

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем управления

А.С. Климчик Р.И. Гомолицкий Ф.В. Фурман К.И. Сёмкин

***Разработка управляющих программ промышленных
роботов***

Курс лекций

для студентов специальности
I-53 01 07 «Информационные технологии и управление
в технических системах»
дневной формы обучения

Минск 2008

Содержание

Содержание.....	2
1 ВВЕДЕНИЕ.....	4
2 ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ РОБОТОТЕХНИКИ.....	7
2.1 Предыстория робототехники.....	7
2.2 Возникновение и развитие современной робототехники.....	8
3 КИНЕМАТИКА МАНИПУЛЯТОРА.....	14
3.1 Матрицы поворота.....	16
3.2 Матрица поворота вокруг произвольной оси.....	20
3.3 Представление матриц поворота через углы Эйлера.....	22
3.4 Геометрический смысл матриц поворота.....	28
3.5 Однородные координаты и матрицы преобразований.....	30
3.6 Геометрический смысл однородной матрицы преобразования.....	33
3.7 Однородная матрица композиции преобразований.....	34
3.8 Звенья, сочленения и их параметры.....	36
3.9 Представление Денавита — Хартенберга.....	40
3.10 Уравнения кинематики манипулятора.....	49
3.11 Другие способы определения положения схвата.....	52
4 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ.....	54
4.1 Метод обратных преобразований.....	55
4.2 Геометрический подход.....	65
4.2.1 Решение обратной задачи кинематики для первых трех сочленений.	68
4.3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	85
4.4 ВЫВОДЫ по разделу:.....	86
4.5 Система программирования ARPS.....	86
4.6 Программные переключатели.....	87
4.7 Конфигурация.....	88
4.8 Команды.....	88
4.9 Способы задания точек.....	90
4.10 Способы обучения промышленных роботов.....	91
5 On-line программирование.....	96
5.1 Приемы обучения с помощью языка ARPS.....	96
5.2 ВЫВОДЫ по разделу:.....	97
6 Кинематика движения.....	98
6.1 Динамика промышленных роботов.....	101
6.2 Метод Ньютона-Эйлера для решения обратной задачи динамики.....	102
6.3 Рекурсивный алгоритм вычисления кинематики переменных.....	103
6.4 на первом шаге.....	103
6.5 Структура вычисляемого алгоритма.....	104
6.6 Уравнение динамики для плоского двухзвенного робота.....	106
6.7 Обобщенная структурная схема динамики промышленного робота с	

	учетом динамики исполнительного привода.....	107
7	ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ МАНИПУЛЯТОРА	110
	7.1 ВВЕДЕНИЕ	110
	7.2 ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ	113
	7.3 СГЛАЖЕННЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	116
	7.4 Расчет 4-3-4-траектории.....	120
	7.5 Планирование траектории в пространстве обобщенных координат для двух точек.	122
	7.6 Алгоритм интерпретации команды GO.....	126
	7.7 Планирование траектории в пространстве декартовых координат....	127
	7.8 Планирование для углов <i>OAT</i>	128
	7.9 Планирование сглаживание траектории.....	129
8	Учебно-методические материалы по дисциплине.....	131
	8.1 ОСНОВНЫЕ.....	131
	8.2 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ.....	131

1 ВВЕДЕНИЕ

Робот можно определить как универсальный автомат для осуществления механических действий, подобных тем, которые производит человек, выполняющий физическую работу.

На Рис. 1 показана функциональная схема робота. Она включает исполнительные системы - манипуляционную (один или несколько манипуляторов) и передвижения, если робот подвижный, сенсорную систему, снабжающую робота информацией о внешней среде, и устройство управления. Исполнительные системы в свою очередь состоят из механической системы и системы приводов. Механическая система манипулятора - это обычно кинематическая цепь, состоящая из подвижных звеньев с угловым или поступательным перемещением, которая заканчивается рабочим органом в виде захватного устройства или какого-нибудь инструмента.

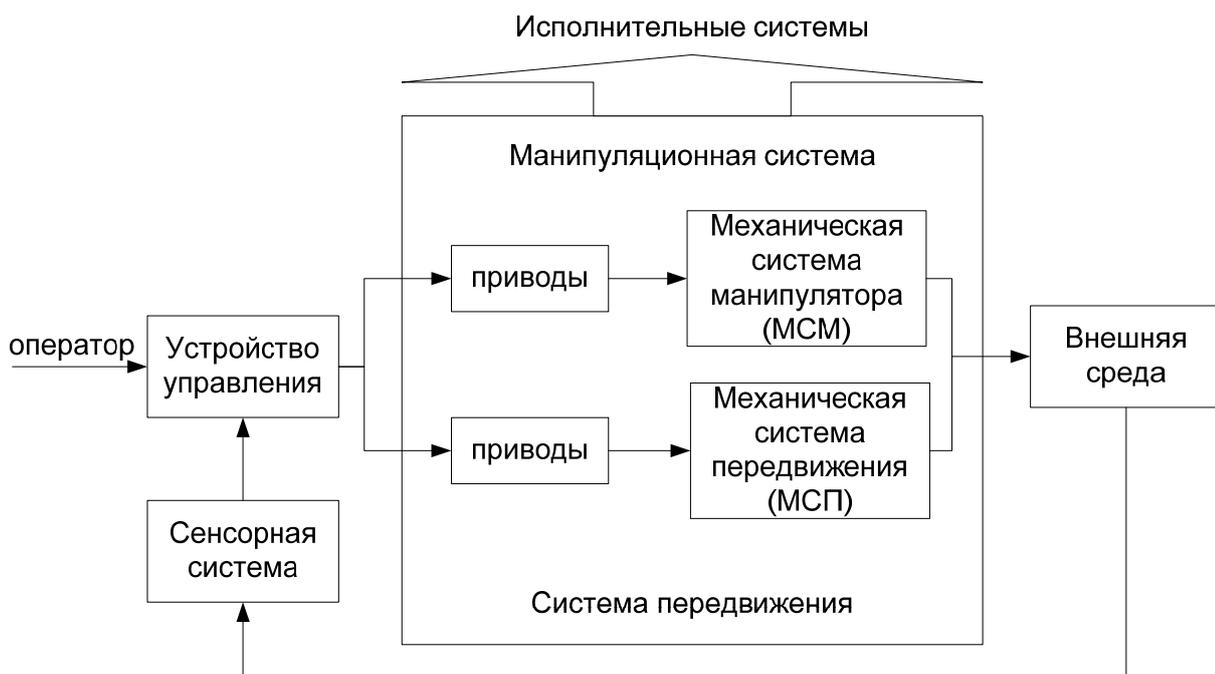


Рис. 1-Функциональная схема робота

Из определения следует, что робот - это машина автоматического действия, которая объединяет свойства машин рабочих и информационных, являясь, таким образом, принципиально новым видом машин. В достаточно развитом виде роботы аналогично человеку осуществляют активное силовое и информационное взаимодействие с окружающей средой и благодаря этому могут обладать искусственным интеллектом и совершенствовать его. Правда, пока еще роботы очень далеки по своим интеллектуальным возможностям от человека.

При решении проблемы создания роботов одним из естественных путей

является копирование человека и живой природы вообще. Однако не менее важен и поиск принципиально новых путей, определяемых возможностями современной техники. Пример первого подхода — создание механических рук шарнирного типа и захватных устройств со сгибающимися пальцами. Примеры второго подхода - использование электромагнитного поля для ориентации и взятия предметов и, наконец, колесный ход вместо шагания. От ранее известных видов машин роботы принципиально отличаются своей универсальностью (многофункциональностью) и гибкостью (быстрым переходом на новые операции). Под универсальностью понимается универсальность рабочих органов робота и их движений, хотя сегодня до универсальности руки человека роботам еще далеко.

Универсальность роботов дает возможность автоматизировать принципиально любые операции, выполняемые человеком, а быстрота перестройки на выполнение новых операций при освоении новой продукции или иных изменениях в производстве позволяет сохранить за автоматизируемым с помощью роботов производством, по крайней мере, ту же гибкость, которую на сегодня имеют только производства, обслуживаемые человеком. Роботы потому и появились лишь во второй половине XX столетия, что именно сейчас назрела необходимость в таких универсальных и гибких средствах, без которых невозможно осуществить комплексную автоматизацию современного производства с его большой номенклатурой и частой сменяемостью выпускаемой продукции, включая создание гибких автоматизированных производств.

Термин «робот», как известно, славянского происхождения. Его ввел известный писатель К. Чапек в 1920 г. в своей фантастической пьесе «R.U.R.» («Россумовские универсальные роботы»), где так названы механические рабочие, предназначенные для замены людей на тяжелых физических работах. Название «робот» образовано от чешского слова *robot*, что означает тяжелый подневольный труд.

Помимо роботов для тех же целей широкое применение получили манипуляторы с ручным управлением (копирующие манипуляторы, телеоператоры и т.п.) и с различными вариантами полуавтоматического и автоматизированного управления, а также однопрограммные (не перепрограммируемые) автоматические манипуляторы (автооператоры и механические руки). Все эти устройства являются предшественниками роботов. Появились они главным образом для манипулирования объектами, непосредственный контакт с которыми для человека вреден или опасен (радиоактивные вещества, раскаленные болванки и т. п.). Однако хотя появление роботов существенно сузило сферу их применения, эти простые средства механизации и автоматизации не потеряли своего значения. Все они сегодня вместе с роботами входят в общее понятие средств робототехники.

Как уже было отмечено, объективной причиной возникновения и развития робототехники явилась историческая потребность современного

производства в гибкой автоматизации с устранением человека из непосредственного участия в машинном производстве и недостаточность для этой цели традиционных средств автоматизации. Поэтому задачей робототехники наряду с созданием собственно средств робототехники является разработка основанных на них систем и комплексов различного назначения. Системы и комплексы, автоматизированные с помощью роботов, принято называть роботизированными. Роботизированные системы, в которых роботы выполняют основные технологические операции, называются робототехническими.

Наряду с внедрением в действующие производства роботы открывают широкие перспективы для создания принципиально новых технологических процессов, не связанных с весьма обременительными ограничениями, налагаемыми непосредственным участием в них человека. При этом имеется в виду как действительно очень ограниченные физические возможности человека (по грузоподъемности, быстродействию, точности, повторяемости и т. п.), так и требуемая для него комфортность условий труда (качество атмосферы, отсутствие вредных внешних воздействий и т. п.). Сегодня необходимость непосредственного участия человека в технологическом процессе зачастую является серьезным препятствием для интенсификации производства и создания новых технологий.

Роботы получили наибольшее распространение в промышленности и прежде всего в машиностроении. Предназначенные для этой цели роботы называют промышленными роботами (ПР). Не менее широкие перспективы имеют роботы в горнодобывающей промышленности, металлургии и нефтяной промышленности (обслуживание бурильных установок, монтажные и ремонтные работы), в строительстве (монтажные, отделочные, транспортные работы), в легкой, пищевой, рыбной промышленности.

Наряду с использованием в промышленности роботы применяются и в других областях народного хозяйства и человеческой деятельности: на транспорте (включая создание шагающих транспортных машин), в сельском хозяйстве, здравоохранении (протезирование, хирургия — стерильная, дистанционная, обслуживание больных и инвалидов, транспортировка), в сфере обслуживания, для исследования и освоения океана и космоса и выполнения работ в других экстремальных условиях (стихийные бедствия, аварии, военные действия), в научных исследованиях.

Применение роботов наряду с конкретным технико-экономическим эффектом, связанным с повышением производительности труда, сменности работы оборудования и качества продукции, является важным средством решения для социальных проблем, позволяя освобождать людей от тяжелого, опасного и монотонного труда.

2 ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ РОБОТОТЕХНИКИ

2.1 Предыстория робототехники

Корни робототехники уходят в глубокую древность. Уже тогда впервые возникли идеи и были предприняты первые попытки создания человекоподобных технических устройств, подвижных культовых статуй, механических слуг и т. п. Статуи богов с подвижными частями тела (руки, голова) появились еще в Древнем Египте, Вавилоне, Китае.

В «Илиаде» Гомера божественный кузнец Гефест выковывает механических служанок. Аристотель упоминает о приводимых в движение с помощью ниток куклах-марионетках, из которых создавались целые механические театры. До нас дошли книги Герона Александрийского (I век н.э.), где описаны подобные и многие другие автоматы древности. В качестве источника энергии в них использовались вода, пар, гравитация (гири).

В средние века большой популярностью пользовались различного рода автоматы, основанные на использовании часовых механизмов. Были созданы всевозможные часы с движущимися фигурами людей, ангелов и т. п. К этому периоду относятся сведения о создании первых подвижных человекоподобных механических фигур — андроидов. Так, андроид алхимика Альберта Великого (1193 — 1280) представлял собой куклу в рост человека, которая, когда стучали в дверь, открывала и закрывала ее, кланяясь при этом входящему.

Целый ряд человекоподобных автоматов был создан швейцарскими часовщиками Пьером-Жаком Дро (1721—1790) и его сыном Анри Дро (1752 - 1791). От имени последнего было образовано позднее и само название «андроид». Эти человекоподобные игрушки представляли собой многопрограммные автоматы с оперативно сменяемыми программами. Программы задавались с помощью сменных кулачков, устанавливаемых на вращающемся барабане, и других подобных механических устройств. Привод осуществлялся от часового механизма. В 1770 году, весной, появился на свет первый механический человек. Это был механический «пишущий мальчик». Когда механический человек писал, он двигал головой, и казалось, следил за тем, что пишет. Окончив работу, писец сыпал лист бумаги песком для высушивания чернил, а потом стряхивал его. По чистой случайности «пишущий мальчик» и часть его «рукописей», а также и другие изобретения отца и сына Дро сохранились до наших дней. После долгих странствий сейчас они находятся в Швейцарии, в музее изящных искусств города Невшателя. За работой над изготовлением «пишущего мальчика» наблюдал шестнадцатилетний сын Пьера Дро — Анри. Мальчик унаследовал от отца исключительную способность к механике и через три года сам принялся за постройку нового механического человека, который по замыслу должен был рисовать. По размеру рисовальщик был таким же, как и его

«старший брат». В правой руке он держал карандаш и рисовал различные фигурки, а также писал. Например, он мог изобразить маленькую собачонку и подписать под рисунком «мой Туту». А портреты Людовиков XV и XVI и Марии Антуанетты и сейчас приводят в восхищение посетителей музея в Невшателе. В процессе работы рисовальщик останавливался, как бы созерцая нарисованное, а также иногда сдувал с листа бумаги соринки. Спустя некоторое время оба механика, отец и сын Дро, занялись вместе изобретением и постройкой третьего механического человека — музыкантши. По сложности она намного превосходила своих «братьев». Эта кукла играла на фисгармонии, ударяя пальцами по клавишам. Четко и легко удавались ей трели и быстрые пассажи. Перед началом игры музыкантша осматривала ноты и делала рукой некоторые предварительные движения, кроме того, она поворачивала голову и глаза, как бы следя за положением рук. Ее грудь подымалась и опускалась, как будто она дышала. Окончив игру, музыкантша наклоняла голову, благодаря слушателей за одобрение.

Из отечественных устройств подобного типа назовем знаменитые часы «яичной» формы с театральным автоматом И. П. Кулибина (1735—1818). В 1820 г. в Петербурге был открыт «Храм очарований» А. И. Галулецкого. обслуживаемый механическими слугами. В 1866 г. И. Мезгин создал «астрономо-исторические» часы, которые помимо времени показывали четыре сценки из истории г. Томска.

Идеи создания «механических» людей, начавшие было затухать вместе с ослаблением роли часового дела в дальнейшем развитии техники, вновь возродились в 20 в. на основе электроники и электротехники. Американский инженер Венсли построил управляемый на расстоянии с помощью свистка автомат «Телевокс», который мог не только выполнять ряд элементарных операций, но и произносить с помощью звукозаписывающей аппаратуры несколько фраз. Англичанин Гарри Мей в 1932 г. создал человекоподобный автомат «Альфа», который по командам, подаваемым голосом, садился, вставал, двигал руками. Несколько «людобных» автоматов под названием «Сабор» были построены в Австрии Августом Губером. Они имели управление по радио, могли ходить, говорить, выполнять различные манипуляции. В основном подобные устройства создавали в рекламных целях, хотя делались попытки использовать их и для различных практических целей.

Любопытно напомнить, что в 1937 г. на Всемирной выставке в Париже демонстрировался радиоуправляемый подвижный робот, созданный советским восьмиклассником В.Машкевичем. К этому времени уже окончательно «прижился» термин «робот», а идеи робототехники все более энергично использовались в научно-фантастической литературе.

2.2 Возникновение и развитие современной робототехники

Как уже было указано, современная робототехника возникла во второй

половине XX столетия, когда в ходе развития производства появилась реальная потребность в универсальных манипуляционных машинах-автоматах, подобных «механическим людям», описанным К. Чапеком, и одновременно были созданы необходимые для их создания научно-технические предпосылки и прежде всего кибернетика и вычислительная техника.

Современными предшественниками роботов явились различного рода устройства для манипулирования на расстоянии объектами, непосредственный контакт человека с которыми опасен или невозможен. Это манипуляторы с ручным и автоматизированным управлениями. Первые из них были пассивными, т.е. механизмами без приводов, и служащими для повторения на некотором расстоянии движений руки человека целиком за счет его мускульной силы. Затем были созданы манипуляторы с приводами и различными вариантами управления человеком вплоть до биоэлектрического.

Первые такие манипуляторы были созданы в 1940—1950 гг. для атомных исследований, а затем для атомной промышленности. Подобные манипуляторы получили также применение в глубоководной технике, металлургии и ряде других отраслей промышленности.

Первые полностью автоматически действующие манипуляторы были созданы в США в 1960—1961 гг. В 1961 г. был разработан такой манипулятор, управляемый от ЭВМ и снабженный захватным устройством, очувствленным с помощью различного типа датчиков — контактных и фотоэлектрических. Этот манипулятор МН-1 получил название «рука Эрнста» по фамилии его создателя Г. Эрнста. По современному определению, это был прообраз очувствленного робота второго поколения с адаптивным управлением, что позволяло ему, например, находить и брать произвольно расположенные предметы.

В 1962 г. на рынке США появились первые роботы марки «Версотран» (фирмы «Америкэн мэшин энд фаундри»), предназначенные для промышленного применения.

Одновременно возник термин «промышленный робот», по-видимому, предложенный этой фирмой. В то же время в США появились роботы «Юнимейт-1900», которые получили первое применение в автомобильной промышленности на заводах фирм «Дженерал моторс», «Форд» и «Дженерал электрик».

Хронология дальнейшего развития производства роботов за рубежом такова: в 1967 г. начат выпуск роботов в Англии по лицензии США, в 1968 г. — в Швеции и Японии (тоже по лицензиям США), в 1971 г. — в ФРГ, в 1972 г. — во Франции, в 1973 г. — в Италии. Динамика роста парка роботов в мире выглядит следующим образом:

Таблица 1

год	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Количество роботов	8,5	30	90	400	800	1200

В среднем в год парк роботов возрастает на 20-30%, и в 1998 году он впервые превысил 1 млн.шт.

Первое место в мире по производству и применению роботов уверенно занимает Япония, где сосредоточена большая часть мирового парка роботов. Далее следуют США, Италия, Франция, Швеция. Большая часть этого парка используется в промышленности, примерно половина - на основных технологических операциях, где требуются наиболее сложные роботы. Доля таких роботов неуклонно растет.

Технический прогресс в развитии роботов идет, прежде всего, в направлении совершенствования систем управления. Первые промышленные роботы имели программное управление, в основном заимствованное от станков с числовым программным управлением (ЧПУ). От них же были взяты приводы. Эти роботы получили название роботов первого поколения. Второе поколение роботов роботы с адаптивным управлением. Это очувствленные роботы, т.е. снабженные сенсорными системами, главными из которых являются системы технического зрения (СТЗ).

Первые промышленные роботы с развитым очувствлением, включая техническое зрение, и микропроцессорным управлением появились на рынке и начали получать практическое применение в 1980 - 1981 гг. прежде всего на сборке, дуговой сварке, контроле качества, для взятия неориентированных предметов, например, с конвейера. Это снабженные видеосистемами роботы «Пума». «Юнимейт», «Ауто-плейс», «Цинциннати милакрон», «Аид-800», сборочные робототехнические системы фирм «Хитачи», «Вестингауз» (система «Апас»), «Дженерал моторс» (система «Консайт»). Доля таких роботов в общем парке роботов неуклонно растет и приближается к 50% несмотря на то, что эти роботы в несколько раз дороже роботов с программным управлением и значительно сложнее в обслуживании. Однако это окупается неизмеримо большими функциональными возможностями, а, следовательно, и областями применения.

Третье поколение роботов - это интеллектуальные роботы, т.е. с интеллектуальным управлением. Пока эти роботы - предмет исследований и опытных разработок.

В 1967 г. в США (Станфордский университет) был создан лабораторный макет робота, снабженного техническим зрением и предназначенного для исследования и отработки системы «глаз — рука», способной распознавать объекты внешней среды и оперировать ими в соответствии с заданием.

В 1968 г. в СССР (Институтом океанологии Академии наук СССР

совместно с Ленинградским политехническим институтом и другими вузами) был создан телеуправляемый от ЭВМ подводный робот «Манта» с осязательным захватным устройством, а в 1971 г. — следующий его вариант с техническим зрением и системой целеуказания по телевизионному экрану.

В 1969 г. в США (Станфордский научно-исследовательский институт) в рамках работ по искусственному интеллекту был разработан экспериментальный макет подвижного робота «Шейки» с развитой системой сенсорного обеспечения, включая техническое зрение, обладавшего элементами искусственного интеллекта, что позволило ему целенаправленно передвигаться в заранее неизвестной обстановке, самостоятельно принимая необходимые для этого решения.

В 1971 г. в Японии также были разработаны экспериментальные образцы роботов с техническим зрением и элементами искусственного интеллекта: робот «Хивип», способный самостоятельно осуществлять механическую сборку простых объектов по предъявленному чертежу, и робот ЭТЛ-1.

В этот период и в ряде других стран создают подобные экспериментальные установки, так называемые интегральные роботы, включающие манипуляторы, управляющие ЭВМ, различные средства осязания и общения с человеком-оператором, которые предназначены для проведения исследований в области создания роботов следующих поколений, а также искусственного интеллекта.

