смысл» составляет сущность математики. Системное обоснование математических теорий, безусловно, более абстрактно и более общезначимо, чем логическое, поскольку все программы логического обоснования математики базируются на определенного вида редукции. Например, в интуиционизме, это редукция содержания математики к содержанию арифметики, а в формализме, это редукция проблемы непротиворечивости теории к проблеме непротиворечивости содержательной метатеории. Системный подход, по мнению философа науки Ю. В. Сачкова, дает новый взгляд на философско-методологическую проблему целостности. «Если ранее целостные представления об объектах исследования складывались исключительно на основе их внешних взаимодействий, на основе того, как они проявляют себя во внешних взаимодействиях, то системный подход дополняет изучение целостности анализом их внутренней дифференциации» [6, с.48]. Используя дополнительные внутренние связи и целостные свойства системы, получают ее определенное обоснование.

Познание интересующих нас философско-методологических проблем через призму системного подхода может привести к более глубокому проникновению в сущность этих проблем. При всей философско-методологической значимости гёделевских результатов, следует отметить, что гёделевский метод рассуждения предполагает строго рациональное отношение к системе «неопровержимых» математических убеждений. Для построения целостной картины развития современной математики необходим предварительный философско-методологический анализ различных когнитивных факторов, поскольку любая программа обоснования содержит в себе как рациональные, так и иррациональные допущения. Реальная логика, являющаяся основой всякой рациональности, имеет в принципе иррациональные и неформальные аспекты, так как все ее содержание не может быть определено в символических системах. Методологический сдвиг в решении проблемы обоснования зависит не только от достижений в логике и современного анализа генезиса аксиоматических систем, а, прежде всего, от углубленного понимания современных проблем философии математики и от расширения допустимых подходов к обоснованию математических теорий.

Современная философия обоснования математики, как считает В. Я. Перминов, должна соединить в себе три разнородных положения. Он сформулировал их в виде следующих тезисов: тезиса об «идеальности и формальности математических структур», представляющего математику как совокупность чисто мыслительных конструкций, ограниченных только требованием непротиворечивости; тезиса об «априорности исходных математических представлений», которые заключены в традиционных разделах математики, таких как арифметика и элементарная геометрия; и тезиса о «реальности исходных математических представлений как непосредственно связанных с универсальной онтологией, лежащей в основе человеческого мышления» [7, с.9]. С онтологической точки зрения интересна идея Гёделя о реальном статусе специфических математических объектов существующих во внечувственном мире, которая может быть интерпретирована как указание на «предметную онтологию». Она является выражением структуры мира, существующего независимо от математики, поскольку математические идеализации обусловлены реальностью в той же мере, что и законы физики. Следует признать, что формалистская философия математики была в определенном смысле прогрессивной, поскольку появилась как естественная реакция на некритическую интуитивную манеру математического рассуждения.

Когда формализация стала пониматься как единственный способ получения истинного математического результата, то всякое содержательное мышление стало рассматриваться как не обладающее полной достоверностью. Это заблуждение пытались устранить с помощью интуиционистской философии математики. Но требование конструктивности всех допустимых объектов математики существенно ограничивает логические средства, применяемые в интуиционистской математике. В защиту интуиционизма все же необходимо сказать, что математическое мышление неизменно подтверждает гипотезу о первичности интуитивной и конструктивной основы математического рассуждения по отношению к его формально-символическому оформлению. Как направление в философии математики интуиционизм возник как реакция на сформировавшиеся к началу прошлого века математические тенденции, согласно которым математический объект можно было полагать «существующим» даже в тех случаях, когда не было никакой возможности воплотить этот объект в «математической действительности». Хотя классическая математика была «наивно конструктивной» в том смысле, что если доказывалась теорема существования математического объекта, то при этом давался способ его построения. Признание несостоятельности отдельных программ обоснования не следует также отождествлять с невозможностью обоснования математики, хотя оно способствовало появлению некоторого скептицизма в отношении строгости самого математического мышления.

У работающих математиков нет определенных абсолютных убеждений относительно обоснованности математических конструкций и теорий или непротиворечивости используемых ими формальных систем. Более того, вряд ли, они задумываются над тем, «пользователями» каких именно конкретных формальных систем они являются. Неявные философско-методологические убеждения постепенно размываются по мере расширения формальных систем математики и все большей их удаленности от доступных непосредственному интуитивному восприятию математических феноменов. Кроме того, задача обоснования математики в контексте проблемы надежности математического мышления не может быть решена без обращения к внелогическим критериям. В современной философии и методологии науки осознается недостаточность бинарных структур, хотя понятия, сложившиеся в бинарной парадигме, не всегда легко укладываются в триадическую структуру. «Триадой» называют совокупность из трех элементов, каким-то образом связанных между собой. Среди различных типов триад для целей обоснования математики выделим системные триады. По определению Р. Г. Баранцева, «системные триады» характеризуются тем, что их единство создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других.

Для существования триад необходимы зазоры, связанные с хорошо известным системным принципом «неопределенности–дополнительности–

совместности», который формулируется следующим образом: «в системной триаде каждая пара элементов находится в соотношении дополнительности, а третий задает меру совместимости» [8, с.38]. Пока этот принцип соблюдается, стремление к полноте не нарушает целостности. Для обоснования математики триадический подход означает, что никакая часть математики не обладает особыми привилегиями, так как каждая известная программа обоснования математики основана на поисках той части математики, которая в рамках этой программы имеет особую надежность своих доказательств, свободных от противоречий. В таком контексте все три элемента системной триады потенциально равноправны, поскольку суждение о математической истине не опирается непосредственно на некоторую определенную программу обоснования математики. В современной философии математики можно выделить три основных программы обоснования математики: формализм, платонизм и интуиционизм, поэтому в качестве одной из формул системной триады можно рассмотреть следующую совокупность программ обоснования математики:

платонизм

/ \

формализм — *интуиционизм*.

В ней используются понятия, уже сложившиеся в диадной парадигме «формализм–интуиционизм». Но в системной триаде математическая истина не подчиняется какому-то одному «общезначимому» критерию, поскольку бинарные проблемы, сводящиеся к ответу «да–нет», могут оказаться губительными для дальнейшего прогресса математики. Новое смысловое содержание определяется новой структурой программы обоснования математики. Профессиональный математик в своих работах, как правило, не придерживается единственной методологической доктрины, даже в одной математической работе можно найти элементы разных подходов. Поэтому правильнее и плодотворнее говорить не о методологической нестыкуемости таких подходов в рамках единого описания, а об их дополнительности, когда один из подходов позволяет лучше понять один из фрагментов математического текста, а другой, дополнительный к первому, лучше разъясняет другой фрагмент. Такие дополнительные описания могут способствовать целостному описанию математических феноменов. Напомним, что Нильс Бор ввел понятие дополнительности как раз в поисках единства теоретического осмысления нового знания.

О целостности на основе генезиса тринитарного сознания, как методе научного исследования, можно говорить в различных смыслах, например, как об обобщении определенной теории, включающем в нее предшествующие теории, или как о широком объединении нескольких теорий, в котором сглаживаются их противоречия. Суть системного подхода состоит в том, что с его помощью мы надеемся получить приемлемое обоснование непротиворечивости содержательных аксиоматических систем, выводя его из анализа логики их развития и выявляя их логическую надежность без обращения к свойствам формализованной модели теории. Сама системная триада указывает на пределы обобщения своих понятий и допустимые пределы их абстрактности. Она определяет, каков должен быть уровень математической абстракции аксиоматической системы, чтобы построенная на ее основе теория находила новые области реальных эффективных приложений. Но хотя идея реальности важна для понимания исходных представлений математики, она не может ограничивать внутренние потребности развития математических теорий. На уровне такого понимания происходит «контакт» с платоновской идеальной математической реальностью, существующей независимо от человека и вне времени. Так, например, бесконечное множество можно рассматривать как реальный объект, то есть как завершенное единое целое, существующее не только в абстракции.