Одновременно развернулись работы в новой специфической области робототехники — шагающие машины как принципиально новое транспортное средство повышенной проходимости, образцом для которого являются ноги животных и человека. Были созданы экспериментальные образцы четырех- и шестиногих транспортных машин, протезов ног человека, так называемых экзоскелетов, для парализованных и тяжелобольных.

История гибкой автоматизации началась в 1955 г. с появлением станков с ЧПУ. Именно такого типа автоматическое технологическое оборудование с быстросменяемыми программами работы является основой для создания гибких, т.е. быстро перестраиваемых на выпуск новой продукции, производств. Однако для реализации идеи гибкой автоматизации, был необходим еще ряд условий. Этим и объясняется, что первые станки с ЧПУ распространялись очень медленно. За десять лет их доля в общем парке станков в технически передовых странах не достигла и 0,1 %. Ситуация резко изменилась в 70-ые годы с появлением следующего важнейшего компонента гибкой автоматизации - микропроцессорных систем управления, что обеспечило резкое снижение стоимости систем ЧПУ и повышение их надежности.

Роботы как другой обязательный компонент гибкой автоматизации появились в промышленности, как уже было указано, несколько раньше. В результате появились все необходимые компоненты для развития гибких автоматизированных производств, а именно: технологическое оборудование с программным управлением, микропроцессоры как универсальное гибкое средство для обработки информации и роботы как универсальное гибкое средство для манипуляционных действий, требующихся при выполнении основных технологических операций (сборки, сварки, окраски и т.п.) и различных вспомогательных операций по обслуживанию другого оборудования.

Одновременно роботы начинают все более широко проникать и в другие отрасли хозяйства, включая горное дело, металлургию, строительство, транспорт, легкую и пищевую промышленность, сельское хозяйство, медицину, сферу обслуживания, освоение океана и космоса, военное дело. В последние годы все ускоряющимися темпами растет доля парка роботов, занятых вне промышленности и, в частности, в быту.

Почти во всех технически развитых странах созданы национальные ассоциации по робототехнике. В ряде стран имеются финансируемые государством национальные программы по этой проблеме. Развиваются такие программы на международном уровне.

Развитие отечественной робототехники

Первые серьезные результаты по созданию и практическому применению роботов в СССР относятся к 60-м годам. В 1966 г. в институте ЭНИКмаш (г. Воронеж) был разработан автоматический манипулятор с простым цикловым управлением для переноса и укладывания, металлических листов. Первые промышленные образцы современных промышленных роботов с позиционным управлением были созданы в 1971 г. (УМ-Г7"«Универсал-50», УПК-1). В 1968 г., как уже упоминалось, был создан первый управляемый от ЭВМ подводный автоматический манипулятор. В 1971г. в Ленинградском политехническом институте был создан экспериментальный образец интегрального робота, снабженного развитой системой осязания, включая техническое зрение и речевое управление. В том же году в Ленинграде состоялся первый Всесоюзный семинар по роботам, управляемым от ЭВМ.

Начиная с 1972 г. работы в области робототехники приняли плановый характер в масштабе страны. В 1972 г. Постановлением Госкомитета СССР по науке и технике была сформулирована проблема создания и применения роботов в машиностроении как государственно-важная задача и определены основные направления ее решения. В следующем году была утверждена первая программа работ по этой проблеме, которая охватила основные отрасли промышленности и ведомства, включая Академию наук и высшую школу. В соответствии с этой программой к 1975 г., были созданы первые 30 серийно пригодных промышленных роботов, в том числе универсальных

(для обслуживания станков, прессов, для нанесения покрытий и точечной сварки) на пневмо-, гидро- и электроприводах, стационарных и подвижных. В следующей пятилетке эта работа была продолжена на основе новой пятилетней программы. Было создано более 100 промышленных роботов и организовано серийное производство 40 марок. Одновременно были начаты работы по унификации и стандартизации промышленных роботов по соответствующей программе Госстандарта СССР.

К концу 1980 г. парк промышленных роботов в стране превысил 6000 шт., что находилось, например, на уровне парка роботов США, и составляло более 20% парка роботов в мире, к 1985 г. превысил 40 тыс. шт., в несколько раз превзойдя парк роботов США и достигнув 40 % мирового парка.

Первые промышленные роботы второго поколения со средствами оучувствления появились в отечественной промышленности на сборочных операциях в приборостроении с 1980 г. Первый промышленный робот с техническим зрением МП-8 был создан в 1982 г.

К сожалению, с распадом СССР вся эта плановая работа по развитию отечественной робототехники на государственном уровне прекратилась. Практически прекратилось серийное производство роботов. Их парк сократился более чем на порядок вместе с сокращением производства в стране в целом. В результате к 1995 г. разработки и применение роботов в России сузилось до задач обеспечения работ в экстремальных ситуациях (стихийные бедствия, аварии, борьба с террористами и т.п.), когда без роботов задача не может быть решена. Правда, в этой сфере отечественная робототехника не только не потеряла ранее достигнутого научно-технического уровня, но и продолжает развиваться, в том числе путем участия в различных международных проектах и программах. На рубеже 2000 года начали возрождаться отраслевые и ведомственные научно-технические программы по робототехнике и межотраслевые по линии Миннауки по отдельным особо государственно-важным ее аспектам. Все это позволяет надеяться на будущее возрождение отечественной робототехники в полном объеме по мере восстановления нашей экономики и народного хозяйства.

3 КИНЕМАТИКА МАНИПУЛЯТОРА

Задачей кинематики является аналитическое описание пространственного расположения манипулятора в зависимости от времени, и, в частности, установление связи между значениями присоединенных координат манипулятора и положением и ориентацией его схвата в декартовом пространстве.

Механический манипулятор можно рассматривать как разомкнутую цепь, которая состоит из нескольких твердых тел (звеньев), последовательно соединенных вращательными или поступательными сочленениями, приводимыми в движение силовыми приводами. Один конец этой цепи соединен с основанием, а другой конец свободен и снабжен рабочим инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять различные технологические, например сборочные, операции. Относительное движение сочленений передается звеньям, в результате чего охват манипулятора занимает в пространстве заданное положение. В большинстве приложений робототехники требуется описать пространственное положение схвата по отношению к заданной абсолютной системе координат.

Кинематика манипулятора изучает геометрию движения манипулятора относительно заданной абсолютной системы координат, не рассматривая силы и моменты, порождающие это движение. Таким образом, ее предметом является описание пространственного положения манипулятора как функции времени, и, в частности, соотношения между пространством присоединенных переменных манипулятора — обобщенными координатами, положением и ориентацией схвата. В этой главе рассмотрены две основные задачи кинематики манипулятора (важные как в теоретическом, так и в прикладном плане).

1. Для конкретного манипулятора по известному вектору присоединенных углов — обобщенных координат $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T$ и заданным геометрическим параметрам звеньев (n - число степеней свободы) определить положение и ориентацию схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат.
2. При известных геометрических параметрах звеньев найти все возможные векторы присоединенных переменных манипулятора, обеспечивающие заданные положение и ориентацию схвата относительно абсолютной системы координат.

Первую из этих задач принято называть прямой, а вторую — обратной задачей кинематики манипулятора. Поскольку собственными независимыми переменными манипулятора являются присоединенные переменные, а задача, как правило, формулируется в координатах абсолютной системы

отсчета, обратная задача кинематики возникает более часто, чем прямая. На Рис. 2 приведена блок-схема, иллюстрирующая взаимосвязь этих задач.

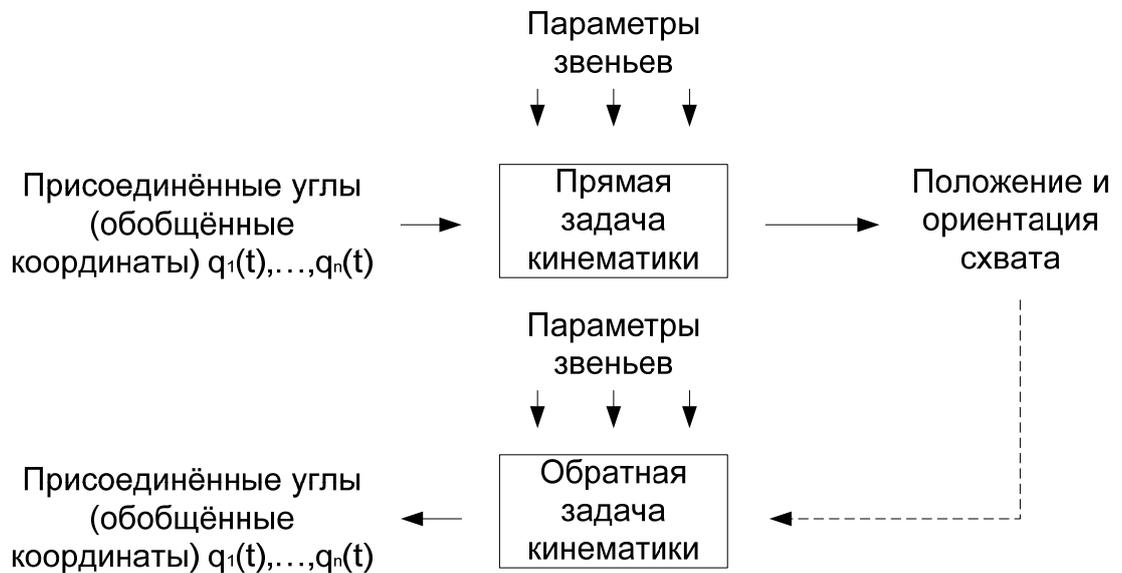


Рис. 2-Прямая и обратная задачи кинематики

Так как звенья манипулятора совершают вращательное и/или поступательное движение относительно абсолютной системы координат, результирующее пространственное положение схвата определяется угловым и поступательными движениями звеньев. Для описания взаимного пространственного положения двух смежных звеньев этот подход использует однородную матрицу преобразования размерностью 4×4 . Прямая задача кинематики сводится тем самым к определению однородной матрицы преобразования, характеризующей пространственное положение системы координат схвата манипулятора в абсолютной системе отсчета. Однородные матрицы преобразования используются также при выводе уравнений динамики движения манипулятора.

К решению обратной задачи кинематики существует, вообще говоря, несколько подходов. Наиболее часто используются методы матричной алгебры, метод итераций и геометрический. В примере решения обратной задачи кинематики простого манипулятора с вращательными сочленениями мы рассмотрим геометрический подход, основой для которого служат понятия систем координат звеньев и конфигураций манипулятора. Кроме того, будет предложен более общий подход с использованием однородных матриц размерностью 4×4 , который проиллюстрирован на примере решения обратной задачи кинематики простых манипуляторов.

3.1 Матрицы поворота

Матрицу поворота размерностью 3×3 можно определить как матрицу преобразования трехмерного вектора положения в евклидовом пространстве, переводящую его координаты из повернутой. (связанной) системы отсчета OUVW в абсолютную систему координат OXYZ. На Рис. 3 показаны две правые прямоугольные системы координат: системы координат OXYZ с осями OX, OY, OZ и система OUVW с осями OU, OV, OW. Начала этих систем совпадают и расположены в точке O. Система OXYZ фиксирована в трехмерном пространстве и принята за абсолютную, а система координат OUVW вращается относительно абсолютной системы OXYZ. Физически система OUVW может рассматриваться как связанная система, координат. Это означает, что она соответствующим образом жестко связана с твердым телом (например, с летательным аппаратом или звеном манипулятора) и движется вместе с ним. Пусть $(i_x j_y k_z)$ и $(i_u j_v k_w)$ — единичные векторы, направленные вдоль осей систем OXYZ и OUVW соответственно. Некоторую точку P в пространстве можно охарактеризовать координатами относительно любой из указанных систем. Для простоты рассуждений предположим, что точка p фиксирована и неподвижна в системе отсчета OUVW. Тогда в системах координат OUVW и OXYZ точка будет иметь соответственно координаты

$$P_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{и} \quad P_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)^T, \quad (1)$$

где P_{uvw} и P_{xyz} характеризуют положение одной и той же точки P относительно различных систем отсчета. Верхний индекс T , добавляемый к обозначению вектора или матрицы, обозначает операцию транспонирования.

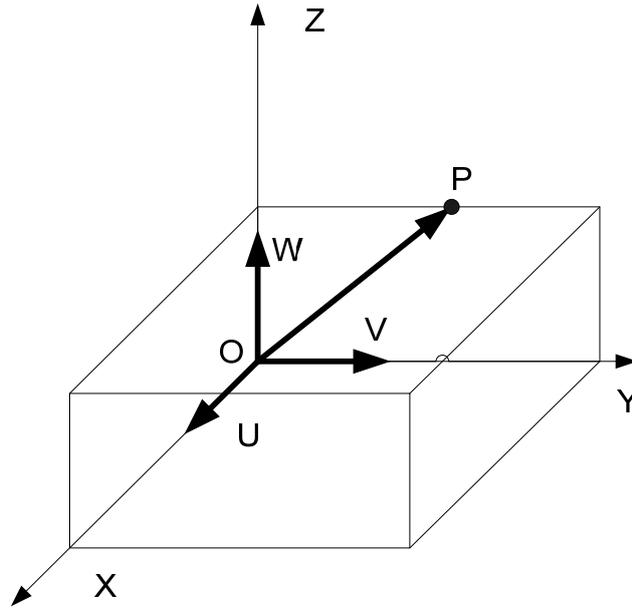


Рис. 3-Абсолютная и связанная системы координат.

Наша задача состоит в том, чтобы определить матрицу R размерностью 3×3 , которая преобразует координаты P_{uvw} в координаты вектора P в системе $OXYZ$ после того, как система $OUVW$ будет повернута, т. е.

$$P_{xyz} = R \cdot P_{uvw} \quad (2)$$

Заметим, что физически точка p вращается вместе с системой координат $OUVW$.

Из определения компонент вектора имеем

$$P_{uvw} = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v + p_w \cdot k_w \quad (3)$$

где P_u , P_v и P_w представляют собой составляющие вектора P вдоль осей OU , OV и OW соответственно, или проекции вектора P на эти оси. Таким образом, используя определение скалярного произведения и равенство (3), получаем

$$\begin{aligned} p_x &= P \cdot i_x = i_x \cdot i_u \cdot p_u + i_x \cdot j_v \cdot p_v + i_x \cdot k_w \cdot p_w \\ p_y &= P \cdot j_y = j_y \cdot i_u \cdot p_u + j_y \cdot j_v \cdot p_v + j_y \cdot k_w \cdot p_w \\ p_z &= P \cdot k_z = k_z \cdot i_u \cdot p_u + k_z \cdot j_v \cdot p_v + k_z \cdot k_w \cdot p_w \end{aligned} \quad (4)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (5)$$

С учетом этого выражения матрица R в равенстве (2) примет вид

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad (6)$$

Аналогично, координаты p_{uvw} , можно получить из координат p_{xyz} :

$$p_{uvw} = Q \cdot p_{xyz} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Поскольку операция скалярного произведения коммутативна, то из соотношений (6)—(8) следует

$$Q = R^{-1} = R^T \quad (9)$$

$$QR = R^T R = R^{-1} R = I_3 \quad (10)$$

где I_3 — единичная матрица размерностью 3×3 . Преобразование, определяемое формулой (2) или (7), называется ортогональным преобразованием, а поскольку все векторы, входящие в скалярные произведения, единичные, его также называют ортонормальным преобразованием.

Особый интерес представляют матрицы поворота системы OUVW относительно каждой из трех основных осей системы OXYZ. Если положение системы OUVW в пространстве изменяется за счет поворота этой системы на угол α вокруг оси OX, то в системе отсчета OXYZ изменятся и координаты $(p_x, p_y, p_z)^T$ точки p_{uvw} , имеющей в системе OUVW неизменные координаты (p_u, p_v, p_w) . Соответствующая матрица преобразования $R_{x,\alpha}$ называется матрицей поворота вокруг оси OX на угол

α . Основываясь на полученных выше результатах, для матрицы $R_{x,\alpha}$ имеем

$$p_{xyz} = R_{x,\alpha} \cdot p_{uvw} \quad (11)$$

причем $i_x = i_u$, и

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (12)$$

Аналогично, трехмерные (размерностью 3×3) матрицы поворота вокруг оси OY на угол φ в вокруг оси OZ на угол θ имеют соответственно вид Рис. 4.

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Матрицы $R_{x,\alpha}$, $R_{y,\varphi}$, и $R_{z,\theta}$ называются матрицами элементарных поворотов. Любые другие матрицы конечных поворотов можно получить, используя матрицы элементарных поворотов.

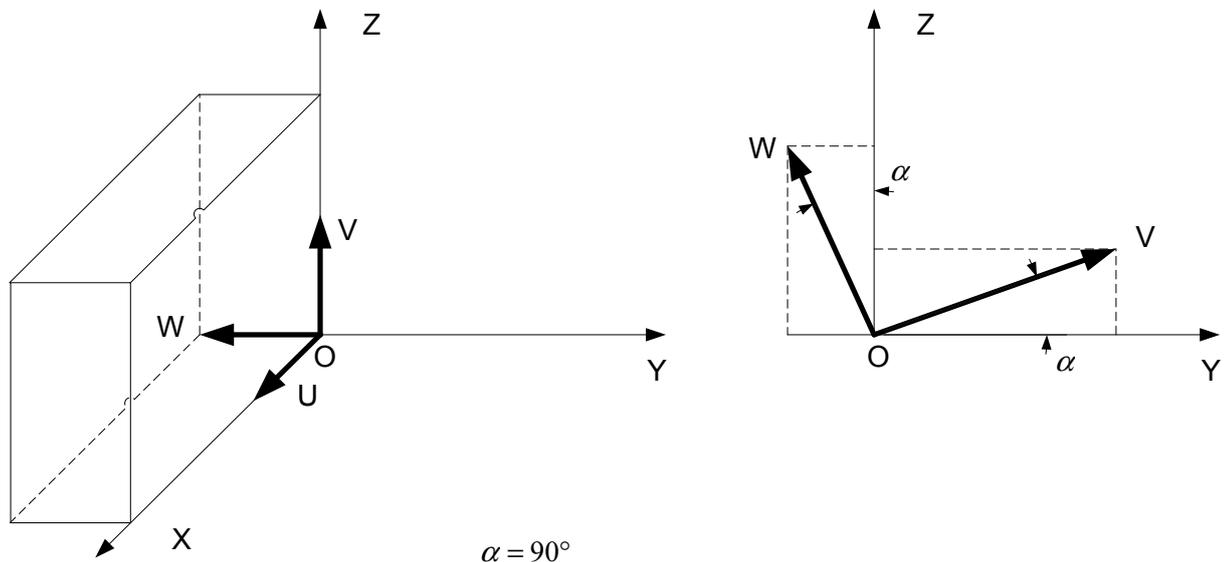


Рис. 4-Вращающаяся система координат

Пример. Требуется найти матрицу поворота, являющегося результатом

последовательного выполнения поворотов сначала на угол φ вокруг оси OY, затем на угол θ вокруг оси OW и на угол α вокруг оси OU.

Решение:

$$\begin{aligned}
 R &= R_{y,\varphi} \cdot I_3 \cdot R_{w,\theta} \cdot R_{u,\alpha} = R_{y,\varphi} \cdot R_{w,\theta} \cdot R_{u,\alpha} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\alpha - \cos\varphi\sin\theta\cos\alpha & \cos\varphi\sin\theta\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha \\ -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha & \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\theta\sin\alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2 Матрица поворота вокруг произвольной оси

В ряде случаев подвижная система координат OUVW может совершать поворот на угол φ относительно произвольной оси r , представляющей собой единичный вектор с компонентами r_x , r_y и r_z , выходящий из начала координат O . Преимущество такого поворота состоит в том, что для некоторых угловых движений последовательность поворотов относительно основных осей систем координат OXYZ и/или OUVW можно заменить одним поворотом системы OUVW вокруг оси r . Чтобы получить матрицу поворота $R_{r,\varphi}$, можно сначала произвести ряд поворотов относительно осей системы OXYZ, чтобы совместить ось r с осью OZ. Затем произведем требуемый поворот вокруг оси r на угол φ и опять ряд поворотов относительно осей системы OXYZ, возвращающих ось OZ в исходное положение. Из Рис. 5 видно, что совмещение осей OZ и r может быть реализовано с помощью поворота на угол α относительно оси OX (ось r в результате окажется в плоскости XZ), а затем на угол β вокруг оси OY (в результате оси OZ и r совпадут). После поворота на угол φ относительно OZ или r произведем указанную выше последовательность поворотов, но в обратном порядке и изменим при этом знаки углов поворота на противоположные.