Именно перекодировка понятий – формальность, априорность, реальность – составляет определенную трудность при смене парадигмы. Как утверждает Роджер Пенроуз, «нельзя создать такую систему правил, которая оказалась бы достаточной для доказательства даже тех арифметических положений, истинность которых, в принципе, доступна для человека с его интуицией и способностью к пониманию, а это означает, что человеческие интуицию и понимание невозможно свести к какому бы то ни было набору правил» [9, с.110]. В новой парадигме происходит смена методологического идеала от полноты к целостности, то есть речь идет о переходе с помощью системной триады программ обоснования математики к целостности, как более фундаментальному понятию в философии математики, чем полнота. Полноту можно рассматривать как свойство формальной системы, которая должна «схватывать» интуитивное содержание математической теории. При таком подходе математики могут избавиться от методологических упреков в том, что они в качестве основы своих математических убеждений используют какую-либо необоснованную формальную систему. Поэтому формальное описание математической теории в системной триаде конструируется таким образом, чтобы ее «математическая реальность» адекватно соответствовала содержательным истинам.

Рациональное знание, наиболее совершенным образцом которого, является математическое знание, дает возможность понять не только окружающий нас мир, но и реальные возможности самого человека. В математической постановке задачи полнота достигается фактически только в математических моделях, как говорят математики, при корректной постановке задачи. Понятие «корректного рассуждения» не всегда укладывается в рамки вычислительных операций, так как может таить в себе неизведанные пока глубины. Описывая реальное явление, мы задаем граничные условия, замыкая его в пространстве, а задавая начальные условия, замыкаем его во времени, стремясь к полноте формального описания этого явления. Когда мы пытаемся сохранить целостность, например, в некорректных задачах, то она сохраняется благодаря внешним связям в пространстве и времени. Но в теоретической математике в связи с проблемой «переусложненности» математических теорий, может наступить момент, когда абсолютизация начинает «уводить» математические модели из жизни. Вот тогда и должны напомнить о себе законы целостности познания. Существенное отличие современного этапа неклассической и постнеклассической математики от классической математики состоит в том, что она не является полной в логическом смысле.

Хотя большинство философов науки привыкли к тому, что в математике не бывает методологических неожиданностей, по крайней мере, в ее элементарных разделах, в конце XX века был получены неожиданные результаты в таком, казалось бы, классическом и традиционном ее разделе, как преобразование дифференциальных уравнений и линейных систем. В работах специалиста по математическому моделированию и компьютерным системам из Санкт-Петербургского государственного университета Ю. П. Петрова была установлена неполнота известной классификации математических задач на классы корректных и некорректных задач. Он открыл, что существует третий класс – класс задач, изменяющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении. До этого открытия считалось, что эквивалентные преобразования «ничего не меняют», однако не случайно математики прошлого различали понятия эквивалентных и тождественных преобразований. Это еще один повод убедиться в том, что в математике все делается не зря. «Для достижения определенности, – считает автор этого открытия, – полезно отказаться от исследования преобразований самих по себе и перейти к исследованию *триады*: исследуемая математическая модель, решаемая задача, выбранный метод решения» [10, с.134]. Для этого им было введено новое понятие «преобразования, эквивалентные в расширенном смысле», или эквивалентные в неклассическом смысле, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, а во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи.

По существу, эти результаты говорят о неполноте фундаментальных понятий прикладной математики, которые еще несколько веков назад казались законченными и незыблемыми. Заметим, что математическому моделированию поддаются лишь некоторые частные процессы, но не теория целиком во всей совокупности ее принципов, поскольку при исследовании математической модели используются также рассуждения, не носящие дедуктивного характера. В методологическом смысле полнота достижима, когда аксиоматика математической теории признается достаточной для воспроизведения всего ее значимого содержания. Например, хотя аксиоматика арифметики логически неполна и теоретически допускает неограниченное пополнение, никто из работающих математиков не идет по пути ее такого расширения. В контексте нашего исследования целостность пропадает, когда нарушается соразмерность составляющих компонент системной триады философско-методологических программ обоснования математики. Тринитарный подход, как новая концептуальная идея в программах обоснования математики, превосходит противопоставления, поэтому не может быть сведен к двойственному подходу в обосновании.

Заметим, что троичность вообще присуща невидимому миру. В классической китайской философии «единое» раздваивается, но перемены следуют в комбинации не двух, а через сочетание трех сил. В физике скорость света по неизвестной науке причине связана с числом три, а нули в ней сути не меняют, поскольку они исчезают при изменении масштаба измерения. В музыке основной тип гармоничного сочетания тонов в одновременном звучании – это аккорд, то есть как минимум три звука, а для гармоничного смешения цветов, взаимодополняющих друг друга до белого, достаточно трех цветов – красного, синего и зеленого. В биологии генетический код состоит из сочетания трех нуклеотидов, стоящих рядом в спиральной цепи. В современной математике известный пример фрактального несчетного множества нулевой меры, а именно знаменитая «канторовская пыль», тоже строится на основе триадного ряда, с помощью последовательного выбрасывания срединной части отрезков разделенных на три части. С точки зребния классического направления в математике, фракталы воспринимаются как специальные математические конструкции. С точки зрения постнеклассической математики, фрактальность – это такое фундаментальное свойство, которое переосмысливает классическую оппозицию «дискретность – непрерывность» в системную триаду «дискретность – фрактальность – непрерывность», представляющую собой простейший структурный элемент синтеза. Триада больше согласовывает, сопоставляет и соединяет, чем противопоставляет и разъединяет, но абсолютизация любой компоненты триады разрушает ее целостность. Для другого набора дополнительных аргументов, можно, наконец, вспомнить о православном догмате Троицы и роли троичности в наших традиционных обычаях.

Современный этап развития математики характеризуется тем, что математики строят не произвольную, ничем не ограниченную, абстрактно-формальную математику, а «понимаемую математику», понимаемую в том смысле, что философы математики понимают, какие ограничения это понимание накладывает на ее логические основания. Это понимание позволяет объяснить, как в программах обоснования соединяются дуализм рассудка с «метафизикой триединого», а диалектика противоположностей формального и интуитивного с троичной структурой формализма, платонизма и интуиционизма. Возможно поэтому, или по каким-то иным причинам, в настоящее время снова ведется оживленная дискуссия о проблемах, возникающих на стыке науки, философии и религии. Но если в контексте понимаемой математики сознательно использовать тринитарный стандарт мышления, то многие проблемы традиционной логики противоположностей, исключающей, а не ищущей третье, станут для нас более понятными.

Литература, использованная в Приложении 1

1. Перминов, В. Я. Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики / В. Я. Перминов // Математика и опыт. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 56–82.

2. Баранцев, Р. Г. Становление тринитарного мышления / Р. Г. Ба-ранцев. – М. ; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 124 с.

3. Пенроуз, Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / Р. Пенроуз. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

4. Непейвода, Н. Н. Прикладная логика: Учебное пособие / Н. Н. Непейвода. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. – 521 с.

5. Бирюков, Б. В. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики / Б. В. Бирюков, В. Н. Тростников. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.

6. Сачков, Ю. В. Научный метод: вопросы и развитие / Ю. В. Сачков. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 160 с.

7. Перминов, В. Я. Философия и основания математики / В. Я. Пер-минов. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

8. Баранцев, Р. Г. Синергетика в современном естествознании / Р. Г. Баранцев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.

9. Пенроуз, Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. Часть I. / Р. Пенроуз. – М. ; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.

10. Петров, Ю. П. Неожиданное в математике и его связь с авриями и катастрофами / Ю. П. Петров, Л. Ю. Петров. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 240 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
ЗАГАДКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИКИ И УМЕРЕННЫЙ СКЕПТИЧЕСКИЙ ПЛАТОНИЗМ

Само существование математических теорий и их эффективность в познании нашего мира имеют гораздо большее значение для философии науки, чем любая философская интерпретация конкретной теории. Вопрос, почему математические структуры, используемые для моделирования различных аспектов физического мира, работают так хорошо, представляет собой нетривиальную философскую проблему. В лаконичной форме эта проблема формулируется следующим образом: почему мир устроен математически? Но, вообще говоря, это частный случай более общего мировоззренческого “метавопроса”: почему вообще мир постижим? Загадка открытости мира для рационального постижения становится еще запутаннее, из-за того, что многие математические модели не имеют очевидного основания для понимания с их помощью структуры физического мира. Пока лишь мы можем сказать, что его постижимость – это извечная тайна мира, в котором мы живем.