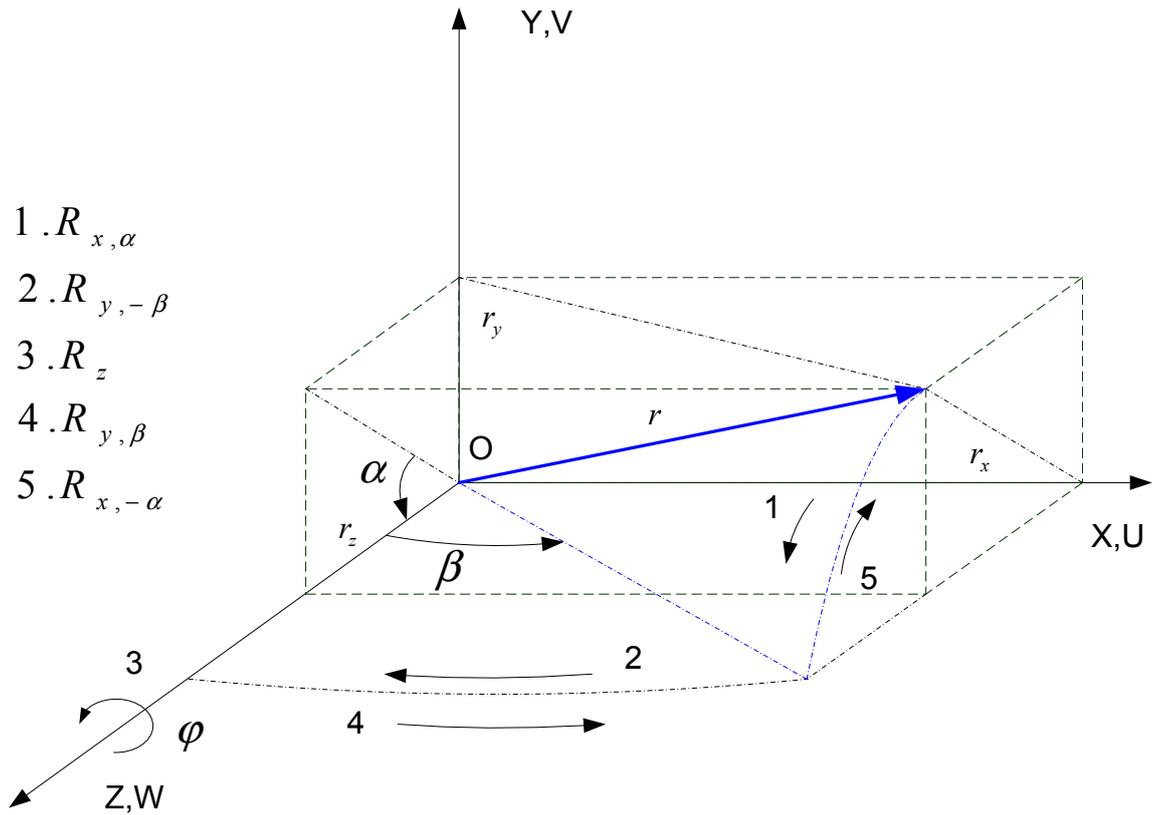


Рис. 5-Вращение вокруг произвольной оси

Результирующая матрица поворота равна:

$$\begin{aligned}
 R_{r,\varphi} &= R_{x,-\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\varphi} \cdot R_{y,-\beta} \cdot R_{x,\alpha} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

На Рис. 5 легко определить, что

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\sin \beta = r_x, \quad \cos \beta = \sqrt{r_y^2 + r_z^2}$$

Подстановка этих равенств в предыдущее выражение для $R_{r,\varphi}$ дает

$$R_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\varphi + \cos \varphi & r_x r_y V\varphi - r_z \sin \varphi & r_x r_z V\varphi + r_y \sin \varphi \\ r_x r_y V\varphi + r_z \sin \varphi & r_y^2 V\varphi + \cos \varphi & r_y r_z V\varphi - r_x \sin \varphi \\ r_x r_z V\varphi - r_y \sin \varphi & r_y r_z V\varphi + r_x \sin \varphi & r_z^2 V\varphi + \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (14)$$

где $V\varphi = \text{vers}\varphi = 1 - \cos \varphi$

Пример. Найти матрицу поворота $R_{r,\varphi}$, задающую поворот на угол φ вокруг вектора $r = (1,1,1)^T$.

Решение. Поскольку вектор r не является единичным, нужно нормировать его и определить после этого его координаты в системе отсчета OXYZ. Тем самым

$$r_x = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad r_y = r_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Подставляя эти значения в равенство (14), получим матрицу $R_{r,\varphi}$:

$$R_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} V\varphi + \cos \varphi & \frac{1}{3} V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi & \frac{1}{3} V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \\ \frac{1}{3} V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi & \frac{1}{3} V\varphi + \cos \varphi & \frac{1}{3} V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \\ \frac{1}{3} V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi & \frac{1}{3} V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi & \frac{1}{3} V\varphi + \cos \varphi \end{bmatrix}$$

3.3 Представление матриц поворота через углы Эйлера

Матричное описание вращения твердого тела упрощает многие

операции; однако, для того чтобы полностью описать ориентацию вращающегося твердого тела, необходимо использовать: все девять элементов матрицы поворота. Непосредственно эти элементы не составляют полной системы обобщенных координат, с помощью которых можно описать ориентацию вращающегося твердого тела относительно абсолютной системы координат. В качестве обобщенных координат можно использовать углы Эйлера φ , θ и ψ . Существует много различных систем углов Эйлера и все они описывают ориентацию твердого тела относительно некоторой заданной системы координат. Три наиболее часто используемые системы углов Эйлера представлены

В

Таблица 2.

Таблица 2-Три системы углов Эйлера

	1	2	3
Последовательность поворотов	На φ вокруг оси OZ На θ вокруг оси OU На ψ вокруг оси OW	На φ вокруг оси OZ На θ вокруг оси OV На ψ вокруг оси OW	На ψ вокруг оси OX На θ вокруг оси OY На φ вокруг оси OZ

Первая из рассматриваемых систем углов Эйлера обычно используется при описании движения гироскопов и соответствует следующей последовательности поворотов (Рис. 6):

1. Поворот на угол φ вокруг оси OZ.
2. Поворот на угол θ вокруг повернутой оси OU ($R_{u,\theta}$).

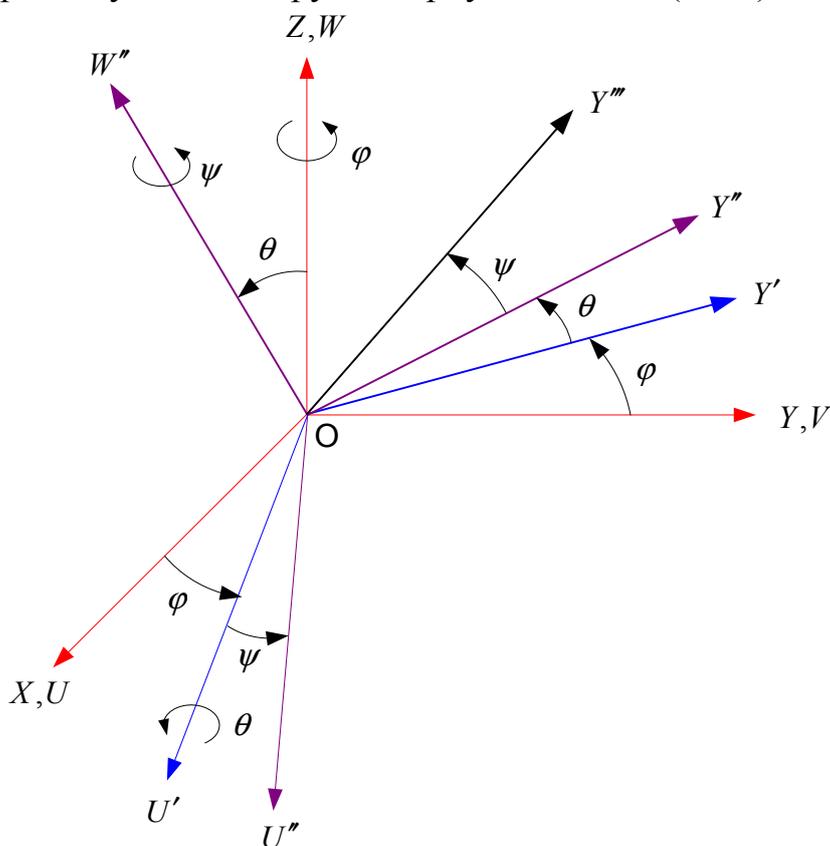


Рис. 6-Первая система углов Эйлера.

3. Наконец, поворот на угол ψ вокруг повернутой оси OW($R_{w,\psi}$).
Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Поворот, описываемый матрицей $R_{\varphi,\theta,\psi}$, может быть также получен в результате выполнения последовательности следующих поворотов вокруг осей неподвижной системы координат: сначала на угол ψ вокруг оси OZ, затем на угол θ вокруг оси OX и, наконец, на угол φ вокруг оси OZ.

На Рис. 7 изображена вторая система углов Эйлера, определяемая следующей последовательностью поворотов:

1. Поворот на угол φ вокруг оси OZ($R_{z,\varphi}$).
2. Поворот на угол θ вокруг повернутой оси OV($R_{v,\theta}$).
3. Наконец, поворот на угол ψ вокруг повернутой оси OW($R_{w,\psi}$).
Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} \cdot R_{v,\theta} \cdot R_{w,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\theta & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (16)
 \end{aligned}$$

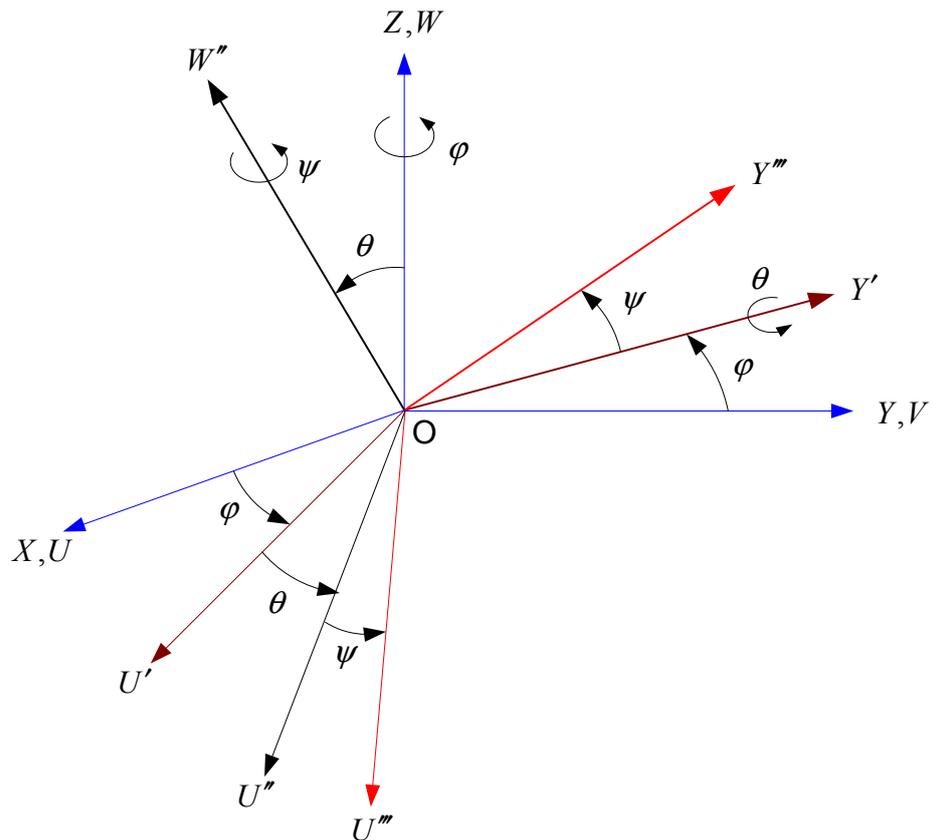


Рис. 7-Вторая система углов Эйлера.

Поворот, описываемый матрицей $R_{\varphi,\theta,\psi}$ для этой системы углов Эйлера, может быть получен также в результате выполнения следующей последовательности поворотов вокруг осей неподвижной системы координат: на угол ψ вокруг оси OZ, затем на угол θ вокруг оси OY и, наконец, на угол φ вокруг оси OZ.

Еще одну систему углов Эйлера составляют так называемые углы крена, тангажа и рысканья. Эти углы обычно применяются в авиационной технике при описании движения аппаратов.

Они соответствуют следующей последовательности поворотов:

1. Поворот на угол ψ вокруг оси OX ($R_{x,\psi}$ (рысканье)).
 2. Поворот на угол θ вокруг оси OY ($R_{y,\theta}$) (тангаж).
 3. Поворот на угол φ вокруг оси OZ ($R_{z,\varphi}$) (крен).
- Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{x,\psi} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\psi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix} \quad (17)
\end{aligned}$$

Поворот, описываемый матрицей $R_{\varphi,\theta,\psi}$ в переменных крен, тангаж, рысканье, может быть также получен в результате выполнения следующей последовательности поворотов вокруг осей абсолютной и подвижной систем координат: на угол φ вокруг оси OZ, затем на угол θ вокруг повернутой оси OV и, наконец, на угол ψ вокруг повернутой оси OU (Рис. 8).

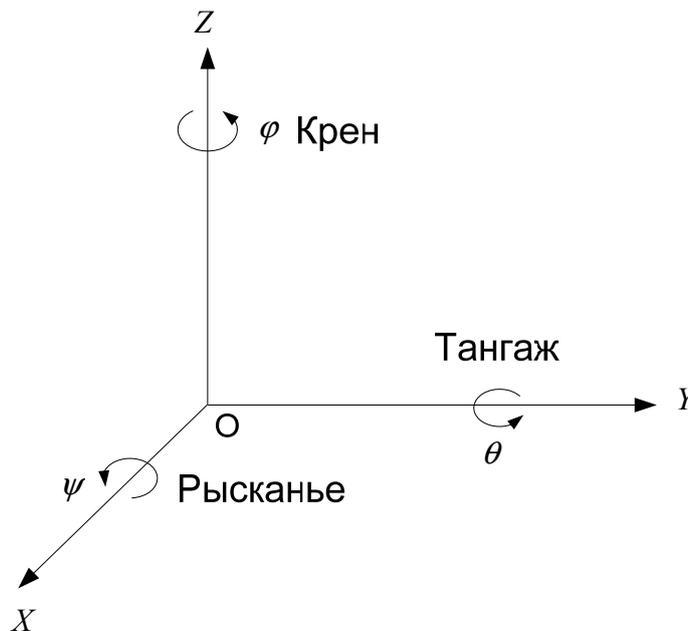


Рис. 8-Крен, тангаж, рысканье(третья система углов Эйлера).

3.4 Геометрический смысл матриц поворота

Выясним теперь геометрический смысл матриц поворота. Пусть точка P в системе отсчета OUVW имеет координаты $(1, 0, 0)$, т. е. $P_{uvw} = i_u$. Тогда первый столбец матрицы поворота представляет собой координаты этой точки относительно системы отсчета OXYZ. Аналогично, выбирая в качестве P векторы $(0,1,0)^T$ и $(0,0,1)^T$, легко видеть, что второй и третий столбцы

матрицы поворота представляют собой координаты единичных векторов в направлении соответственно осей OV и OW системы $OUVW$ относительно системы отсчета $OXYZ$. Таким образом, если заданы абсолютная система отсчета $OXYZ$ и матрица поворота, то векторы-столбцы этой матрицы задают в системе $OXYZ$ координаты единичных векторов в направлении основных осей системы $OUVW$. Это позволяет определить положение осей системы координат $OUVW$ относительно абсолютной системы координат. Итак, матрица поворота определяет положение основных осей повернутой системы координат относительно абсолютной системы координат.

Поскольку операция обращения матрицы поворота совпадает с операцией транспонирования, то векторы-строки матрицы поворота задают направление основных осей абсолютной системы координат $OXYZ$ в повернутой системе координат $OUVW$. Такая геометрическая интерпретация матрицы поворота дает ключ к решению многих задач кинематики манипулятора. Ниже приводится ряд полезных свойств матриц поворота.

1. Каждый столбец матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси повернутой системы отсчета, заданный своими координатами относительно абсолютной системы координат. Каждая строка матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси абсолютной системы координат, заданный своими координатами относительно повернутой системы отсчета $OUVW$.
2. Поскольку каждый столбец и строка представляют собой координаты единичного вектора, длина векторов, определяемых строками и столбцами матрицы поворота, равна 1. Это свойство непосредственно следует из определения ортонормированной системы координат. Далее, детерминант матрицы поворота равен $+1$ для правосторонней системы отсчета и -1 — для левосторонней.
3. Поскольку столбцы (строки) матрицы поворота являются векторами, составляющими ортонормированный базис, скалярное произведение векторов, определяемых двумя различными столбцами (строками), равно нулю.
4. Операция обращения матрицы поворота совпадает с операцией транспонирования: $R^{-1} = R^T$ и $RR^T = I_3$,

где I_3 — единичная матрица размерностью 3×3 . Свойства 3 и 4 особенно полезны для проверки результатов умножения двух матриц поворота и при поиске строки или столбца матрицы поворота, в котором сделана ошибка.

Пример. Координатные оси OU , OV и OW повернуты на угол α вокруг оси OX . Определить координаты единичных векторов в направлении осей абсолютной системы отсчета относительно повернутой системы отсчета

OUVW.

Решение. Единичные векторы в направлении повернутых координатных осей в повернутой системе отсчета имеют координаты $i_u = (1,0,0)^T$, $j_v = (0,1,0)^T$, $k_w = (0,0,1)^T$. Тогда исходные единичные векторы имеют вид

$$i_x = 1 \cdot i_u + 0 \cdot j_v + 0 \cdot k_w = (1,0,0)^T$$

$$j_y = 0 \cdot i_u + \cos \alpha \cdot j_v - \sin \alpha \cdot k_w = (0, \cos \alpha, -\sin \alpha)^T$$

$$k_z = 0 \cdot i_u + \sin \alpha \cdot j_v + \cos \alpha \cdot k_w = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)^T$$

Используя свойство 1 и рассматривая эти векторы как строки матрицы поворота, можно воссоздать матрицу $R_{x,\alpha}$ которая будет иметь следующий вид:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом транспонирования матрицы, входящей в равенство (12).

3.5 Однородные координаты и матрицы преобразований

Поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, вектор координат $p = (p_x, p_y, p_z)^T$ в трехмерном пространстве дополняют четвертой координатой (или компонентой) так, что он принимает вид $\hat{p} = (wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$. В этом случае говорят, что вектор \hat{p} выражен в однородных координатах. В этом разделе для обозначения того, что евклидов вектор выражен в однородных координатах, мы будем его записывать в виде \hat{p} . В дальнейшем, если это не приведет к путанице, такие «крышки» над буквами будут опущены. Описание точек трехмерного пространства однородными координатами позволяет ввести в рассмотрение матричные преобразования, содержащие одновременно поворот, параллельный перенос, изменение масштаба и преобразование перспективы. В общем случае изображение N-мерного вектора вектором размерностью N+1 называется представлением в однородных координатах. При таком представлении преобразование N-мерного вектора производится в (N+1)-мерном пространстве,

а физический N-мерный вектор получается делением однородных координат на (N+1)-ю компоненту w . Так, вектор $p = (p_x, p_y, p_z)^T$ положения в трехмерном пространстве в однородных координатах представляется расширенным вектором $(wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$. Физические координаты связаны с однородными следующим образом:

$$p_x = \frac{wp_x}{w}, \quad p_y = \frac{wp_y}{w}, \quad p_z = \frac{wp_z}{w}$$

Представление трехмерного вектора положения в однородных координатах не единственно. Таким образом, четвертую компоненту w вектора однородных координат можно рассматривать как масштабирующий множитель. Если эта компонента равна 1 ($w = 1$), то однородные координаты вектора положения совпадают с его физическими координатами. В робототехнике масштабирующий множитель всегда выбирается равным 1, а в задачах машинной графики он принимает любые положительные значения.

Однородная матрица преобразования представляет собой матрицу размерностью 4×4 , которая преобразует вектор, выраженный в однородных координатах, из одной системы отсчета в другую. Однородная матрица преобразования может быть разбита на четыре подматрицы:

$$T = \left[\begin{array}{c} R_{3 \times 3} : p_{1 \times 3} \\ f_{1 \times 3} : 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \text{Поворот} & \vdots \text{ Сдвиг} \\ \text{Перспектива} & \vdots \text{ Масштаб} \end{array} \right] \quad (18)$$

Верхняя левая подматрица размерностью 3×3 представляет собой матрицу поворота; верхняя правая подматрица размерностью 3×1 представляет собой вектор положения начала координат повернутой системы отсчета относительно абсолютной; нижняя левая подматрица размерностью 1×3 задает преобразование перспективы; четвертый диагональный элемент является глобальным масштабирующим множителем. Однородная матрица преобразования позволяет выявить геометрическую связь между связанной системой отсчета OUVW и абсолютной системой OXYZ.

Если вектор P трехмерного пространства выражен в однородных координатах (т. е. $\hat{p} = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$), то, используя понятие матрицы преобразования, можно сформировать однородную матрицу преобразования

T , задающую преобразование поворота и имеющую размерность 4×4 . Однородная матрица поворота получается соответствующим расширением обычной матрицы поворота, имеющей размерность 3×3 . Так, однородное представление для матриц (12) и (13) имеет следующий вид:

$$T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Эти матрицы размерностью 4×4 называются однородными матрицами элементарных поворотов.

Верхняя правая подматрица однородной матрицы преобразования, имеющая размерность 3×1 , задает параллельный перенос системы координат OUVW относительно абсолютной системы OXYZ на вектор $(dx, dy, dz)^T$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Эта матрица размерностью 4×4 называется однородной матрицей элементарного сдвига.

Итак, однородная матрица преобразования переводит вектор, заданный однородными координатами в системе отсчета OUVW, в абсолютную систему координат OXYZ, т. е. при $W = 1$

$$\widehat{p}_{xyz} = T\widehat{p}_{uvw} \quad (21)$$

и

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.6 Геометрический смысл однородной матрицы преобразования.

В общем случае однородная матрица преобразования векторов трехмерного пространства может быть представлена так, как в равенстве (22). Выберем в системе координат OUVW точку P , имеющую однородные координаты $(0,0,0,1)^T$, т. е. P_{uvw} совпадает с началом системы координат OUVW. В этом случае верхняя правая подматрица размерностью 3×1 характеризует положение точки начала системы координат OUVW в абсолютной системе отсчета OXYZ. Далее, выберем точку P равной $(1,0,0,1)^T$, т. е. $P_{uvw} \equiv i_u$. Кроме того, предположим, что начала обеих систем отсчета совпадают и расположены в точке O . Это приводит к тому, что все элементы верхней правой подматрицы, имеющей размерность 3×1 , равны 0. Тогда первый столбец (или вектор n) однородной матрицы преобразования определяет координаты единичного вектора в направлении оси OU системы OUVW в системе отсчета OXYZ. Аналогично, полагая P равным $(0,1,0,1)^T$ и $(0,0,1,1)^T$, легко видеть, что второй столбец (или вектор s) и третий столбец (или вектор a) элементов однородной матрицы преобразования определяют соответственно координаты единичных векторов в направлении осей OV и OW системы OUVW в абсолютной системе отсчета. Таким образом, если задана абсолютная система отсчета OXYZ и однородная матрица преобразования T , то векторы-столбцы подматрицы поворота представляют собой единичные векторы в направлении основных осей системы OUVW, заданные своими координатами в абсолютной системе отсчета, т. е. задают ориентацию основных осей системы отсчета OUVW относительно абсолютной системы координат. Четвертый вектор-столбец однородной матрицы преобразования задает положение начала координат системы отсчета OUVW относительно абсолютной системы координат.