В философии науки теоретическое знание исследуется с точки зрения эффективности его методов, надежности методологических оснований, убедительности доказательств, наличия критериев обоснования и понимания возможных границ его применимости. Французский математик и философ Нового времени Рене Декарт говорил, что не знает более совершенного безошибочного метода, чем тот, который основан на математике, поскольку только математикам удалось найти наиболее аргументированные и убедительные доказательства. От истинного познания нас отвлекает множество предрассудков. Как сказал Декарт: “Очевидно, мы можем избавиться от них лишь в том случае, если хоть раз в жизни постараемся усомниться во всех тех вещах, в отношении достоверности которых мы питаем хотя бы малейшее подозрение” [1, с.314]. Право сомневаться было равнозначно для него духовной свободе, поэтому он считал необходимым усомниться во всем, что до сих пор считалось достоверным, даже в математических доказательствах.

Специфика математического знания проявляется в том, что математические идеи оказывают огромное влияние не только на человеческое мышление в целом, но и на его практическое применение. Феномен неразрывной связи математики и опыта физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии Юджин Вигнер образно назвал “необоснованной эффективностью математики в естественных науках”. Как обосновать это явление? Одно из наиболее популярных объяснений состоит в том, что основные математические понятия, например понятие натурального ряда чисел, изначально имеют эмпирический характер. Если допустить, что математические понятия имеют эмпирическую природу, то тогда загадка эффективности математики уже не покажется столь загадочной и непостижимой, поскольку реальные применения математики – это один из способов контакта мира идей или мира математики с миром опыта.

Теоретическая математика возникает как полностью самостоятельная сущность тогда, когда в ней систематически используются все типы доказательств, включая доказательство от противного, примененные к объектам специального вида, в которые включена математическая бесконечность. И первыми такими объектами были некоторые простейшие иррациональности. Одной из характерных особенностей исторического процесса является то, что ни одно из событий не повторяется в деталях дважды. Поэтому возникновение абстрактной математики, как событие исторического процесса, также не имеет точного "двойника". Однако приблизительный аналог этого феномена, возможно, есть и в математике Нового времени, а именно, формирование аксиоматических построений, охвативших большинство разделов математики и способствовавших стремительному распространению теоретических конструкций.

Все объекты математики, начиная от натуральных чисел и кончая группами, топологическими векторными пространствами и категориями абстрактны. Уточним, что понимается под абстрактным определением на примере понятия группы. Понятие группы ввел в современную математику французский математик Эварист Галуа между 1830 и 1832 годами. Он использовал свойства групп, чтобы получить ответ на вопрос, который до него пытались решить многие математики в течение 200 лет. Его можно сформулировать следующим образом: можно ли выразить решения алгебраических уравнений пятой и более высокой степени формулами, подобными известным формулам для решений квадратных уравнений, кубических уравнений и уравнений четвертой степени? Ответ оказался отрицательным. Поразительно также то, что абстрактные группы, как математически совершенные объекты, встречаются повсюду в современной математике, хотя сам Галуа первоначально имел в виду их конкретное применение к алгебраическим уравнениям.

Заметим, что математическое совершенство – это, строго говоря, не всеобщее свойство, но в математическом сообществе о нем может быть достигнуто согласие. По существу, правила действий с элементами группы, соответствующим образом обобщенные, заимствованы из арифметики. Согласно одному неформальному определению, группа – это некоторое множество с определенной операцией, удовлетворяющей "легко забываемым аксиомам". Такое определение вызывает вполне естественный протест: зачем здравомыслящему человеку такая непонятная операция? Более мотивированным является подход, при котором начинают не с группы, а с понятия преобразования взаимно-однозначного отображения множества в себя, как это в действительности было сделано исторически. После этого набор преобразований какого-либо множества можно назвать группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а также вместе с каждым преобразованием содержит и его обратное преобразование. Отличительной чертой математики является так же то, что все ее предложения относятся к бесконечному множеству объектов, а точнее к классам, содержащим бесконечное множество объектов.

Единственным общепринятым способом установления истинности математических утверждений является доказательство. В те времена, когда в математике еще не существовало определения доказательства, в современном понимании этого слова, некоторые заведомо важные математические понятия влачили довольно сомнительное существование. Доказательство выявляет связи между предложениями, показывает, от каких предложений зависит данное и какие предложения вытекают из него. Вообще говоря, в философии и методологии математики принято различать два вида доказательств, а именно, экзистенциальные и конструктивные. Возможность доказывать существование математических объектов без необходимости явно и конструктивно предъявлять их – одна из отличительных черт современной математики. Однако свободное употребление чисто экзистенциальных рассуждений, например, с использованием знаменитой аксиомы выбора, позволяет доказывать существование очень странных объектов, например, таких как неизмеримые множества, противоречащих интуиции здравого смысла.

С другой стороны, если предположить, что в интуитивных математических понятиях скрыты какие-то аспекты, которые могут не проявляться довольно долго в реальной математической практике, то это по существу все тот же математический платонизм, рассматривающий мир математических объектов, как независимый от рассуждений математиков. Говоря о непостижимой эффективности математики, Вигнер имел в виду, прежде всего, свою фундаментальную работу "Теория групп и ее применение к квантово-механической теории атомных спектров" (1931), переведенную на русский язык в 1961 году. Заметим, что к предыдущему утверждению следует относиться с некоторой долей скептицизма. Например, полное доказательство классификации простых конечных групп, полученное в начале 80-х годов XX столетия, занимает примерно 10–15 тысяч журнальных страниц. Эта работа была проделана объединенными усилиями более ста математиков и опубликована на страницах различных научных журналов примерно в 500 статьях.

Американский математик Дэниел Горенстейн, сыгравший решающую роль в необъятном доказательстве этой грандиозной теоремы, разрабатывал новую программу доказательства. "Если наша работа увенчается успехом, – утверждает он, – то доказательство второго поколения составит лишь одну пятую первого и приобретет во столько же раз большую идейную ясность" [2, с.74]. Однако по любым математическим стандартам доказательство в 3000 страниц все равно будет слишком длинным и необозримым. Хотя применение этой классификации за пределами математики пока еще не столь значительно, в математике этот результат уже нашел применения в разных областях. Поскольку значимое дедуктивное доказательство, базирующееся на истинных посылках, не может приходить к ложным заключениям, то, критикуя математическую теорию, мы тем самым пытаемся показать неудовлетворительность ее самой или ее следствий в контексте ее будущих приложений.

Одной из основных функций математического доказательства является обоснование математических теорий. А что обосновывает доказательство? Доказательство – это такая теоретическая конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую. Математическое доказательство устанавливает лишь тот факт, что математическое утверждение выведено по общепринятым и закрепленным математической традицией правилам из утверждений, ранее признанных доказанными в соответствии с этими правилами. Но тогда, по мнению группы французских математиков Никола Бурбаки, остается необъяснимой порою фантастическая эффективность математики в других науках. Что в этом контексте означает “эффективность”? Это вопрос непростой, поскольку строго определить эффективность использования нового математического знания можно только по прошествии некоторого времени, иногда довольно значительного.

В нестандартном математическом анализе “наличие идеальных объектов и неоднозначность описания чисел математическими средствами были использованы для того, чтобы расширить множество действительных чисел таким образом, чтобы все их математические свойства, не упоминающие новых чисел, остались неизменными” [3, с.124–125]. Методы анализа бесконечно малых, приведшие в XVII-XVIII веках к существенному продвижению математики, сделанные на доступном в то время уровне обоснования, в XIX веке были справедливо раскритикованы за их не строгость. Только в XX веке перепроверенные на новом уровне развития науки, они были заслуженно реабилитированы с помощью нестандартного анализа. Сущность математического мировоззрения характеризуется тем, что математика дает возможность понимания систем, возникающих в реальном мире, которые являются реализациями общих совершенных идей, вообще говоря, недоступных человеку.

Можно сказать, что давать оценки эффективности – это привилегия выдающихся математиков и экспертов, но эксперты тоже, как известно, могут ошибаться. С точки зрения интуиционизма – одного из философско-математических направлений, основателем которого был Лейтзен Брауэр, математическое доказательство должно вместе с обоснованием давать требуемое построение. Поэтому методы, дающие такое построение, Брауэр и его последователи называли эффективными. Он считал, что математическое построение – это некая сущность достаточно высокого уровня, поэтому для его обоснования недостаточно одних ссылок на практику, поскольку иногда приходится рассуждать одновременно на нескольких уровнях обоснования. Именно такой методический прием был применен при создании нестандартного анализа.

Математика дает возможность некоторого приближения к совершенным идеям. Возможно, именно в этом причина непостижимой эффективности математики в приложениях к тем наукам, которые поддаются формализации. Философско-математические системы способствуют также развитию интегрального процесса, способствующего системному мировоззренческому синтезу. Как отмечает философ образования М. И. Вишневский, “под влиянием нового образовательного содержания данный синтез охватывает все более широкий круг достижений надобыденной духовной деятельности, переводя мировоззрение в состояние, характеризующееся большей сложностью, динамичностью, открытостью переменам…” [4, с.22]. Хотя математика весьма эффективна, ее выводы нуждаются в перепроверке, поскольку для разных целей требуются разные приближения. Кроме того, неподдающаяся обоснованию эффективность математики состоит еще в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Практическое применение математической теории, как правило, шире, чем решение той практической задачи, с которой эта теория первоначально была связана.

Стремление онтологизировать первичные математические понятия обусловлено самой спецификой становления математического метода. Оно совпадало с интересами математиков, которые старались использовать, по возможности, наименьшее число исходных принципов при формулировке математической задачи. Математики, как бы парадоксально это ни звучало, ради чистоты результата сознательно ограничивали себя миром математических понятий, точнее специальным миром определенных математических моделей. Исследование таких моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, становилось для них самоцелью. В этом одна из основных причин платонистского отношения математиков к объектам своих исследований. Возможно, что именно в этом источник творческой силы математики, названный непостижимой эффектностью математики. Кроме того, рациональные свойства формально-математических методов, будучи примененными, к физическим теориям, иногда пробуждают ощущение встречи с чем-то интеллектуально красивым.

Как и любую другую форму прекрасного, математическую красоту легче оценивать, чем описывать. Может быть, метафизическая красота математики связана с ее эффективностью и, тем самым, все сводится только к утилитарной пользе? Учитывая феноменальную живучесть платонистского духа в математике, можно, в конце концов, спросить и так: разве только красивые математические структуры подтверждали свою эффективность в физике? Философ с докторской степенью в области космологии Михаил Хеллер, снимая методологическую остроту этих вопросов, говорит: “Вероятно, на эти вопросы нет прямых ответов, но тот факт, что их задают очень часто, указывает на значительную (хотя и недостаточно признанную) роль эстетики в философии науки" [5, с.149]. И все же, почему стратегия рациональных объяснений так эффективна в исследовании физического мира? Можно лишь предположить, что когда рациональные методы познания мира приводят к адекватным результатам, то это свидетельствует также о том, что рациональный выбор каким-то образом хорошо согласуется со структурой мира.

Например, теория групп была создана математиками в связи с сугубо внутренними математическими проблемами и только затем она оказалась столь полезной для физики. Ее создатели не имели ни малейшего представления о том, как можно было бы применить теорию групп в физике. Однако чувство математической целесообразности приводит к построению структур, которые десятилетия спустя, оказываются полезными для физики и естествознания в целом. Знаменитый американский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии Стивен Вайнберг находит удивительным, что чувство математической красоты приводит математиков к построению формальных структур, которые оказываются полезными для физиков, даже несмотря на то, что математики изначально о том даже не помышляли. Физики постигают мир, который в силу своей рациональной красоты, ценится не только за эстетическое удовольствие, получаемое от него, но и а за свидетельство правильного выбора математической теории.

Справедливости ради, следует заметить, что сами математики всегда надеются, что их исследования могут принести определенную пользу, если не в смежных науках, то хотя бы в самой математике. Однако способность математиков предвидеть, какие именно математические средства могут понадобиться для развития физических теорий, совершенно фантастична. Об этом говорит в своем знаменитом эссе и сам Вигнер. "С одной стороны, – пишет он, – невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий" [6, с.536]. Высказывания в таком духе свидетельствуют о живучести платонистского взгляда на математику, особенно среди тех, для кого не столь уж значимы собственные методологические проблемы современной математики.

Тем не менее, то, что подразумевается, по выражению Вигнера, под загадочной эффективностью математики в естественных науках для профессиональных физиков достаточно очевидно, поскольку, моделируя мир в терминах математических структур, они ощущают и наблюдают определенный резонанс между этими структурами и структурой мира. Одно из величайших чудес научного метода состоит в том, что чисто формальные математические структуры могут соответствовать структуре реального мира. Но остается философский вопрос: почему такая стратегия познания “необъяснима”? Речь идет о том, что теоретические структуры, сформулированные на языке математики, возвращают нам больше информации, чем мы вложили в них. Как сказал кто-то из физиков, “уравнения мудрее тех, кто их изобрел”, то есть новая информация не только извлекается из математических уравнений, но, что более удивительно, довольно часто прекрасно соответствует тому, что мы наблюдаем. Так, обобщение концепции пространства в современной математической физике до концепции некоммутативного пространства, например, так называемой “плитки Пенроуза”, понадобилось для работы с такими “патологическими” пространствами, в которых стандартные геометрические методы были безнадежно неэффективны.

Так почему математика столь часто оказывается применимой к естественному несимволическому миру? Почему она стала столь полезной в естествознании? Это будет уже не столь таинственным, как только мы осознаем всю силу того факта, что математика является частью природного мира. Если рассматривать математику как социокультурный феномен с позиций мировоззренческого осмысления математики, то тогда соответствующие представления относятся уже к области философии математики, которая разделяется на два конкурирующих направления – фундаменталистское и нефундаменталистское. Философы математики первого направления заняты выявлением природы математического знания, в частности, проблемами существования математических объектов, сущности математического доказательства, наконец, определения самого предмета разных направлений математики.

Философы математики другого, нефундаменталистского направления анализируют развитие математики в социокультурном контексте с точки зрения обнаружения общих закономерностей развития математики с более широких позиций, а также ее соотношение с другими науками и ее место в культуре. “Каждое из этих направлений имеет ряд внутренних проблем и традиций их решения и одновременно набор внешних функций, заключающихся в реагировании на запросы со стороны других областей знания” [7, с.96]. Нахождение исторических закономерностей развития математики и методологический анализ этих тенденций может способствовать предвидению направлений развития математики в рамках нефундаменталистской философии математики. Многие философы этого направления пытаются совместить отказ от наивного реализма и платонизма с социальной обусловленностью знания, но необязательно при этом сводить реальность математических объектов к коммуникативным операциям, то есть реальность объектов познания к его средствам.

Мировоззрение, которого придерживаются современные математики, можно охарактеризовать как “умеренный скептический платонизм”, который расходится с математическим платонизмом, предполагающим, что математика сможет ввести нас в мир абсолютных идей, поскольку именно там существуют математические понятия. Это не только завышенная самооценка человеческого мышления, но и профанация платоновского взгляда на научное познание. В физике эффективны те математические структуры, которые основаны на физических принципах, адекватных реальности и, следовательно, связанных с философской теорией познания. “Таким образом, – констатирует философ физики В. П. Бранский, – эффективность математики (поскольку это касается фундаментальной физической теории), как это ни странно, обусловлена в конечном счете эффективностью философии” [8, с.248]. Непостижимую эффективность математики и математический платонизм связывает платонистское понимание статуса исторической закономерности развития математики, в котором логическое предвосхищает историческое.