Другими словами, однородная матрица преобразования в геометрическом смысле определяет положение повернутой системы координат (положение и ориентацию) по отношению к абсолютной системе отсчета.

Поскольку операция обращения подматрицы поворота совпадает с операцией транспонирования, то векторы-строки подматрицы поворота задают положение основных осей абсолютной системы координат относительно повернутой системы координат OUVW. Однако для однородной матрицы операции обращения и транспонирования не совпадают. Положение начала абсолютной системы координат относительно системы координат OUVW можно определить лишь после того, как определена матрица, обратная матрице однородного преобразования. В общем случае такая матрица имеет следующий вид:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & -n^T p \\ n_y & s_y & a_y & -s^T p \\ n_z & s_z & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \vdots -n^T p \\ & R_{3 \times 3}^T & & \vdots -s^T p \\ & & & \vdots -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Таким образом, из равенства (23) видно, что векторы-столбцы матрицы, обратной к однородной матрице преобразования, определяют положение основных осей абсолютной системы отсчета относительно повернутой системы координат OUVW. Верхняя правая подматрица размерностью 3×1 характеризует положение начала абсолютной системы координат относительно системы OUVW. Такая геометрическая интерпретация однородной матрицы преобразования будет часто использоваться в данной книге.

3.7 Однородная матрица композиции преобразований

Однородная матрица композиции преобразований (обозначим ее как матрицу T) может быть получена путем перемножения однородных матриц элементарных поворотов и сдвигов. Однако, поскольку операция умножения матриц некоммутативна, особое внимание следует обратить на порядок перемножения этих матриц. При определении однородной матрицы композиции преобразований будут полезны следующие правила:

Вначале обе системы координат совпадают, и, следовательно, однородная матрица преобразования представляет собой единичную матрицу I_4 размерностью 4×4 .

Если подвижная система координат OUVW совершает поворот/сдвиг относительно осей системы отсчета OXYZ, однородную матрицу

предыдущего результирующего преобразования надо умножить слева на соответствующую однородную матрицу элементарного поворота/сдвига.

Если подвижная система координат OUVW совершает поворот/сдвиг относительно одной из собственных основных осей, однородную матрицу предыдущего результирующего преобразования надо умножить справа на соответствующую однородную матрицу элементарного поворота/сдвига.

Пример. Определить однородную матрицу преобразования T , задающую следующую последовательность преобразований: поворот на угол α вокруг оси OX, сдвиг на a единиц вдоль оси OX, сдвиг на d единиц вдоль оси OZ и затем поворот на угол θ вокруг оси OZ.

Решение.

$$\begin{aligned}
 T = T_{z,\theta} T_{z,d} T_{x,a} T_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \\
 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta & a \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 \end{aligned}$$

Мы определили две системы координат — неподвижную абсолютную систему координат OXYZ и подвижную систему, совершающую вращательное и поступательное движение, — систему координат OUVW. Для описания взаимного пространственного положения этих систем координат была использована однородная матрица преобразования размерностью 4×4 . Матрица однородного преобразования обладает тем свойством, что, воздействуя на вектор положения, выраженный в однородных координатах, производит одновременно преобразования поворота, сдвига перспективы и глобальное изменение масштаба.

Если эти две системы координат связать со звеньями манипулятора, например с i -м и $(i-1)$ -м звеньями соответственно, то система координат

$(i-1)$ -го звена будет абсолютной системой координат, а система координат i -го звена, если последнее движется,— подвижной системой координат. Используя матрицу T , мы по известным координатам P_i , неподвижной относительно i -го звена точки P в системе OUVW i -го звена можем получить координаты этой точки в системе координат OXYZ, связанной с $(i-1)$ -м звеном в соответствии со следующей формулой:

$$P_{i-1} = TP_i \quad (24)$$

где T — однородная матрица преобразования, устанавливающая связь между системами координат; P_i — расширенный вектор положения $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$, определяющий однородные координаты точки в системе координат i -го звена; P_{i-1} — расширенный вектор положения $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$, определяющий однородные координаты этой же точки P_i , относительно системы координат $(i-1)$ -го звена.

3.8 Звенья, сочленения и их параметры

Механический манипулятор состоит из звеньев, соединенных вращательными или поступательными сочленениями (Рис. 9). Каждая пара, состоящая из звена и сочленения, обеспечивает одну степень свободы. Следовательно, манипулятор с N степенями свободы содержит N пар звено — шарнир, причем звено 0 соединено с основанием, где обычно размещается инерциальная система координат данной динамической системы, а последнее звено снабжено рабочим инструментом. Звенья и сочленения нумеруются по возрастанию от стойки к схвату манипулятора; так, сочленением 1 считается точка соединения звена 1 и опорной стойки. Каждое звено соединено не более чем с двумя другими так, чтобы не образовывалось замкнутых цепей.

В общем случае два звена соединяются элементарным сочленением, имеющим две соприкасающиеся поверхности, скользящие друг относительно друга. Известно всего шесть различных элементарных сочленений: вращательное, поступательное (призматическое), цилиндрическое, сферическое, винтовое и плоское (Рис. 10). Из перечисленных типов сочленений в манипуляторах обычно используются только вращательное и поступательное. В месте соединения двух звеньев определяется ось i -го сочленения (Рис. 11). Эта ось имеет две пересекающиеся ее нормали, каждая из

которых соответствует одному из звеньев. Относительное положение двух соединенных звеньев (звена $(i-1)$ и звена i) определяется величиной d_i — расстоянием между этими нормальными, отсчитываемым вдоль оси сочленения. Присоединенный угол θ_i между нормальными измеряется в плоскости, перпендикулярной оси сочленения. Таким образом, d_i и θ_i можно назвать расстоянием и углом между смежными звеньями. Они определяют относительное положение соседних звеньев.

Звено i ($i = 1, 2, 3 \dots 6$) соединено не более чем с двумя звеньями $(i-1)$ -м и $(i+1)$ -м звеньями); таким образом, в точках соединения i -го звена с двумя соседними определены две оси сочленений. Важное свойство звеньев с точки зрения кинематики состоит в том, что они сохраняют неизменной конфигурацию относительного расположения соседних сочленений, характеризуемую параметрами a_i и α_i . В качестве параметра a_i выбрано кратчайшее расстояние между осями z_{i-1} и z_i i -го и $(i+1)$ сочленений соответственно, измеряемое вдоль их общей нормали. α_i — угол между осями сочленений, измеряемый в плоскости, перпендикулярной их общей нормали. Таким образом, a_i и α_i можно рассматривать соответственно как длину и угол скрутки i -го звена. Эти параметры характеризуют конструктивные особенности i -го звена.

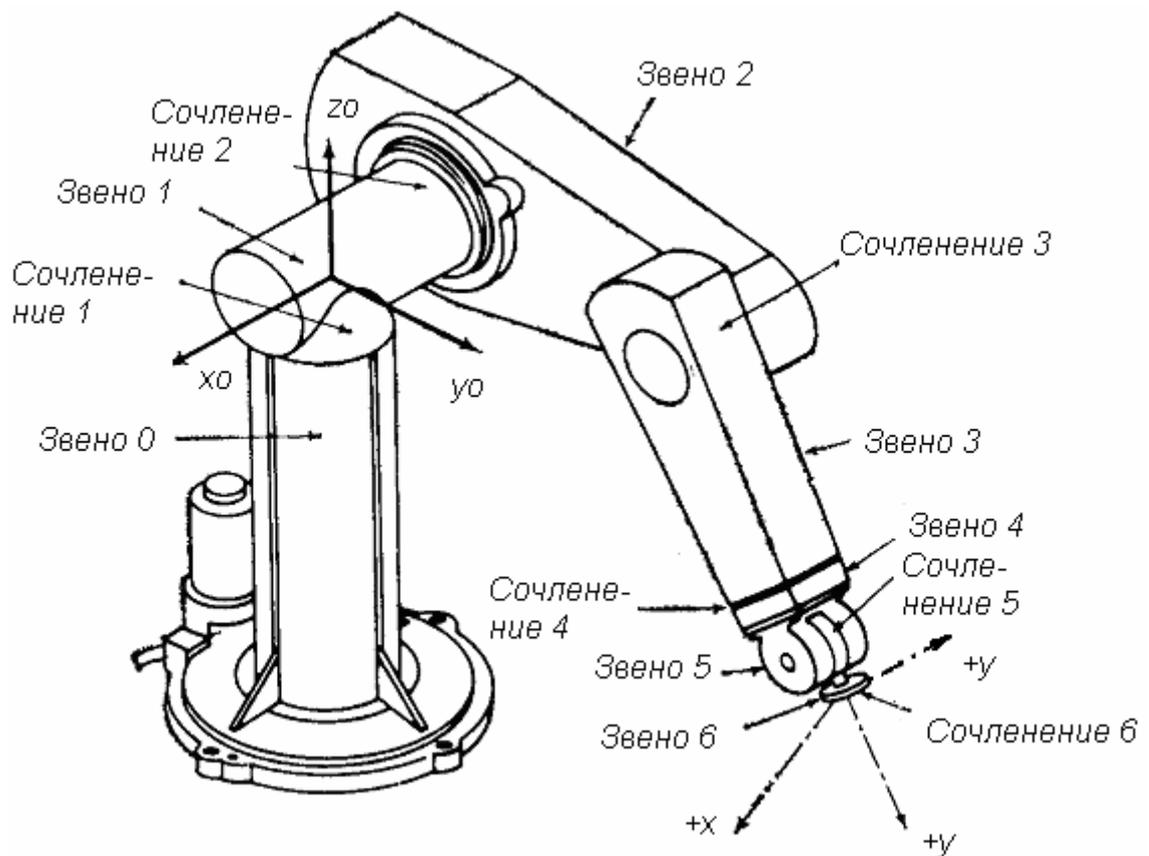


Рис. 9-Звенья и сочленения манипулятора Пума.

Итак, с каждым звеном манипулятора связаны четыре параметра: α_i , a_i , d_i , θ_i . Если для этих параметров установить правило выбора знаков, то они составят набор, достаточный для описания кинематической схемы каждого звена манипулятора. Заметим, что эти параметры можно разделить на две пары: параметры звена (a_i , α_i), которые характеризуют конструкцию звена, и параметры сочленения (d_i , θ_i), характеризующие относительное положение соседних звеньев.

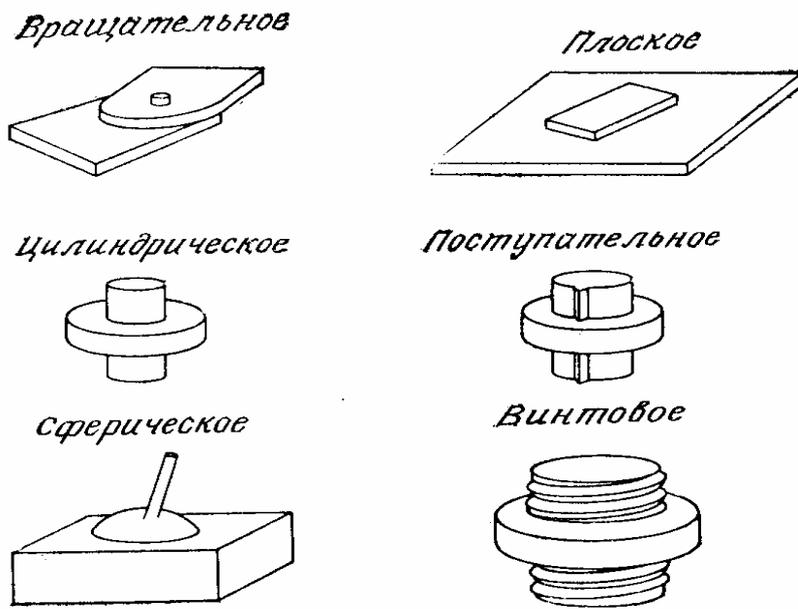


Рис. 10-Элементарные сочленения

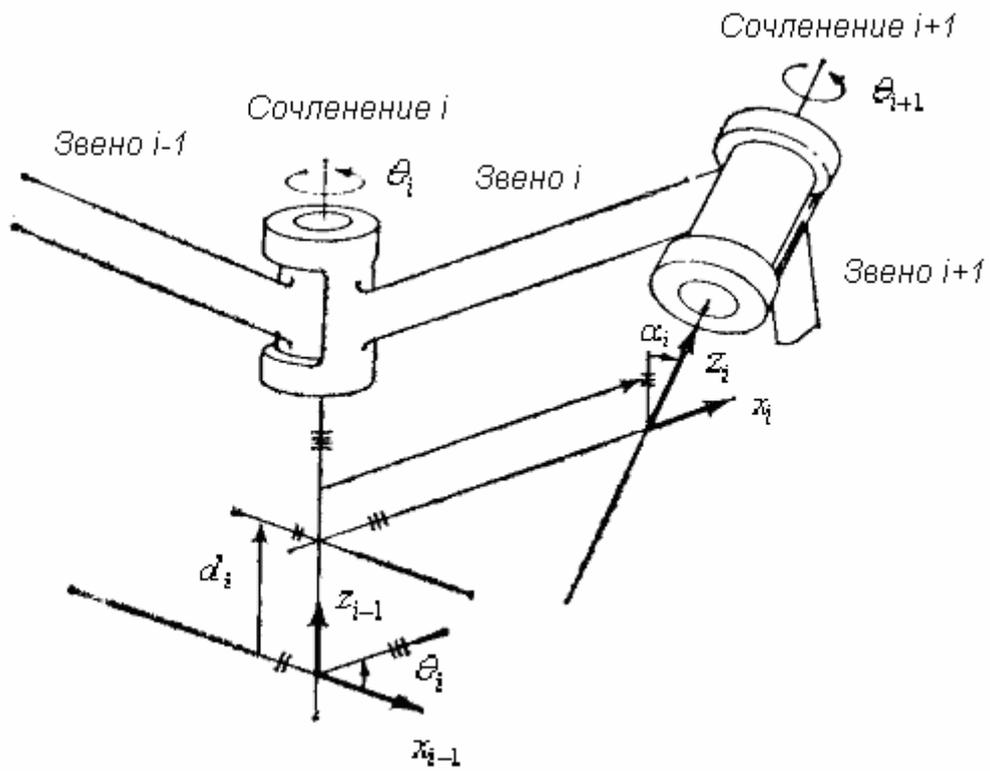


Рис. 11-Система координат и ее параметры

3.9 Представление Денавита — Хартенберга

Для описания вращательных и поступательных связей между соседними звеньями Денавит и Хартенберг предложили матричный метод последовательного построения систем координат, связанных с каждым звеном кинематической цепи. Смысл представления Денавита — Хартенберга (ДХ-представление) состоит в формировании однородной матрицы преобразования, имеющей размерность 4×4 и описывающей положение системы координат каждого звена относительно системы координат предыдущего звена. Это дает возможность последовательно преобразовать координаты схвата манипулятора из системы отсчета, связанной с последним звеном, в базовую систему отсчета, являющуюся инерциальной системой координат для рассматриваемой динамической системы.

Кроме базовой системы координат для каждого звена на оси его сочленения определяется ортонормированная декартова система координат (x_i, y_i, z_i) , где $i = 1, 2, 3 \dots n$, а n равно числу степеней свободы манипулятора. Поскольку вращательное сочленение имеет только одну степень свободы, каждая система координат (x_i, y_i, z_i) манипулятора соответствует $(i+1)$ -у сочленению и связана с i -м звеном. Когда силовой привод возбуждает движение в i -м сочленении, i -е звено начинает двигаться относительно $(i-1)$ -го звена. Поскольку i -я система координат связана с i -м звеном, она движется вместе с ним. Таким образом, n -я система координат движется вместе с последним n -м звеном манипулятора.

Базовой является нулевая система координат (x_0, y_0, z_0) , представляющая собой инерциальную систему координат манипулятора. Так, для шестизвенного манипулятора Пума должны быть определены семь систем координат, а именно (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) , ..., (x_6, y_6, z_6) .

Каждая система координат формируется на основе следующих трех правил:

1. Ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -го сочленения.
2. Ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и направлена от нее.
3. Ось y_i дополняет оси x_i , z_i до правой декартовой системы координат.

Эти правила оставляют свободу в выборе 0-й системы координат при условии, что ось z_0 направлена вдоль оси первого сочленения. Последняя,

n -я система координат также может быть выбрана в произвольной точке n -го звена при условии, что ось x_n перпендикулярна оси z_{n-1} .

ДХ-представление твердых звеньев зависит от четырех геометрических параметров, соответствующих каждому звену. Эти четыре параметра полностью описывают любое вращательное или поступательное движение и определяются в соответствии с Рис. 12 следующим образом:

θ_i — присоединенный угол — угол, на который надо повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} чтобы она стала сонаправлена с осью x_i : (знак определяется в соответствии с правилом правой руки);

d_i — расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i ; и началом $(i-1)$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси

a_i — линейное смещение — расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i ; и началом i -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси x_i , т. е. кратчайшее расстояние между осями z_{i-1} и z_i ;

α_i — угловое смещение — угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправленной с осью z_i : (знак определяется в соответствии с правилом правой руки).

Для вращательных сочленений параметры d_i , a_i и α_i , являются характеристиками сочленения, постоянными для данного типа робота. В то же время θ_i является переменной величиной, изменяющейся при движении (вращении) i -го звена относительно $(i-1)$ -го. Для поступательных сочленений θ_i , a_i и α_i — характеристики сочленения, неизменные для данного робота, а d_i — переменная величина. Ниже в этой книге о величинах θ_{ij} (или d_{ij}) будем говорить как о присоединенных переменных, подразумевая тем самым, что они могут менять свои значения. Величины d_i , a_i , α_i , если i -е сочленение вращательное, и θ_i , a_i , α_i , если оно поступательное, будем называть присоединенными параметрами, подчеркивая их постоянство.

Ниже в алгоритме 2.1 дано описание процедуры формирования

последовательности согласованных систем координат, связанных со звеньями манипулятора. Алгоритм базируется на изложенных выше трех основных правилах построения ортонормированных систем координат звеньев и учитывает геометрический смысл параметров сочленений и звеньев. Примеры применения этого алгоритма для шестизвенного манипулятора Пума и для манипулятора, разработанного в Станфордском университете, приведены на Рис. 12 и Рис. 13 соответственно.

Алгоритм 2.1. Формирование систем координат звеньев. Для каждого звена манипулятора с n степенями свободы этот алгоритм формирует ортонормированную систему координат. Выбор систем координат производится с учетом конфигурации манипулятора, сходной с конфигурацией человеческой руки. Системы координат нумеруются в порядке возрастания от основания к схвату манипулятора. Взаимное расположение соседних звеньев описывается однородной матрицей преобразования размерностью 4×4 . Смысл такого построения систем заключается в том, что оно позволяет, как будет показано в следующих главах, выработать последовательную процедуру решения обратной задачи кинематики. Заметим, что предлагаемый способ выбора систем координат не является единственным.

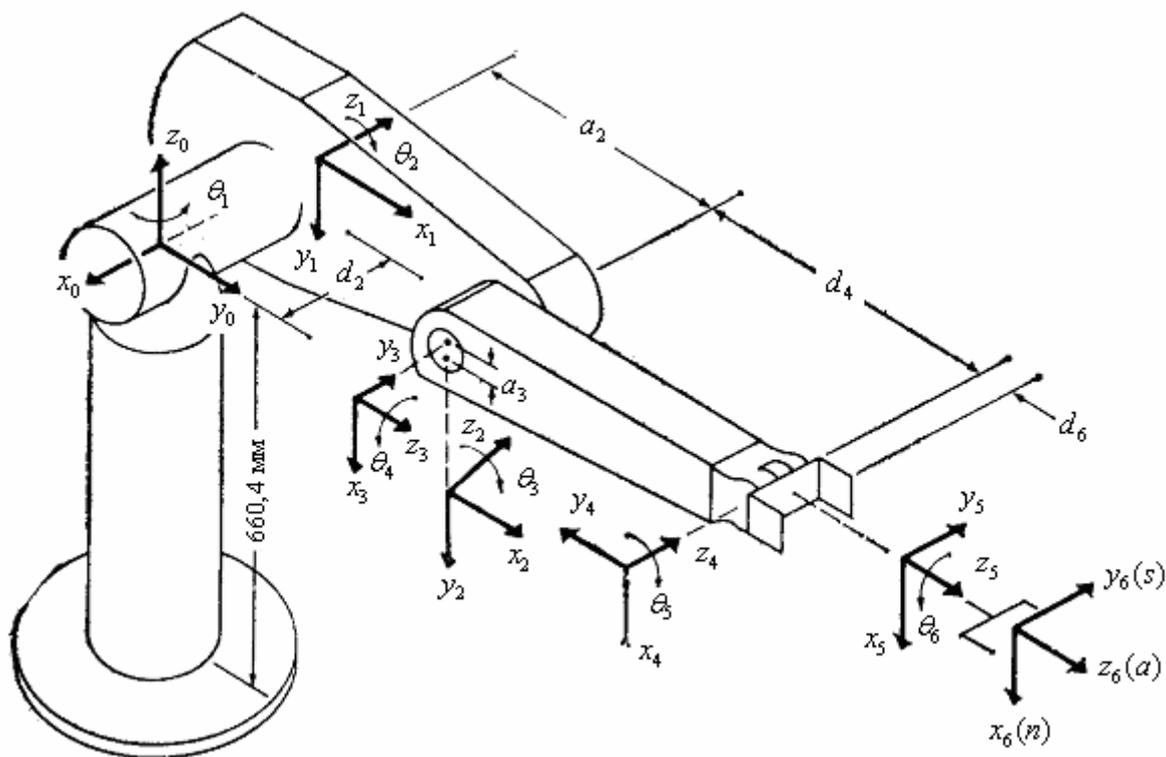


Рис. 12-Формирование систем координат звеньев для манипулятора Пума.