Столь же критически относятся современные ученые-математики и к философским воззрениям Канта. Граница между тем, чем мы обладаем априори, и тем, для чего необходим опыт, проводится в современном математическом познании иначе, чем у Иммануила Канта. Для многих философов синтетические априорные суждения Канта продолжают служить доводом в пользу платонизма. Однако Давид Гильберт считал, что Кант сильно переоценил роль и масштабы априорного. Занимая позицию априоризма, необходимо быть крайне осторожным. Например, уже в XIX веке многое из того, что считалось во времена Канта априорно истинным в математике, было признано ошибочным. Сам Гильберт возлагал большие надежды на свой план обоснования математики, надеясь составить полный конечный набор всех современных правил вывода математических доказательств, который в итоге оказался нереализуемым в полном объеме. Фундаментальная тема – соотношения дополнительных понятий интуитивного и формального, рационального и иррационального – берет начало в философии древних греков. Английский филолог-классик Эрик Доддс, проанализировав мифы об исключительной рациональности древних греков, выявил огромное значение иррациональных моментов в их обыденной жизни.

Неожиданное продолжение их наблюдения получили в совершенно новой области математического знания – теории фракталов, которая смещает познавательные установки от строгой рациональности к интуитивно-образному мышлению. Наука о фракталах оформилась в отдельную область математики, стараниями французского математика Бенуа Мандельброта, сравнительно недавно, хотя первые фракталы появились в математике более 100 лет тому назад. К их числу можно отнести такие математические объекты, как канторово множество, кривую Коха, ковер Серпинского, кривую Пеано, множество Жюлиа и др. Общепринятого определения понятия “фрактала” не существует, поэтому геометрически наглядно представить его по имеющимся определениям довольно трудно. Например, по Мандельброту, фрактал – это множество, хаусдорфова размерность которого превышает его топологическую размерность. Удивительно, что фрактальными свойствами обладают многие естественные природные объекты, в частности, это свойство самоподобия, состоящее в том, что структура объекта на макроуровне повторяется в нем на микроуровне. Фрактальную геометрию можно отнести к постнеклассической математике, возникшей в конце XX века, поскольку визуализация фракталов стала возможной лишь благодаря современному компьютеру.

В истории современной высшей математики, берущей начало в XVII веке, неоднократно менялись представления о фундаментальных математических теориях. Например, во фрактальной геометрии, в духе платонистской интерпретации, обеспечивающей ее множествам существование, есть неизменные идеальные объекты – алгоритм, фрактал, мыслимый как завершенное целое, – но основная особенность их в том, что невозможно выделить части, совпадающие с целым, то есть, у них нет структуры как связи элементов. Поэтому можно предположить, что фрактальная геометрия – это новый взгляд на сущность природы новых разделов математики с точки зрения неоплатонистской математики. Метафизический вопрос о том, почему структуры мира постижимы для нашего разума, а красивые математические модели служат для этого ключом, слишком сложен, чтобы для него был возможен убедительный для всех ответ логического характера.

Еще в начале XX века было принято считать, что любую непротиворечивую математическую теорию можно сформулировать таким образом, что все истинные математические утверждения в рамках соответствующей системы аксиом могут быть доказаны. Благодаря работам Курта Гёделя мы теперь можем утверждать, что никогда не будет существовать абсолютного метода создания нового математического знания. С точки зрения философско-методологического обоснования, можно различать две математики: во-первых, науку, создаваемую самими математиками, и, во-вторых, математику, опосредованно выражающую свойства реального мира, которая для платоников существует в особом мире математических идей. Сходную позицию на концепцию двух математик занимали и неоплатоники, для которых математические сущности обладали реальностью до всякого их рационального конструирования.

Если мы выходим на метауровень за пределы наших математических конструкций, то мы тем самым уже вносим элемент иррациональности. Поэтому, является ли эффективность математики “непостижимой”, как писал об этом Вигнер, или “постижимой”, хотя он не дал никакого объяснения и ограничился лишь констатацией, не столь сейчас для нас важно, поскольку содержательное обсуждение этого вопроса может вестись только математиками-профессионалами высокого класса. Различные философские “объяснения” носят характер апологий, из-за того, что их авторы, скорее всего, сами пребывают в неведении относительно причин непостижимой эффективности математики. Переплетение теории и практики, конечно, сообщает математическому поиску определенную самодостаточность, в пределе уподобляя ее порочному кругу, хотя совокупный научный опыт говорит о его принципиальной преодолимости, но с другой стороны, универсальность математики, а также ее широкая применимость, невозможна без восхождения к абстрактному знанию.

Существенная черта математики, ее эффективность, достигается на основе многоступенчатого и разнопланового движения математики всех уровней к абстрактному. В этом смысле, не касаясь различных программ обоснования из философии математики, трудно четко и однозначно разделить современную математику на чистую и прикладную. По мнению профессора Московского университета А. В. Архангельского, “есть одна математика, которую можно, подчеркивая ее абстрактность и способность к самостоятельному развитию, называть чистой математикой” [9, с.16]. Отталкиваясь от изучения чисел и геометрии внешнего мира, мы естественно переходим к понятиям структуры, порядка и другим логико-математическим отношениям. Прикладная же математика состоит из конкретных проблем реальной жизни, поэтому прикладная математика – это только внешняя сторона чистой математики или свидетельство ее эффективности в других науках.

Неординарная эффективность математики в естественных и даже социально-гуманитарных науках иногда принимает вид методологического “тоталитаризма”, порождающего заявления, что рано или поздно любая рациональная проблема поддается исследованию с помощью эмпирико-математического метода. Поспешность таких заявлений не учитывает то, что полная математическая структура научной теории становится известной тогда, когда эта теория уже превзойдена новой более общей теорией и известны границы применимости старой теории. Заметим, что математическая наука XX века уже содержала в себе элементы синтетического мировоззрения как научного метода, показав, что методологические различия необязательно эквивалентны их взаимному исключению. Методологическая концепция дополнительности Бора указывает на то, что противоречивые ответы не создают никакого логического противоречия, поскольку они возникают из-за того, что соответствующие вопросы изначально взаимно исключают друг друга. Поэтому философско-математическая “терпимость” к различным мнениям и подходам иногда может быть более полезна, чем преждевременный синтез, хотя он довольно часто методологически незаменим.

Кроме известных рациональных достоинств математики, она обладает еще одним поразительным необъяснимым свойством, которое можно назвать “колоссальной объяснительной силой” концепций, моделей и теорий, далеко отстоящих друг от друга. Это эпистемологическое свойство математических теорий, основанное на их познавательной способности, не следует необоснованно рассматривать как онтологическое в качестве метафизической гипотезы. Важнейшее философское требование при поиске истины состоит в том, что “эпистемология не должна грабить онтологию” [10, с.194]. Что касается собственно математических исследований, то они эффективны еще и потому, что в силу своей методологической сдержанности они абстрагируются от ценностных связей. Несмотря на все аргументы загадка “непостижимой эффективности математики” остается пока загадкой. Как и загадка недостаточной эффективности всеобщего математического образования, несмотря на все усилия методологов математики.

В заключение отметим, что не необозримое количество конкретных математических результатов, а математические методы лучше всего учат нас ощущению тайны эффективности научного метода. Если философия математики не может предъявить онтологические аргументы для обоснования арифметики, то, как можно надеяться на то, что с вопросом об эффективности математики дела обстоят лучше? Математику не следует отождествлять с совершенной рациональностью, связанной истинами разума. Рациональное исследование не должно заслонять от нас вызывающую благоговение неизреченную тайну бытия. Эта тайна не изощрение нашего ума для маскировки безответных вопросов, а смысл, который пока еще не понят до конца.

Литература,
использованная в Приложении 2

1. Декарт, Р. Первоначала философии / Р. Декарт // Сочинения в двух томах. Т. 1. – М.: Мысль, 1989. – С. 297–422.
2. Горенстейн, Д. Грандиозная теорема / Д. Горенстейн // В мире науки. – 1986. – № 2. – С. 62–74.
3. Непейвода, Н. Н. Вызовы логики и математики XX века и “ответ” на них цивилизации / Н. Н. Непейвода // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 118–128.
4. Вишневский, М. И. Интегративность мировоззренческих оснований образовательной деятельности / М. И. Вишневский // Alma mater. – 2001. – № 2. – С. 19–23.
5. Хеллер, М. Творческий конфликт: О проблемах взаимодействия научного и религиозного мировоззрения / М. Хеллер. – М.: ББИ, 2005. – 216 с.
6. Вигнер, Е. Непостижимая эффективность математики в естест-венных науках / Е. Вигнер // Успехи физических наук. – 1968. – Т. 94, Вып. 3. – С. 535–546.
7. Барабашев, А. Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования / А. Г. Барабашев. – М.: Изд-во Московского универси-тета, 1991. – 158 с.
8. Бранский, В. П. Теория элементарных частиц как объект методоло-гического исследования / В. П. Бранский. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1989. – 257 с.
9. Архангельский, А. В. О сущности математики и фундаментальных математических структурах / А. В. Архангельский // История и методоло-гия

естественных наук. Математика, механика. – М.: МГУ, 1986. – Вып. 32. – С. 14–29.

10. Полкинхорн, Дж. Вера глазами физика / Дж. Полкинхорн. – 3-е изд. – М.: ББИ, 2001. – 228 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адян, С. И. Мастер фундаментальных математических конструкций / С. И. Адян// Вестник Российской Академии наук. – 2001. – Т. 71, № 10. – С. 922–927.

2. Александров, А. Д. Математика и диалектика / А. Д. Александров // Сибирский математический журнал. – 1970. – Т. 11, № 2. – С. 243– 263.

3. Алексеев, И. С. Концепция дополнительности: Историко-методологический анализ / И. С. Алексеев. – М.: Наука, 1978. – 277 с.

4. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

5. Ансельм, А. А. Теоретическая физика XX века – новая философия природы / А. А. Ансельм // Звезда. – 2000. – № 1. – С. 194–213.

6. Аристотель. Метафизика / Аристотель. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1999. – 608 с.

7. Арнольд, В. И. О преподавании математики / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, Вып. 1. – С. 229–234.

8. Арнольд, В. И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? / В. И. Арнольд // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 12. – С. 1311–1323.

9. Архангельский, А. В. Канторовская теория множеств / А. В. Архангельский. – М.: МГУ, 1988. – 112 с.

10. Берков, В. Ф. Противоречия в науке / В. Ф. Берков. – Минск: Вышэйшая школа, 1980. – 95 с.

11. Берков, В. Ф. Общая методология науки / В. Ф. Берков. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2001. – 227 с.

12. Блехман, И. И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1983. – 328 с.

13. Булос, Дж. Вычислимость и логика / Дж. Булос, Р. Джеффри. – М.: Мир, 1994. – 396 с.

14. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 292 с.

15. Бычков, С. Н. К критике канторовской диагональной процедуры доказательства несчетности континуума / С. Н. Бычков, Л. О. Шашкин // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. – М.: Янус-К, 1997. – С. 22–29.

16. Вейль, Г. О философии математики / Г. Вейль. – М.-Л.: ГНТИ, 1934. – 128 с.

17. Вейль, Г. Давид Гильберт и его математические труды / Г. Вейль // Гильберт Д. Избранные труды. Том II. – М.: Факториал, 1998. – С 480–520.

18. Визгин, Вл. П. “Догмат веры” физика-теоретика: “предустанов-ленная гармония между чистой математикой и физикой” / Вл. П. Визгин // Проблема знания в истории науки и культуры. – СПб.: Алетейя; М.: ИИЕТ РАН, 2001. – С. 123–141.

19. Витгенштейн, Л. Философские работы. Часть 1 /Л. Витгенштейн. – М.: Гнозис, 1994. – 520 с.

20. Витгенштейн, Л. Философские работы. Часть 2. Кн. 1 / Л. Витгенштейн. – М.: Гнозис, 1994. – 207 с.

21. Владимиров, В. С. Определение сопряженного оператора для нелинейных проблем / В. С. Владимиров, Г. И. Марчук // Доклады Россий-ской Академии наук. – 2000. – Т. 372, № 2. – С. 165–168.

22. Войцехович, В. Э. Господствующие стили математического мышления / В. Э. Войцехович // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 495–505.

23. Вопенка, П. Математика в альтернативной теории множеств / П. Вопенка. – М.: Мир, 1983. – 152 с.

24. Гёдель, К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы / К. Гедель // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3, Вып. 1. – С. 96–149.

25. Гильберт, Д. Избранные труды. Том I. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – 575 с.

26. Гильберт, Д. Избранные труды. Том II. Анализ. Физика. Проблемы. Personalia / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – 608 с.

27. Голубева, О. Дополнительность и целостность в современном образовании / О. Голубева, А. Суханов // Alma mater. – 1997. – № 10. – С. 3–7.

28. Гончаров, С. С. Введение в логику и методологию науки / С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, К. Ф. Самохвалов. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1994. – 256 с.

29. Гординг, Л. Философский диалог. Математика, жизнь и смерть / Л. Гординг // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, Вып. 5. – С. 215–224; 2001. – Т. 13, Вып. 3. – С. 229–239.

30. Гротендик, А. Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика / А. Гротендик. – Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999. – 288 с.

31. Доксиадис, А. Дядя Петрос и проблема Гольдбаха. – М.: Изд-во АСТ, 2002. – 208 с.

32. Драгалин, А. Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств / А. Г. Драгалин. – М.: Наука, 1979. – 256 с.

33. Дьедонне, Ж. О деятельности Бурбаки / Ж. Дьедонне // Успехи математических наук. – 1973. – Т. 28, Вып. 3. – С. 205–216.

34. Дьедонне, Ж. О прогрессе математики / Ж. Дьедонне // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1976. – Вып. 21. – С. 9–21.

35. Егоров, Ю. В. К теории обобщенных функций / Ю. В. Егоров // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, Вып. 5. – С. 3–40.
36. Еровенко, В. А. Магия мифа в эстетике математического творчества / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 1999. – № 4. – С. 51–64.
37. Еровенко, В. О Блезе Паскале и способности человека к здравому мышлению (с позиций математического знания и образования) / В. Еро-венко, Н. Михайлова // Alma mater. – 1999. – № 11. – С. 34–38.
38. Еровенко, В. А. Философия науки Карла Поппера в культурном контексте эволюции абстрактной математики / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2000. – № 1. – С. 29–38.
39. Еровенко, В. А. Метод картезианского сомнения в концепции развития науки / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Вышэйшая школа. – 2000. – № 6. – С. 3–9.
40. Еровенко, В. А. Рационализм в современном познании / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Высшее образование в России. – 2000. – № 6. – С. 79–84.
41. Еровенко, В. А. Размышления о философии математики Людвига Витгенштейна и парадоксах высшего образования / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Адукацыя і выхаванне. – 2000. – № 11. – С. 3–12; № 12. – С. 38–42.
42. Еровенко, В. А. Философия математики Иммануила Канта и непередаваемый опыт чувственной интуиции / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2001. – № 2. – С. 36–44.
43. Еровенко, В. А. Философия прерывности Н. В. Бугаева и математические импровизации в терминах целой и дробной части числа / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Математическое образование. – 2001. – № 4. – С. 48–59.
44. Еровенко, В. А. Максимы познания Готфрида Лейбница и проблемы понимания языка математики / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Адукацыя і выхаванне. – 2001. – № 12. – С. 13–21.
45. Еровенко, В. А. Финитизация математической бесконечности и проблема смысла науки по Мамардашвили / В. А. Еровенко, Н. В. Михай-лова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2002. – № 1. – С. 38–45.
46. Еровенко, В. Постмодерн и тезис Гераклита Эфесского / В. Еро-венко, Н. Михайлова // Высшее образование в России. – 2002. – № 1. – С. 101–106.
47. Еровенко, В. А. Математическое миросозерцание П. А. Флорен-ского и геометрические фантазии с использованием целой и дробной части числа / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Математическое образование. – 2003. – № 1. – С. 38–49.
48. Еровенко, В. А. Методологическая программа Гильберта как философско-математическое исследование / В. А. Еровенко, Н. В. Михай-лова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2003. – № 2. – С. 55–62.

49. Еровенко, В. А. Канторова сущность математики и здравый смысл классического образования / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Адукацыя і выхаванне. – 2003. – № 4. – С. 56–63.

50. Еровенко, В. А. Проблема Ферма в контексте Гёделевских теорем / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Математическое образование. – 2003. – № 4. – С. 97–103.

51. Жирабок, А. Н. Нечеткие множества и их использование для принятия решений / А. Н. Жирабок // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 109–115.

52. Заде, Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений / Л. Заде // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974. – С. 5–49.