Таблица 3

Параметры систем координат звеньев манипулятора Пума					
Сочленение i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Пределы измерения
1	90	-90	0	0	-160 – +160
2	0	0	431,8 мм	149,09 мм	-225 – 45
3	90	90	-20,32 мм	0	-45 – 225
4	0	-90	0	437,07 мм	-110 – 170
5	0	90	0	0	-100 – 100
6	0	0	0	56,25 мм	-266 – 266

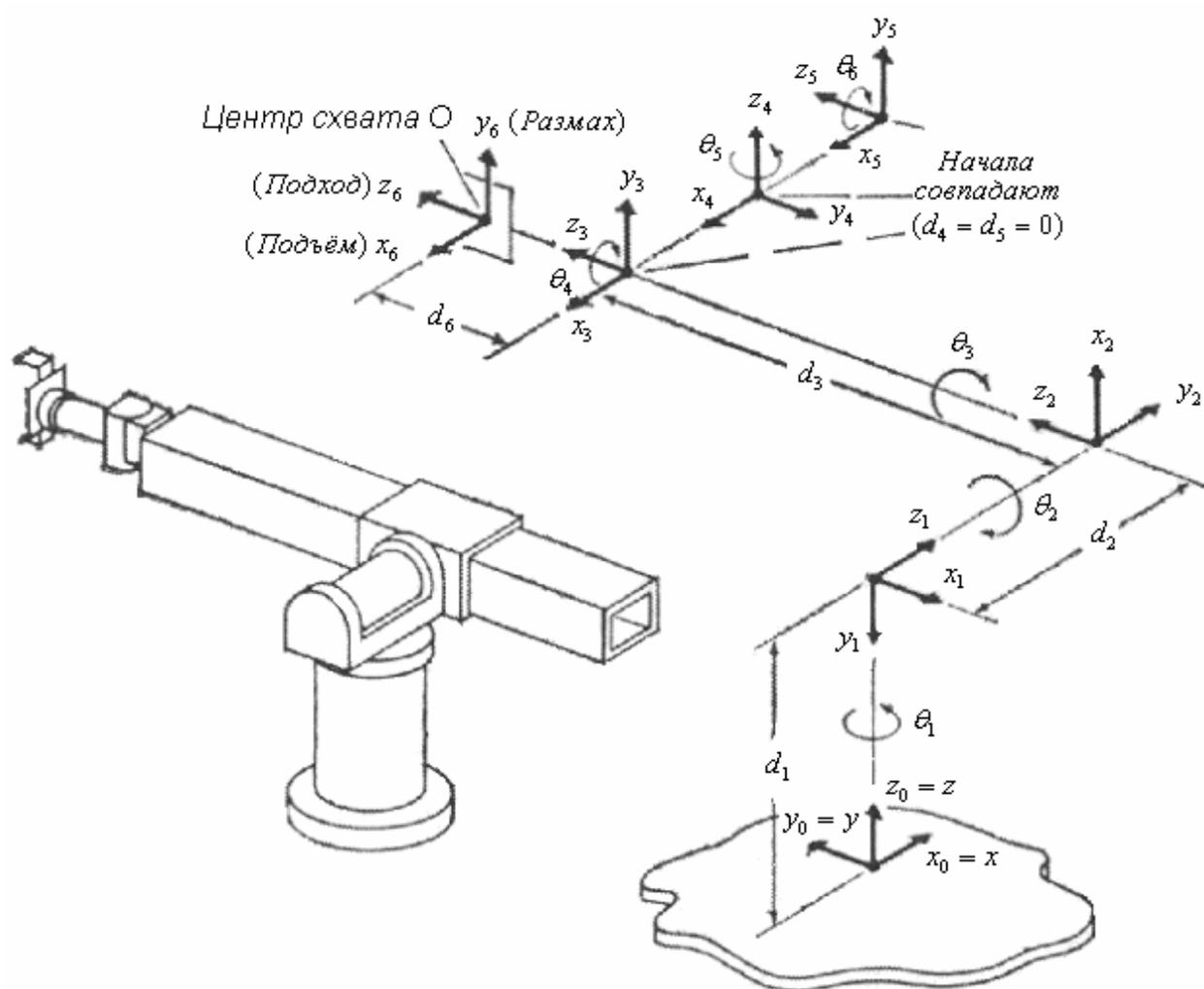


Рис. 13-Формирование систем координат звеньев для станфордского манипулятора.

Таблица 4

Параметры систем координат звеньев станфордского манипулятора				
Сочленение i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	$\theta_1 = -90$	-90	0	d_1
2	$\theta_2 = -90$	90	0	d_2
3	$\theta_3 = -90$	0	0	d_3
4	$\theta_4 = 0$	-90	0	0
5	$\theta_5 = 0$	90	0	0
6	$\theta_6 = 0$	0	0	d_6

Д1. Формирование базовой системы координат. Сформировать правую ортонормированную систему координат (x_0, y_0, z_0) , связанную с основанием, направив ось z_0 вдоль оси 1-го сочленения к «плечу» манипулятора. Оси x_0 и y_0 можно выбрать произвольно при условии их перпендикулярности оси z_0 .

Д2. Начало и цикл. Для всех $i (i = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$ выполнить шаги ДЗ—Д6.

Д3. Формирование осей сочленений. Направить ось z_i , вдоль оси движения (вращательного или поступательного) $(i + 1)$ -го сочленения. Для роботов с манипуляторами, имеющими конфигурацию левой-правой руки, оси z_1 и z_2 направлены от плеча и общего направления манипулятора.

Д4. Формирование начала i -й системы координат. Расположить начало i -й системы координат на пересечении осей z_i - и z_{i-1} или на пересечении общей нормали к осям z_i , и z_{i-1} с осью z_i .

Д5. Формирование оси x_i . Выбрать единичный вектор x_i - следующим образом: $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$ или вдоль общего перпендикуляра к осям z_{i-1} и z_i , если они параллельны.

Д6. Формирование оси y_i . Положить $x_i = +(z_i \times x_i) / \|z_i \times x_i\|$, получив тем самым правостороннюю систему координат. (Продолжить оси z_i и x_i , если это необходимо для шагов Д9-Д12.)

Д7. Формирование системы координат схвата. Как правило, n -е сочленение является вращательным. Сформировать ось z_n , направив ее вдоль оси z_{n-1} и от робота. Выбрать ось x_n так, чтобы она была перпендикулярна осям z_{n-1} и z_n . Ось y_n дополняет систему до правой тройки.

Д8. Определение параметров звеньев и сочленений. Для каждого $i (i = 1, \dots, n)$ выполнить шаги Д9 — Д12.

Д9. Определение d_i . d_i представляет собой расстояние от начала $(i-1)$ -й системы координат до пересечения оси z_{i-1} с осью x_i , отсчитываемое вдоль оси z_{i-1} . Если i -е сочленение — поступательное, то d_i — присоединенная переменная.

Д10. Определение a_i . a_i — расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом i -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси x_i .

Д11. Определение θ_i . θ_i — угол, на который нужно повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью x_i . Если i -е сочленение — вращательное, то θ_i — присоединенная переменная.

Д12. Определение α_i . α_i — угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправлена с осью z_i .

Как только ДХ-системы координат сформированы для всех звеньев, не составляет труда построить однородные матрицы преобразования, связывающие i -ю и $(i-1)$ -ю системы координат. Из Рис. 11 видно, что координаты точки r_i заданные в i -й системе координат, можно преобразовать в координаты r_{i-1} этой же точки относительно $(i-1)$ -й системы координат, выполняя последовательность следующих операций:

1. Поворот вокруг оси z_{i-1} на угол θ_i , чтобы ось x_{i-1} стала сонаправлена с осью x_i .
2. Сдвиг вдоль оси z_{i-1} на расстояние d_i , чтобы совместить оси x_{i-1} и x_i .
3. Сдвиг вдоль оси x_i , на расстояние a_i , чтобы совместить начала координат.
4. Поворот вокруг оси x_i на угол α_i , в результате которого достигается совпадение систем координат.

Каждую из этих четырех операций можно описать однородной матрицей элементарного поворота-сдвига, а произведение таких матриц даст однородную матрицу сложного преобразования ${}^{i-1}A_i$ называемую ДХ-матрицей преобразования для смежных систем координат с номерами. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}A_i &= T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)
\end{aligned}$$

Используя равенство (23), найдем, что матрица, обратная к ${}^{i-1}A_i$, имеет вид

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \theta_i \\ -\sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

где α_i, a_i, d_i — константы, а θ_i — присоединенная переменная, если рассматриваемое сочленение — вращательное.

Для поступательного сочленения присоединенной переменной является d_i, α_i, a_i и θ_i — константы. В этом случае ${}^{i-1}A_i$ принимает вид

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} T_{z,\theta} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

а матрица, обратная к ${}^{i-1}A_i$ равна

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \theta_i \\ -\sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Используя матрицу ${}^{i-1}A_i$, можно связать однородные координаты P_i точки P относительно i -й системы координат (точка P покоится в i -й системе координат) с однородными координатами этой точки относительно $(i-1)$ -й системы отсчета, связанной с $(i-1)$ -м звеном. Эта связь устанавливается равенством

$$p_{i-1} = {}^{i-1}A_i p_i \quad (29)$$

где $p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$ и $p_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$.

Для шестизвенного манипулятора Пума были определены шесть матриц ${}^{i-1}A_i$, соответствующие показанным на Рис. 12 системам координат. Эти матрицы представлены ниже.

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = {}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.10 Уравнения кинематики манипулятора

Однородная матрица 0T_i определяющая положение i -й системы координат относительно базовой системы координат, представляет собой произведение последовательности однородных матриц преобразования ${}^{i-1}A_i$,

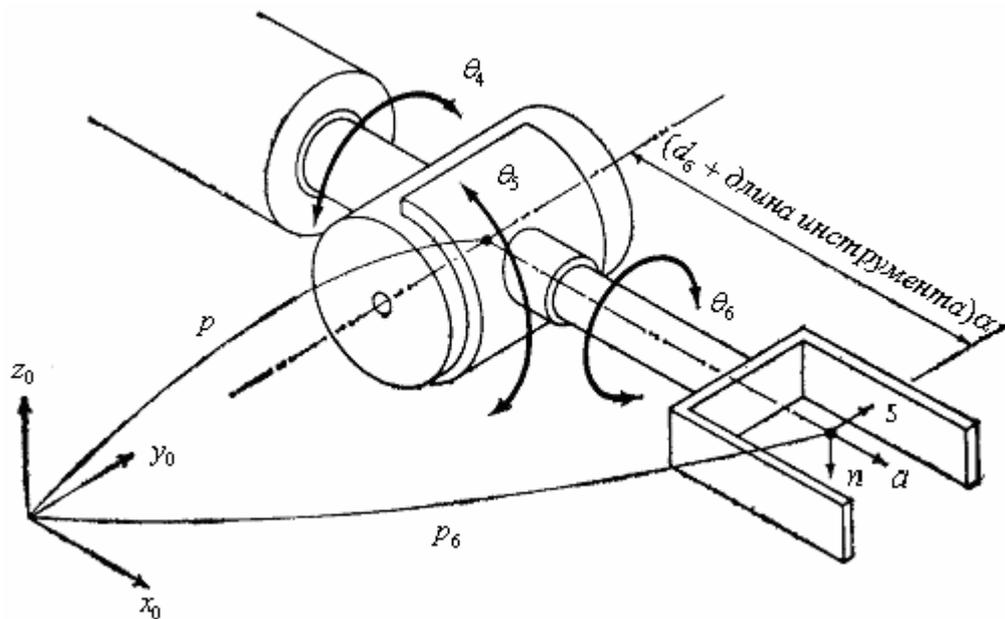


Рис. 14-Система координат схвата.

и имеет вид:

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

для $i = 1, 2, 3, \dots, n$

где (x_i, y_i, z_i) — матрица, определяющая ориентацию i -й системы координат, связанной с i -м звеном, по отношению к базовой системе координат. Это верхняя левая подматрица матрицы 0T_i , имеющая размерность 3×3 . P_i — вектор, соединяющий начало базовой системы координат с началом i -й системы координат. Это верхняя правая подматрица матрицы 0T_i , имеющая размерность 3×1 . В частности, при $i = 6$ мы получаем матрицу $T = {}^0A_6$, которая задает положение и ориентацию схвата манипулятора относительно базовой системы координат. Эта матрица так часто используется при описании кинематики манипулятора, что ее называют «матрицей манипулятора». Предположим, что матрица T имеет следующий вид:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0P_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

где (Рис. 14)

n — вектор нормали к схвату. В случае плоскопараллельного движения пальцев схвата этот вектор перпендикулярен пальцам манипулятора.

s — касательный вектор схвата. Он лежит в плоскости движения пальцев схвата и указывает направление движения пальцев во время открытия и закрытия схвата.

a — вектор подхода схвата. Он направлен по нормали к ладони схвата (т. е. перпендикулярен плоскости крепления инструмента в схвате).

p — вектор положения схвата. Этот вектор направлен из начала базовой системы координат к началу системы координат схвата, которое, как правило, расположено в точке, являющейся геометрическим центром полностью сжатых пальцев.

Если положение манипулятора в абсолютном пространстве определяется матрицей B , а в схвате манипулятора зафиксирован инструмент, положение которого в системе координат схвата определяется матрицей H , то положение рабочего узла инструмента относительно абсолютной системы

координат дается произведением матриц B , 0T_6 и H , т. е.

$${}^{ááñ}T_{éíñòð} = B {}^0T_6 H \quad (32)$$

Отметим, что $H \equiv {}^6A_{éíñòð}$, $\dot{E} \equiv {}^{ááñ}A_0$.

Решение прямой задачи кинематики для шестизвенного манипулятора является, таким образом, вопросом вычисления $T = {}^0A_6$ с помощью последовательного перемножения шести матриц ${}^{i-1}A_i$. Отметим, что решение прямой задачи кинематики приводит к единственной матрице T при заданных $q = (q_1 \dots q_6)^T$ и фиксированных системах координат, где $q_i = \theta_i$ для вращательного сочленения и $q_i = d_i$ для поступательного сочленения. Ограничения определяются только физическими пределами изменения θ_i для каждого сочленения манипулятора. В таблице на Рис. 12 указаны такие пределы для робота Пума серии 560 при выборе систем координат, указанном на Рис. 12.

$$T = T_1 T_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} n_x &= C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_y &= S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_z &= -S_{23} [C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6] - C_{23} S_5 S_6 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} s_x &= C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 C_6 + S_4 S_6) + S_{23} S_5 C_6] - S_1 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ s_y &= S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 C_6 + S_4 S_6) + S_{23} S_5 C_6] + C_1 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ s_z &= S_{23} [C_4 C_5 C_6 + S_4 S_6] + C_{23} S_5 S_6 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
a_x &= C_1[C_{23}C_4C_5 + S_{23}C_5] - S_1S_4S_5 \\
a_y &= S_1(C_{23}C_4C_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5
\end{aligned} \tag{36}$$

$$a_z = -S_{23}C_4C_5 + C_{23}C_5$$

$$\begin{aligned}
p_x &= C_1[d_6(C_{23}C_4C_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] - S_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\
p_y &= S_1[d_6(C_{23}C_4C_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] + C_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\
p_z &= d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}d_4 - a_3S_{23} - a_2S_2
\end{aligned} \tag{37}$$

Положив для проверки $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 =$

3.11 Другие способы определения положения схвата

В предыдущих разделах мы рассмотрели поступательное и вращательное движения звеньев манипулятора и ввели понятие однородных матриц преобразования, описывающих положение и ориентацию систем координат звеньев. Наибольший интерес представляет матрица

манипулятора 0T_6 , которая описывает положение и ориентацию схвата относительно базовой системы координат. Верхняя левая подматрица матрицы 0T_6 , имеющая размерность 3×3 , задает ориентацию схвата. Эта подматрица поворота совпадает с матрицей 0R_6 . Существуют и другие способы описания положения схвата.

Описание ориентации с помощью углов Эйлера. Описание вращения твердого тела с помощью матриц поворота упрощает многие операции, однако не дает полной системы обобщенных координат. Такой полной системой обобщенных координат являются углы Эйлера φ , θ , ψ .

С помощью матрицы поворота, записанной как в равенстве (15) через углы Эйлера, матрицу манипулятора 0T_6 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
{}^0T_6 &= \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta & p_x \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & p_y \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{38}
\end{aligned}$$

Преимущество описания ориентации с использованием углов Эйлера

состоит в том, что вся информация о положении и ориентации объекта в пространстве содержится в шестимерном векторе $XYZ \varphi \theta \psi$. Зная этот вектор и используя равенство (38), легко сформировать матрицу 0T_6 .

Описание ориентации с помощью углов крена, тангажа и рысканья. Еще одной системой углов Эйлера для описания вращения являются углы крена, тангажа и рысканья (КТР). С использованием равенства (17), описывающего вращение тела в координатах КТР, получаем матрицу манипулятора 0T_6 в виде

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & p_x \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\psi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & p_y \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Существуют различные типы манипуляторов (в зависимости от используемых типов сочленений, например XYZ — манипулятор, цилиндрический, сферический, манипулятор смешанного типа). В связи с этим положение $(p_x, p_y, p_z)^T$ схвата манипулятора может быть описано, например, в сферических или цилиндрических координатах. Результирующую матрицу манипулятора можно получить из следующего равенства:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

где 0R_6 — матрица поворота, выраженная через углы Эйлера или через векторы $[n, s, a]$.

4 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

В этом разделе рассматривается обратная задача кинематики шестизвенного манипулятора. Команды управления манипуляторами роботов, оснащенных ЭВМ, формируются обычно в пространстве присоединенных переменных, координаты объектов манипулирования задаются в некоторой абсолютной системе координат. Для управления положением и ориентацией схвата робота таким образом, чтобы производить необходимые операции с объектом манипулирования, необходимо уметь решать обратную задачу кинематики. Другими словами, надо уметь по заданной матрице 0T_6 положения и ориентации схвата шестизвенного манипулятора и известным параметрам его звеньев и сочленений определить присоединенные параметры $q = (q_1, \dots, q_6)^T$ манипулятора, обеспечивающие заданное положение схвата.

Существуют различные методы решения обратной задачи кинематики, к числу которых относятся методы обратных преобразований, винтовой алгебры, двойственных матриц, двойственных кватернионов, итераций и геометрический подход. Пайпер получил решение обратной задачи кинематики для произвольного манипулятора с шестью степенями свободы, первые три сочленения которого вращательные или поступательные, а оси последних трех пересекаются в одной точке. Решение получено в форме уравнения 4-й степени относительно одной из неизвестных и в явном виде относительно остальных. Пол и др. для того же класса манипуляторов, что и Пайпер, предложили воспользоваться методом обратных преобразований с применением однородных матриц размерностью 4×4 . Недостатком этого подхода является то, что из него не следует, каким образом выбрать из нескольких существующих решений одно, соответствующее данной конфигурации манипулятора. В этом вопросе исследователю приходится полагаться на собственную интуицию. Ниже рассмотрен предложенный Пайпером подход к решению обратной задачи кинематики в эйлеровых координатах. Уикер и др. и Ми-ленковиц и Хуанг предложили итеративную процедуру решения обратной задачи кинематики большинства промышленных роботов. Такой подход требует больших вычислительных затрат и не гарантирует сходимости результатов, особенно для вырожденного случая. Кроме того, как и метод обратных преобразований, метод итераций не дает способа выбора из нескольких существующих решений одного, соответствующего данной конфигурации манипулятора.

Желательно, чтобы решение обратной задачи кинематики было получено в явном виде. К счастью, большинство промышленных роботов удовлетворяет одному из следующих двух условий, достаточных для достижения такой цели:

1. Оси трех смежных сочленений пересекаются в одной точке.
2. Оси трех смежных сочленений параллельны между собой.

Станфордский манипулятор и манипулятор Пума удовлетворяют первому условию, а манипуляторы ASEA и MINI MOVER — второму.

Из равенства (33) следует вид матрицы манипулятора T:

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Из равенства (41) видно, что матрица T является функцией синусов и косинусов углов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$. Приравнивая элементы матриц в левой и правой частях матричного уравнения (41), получаем, например, для манипулятора Пума двенадцать уравнений (34) — (37) относительно шести неизвестных (присоединенных углов). Поскольку число уравнений превышает число переменных, можно сразу сделать вывод о том, что решение обратной задачи кинематики для манипулятора Пума не единственно. Мы рассмотрим два метода решения обратной задачи кинематики: метод обратных преобразований в эйлеровых координатах, которым можно также воспользоваться для решения этой задачи в координатах присоединенных углов, и геометрический подход, выгодно отличающийся наглядностью.

4.1 Метод обратных преобразований

В этом разделе общий метод обратных преобразований продемонстрирован на примере решения обратной задачи кинематики в эйлеровых координатах. Задача состоит в том, чтобы, зная трехмерную матрицу поворота и учитывая равенство (15), представляющее собой выражение этой матрицы через углы Эйлера:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,\varphi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

определить соответствующие значения углов φ , θ , ψ . Записывая это матричное уравнение в форме уравнений для отдельных элементов, получим

$$n_x = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \quad (43)$$

$$n_y = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \quad (44)$$

$$n_z = \sin\varphi\sin\theta \quad (45)$$

$$s_x = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \quad (46)$$

$$s_y = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \quad (47)$$

$$s_z = \cos\varphi\sin\theta \quad (48)$$

$$a_x = \sin\varphi\sin\theta \quad (49)$$

$$a_y = -\cos\varphi\sin\theta \quad (50)$$

$$a_z = \cos\theta \quad (51)$$

Из уравнений (51), (48) и (50) получаем, что решение всей системы уравнений (43) — (51) имеет следующий вид:

$$\theta = \arccos(a_z) \quad (52)$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{s_z}{\sin\theta}\right] \quad (53)$$

$$\psi = \arccos\left[\frac{-a_y}{\sin \theta}\right] \quad (54)$$

Полученное решение неустойчиво и плохо обусловлено по следующим причинам:

1. Функция \arccos неудобна тем, что точность вычисления ее значения зависит от этого значения.
2. В точках, где $\sin \theta$ принимает близкие к нулю значения, т. е. при $\theta \approx 0^\circ$ или $\theta \approx 180^\circ$, равенства (53) и (54) либо не определены, либо дают низкую точность вычислений.

Следовательно, требуется найти более устойчивый способ определения углов Эйлера в данной задаче, а также более устойчивую обратную тригонометрическую функцию для вычисления этих углов. Для вычисления угла θ , значения которого лежат в пределах $-\pi \leq \theta \leq \pi$, воспользуемся функцией арктангенса $ATAN2(y/x)$, вычисляющей значение $\arctg(y/x)$ с учетом принадлежности аргумента соответствующему квадранту. Эта функция определена следующим образом:

$$\theta = \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{àñèè } x > 0, y > 0 \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{àñèè } x < 0, y > 0 \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{àñèè } x < 0, y < 0 \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{àñèè } x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (55)$$

Применяя такую обратную тригонометрическую функцию двух аргументов, рассмотрим общее решение, предложенное Полом и др.

Элементы матрицы в левой части матричного уравнения (42) заданы, а элементы матриц, стоящих в правой части этого уравнения, неизвестны и зависят от φ , θ , ψ . Одним методом предлагается последовательно умножать слева обе части уравнения (42) на матрицы обратных преобразований и определять искомые углы из полученных таким образом матричных уравнений. Смысл таких преобразований состоит в том, что мы переносим сначала одну из неизвестных величин из правой в левую часть уравнения, находим ее, затем переносим в левую часть, следующую неизвестную, найдя ее, повторяем эту процедуру до тех пор, пока не будут найдены все неизвестные.

Умножая слева матричное уравнение (42) на $R^{-1}_{z,\varphi}$, переносим неизвестную φ в левую часть, оставляя в правой неизвестные θ и ψ , и тем

самым получаем:

$$\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} C\varphi n_x + S\varphi n_y & C\varphi s_x + S\varphi s_y & C\varphi a_x + S\varphi a_y \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y & -S\varphi s_x + C\varphi s_y & -S\varphi a_x + C\varphi a_y \\ n_x & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (56)$$

Из равенства элементов (1,3) (элементов, находящихся на пересечении 1-й строки и 3-го столбца матрицы) в правой и левой частях уравнения (56) имеем

$$C\varphi a_x + S\varphi a_y = 0 \quad (57)$$

что в свою очередь дает

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{a_x}{-a_y}\right] = \operatorname{ATAN2}(a_x, -a_y) \quad (58)$$

Из равенства элементов (1, 1), (1, 2) в правой и левой частях следует

$$C\psi = C\varphi n_x + S\varphi n_y \quad (59)$$

$$S\psi = -C\varphi s_x - S\varphi s_y \quad (60)$$

что позволяет найти ψ

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{C\varphi n_x + S\varphi n_y}{-C\varphi s_x - S\varphi s_y}\right] = \operatorname{ATAN2}(-C\varphi s_x - S\varphi s_y, C\varphi n_x + S\varphi n_y) \quad (61)$$

Приравнивая элементы (2,3), (3,3) матриц в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\begin{aligned} S\theta &= S\varphi a_x - C\varphi a_y \\ C\theta &= a_z \end{aligned} \quad (62)$$

что позволяет найти θ

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{S\theta}{C\theta}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{S\varphi a_x - C\varphi a_y}{a_z}\right] = \operatorname{ATAN2}(S\varphi a_x - C\varphi a_y, a_z) \quad (63)$$

Поскольку смысл метода обратных преобразований состоит в переносе одной из неизвестных величин в левую часть матричного уравнения с последующим разрешением уравнения относительно этой неизвестной, можно попытаться решить это же самое матричное уравнение, умножая обе его части справа на матрицу обратного преобразования $R^{-1}_{\omega, \varphi}$:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & S\psi & 0 \\ -S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

В результате умножения матриц получим

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C\psi n_x - S\psi s_x & S\psi n_x + C\psi s_x & a_x \\ C\psi n_y - S\psi s_y & S\psi n_y + C\psi s_y & a_y \\ C\psi n_z + S\psi s_z & S\psi n_z + C\psi s_z & a_z \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\psi C\varphi & S\varphi S\theta \\ S\varphi & C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

Как и выше, приравнивая элементы (3,1) матриц в левой и правой частях уравнения, имеем

$$C\psi n_z - S\psi s_z = 0 \quad (65)$$

что дает

$$\psi = \operatorname{arctg} \left[\frac{n_z}{s_z} \right] = \operatorname{ATAN2}(n_z, s_z) \quad (66)$$

Из равенства элементов (3, 2), (3, 3) обеих матриц следует

$$S\theta = S\psi n_z + C\psi s_z \quad (67)$$

$$C\theta = a_z \quad (68)$$

что позволяет определить θ :

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{S\psi n_z + C\psi s_z}{a_z} \right] = \operatorname{ATAN2}(S\psi n_z + C\psi s_z, a_z) \quad (69)$$

Из равенства элементов (1,1), (2,1) матриц в левой и правой частях уравнения (64) имеем

$$C\varphi = C\psi n_x - S\psi s_x \quad (70)$$

$$S\varphi = C\psi n_y - S\psi s_y \quad (71)$$

откуда легко найти

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{C\psi n_y - S\psi s_y}{C\psi n_x - S\psi s_x} \right] = \operatorname{ATAN2}(C\psi n_y - S\psi s_y, C\psi n_x - S\psi s_x) \quad (72)$$

Решение вопроса о том, слева или справа умножать обе части матричного уравнения на матрицу обратного преобразования, зависит от исследователя и во многом определяется его интуицией.

Воспользуемся изложенным методом обратных преобразований для определения углов Эйлера манипулятора Пума. В применении к манипуляторам типа Пума углы Эйлера обозначаются символами O , A и T и определяются следующим образом (Рис. 15):

O (ориентация)— угол, образуемый осью Y_0 с проекцией оси инструмента на плоскость XY и отсчитываемый вокруг оси Z_0 .

A (высота) — угол, образуемый плоскостью XY с осью инструмента a , отсчитываемый вокруг оси инструмента S .

T (инструмент)— угол, образуемый плоскостью XU с осью инструмента S , отсчитываемый вокруг оси инструмента a .

Вначале оси системы координат инструмента (или системы координат схвата) параллельны осям базовой системы координат робота, как показано на Рис. 16, т. е., когда $O = A = T = 0^\circ$, схват направлен в сторону, противоположную направлению оси

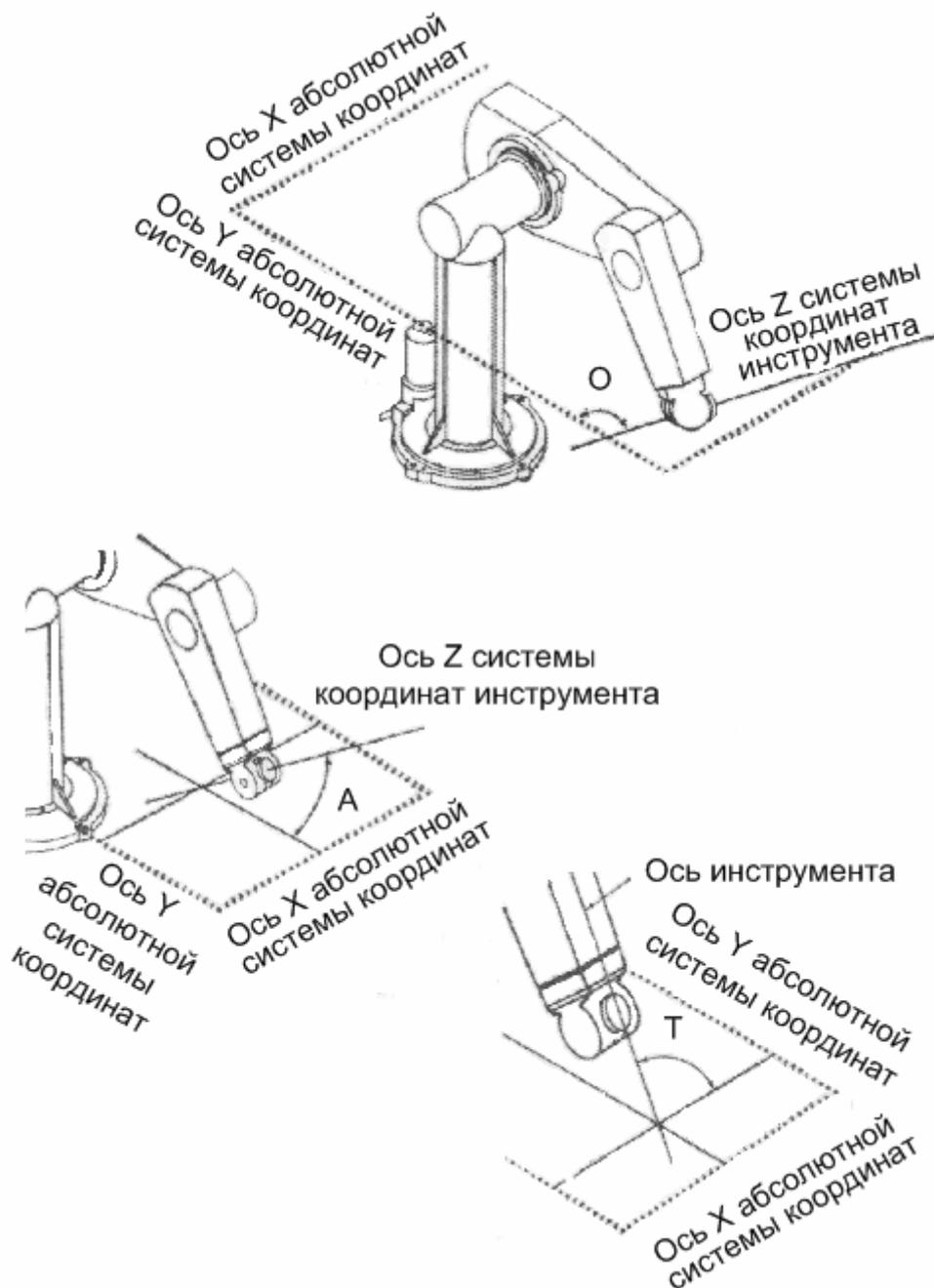


Рис. 15-Определение углов Эйлера O , A и T (из руководства 398Н к

манипулятору Пума).

y_0 , пальцы расположены в горизонтальной плоскости, а ось s сонаправлена с осью x_0 . Матрица преобразования, задающая ориентацию системы координат схвата (n, s, a) по отношению к базовой системе координат (x_0, y_0, z_0) , имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

С учетом определения углов OAT и вида матрицы (73), задающей начальную ориентацию системы координат схвата, связь между матрицей ориентации схвата и углами OAT определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} &= R_{z,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_{S,A} R_{a,T} = \\ &= \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & -ST & 0 \\ ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

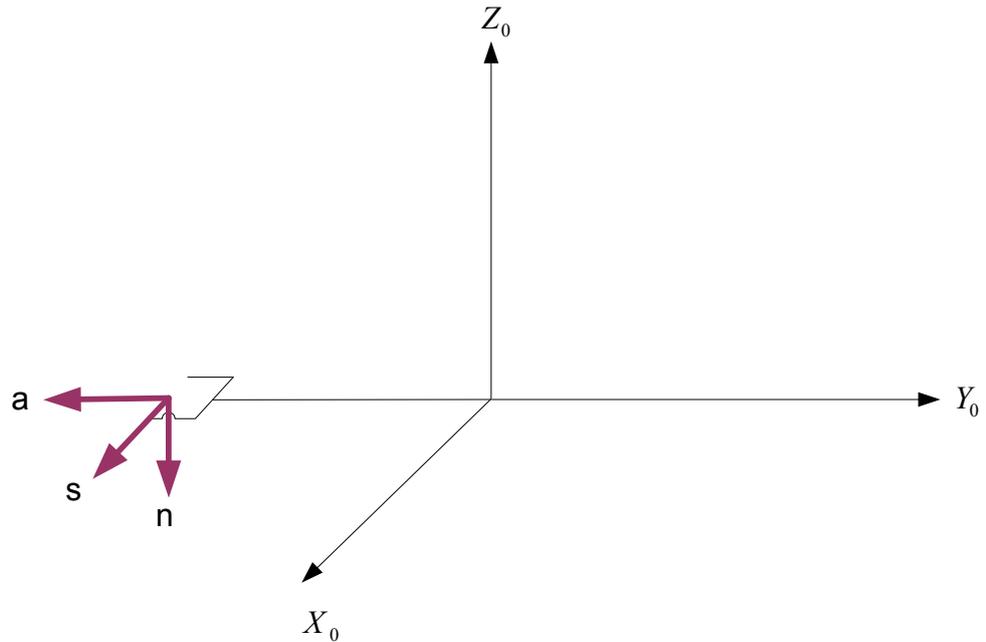


Рис. 16-Начальное расположение системы координат инструмента.

Умножая, справа это матричное уравнение на матрицу, обратную $R_{a,T}$.

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & ST & 0 \\ -ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix}$$

и производя умножение матриц, получаем

$$\begin{bmatrix} n_x CT - s_x ST & n_x ST + s_x CT & a_x \\ n_y CT - s_y ST & n_y ST + s_y CT & a_y \\ n_z CT - s_z ST & n_z ST + s_z CT & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SOSA & CO & SOCA \\ COSA & SO & -COCA \\ -CA & 0 & -SA \end{bmatrix} \quad (74)$$

Приравнивая элементы (3, 2) в обеих частях матричного уравнения (74), получим

$$n_z ST + s_z CT = 0 \quad (75)$$

что позволяет определить T :

$$T = \arctg \left[\frac{s_z}{-n_z} \right] = ATAN2(s_z, -n_z) \quad (76)$$

Из равенства элементов (3, 1), (3, 3) в левой и правой частях уравнения (74) следует

$$SA = -a_z \quad (77)$$

$$CA = -CTn_z + STs_z \quad (78)$$

В результате получаем

$$A = \arctg \left[\frac{-a_z}{-CTn_z + STs_z} \right] = ATAN2(-a_z, -CTn_z + STs_z) \quad (79)$$

Из равенства элементов (1, 2), (2,2) матриц в левой и правой частях уравнения (74) имеем

$$CO = STn_x + CTs_x \quad (80)$$

$$SO = STn_y + CTs_y \quad (81)$$

откуда получаем выражение для O :

$$O = \arctg \left[\frac{n_y ST + s_y CT}{n_x ST + s_x CT} \right] = ATAN2(n_y ST + s_y CT, n_x ST + s_x CT) \quad (82)$$

Рассмотренным способом, состоящим в умножении исходного уравнения слева или справа на неизвестную матрицу обратного преобразования, можно воспользоваться для решения обратной задачи кинематики манипулятора Пума.

Хотя метод обратных преобразований дает общий подход к решению обратной задачи кинематики, из него не следует, каким образом выбрать из нескольких существующих решений одно, соответствующее требуемой конфигурации манипулятора. В этом вопросе приходится полагаться на интуицию исследователя. Для нахождения решения обратной задачи кинематики по заданной матрице манипулятора более пригодным является геометрический подход, дающий также и способ выбора единственного решения для конкретной конфигурации манипулятора.

4.2 Геометрический подход

В этом разделе излагается геометрический подход к решению обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора с вращательными сочленениями. Решение проводится для манипулятора типа Пума. По аналогии с геометрией человеческой руки и в соответствии с расположением систем координат звеньев различные конфигурации манипулятора Пума (Рис. 12) определяются с помощью трех индикаторов конфигурации (РУКА, ЛОКОТЬ, ЗАПЯСТЬЕ). Для индикатора характеризуют взаимное расположение первых трех сочленений, а третий — расположение последних трех. Для шестиосных манипуляторов типа Пума существуют четыре различных решения обратной задачи кинематики первых трех сочленений и каждому из этих четырех решений соответствует по два допустимых решения для последних трех сочленений. Первые два индикатора конфигурации позволяют выбрать одно из четырех возможных решений для первых трех сочленений. Аналогично, третий индикатор определяет выбор одного из двух возможных решений для последних трех сочленений. Выбор индикаторов, определяющих конфигурацию манипулятора, производится пользователем до начала решения обратной задачи кинематики. Решение производится в два этапа. Сначала вычисляется вектор, направленный от плеча к запястью. Проекция этого вектора на плоскость $x_{i-1}y_{i-1}$ используются при нахождении присоединенного угла i -го сочленения ($i = 1, 2, 3$) для первых трех сочленений. При решении обратной задачи кинематики для последних трех сочленений используется решение, полученное для первых трех сочленений, подматрицы поворота матриц 0T и ${}^{r-1}A_i$ ($i = 4, 5, 6$) и проекции систем координат звеньев на плоскость $x_{i-1}y_{i-1}$. Исходя из геометрических соображений, удастся последовательно сформировать решение данной задачи. В качестве проверки полученного решения можно с помощью соответствующих уравнений кинематики вычислить значения индикаторов конфигурации, являющихся функциями присоединенных углов. С некоторыми изменениями и уточнениями этот метод можно обобщить для решения обратной задачи кинематики большинства современных промышленных роботов с вращательными сочленениями.

Если задана матрица 0T_6 , то, умножив эту матрицу слева и справа на B^{-1} и H^{-1} соответственно, можно вычислить 0T_6 и затем воспользоваться указанным способом:

ЛЕВАЯ РУКА: При неподвижном 3-м сочленении увеличение угла θ_2 приводит к уменьшению координаты запястья по оси z_0 .

ВЕРХНЯЯ (локоть выше запястья) РУКА: Положение запястья {ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ} руки по отношению к системе координат плеча характеризуется {отрицательным/положительным} значением координаты по оси y_2 .

НИЖНЯЯ (локоть ниже запястья) РУКА: Положение запястья {ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ} руки по отношению к системе координат плеча характеризуется {положительным/отрицательным} значением координаты по оси y_2 .

КИСТЬ ВНИЗ: Скалярное произведение единичного вектора S системы координат схвата и единичного вектора y_5 системы координат (x_5, y_5, z_5) положительно.

КИСТЬ ВВЕРХ: Скалярное произведение единичного вектора y_5 системы координат схвата и единичного вектора us системы координат (x_5, y_5, z_5) отрицательно.

(Заметим, что это определение типов конфигурации манипулятора по положению систем координат звеньев изменится, если будут использованы другие системы координат.)

В соответствии с данным определением различных конфигураций манипулятора для каждой из таких конфигураций определены индикаторы конфигурации (РУКА и ЛОКОТЬ). Совместно эти два индикатора выделяют одно из четырех возможных решений обратной задачи кинематики для первых трех сочленений. Для каждой из четырех возможных конфигураций манипулятора (Рис. 17), определяемых первыми двумя индикаторами, третий индикатор (ЗАПЯСТЬЕ) обуславливает выбор одного из двух возможных решений обратной задачи кинематики для последних трех сочленений. Перечисленные три индикатора конфигурации звеньев могут быть определены следующим образом:

$$\text{РУКА} = \begin{cases} +1, & \text{для ПРАВОЙ руки} \\ -1, & \text{для ЛЕВОЙ руки} \end{cases} \quad (84)$$

$$\text{ЛОКОТЬ} = \begin{cases} +1, & \text{для ВЕРХНЕЙ руки} \\ -1, & \text{для НИЖНЕЙ руки} \end{cases} \quad (85)$$

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если КИСТЬ ВНИЗ} \\ -1, & \text{если КИСТЬ ВВЕРХ} \end{cases} \quad (86)$$

В дополнение к перечисленным индикаторам определим ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ следующим образом:

$$\text{ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ} = \begin{cases} +1 - & \text{сменить ориентацию запястья} \\ -1 - & \text{не менять ориентацию запястья} \end{cases} \quad (87)$$

Значения индикаторов и переключателя задаются исследователем до начала решения обратной задачи кинематики. Значения индикаторов можно также определить, зная присоединенные углы манипулятора и пользуясь соответствующими уравнениями конфигурации, которые будут приведены ниже и которыми можно воспользоваться для проверки решения обратной задачи кинематики.

4.2.1 Решение обратной задачи кинематики для первых трех сочленений.

В соответствии с кинематической схемой манипулятора Пума, представленной на Рис. 12, вектор P , выходящий из начала системы координат плеча (x_0, y_0, z_0) и заканчивающийся в точке пересечения осей трех последних сочленений, определяется следующим выражением (Ошибка! Источник ссылки не найден.):

$$p = p_6 - d_6 a = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (88)$$

что соответствует вектору положения матрицы 0T_4 :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) - d_2 S_1 \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) + d_2 C_1 \\ d_4 C_{23} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Решение для первого сочленения.