53. Зенкин, А. А. Infinitum Actu Non Datur / А. А. Зенкин // Вопросы философии. – 2001. – № 9. – С. 157–169.

54. Ильяшенко, Ю. С. Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений / Ю. С. Ильяшенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, Вып. 6. – С. 41–78.

55. Кадомцев, Б. Б. Динамика и информация / Б. Б. Кадомцев // Успехи физических наук. – 1994. – Т. 164, № 5. – С. 449–530.

56. Кант, И. Из рукописного наследия / И. Кант. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 752 с.

57. Канторович, Л. В. Функциональный анализ (основные идеи) / Л. В. Канторович // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 1. – С. 7–16.

58. Карри, Х. Основания математической логики / Х. Карри. – М.: Мир, 1969. – 568 с.

59. Катасонов, В. Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора / В. Н. Ката-сонов. – М.: Мартис, 1999. – 207 с.

60. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – 2-е изд. – М.: РИМИС, 2007. – 640 с.

61. Кобзарев, И. Ю. Элементарные частицы. Диалоги физика и математика / И. Ю. Кобзарев, Ю. И. Манин. – М.: Фазис, 1997. – VIII + 208 с.

62. Колмогоров, А. Н. Алгоритм, информация, сложность / А. Н. Колмогоров. – М.: Знание, 1991. – 48 с.

63. Коэн, П. Дж. Об основаниях теории множеств / П. Дж. Коэн // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, Вып. 5. – С. 169–176.

64. Крайзель, Г. Биография Курта Гёделя / Г. Крайзель // Успехи математических наук. – 1988. – Т. 43, Вып. 2. – С. 175–216; Т. 43, Вып. 3. – С. 203–238.

65. Лейбниц, Г. В. Сочинения в четырех томах. Том 3 / Г. В. Лейбниц. – М.: Мысль, 1984. – 734 с.

66. Мак-Лейн, С. Математическая логика – ни основания, ни философия / С. Мак-Лейн // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 148–153.

67. Мандельброт, Б. Фракталы и возрождение теории итераций / Б. Мандельброт // Красота фракталов / Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – С. 131–140.

68. Марков, А. А. Теория алгорифмов / А. А. Марков, Н. М. Нагорный. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Фазис, 1996. – XLV + 448 с.

69. Михайлова, Н. В. Философско-математическое знание с соци-ально-образовательной точки зрения / Н. В. Михайлова // Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество: материалы 3-й Между-нар. научно-практ. конф.: в 2 ч. / БГУ. – Минск, 2000. – Ч. 2. – С. 85–91.

70. Михайлова, Н. В. Феномен бесконечного в многообразии математического знания / Н. В. Михайлова // Веснiк МДУ iмя А.А. Куляшова. – 2000. – № 2–3. – С. 78–83.

71. Михайлова, Н. В. М. Мамардашвили: философский анализ проб-лемы смысла науки / Н. В. Михайлова // Философы XX века: Мераб Мамардашвили: материалы Респ. чтений – 3 / РИВШ БГУ. – Минск, 2000. – С. 37–42.

72. Михайлова, Н. В. Парадокс Менона в математическом образо-вании / Н. В. Михайлова // Педагогика. – 2001. – № 3. – С. 28–32.

73. Михайлова, Н. В. Методологические проблемы теоретической математики: три философских аспекта // Учебное знание как основа порождения культурных форм в университетском образовании: материалы научно-практ. конф. / ЦПРО БГУ. – Минск, 2001. – С. 243–254.

74. Михайлова, Н. В. Рациональное и иррациональное мышление: проблемы философского осмысления / Н. В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2002. – № 4. – С. 118–127.

75. Михайлова, Н. В. Проблема дополнительности в постнеклас-сической интерпретации математического знания / Н. В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Леонардо да Винчи: тезисы докладов XVIII Междунар. чтений / БГУИР. – Минск, 2002. – С. 103–106.

76. Михайлова, Н. В. Эпистемологические проблемы современного математического знания / Н. В. Михайлова // Веснiк МДУ iмя А.А. Куля-шова. – 2003. – № 1. – С. 124–129.

77. Михайлова, Н. В. Стандарты строгости математических рас-суждений и проблема вычислительной сложности / Н. В. Михайлова // Образовательные технологии в подготовке специалистов: сборник научных статей в 5 ч. / МГВРК. – Минск, 2003. – Ч. 4. – С. 64–70.

78. Михайлова, Н. В. Социокультурные проблемы формирования математического знания / Н. В. Михайлова // Народная асвета. – 2003. – № 2. – С. 3–5.

79. Михайлова, Н. В. Метод дополнительности и философский анализ современной математики / Н. В. Михайлова // Многоступенчатое университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению / ЦПРО БГУ. – Минск: Пропилеи, 2003. – С. 281–287.

80. Михайлова, Н. В. Проблема двойственности науки: вычисление или рассуждение? / Н. В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2004. – № 2. – С. 80–88.

81. Михайлова, Н.В. О границе между интуитивным и формальным: иллюзия методологической целостности / Н.В.Михайлова // Философы XX века: Хосе Ортега-и-Гассет. Материалы Республиканских чтений – 9 / РИВШ БГУ. – Мн., 2004. – С. 56–59.

82. Михайлова, Н.В. Эволюция современного математического знания и пределы правоты сознания / Н.В.Михайлова // Народная асвета. – 2004. – № 8. – С. 8–10.

83. Михайлова, Н. В. Философско-методологические программы интуиционизма и формализма в математике / Н. В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Жорес Алфёров: тезисы докладов XX юбилейных Междунар. чтений / БГУИР. – Минск, 2004. – С. 158–161.

84. Михайлова, Н.В. Мезомир науки и онтологические основания математики / Н.В.Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 4. – С. 106–112.

85. Михайлова, Н. В. Проблема рационального конструирования фундаментальных математических структур / Н. В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ. – Курск, 2005. – Вып. 4. – С. 43–55.

86. Михайлова, Н. В. Рационализм и иррационализм математического знания в контексте методологии образования / Н. В. Михайлова // Матэма-тыка: праблемы выкладання. – 2005. – № 3. – С. 3–8.

87. Михайлова, Н. В. Постнеклассическое знание и методологические проблемы компьютерной математики / Н. В. Михайлова // Философы XX века: Вячеслав Степин: материалы Респ. чтений – 10 / РИВШ. – Минск, 2005. – С. 95–97.

88. Михайлова, Н. В. Философские проблемы обоснования научного знания в современной математике / Н. В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2006. – № 1. – С. 49–54.

89. Михайлова, Н. В. Синтетичность математических истин и постгёделевские проблемы математики / Н. В. Михайлова // Проблема свободы личности и общества в социально-гуманитарном дискурсе: мате-риалы Всероссийской науч. конф. / КГУ. – Курск, 2006. – С. 387–391.

90. Михайлова, Н. В. Философско-методологические проблемы обоснования математики: к синтезу неформального и формального мышления / Н. В. Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2006. – № 1. – С. 32–35.

91. Михайлова, Н. В. Макс Планк и природа эффективности матема-тики / Н. В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Макс Планк: тезисы докладов XXI Междунар. чтений / БГУИР. – Минск, 2006. – С. 191–194.

92. Михайлова, Н. В. Гносеологические возможности математики / Н. В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2006. – № 2. – С. 26–29.

93. Михайлова, Н. В. Синтезирующая триадическая структура прог-рамм обоснования математики / Н. В. Михайлова // Третьи Курдюмовские чтения “Идеи синергетики в естественных науках”: материалы Междунар. междисциплинарной научной конф. / ТГУ. – Тверь, 2007. – С. 355–359.

94. Михайлова, Н. В. Загадка “непостижимой эффективности матема-тики” и математический платонизм / Н. В. Михайлова // Матэматыка: праб-лемы выкладання. – 2007. – № 1. – С. 12–18.

95. Михайлова, Н. В. Системный анализ как методологический подход в истории обоснования математики / Н. В. Михайлова // Леонард Эйлер и современная наука: материалы Междунар. конф. / Санкт-Петербургский научный центр РАН. – СПб., 2007. – С. 440–445.

96. Михайлова, Н. В. Философско-методологическое значение результатов Гёделя и структура математического мышления / Н. В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2007. – № 3. – С. 36–41.

97. Михайлова, Н. В. Проблема целостности познания в контексте рациональной сущности математического знания / Н. В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ. – Курск, 2007. – Вып. 8. – С. 83–94.

98. Михайлова, Н. В. Математический платонизм и проблема внутрен-ней непротиворечивости математики / Н. В. Михайлова // Философия науки. – 2008. – № 1. – С. 80–90.

99. Михайлова, Н. В. Сравнительная философия и методология дополнительности в работающих программах обоснования математики / Н. В. Михайлова // Информатизация образования – 2008: интеграция информационных и педагогических технологий: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 октября 2008 г. / БГУ. – Минск, 2008. – С. 367–371.

100. Михайлова, Н. В. Методологическая проблема единства философских программ обоснования математики / Н. В. Михайлова // Философия и социальные науки. – 2008. – № 4. – С. 00–00.

101. Михайлова, Н.В. Теоретико-числовые и алгоритмические пробле-мы философии постгёделевской математики / Н. В. Михайлова // Проблема онто-гносеологического обоснования математических и естественнонауч-ных наук: сборник статей / КГУ. – Курск, 2008. – С. 99–117.
102. Михайлова, Н. В. Философско-математическое познание и его духовное содержание / Н. В. Михайлова // Адукацыя і выхаванне. – 2008. – № 10. – С. 55–61.
103. Михайлова, Н. В. Системный синтез программ обоснования современной математики: монография / Н. В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2008. – 330 с.
104. Нагорный, Н. М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики / Н. М. Нагорный // Логические исследования. – М.: Наука, 2001. – Вып. 8. – С. 105–128.
105. Налимов, В. В. Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье / В. В. Налимов. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 344 с.
106. Нейман, Дж. фон. Математик. С предисловием Данилова Ю. А. Математик Дж. фон Нейман и его “Математик” / Дж. фон Нейман // Природа. – 1983. – № 2. – С. 88–95.
107. Непейвода, Н. Н. Прикладная логика: Учебное пособие / Н. Н. Непейвода. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2000. – 490 с.
108. Нестеренко, Ю. В. Алгоритмические проблемы теории чисел / Ю. В. Нестеренко // Математическое просвещение. Третья серия. – 1998. – Вып. 2. – С. 87–114.
109. Ницше, Ф. Веселая наука / Ф. Ницше. – М.: Олма–Пресс, 2000. – 351 с.
110. Оппен, Г. Объекты и окружение / Г. Оппен // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 6. – С. 661–667.
111. Паршин, А. Н. Размышления над теоремой Гёделя / А. Н. Паршин // Вопросы философии. – 2000. – № 6. – С. 92–109.
112. Перминов, В. Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства / В. Я. Перминов. – М.: Изд-во Московского университета, 1986. – 240 с.
113. Петросян, В. К. Общий кризис теоретико-множественной мате-матики и пути его преодоления / В. К. Петросян. – М.: Янус-К, 1997. – 144 с.
114. Победин, Л. Н. О бесконечном / Л. Н. Победин // Философия науки. – 2001. – № 1. – С. 91–98; № 2. – С. 102–107.
115. Подниекс, К. М. Вокруг теоремы Гёделя / К. М. Подниекс. – Рига: Зинатне, 1992. – 192 с.
116. Пуанкаре, А. О науке / А. Пуанкаре. – 2-е изд., стер. – М.: Наука, 1990. – 736 с.
117. Разборов, А. А. О сложности вычислений / А. А. Разборов // Математическое просвещение. Третья серия. – 1999. – Вып. 3. – С. 127–141.

118. Рашевский, П. К. О догмате натурального ряда / П. К. Рашевский // Успехи математических наук. – 1973. – Т. 28, Вып. 4. – С. 243–246.

119. Рвачев, В. Л. Неархимедова арифметика и другие конструк-тивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности / В. Л. Рвачев // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 4. – С. 884–889.

120. Романовская, Т. Б. Объективность науки и человеческая субъективность, или в чем состоит человеческое измерение науки / Т. Б. Романовская. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 208 с.

121. Садовничий, В. А. Математическое образование: настоящее и будущее / В. А. Садовничий // Вестник Воронежского государственого университета. Сер. Проблемы высшего образования. – 2001. – № 1. – С. 17–23.

122. Сморинский, К. Теорема о неполноте / К. Сморинский // Справочная книга по математической логике: В четырех частях. Часть IV. Теория доказательств и конструктивная математика. – М.: Наука, 1983. – С. 9–53.

123. Сосинский, А .Б. Умер ли Никола Бурбаки? / А. Б. Сосинский // Математическое просвещение. Третья серия. – 1998. – Вып. 2. – С. 4–12.

124. Степин, В. С. Теоретическое знание: Структура и историческая эволюция / В. С. Степин. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 743 с.

125. Стин, Э. Квантовые вычисления / Э. Стин. – Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. – 112 с.

126. Тарский А. Истина и доказательство // Вопросы философии. – 1972. – № 8. – С. 136–145.

127. Тихомиров, В. М. Финитизация бесконечности в классическом анализе / В. М. Тихомиров // Бесконечное в математике: философские и исторические аспекты. – М.: Янус-К, 1997. – С. 177–189.

128. Тихомиров, В. М. О некоторых особенностях математики XX века / В. М. Тихомиров // Стили в математике: социокультурная филосо-фия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 441–460.

129. Том, Р. Современная математика – существует ли она? / Р. Том // Математика в школе. – 2003. – № 3. – С. 12–17.

130. Успенский, В. А. Витгенштейн и основания математики / В. А. Успенский // Вопросы философии. – 1998. – № 5. – С. 85–97.

131. Успенский, В. А. Что такое аксиоматический метод? / В. А. Успенский – Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 96 с.

132. Фанг, Дж. Между философией и математикой: их параллелизм в “параллаксе” / Дж. Фанг // Вопросы истории естествознания и техники. – 1992. – № 2. – С. 3–17.

133. Харди, Г. Апология математики / Г. Харди. – Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. – 104 с.

134. Хофштадтер, Д. Гёдель, Эшер, Бах: Эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. – Самара: Бахрах-М, 2001. – 752 с.

135. Хютт, В. П. Концепция дополнительности и проблема объек-тивности физического знания / В. П. Хютт. – Таллин: Валгус, 1977. – 180 с.

136. Целищев, В. В. Перспективы исследований в философии матема-тики / В. В. Целищев // Философия науки. – 1999. – № 1. – С. 47–51.

137. Шафаревич, И. Р. Математическое мышление и природа / И. Р. Шафаревич // Вопросы истории естествознания и техники. – 1996. – № 1. – С. 78–84.

138. Энгелер, Э. Метаматематика элементарной математики / Э. Энгелер. – М.: Мир, 1987. – 127 с.

139. Якоби, К. Г. О жизни Декарта и его методе направлять ум правильно и изыскивать в науках истину / К. Г. Якоби // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 12. – С. 1332–1338.

140. Яненко, Н. Н. Методологические проблемы математической физики / Н. Н. Яненко, Н. Г. Преображенский, О. С. Разумовский. – Ново-сибирск: Наука, 1986. – 196 с.

141. Яскевич, Я. С. Аргументация в науке / Я. С. Яскевич. – Минск: Университетское, 1992. – 143 с.

142. Яскевич, Я. С. Приоритеты методологического дискурса: от классической к современной науке / Я. С. Яскевич // Выбранныя навуковыя працы Беларускага дзяржаунага універсітэта: У 7 т. Т.1. – Мінск.: БДУ, 2001. – С. 505–523.

143. Benacerraf, P. What numbers could not be / P. Benacerraf // Philosophy of Mathematics. Selected Readings. Second Ed. – New York: Cambridge Univ. Press, 1983. – P. 272–294.

144. Kleiner, I. The role of paradoxes in the evolution of mathematics / I. Kleiner., N. Movshovitz-Hadar // American Mathematical Monthly. – 1994. – Vol. 101, № 10. – P. 963–974.

145. Smale, S. Mathematical problems for the next century / S. Smale // The Mathematical Intelligeneer. – 1998. – Vol. 20, № 2. – P. 7–15.