Проецируя, как показано на Рис. 18, вектор P на плоскость $x_0 y_0$, получаем следующие уравнения для определения угла θ_1 :

$$\theta_1^L = \varphi - \alpha \quad \theta_1^R = \pi + \varphi + \alpha \quad (90)$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_z^2} \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (91)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_y}{R} \quad \cos \varphi = \frac{p_x}{R} \quad (92)$$

$$\sin \alpha = \frac{d_2}{R} \quad \cos \alpha = \frac{r}{R} \quad (93)$$

в которых верхние индексы L и R означают соответственно ЛЕВУЮ и ПРАВУЮ конфигурации манипулятора. Из уравнений (90) — (93)

получаем значения функций синуса и косинуса угла θ_1 для ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации манипулятора:

$$\sin \theta_1^L = \sin(\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad (94)$$

$$\cos \theta_1^L = \cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha = \frac{p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (95)$$

$$\sin \theta_1^R = \sin(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad (96)$$

$$\cos \theta_1^R = \cos(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (97)$$

Объединяя равенства (94) — (97) и используя индикатор РУКА для учета ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации манипулятора, получаем значения функций синуса и косинуса угла в следующем виде:

$$\sin \theta_1 = \frac{-p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_z^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (98)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{-\hat{D}\hat{E}\hat{O}\hat{\Lambda}p_x\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_z^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (99)$$

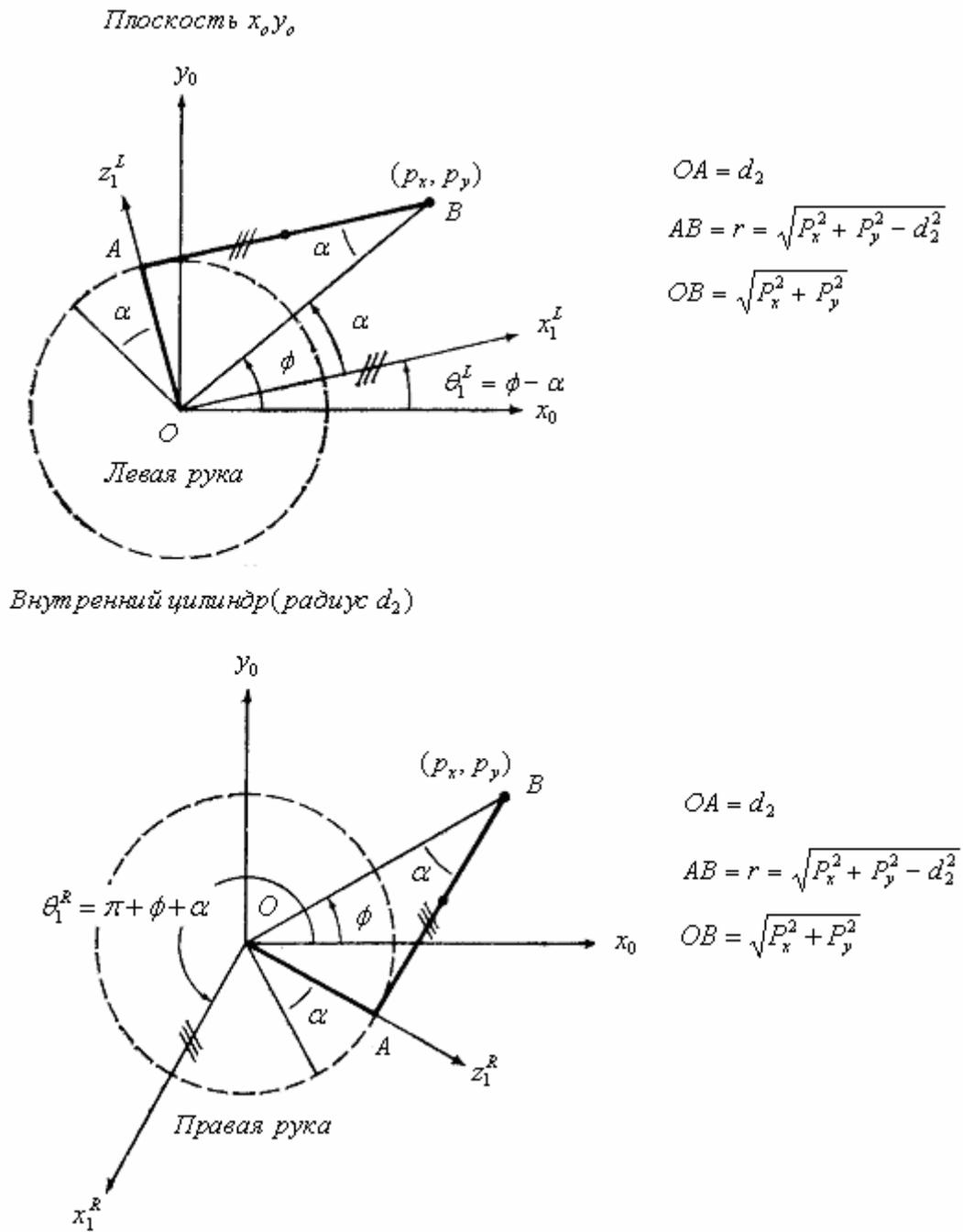


Рис. 18-Решение для 1-го сочленения.

В этих равенствах используется положительное значение квадратного корня, а индикатор РУКА определен равенством

$$\theta_2 = \alpha + (\text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}) \cdot \beta = \alpha + K \cdot \beta \quad (101)$$

где составной индикатор конфигурации $K = \text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}$ определяет соответствующий знак угла β , а точкой обозначена операция умножения индикаторов.

Таблица 5-Угол θ_2 при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	θ_2	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА·ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

Геометрия манипулятора, отраженная в схеме на Рис. 19, позволяет записать следующие соотношения:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad (102)$$

$$\sin \alpha = -\frac{p_z}{R} = -\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (103)$$

$$\cos \alpha = -\frac{D \hat{O} \hat{E} \hat{A} \cdot r}{R} = -\frac{D \hat{O} \hat{E} \hat{A} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (104)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2R} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (105)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \quad (106)$$

Из равенств (101) —

(106) можно определить значение функций синуса и косинуса угла θ_2 :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin(\alpha + K \cdot \beta) = \sin \alpha \cos(K \cdot \beta) + \cos \alpha \sin(K \cdot \beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + (РУКА \cdot ЛОКОТЬ) \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (107)$$

$$\cos \theta_2 = \cos(\alpha + K \cdot \beta) = \cos \alpha \cos \beta - (РУКА \cdot ЛОКОТЬ) \sin \alpha \sin \beta \quad (108)$$

Равенства (107), (108) позволяют найти значение θ_2 :

$$\theta_2 = \arctg \left[\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right], \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi \quad (109)$$

Решение для третьего сочленения.

Для определения θ_3 спроецируем вектор P на плоскость x_2y_2 (Рис. 20). В соответствии с Рис. 20, как и в предыдущем случае, возможны четыре различные конфигурации манипулятора. Как показано в Таблица 6, каждой конфигурации соответствует свое выражение для θ_3 . Параметр $({}^2p_4)_y$ представляет собой у-ю компоненту вектора, выходящего из начала системы координат (x_2, y_2, z_2) и заканчивающегося в точке пересечения осей последних трех сочленений.

Таблица 6-Угол θ_3 при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	$({}^2p_4)_y$	θ_3	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА · ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	≥ 0	$\varphi - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	≤ 0	$\varphi - \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	≥ 0	$\varphi - \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	≤ 0	$\varphi - \beta$	+1	-1	-1

Из Рис. 20 получаем следующие равенства, позволяющие определить θ_3 :

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad (110)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad (111)$$

$$\sin \varphi = PУКА \cdot ЛОКОТЬ \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$\sin \beta = \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad (112)$$

В соответствии с Таблица 6 значение θ_3 можно представить формулой, единой для всех конфигураций манипулятора:

$$\theta_3 = \varphi - \beta \quad (113)$$

Из равенства (113)

получаем следующие выражения для функций синуса и косинуса угла θ_3 :

$$\sin \theta_3 = \sin(\varphi - \beta) = \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta \quad (114)$$

$$\cos \theta_3 = \cos(\varphi - \beta) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta \quad (115)$$

Из равенств (114) и (115) с
использованием равенств (110)—

(112) находим решение для θ_3 :

$$\theta_3 = \arctg \left[\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right], \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi \quad (116)$$

Решение обратной задачи кинематики для последних трех сочленений.

Зная первые три присоединенных угла, можно сформировать матрицу 0T_3 , часто используемую при решении обратной задачи кинематики для последних трех сочленений. Для манипулятора Пума это решение можно

получить, приводя сочленения в соответствие со следующими требованиями:

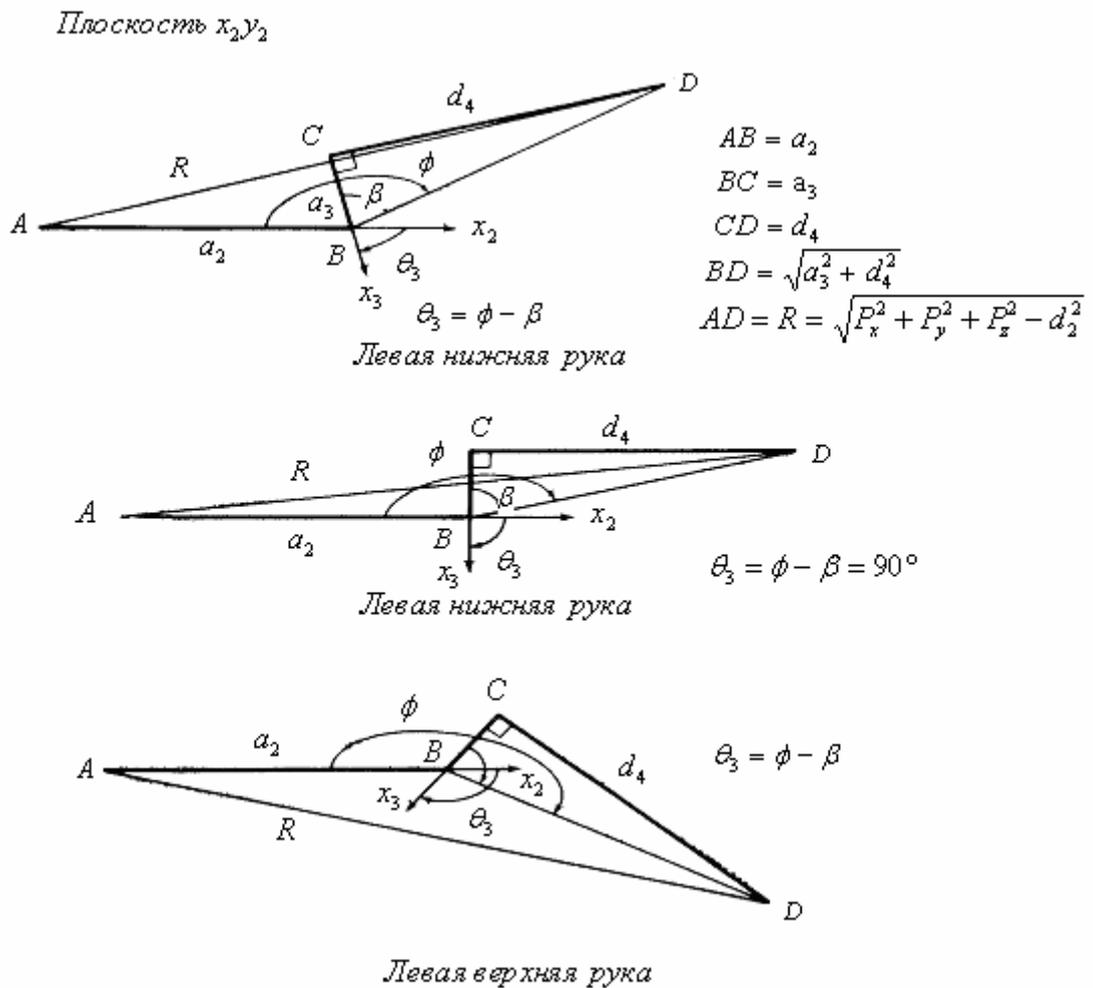


Рис. 20 -Решение для 3-го сочленения.

Сочленение 4 должно быть установлено так, чтобы вращением в сочленении 5 можно было совместить ось вращения сочленения 6 с заданным вектором подхода (вектором a матрицы T).

Сочленение 5 должно быть установлено так, чтобы ось вращения сочленения 6 совпала с вектором подхода.

Сочленение 6 должно быть установлено так, чтобы ось y_6 со впадала с заданным касательным вектором схвата, определяющим его ориентацию. Перечисленные условия соответственно записываются в следующем виде:

$$z_4 = \frac{\pm (z_3 \times a)}{\|z_3 \times a\|} \quad \text{при заданном} \quad a = (a_x, a_y, a_z)^T \quad (117)$$

$$a = z_5 \quad \text{при заданном} \quad a = (a_x, a_y, a_z)^T \quad (118)$$

$$s = y_6 \quad \text{при заданных} \quad s = (s_x, s_y, s_z)^T \quad \text{и} \quad n = (n_x, n_y, n_z)^T \quad (119)$$

В равенстве (117) векторное произведение может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому возможны два решения для θ_4 . При равенстве векторного произведения нулю (т. е. ось z_3 параллельна a) имеет место вырожденный случай. Это происходит, когда оси вращения 4-го и 6-го сочленений параллельны, и означает, что при данной конкретной конфигурации был бы достаточен пятиосный, а не шестиосный манипулятор.

Решение для четвертого сочленения.

Обе возможные ориентации запястья (ВВЕРХ и ВНИЗ) определяются ориентацией системы координат схвата (n, s, a) относительно системы координат (x_5, y_5, z_5) . Знак векторного произведения в равенстве (117) должен быть определен с учетом ориентации n или s по отношению к единичным векторам x_5 или y_5 соответственно, которые в свою очередь ориентированы определенным образом относительно единичного вектора z_4 , в соответствии с правилами выбора систем координат звеньев. (Из Рис. 12 видно, что единичный вектор z_4 , сонаправлен с единичным вектором y_5 .)

Предположим сначала, что векторное произведение в равенстве (117) имеет положительный знак. Признаком этого может служить индикатор ориентации Q , определяемый следующим образом:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ s \cdot y_5, & \text{если } s \cdot y_5 \neq 0; \\ n \cdot y_5, & \text{если } s \cdot y_5 = 0. \end{cases} \quad (120)$$

В соответствии с Рис. 12 $y_5 = z_4$, и, используя равенство (117), можно представить индикатор ориентации в следующем виде:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ s \cdot \frac{(z_3 \times a)}{\|z_3 \times a\|}, & \text{если } s \cdot (z_3 \times a) \neq 0; \\ n \cdot \frac{(z_3 \times a)}{\|z_3 \times a\|}, & \text{если } s \cdot (z_3 \times a) = 0. \end{cases} \quad (121)$$

Если наше предположение о знаке векторного произведения в равенстве (117) не верно, то позже оно будет скорректировано с помощью индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации Ω . Индикатор

Ω служит признаком начальной ориентации единичного вектора z_4 , обусловленной правилами выбора систем координат звеньев. Индикатор звена ЗАПЯСТЬЕ характеризует выбранную исследователем ориентацию узла запястья в соответствии с определением, содержащимся в равенстве

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если КИСТЬ ВНИЗ} \\ -1, & \text{если КИСТЬ ВВЕРХ} \end{cases} \quad (86).$$

Если эти индикаторы одного знака, то предположение о знаке векторного произведения в равенстве (117) верно. В Таблица 7 устанавливается соответствие между ориентацией запястья и различными комбинациями значений индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации.

Таблица 7-Различные ориентации запястья

Ориентация запястья	$\Omega = s \cdot y_5$ или $n \cdot y_5$	М- ЗАПЯСТЬЕ·sign(Ω)
КИСТЬ ВНИЗ	≥ 0	+1 +1
КИСТЬ ВНИЗ	< 0	+1 -1
КИСТЬ ВВЕРХ	≥ 0	-1 -1
КИСТЬ ВВЕРХ	< 0	-1 +1

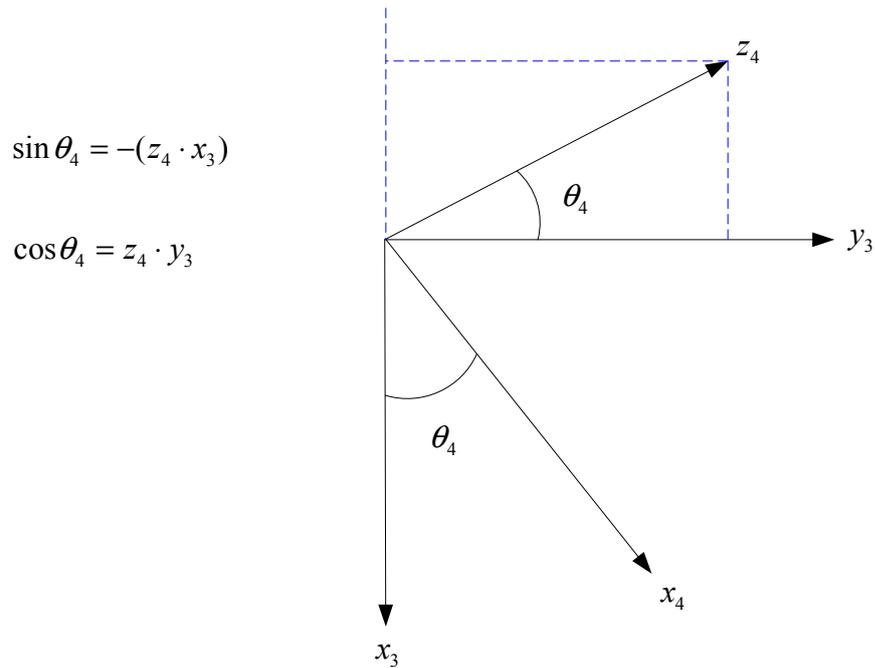


Рис. 21-Решение для 4-го сочленения

Проецируя систему координат (x_4, y_4, z_4) на плоскость $x_3 y_3$ (Рис. 21) и используя Таблица 7, можно получить следующие соотношения:

$$\sin \theta_4 = -M(z_4 \cdot x_3), \quad \cos \theta_4 = M(z_4 \cdot y_3), \quad (122)$$

где x_3 и y_3 — соответственно первый и второй столбцы матрицы 0T_3 , $M = \zeta \dot{\Delta} \dot{\Gamma} \dot{\Sigma} \dot{\Omega} \dot{\Xi} \dot{\Lambda} \cdot \text{sign}(\Omega)$, а функция sign определяется следующим образом:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{а́ннѐ} \ x \geq 0; \\ -1, & \text{а́ннѐ} \ x < 0. \end{cases} \quad (123)$$

Таким образом, с помощью индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации решение для θ_4 может быть представлено в следующем виде:

$$\theta_4 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{M(C_1 a_y - S_1 a_x)}{M(C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z)} \right]$$

$$-\pi \leq \theta_4 \leq \pi \quad (124)$$

В вырожденном случае переменной θ_4 может быть присвоено любое значение, согласующееся с ориентацией запястья (КИСТЬ ВВЕРХ/ВНИЗ). Это условие всегда удовлетворяется, если положить θ_4 равным текущему значению θ_4 . Кроме того, сменив значение ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯ, можно получить другое решение для θ_4 : $\theta_4 = \theta_4 + 180$.

Решение для пятого сочленения.

Для определения θ_5 воспользуемся условием, состоящим в том, что ось шестого сочленения должна совпадать с заданным вектором подхода ($a = z_5$). Проецируя систему координат (x_5, y_5, z_5) на плоскость $x_4 y_4$, можно показать, что справедливы следующие соотношения (Рис. 22):

$$\sin \theta_5 = a \cdot x_4, \quad \cos \theta_5 = -(a \cdot y_4), \quad (125)$$

где x_4 и y_4 - соответственно первый и второй столбцы матрицы 0T_4 .

Таким образом, получено решение для θ_5 :

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_5}{\cos \theta_5} \right] =$$

$$= \operatorname{arctg} \left[\frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right] \quad (126)$$

Если $\theta_5 = 0$, имеет место вырожденный случай.

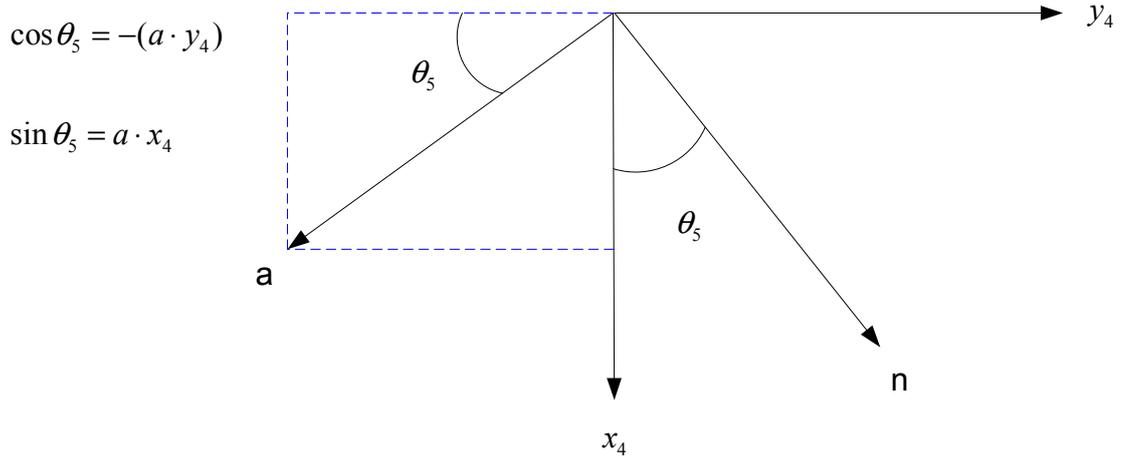


Рис. 22-Решение для 5-го сочленения.

Решение для шестого сочленения.

Мы получили такие решения θ_4 , θ_5 для 4-го и 5-го сочленений, что ось шестого сочленения сонаправлена с заданным вектором подхода a . Теперь мы хотим получить такую ориентацию схвата, которая бы позволила поднять объект манипулирования. Для этого надо так расположить схват, чтобы $s = y_6$. Проецируя систему координат схвата (n, s, a) на плоскость x_5y_5 , можно показать, что справедливы следующие равенства (Рис. 23):

$$\sin \theta_6 = n \cdot y_5, \quad \cos \theta_6 = s \cdot y_5, \quad (127)$$

где y_5 — второй столбец матрицы 0T_5 , a , n и s — соответственно нормальный и касательный векторы матрицы 0T_6 . Таким образом, для θ_6 имеем

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \arctg \left[\frac{\sin \theta_6}{\cos \theta_6} \right] = \\ &= \arctg \left[\frac{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)n_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)n_y - (S_4S_{23})n_z}{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)s_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)s_y + (S_4S_{23})s_z} \right] \\ -\pi &\leq \theta_6 \leq \pi \end{aligned} \quad (128)$$

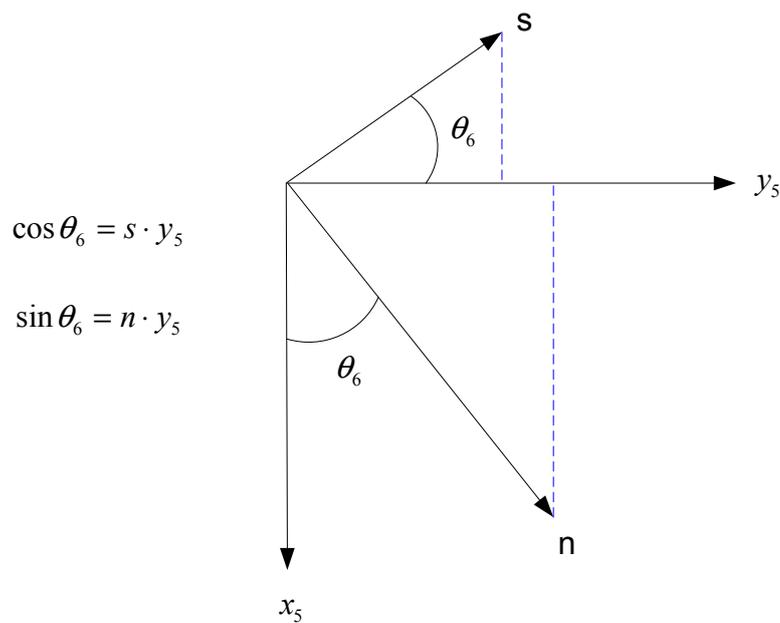


Рис. 23-Решение для 6-го сочленения.

Рассмотренный метод решения обратной задачи кинематики основан на геометрической интерпретации условий, накладываемых на положение конечной точки 3-го звена и на положение и ориентацию схвата или инструмента. В предложенном решении для углов θ_4 , θ_5 и θ_6 необходимо обратить особое внимание на следующее. Дело в том, что требование совпадения оси 5-го сочленения с векторным произведением z_3 и a может не иметь смысла, если $\sin \theta_3 \approx 0$ (т. е. $\theta_3 \approx 0$). В этом случае манипулятор становится вырожденным: оси его 4-го и 6-го сочленений совпадают. В таком состоянии важна только сумма углов θ_4 и θ_6 . Угол θ_4 можно выбрать произвольным образом (обычно выбирают θ_4 равным его текущему значению), а $\theta_4 + \theta_6$ выбирается так, чтобы требуемым образом расположить оси s и n .

Итак, для шестизвенного манипулятора Пума существует восемь решений обратной задачи кинематики. Решения для первых трех присоединенных углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ обеспечивают требуемое расположение руки (первых трех звеньев), а выбором углов $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ обеспечивается заданная ориентация схвата. Для первых трех присоединенных углов существуют четыре решения: два — для манипулятора с левосторонней конфигурацией и два — с правосторонней. Для каждой конкретной конфигурации манипулятора равенства (100), (109)

$$, \quad (116),$$

$$(124), \quad (126),$$

(128) дают решение $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ обратной задачи кинематики, причем $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, +\pi, -\theta_5, \theta_6, +\pi$ также является решением этой задачи (если ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ «включен»).

Уравнения вида конфигурации для определения индикаторов конфигурации манипулятора.

Полученное в предыдущем разделе решение обратной задачи кинематики для манипулятора типа Пума не единственно и зависит от индикаторов конфигурации, задаваемых исследователем. Эти индикаторы можно также определить, зная присоединенные углы. В этом разделе получены соответствующие уравнения конфигурации для каждого из рассмотренных индикаторов. Решение уравнения дает значение соответствующего индикатора в соответствии с определениями

$$\text{РУКА} = \begin{cases} +1, & \text{для ПРАВОЙ руки} \\ -1, & \text{для ЛЕВОЙ руки} \end{cases} \quad (84) \text{ —}$$

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если КИСТЬ ВНИЗ} \\ -1, & \text{если КИСТЬ ВВЕРХ} \end{cases} \quad (86).$$

Для индикатора РУКА, следуя определению ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ руки, уравнение конфигурации можно записать в виде

$$g(\theta, p) = z_0 \cdot \frac{z_1 \times p'}{\|z_1 \times p'\|} = z_0 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\|z_1 \times p'\|} = \frac{-p_y \sin\theta_1 - p_x \cos\theta_1}{\|z_1 \times p'\|} \quad (129)$$

где $p' = (p_x, p_y, 0)^T$ — проекция вектора P на плоскость $x_0, y_0, z_1 = (-\sin\theta_1, \cos\theta_1, 0)^T$ — третий столбец матрицы 0T_1 и $z_0 = (0, 0, 1)^T$. Возможны следующие варианты:

1. Если $g(\theta, p) > 0$, реализована конфигурация ПРАВОЙ руки.
2. Если, $g(\theta, p) < 0$ реализована конфигурация ЛЕВОЙ руки.
3. Если $g(\theta, p) = 0$, конфигурация манипулятора одновременно соответствует определению как ПРАВОЙ, так и ЛЕВОЙ руки:

манипулятор находится внутри цилиндра радиусом d_2 (Рис. 17). В этом случае принимается для определенности, что реализована конфигурация правой руки (РУКА=+1).

Поскольку знаменатель выражения (129) всегда положителен,

определение ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации сводится к определению знака числителя $g(\theta, p)$:

$$\text{ДОУ} = \text{sign}[g(\theta, p)] = \text{sign}(-p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1) \quad (130)$$

где функция sign определена равенством

(123). Подстановкой первой и второй компонент вектора P из равенства (89) в равенство (130) получаем

$$\text{ДОУ} = \text{sign}[g(\theta, p)] = \text{sign}[g(\theta)] = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_{23} C_{23} - a_2 C_2) \quad (131)$$

Следовательно, из уравнения (131) значение индикатора РУКА для ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ конфигурации манипулятора устанавливается следующим образом:

$$\text{ДОУ} = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_{23} C_{23} - a_2 C_2) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ПРАВАЯ} & \text{ДОУ} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛЕВАЯ} & \text{ДОУ} \end{cases} \quad (132)$$

При выводе уравнения конфигурации для индикатора ЛОКОТЬ используем определение ВЕРХНЕЙ/НИЖНЕЙ руки. Взяв $({}^2P_4)_y$ и индикатор РУКА из Таблица 6, получим уравнение конфигурации для индикатора ЛОКОТЬ, использующее знак второй компоненты вектора положения матрицы ${}^2A_3 {}^3A_4$ и индикатор РУКА:

$$\text{ЛОКОТЬ} = \text{РУКА} \cdot \text{sign}(d_4 C_3 - a_3 S_3) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ выше запястья,} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ ниже запястья.} \end{cases} \quad (133)$$

Для индикатора ЗАПЯСТЬЕ, следуя определению возможных конфигураций запястья (КИСТЬ ВВЕРХ/ВНИЗ), сформируем скалярное произведение единичных векторов S и Y_5 (или Z_4).

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если } s \cdot z_4 > 0 \\ -1, & \text{если } s \cdot z_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(s \cdot z_4). \quad (134)$$

Если $s \cdot z_4 = 0$, значение индикатора ЗАПЯСТЬЕ можно определить из следующего выражения:

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если } n \cdot z_4 > 0 \\ -1, & \text{если } n \cdot z_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(n \cdot z_4) \quad (135)$$

Объединяя равенства (134) и (135), получим

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} \text{sign}(s \cdot z_4), & \text{если } s \cdot z_4 \neq 0 \\ \text{sign}(n \cdot z_4), & \text{если } s \cdot z_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВНИЗ}, \\ -1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВВЕРХ}. \end{cases} \quad (136)$$

Полученные уравнения конфигурации позволяют проверить решение обратной задачи кинематики. С их помощью при решении прямой задачи кинематики вычисляются значения индикаторов конфигурации, которые затем используются для решения обратной задачи кинематики (Рис. 24).

Машинное моделирование.

Для проверки правильности решения обратной задачи кинематики манипулятора Пума, изображенного на Рис. 12, может быть составлена программа для ЭВМ. Первоначально в программе задается положение манипулятора в пределах допустимых значений присоединенных углов. Присоединенные углы являются входами в программу решения прямой задачи кинематики, которая формирует матрицу манипулятора T . Присоединенные углы используются также в уравнениях конфигурации, из которых определяются значения трех индикаторов конфигурации манипулятора. Значения индикаторов совместно с матрицей T являются входами в программу решения обратной задачи кинематики, вычисляющую присоединенные углы, которые должны совпасть с присоединенными углами, являющимися входами в программу решения прямой задачи кинематики. Блок-схема такой модели представлена на Рис. 24.



Рис. 24-Моделирование решения обратной задачи кинематики на ЭВМ.

4.3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели прямую и обратную задачи кинематики манипулятора. Были определены параметры звеньев и сочленений манипулятора, а для описания положения звеньев относительно фиксированной системы координат было введено понятие однородной матрицы преобразования размерностью 4×4 . Для шестизвенного манипулятора типа Пума получены соотношения, решающие прямую задачу кинематики.

Сформулирована обратная задача кинематики. С помощью метода обратных преобразований получено решение обратной задачи в эйлеровых координатах. Метод обратных преобразований позволяет решать обратную задачу кинематики простых манипуляторов, однако он не дает возможности раскрыть геометрический смысл задачи. В связи с этим на примере решения обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора с вращательными сочленениями рассмотрен геометрический подход. В решении использовались три индикатора конфигурации манипулятора (РУКА, ЛОКОТЬ, ЗАПЯСТЬЕ). Для шестизвенного манипулятора типа Пума существует восемь различных решений обратной задачи кинематики: четыре — для первых трех сочленений, и каждому из этих четырех соответствуют еще два возможных решения для трех последних сочленений. Правильность решений прямой и обратной задач кинематики может быть проверена с помощью моделирования на ЭВМ. При соответствующих изменениях и дополнениях геометрический подход может быть обобщен для других простых промышленных манипуляторов с вращательными сочленениями. Рассмотренные в этой главе понятия, связанные с кинематикой манипуляторов, будут широко использоваться в третьей главе для вывода уравнений движения, описывающих динамику манипулятора.

4.4 ВЫВОДЫ по разделу:

1. При движении промышленного робота в мировой системе координат система управления вынуждена решать обратную задачу кинематики, так как целевая точка, как правило, задается в декартовой системе координат, а непосредственно управление производится в обобщенных координатах.
2. Решение обратной задачи кинематики всегда неоднозначно определяется индикаторами (рука, локоть, кисть).
3. Для кисти у которой три её ориентированные оси переключается в одной точке, существует особое состояние, когда 5-ый угол равен нулю и четвертый угол может принимать произвольное значение.

4.5 Система программирования ARPS

Расстояние изменения минимально можно задать 0,01 мм. Углы в градусах, минимальный угол 0,005°. Скорость от 2000 м/с до 3000 м/с. Обычная максимальная скорость 560 м/с, минимальная скорость 0,1 м/с.

Задание скорости имеет смысл только для прямолинейного движения или движения по дуге.

При программировании следует учитывать, что существует три системы координат:

- мировая;
- базовая (может быть смещена и повернута относительно оси Z);
- система координат инструмента.

Базовая система координат связана с основанием робота.

Программирование робота может производиться как в базовой системе координат, так и в системе координат инструмента. При обучении роботов используются так называемые рабочие тоски, которые можно запомнить и дать команду роботу переместиться в нее.

Рабочие точки бывают трех типов:

1. Обыкновенные точки – они задаются в базовой системе координат XYZ и угла OAT . Когда выдается команда перемещения в обыкновенную точку, мы можем задать конфигурацию в этой точке.
2. Прецизионные точки – задаются с помощью углов $q_1, q_2 \dots q_6$. Обеспечивает более высокую точность.
3. Относительные точки – можно задавать с помощью координат XYZ и угла OAT . Для того чтобы точка стала относительной, существует команда $CORNER < HOLE >$. Такая запись говорит, что точка $HOLE$ определена относительно точки $CORNER$.

4.6 Программные переключатели.

Они могут работать в различных режимах. Переключение из одного режима в другой происходит командами *ENABLE* и *DISABLE*.

Переключатели:

1. *BREAK* - во включенном состоянии он заставляет манипулятор остановиться в промежутках между двумя перемещениями

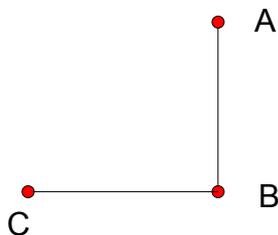


Рис. 25

Для перемещения из *A* в *C*
DISABLE BREAK
GOS B
GOSC

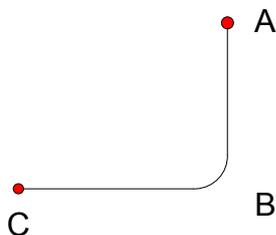


Рис. 26

ENABLE BREAK
GOS B
GOSC

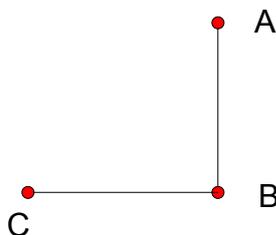


Рис. 27

2. *DIST 10* - он задает точность команды *distance*, которая вычисляет расстояние между двумя точками.

3. *INCALLS* - он определяет, будет ли прерываться программа на обработку внешнего прерывания.

4.7 Конфигурация

Конфигурации задаются с помощью переключений *J2*, *J3* и *J5*. Они соответствуют – РУКА, ЛОКОТЬ и КИСТЬ соответственно.

J2 LEFT(RIGHT)

J3 UP(DOWN)

J5 PLUS(MINUS)

Переменные могут состоять из букв латинского алфавита, цифр и точек.

4.8 Команды

Бывают:

- команды движения
- команды работы с точками
- вспомогательные команды

Команды движения имеют общий корень, но отличаются приставкой или суффиксом.

Например: ИМЯ, Т ИМЯ, ИМЯ S.

Команда ИМЯ будет выполнять движение в обобщенных координатах манипулятора.

Т ИМЯ будет работать с системой координат манипулятора (движение по прямой).

Команда ИМЯ S будет выполнять движение по прямой.

1. CIR ABC – движение по дуге проход через точки ABC.

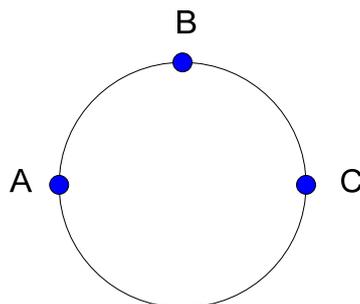


Рис. 28

Движение происходит по кратчайшему пути. Для того чтобы выполнить движение необходимо команду CIR разбить на две команды. Для первой точка В – конечная, для второй точка В – начало.

2. GO A – перемещение из точки положения в заданную точку А, причем точка может быть как обыкновенной, так и относительной.

GO A

#A

V<A>

Движение по произвольной траектории и зависит от реализации стойки управления. Эту команду не рекомендуется применять когда инструмент находится вблизи какого либо препятствия, поскольку мы не можем спрогнозировать по какой траектории будет идти движение.

3. GOS A – движение по прямой. Особенность – в процессе движения манипулятор не может изменить свою конфигурацию

4. GONEAR – позволяет переместить инструмент в положение над точкой.

5. GONEAR A Δz_t . Δz_t - перемещение по оси Z системы координат манипулятора.

6. GOSNEAR..., 100 – манипулятор выполняет перемещение вдоль оси Z инструмент на заданное расстояние в отрицательную сторону. Эта команда может использоваться для отхода от обрабатываемой поверхности.

7. MOVE dx, dy, dz – перемещение по X,Y,Z в мировой системе координат

8. MOVES dx, dy, dz – перемещение по прямой.

9. $\left. \begin{array}{l} TMOVE \text{ перемещение} \\ TMOVES \text{ перемещение по прямой} \end{array} \right\} \text{ в системе координат инструмента}$

Эту команду удобно использовать при обучении

10. MOVE JOINT 2,50. Здесь 2 – номер сустава, 50 – угол поворота.

Диапазон угла поворота для каждого сустава свой и определяется характеристиками манипулятора.

Команда MOVE JOINT – когда робот находится на границе рабочей зоны.

Существует еще набор команд:

GO@ close

GOS@ open

GO@ open

GOS@ close

Выполняются как обычные команды GO или GOS только перед началом схват открывается или закрывается.

11. GOS@ WEAVE - в этом случаи инструмент движется быстрее по прямой с осуществлением колебательных движений. Колебания происходят вдоль оси X инструмента. Команда используется в задачах дуговой сварки.

К командам движения также относят команду управления скоростью. Скорость задается в мм/с.

12. SPEED 300 – 300 мм/с. Можно задавать скорость в процентах от предыдущей.

13. SPEED D%50 - 150 мм/с.

Есть команда, которая выполняет изменение скорости на одну инструкцию движения, а затем скорость возвращается обратно:

14.SPEED NEXT

SPEED действует на команды GO, GOS, MOVES и TMOVES.

4.9 Способы задания точек

HERE LOC1 – задает точке с именем LOC1 текущее положение манипулятора. Причем она может быть как обыкновенная, так и составная.

HERE LOC 2

HERE LOC3(LOC1)

LOCATE – позволяет присваивать точке значение другой.

LOCATE LOC4=LOC1

LOCATE LOC5=LOC3(LOC1)

Существует набор команд позволяющие работать с внешними входами/выходами: IN со входами, OUT с выходами.

OUT 3 устанавливает 3-ий выход в 1.

OUT – 3 сбрасывает 3-ий выход в 0.

Номер выхода может быть прописан либо, может задаваться через переменную.

IN возвращает значение со входа, используется с помощью команды IF.

IF IN.5 – если на 5 входе 1.

IF IN 5 JUMP 10 – переход на метку 10.

Входы/выходы используются для общения с внешней аппаратурой. Выходов 64, входов 64.

CALL – вызывает подпрограмму.

CALL PRG1

EXIT– выход из подпрограммы и возврат к инструкции, следующей после CALL.

HALT – останавливает выполнение подпрограммы без возможности возобновления.

INCALL 4, PRG4 – вызывает подпрограмму PRG4, когда приходит требование по 4 каналу.

NOINCALL 5 – запрещает прерывание по конкретному каналу.

JUMP – безусловный переход на некоторую метку.

JUMP 100 – метка на любое число с которого начинается строка.

.PROGRAM PRG 1 – начало подпрограммы.

.END – конец подпрограммы.

Пример программы.

Написать программу, которая выполняет движение по прямой между точками A,B,C в случае если нажата кнопка один, и движение по дуге, если была бы нажата кнопка 2. Кнопка 3 прекращает выполнение программы и возвращает робота в исходную позицию.

.PROGRAM LIN

SPEED 500

```
GO A
SPEED 200
GOS B
GOS C
GO READY
.END
```

```
.PROGRAM ARC
SPEED 500
GO A
CIR A,B,C
COREADY
.END
```

```
.PROGRAM BR
SPEED 50
GOREADY HALT
.END
```

```
.PROGRAM PRG
SPEED 50
INCALL 3, BR
10 IF IN 1 CALL LIN
    IF IN 2 CALL ARC
    IF IN 3 HALT
    JUMP 10
.END
```

4.10 Способы обучения промышленных роботов.

Обучение можно разбить на несколько этапов.

Метод I – off-line обучение:

1. Создание модели обработки детали – создается трехмерная модель обработки изделия. И в случае необходимости к нему привязывается дополнительная технологическая операция.
2. Создание модели инструмента – трехмерный инструмент, указывающий точки посадки инструмента на плане с роботом и указывается рабочая точка инструмента (точка задаётся шестью координатами: три точки – положение; три точки – ориентация).

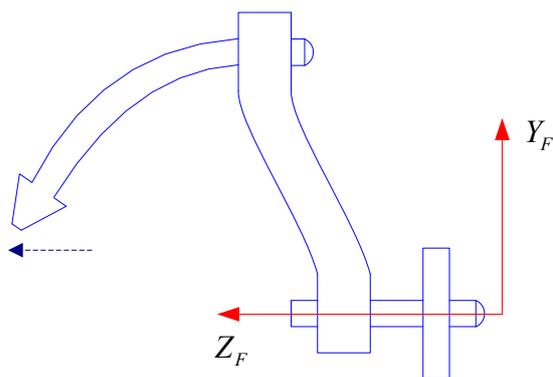


Рис. 29

1 способ – задание рабочей точки инструмента в точке посадки на фланец.

2 способ - с помощью параметра DTKL.

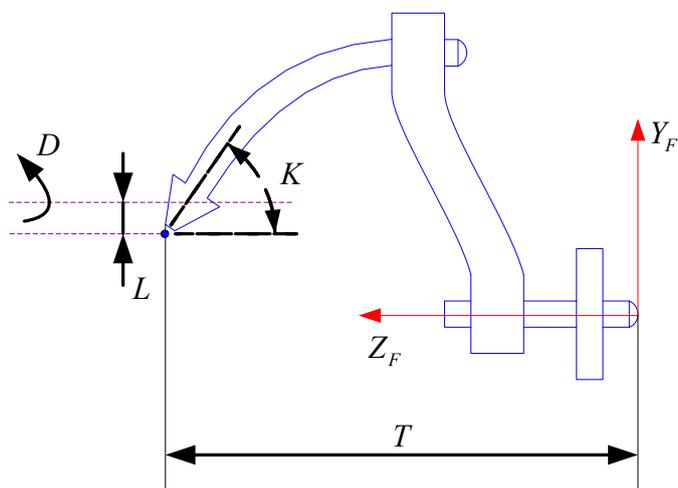


Рис. 30

D – угол поворота вокруг z-фланца.

T – расстояние от рабочей точки до фланца.

L – расстояние от рабочей точки до инструмента.

K – угол наклона инструмента.

3. Создание модели промышленного робота. Создаются графические модели звеньев робота. На них указываются точки сопряжения и оси вращения, так же решается прямая и обратная задача кинематики. Далее если необходимо создается модель манипулятора изделия, также как и для робота. По необходимости создается графическая модель технологической оснастки.

4. Сборка рабочей ячейки. На этом этапе выполняется расположение робота с манипулятором, относительно обрабатываемого изделия. Выбор положения осуществляется с учетом достижимости манипулятора всех рабочих точек на поверхности изделия, при

этом обязательно учитываются ограничения на диапазоны углов суставов, и проводится тест-столкновение.

Результатом работы программирования являются таблицы, в которых показаны возможные ориентации инструмента, для каждой рабочей точки и для каждого вычисленного положения робота.

После этого вводим обучение. Обучение манипулятора будет заключаться в выборе последовательных обрабатываемых точек; в выборе углов ориентации инструмента для каждой точки и в выборе конфигурации манипулятора в каждой точке.

Для каждой последовательности будет следующая таблица:

Таблица 8

	В ИР	В ИМ	В РН
5 ⁻	- 180	- 90	0	90	18 0
0	- 180	- 90	0	far	18 0
5 ⁺	- 180	- 90	q ₃ out	90	18 0

Far – точка далеко и манипулятор не может до нее дотянуться; q₃ out – выходит за пределы.

При выборе конфигурации манипулятора:

- Следует учитывать, что при прямолинейном движении конфигурация манипулятора изменяться не может.
- Если манипулятор не может обрабатывать всю последовательность точек при неизменной конфигурации, то существует 2 пути решения этой проблемы:
 1. наиболее предпочтительное – изменение положение робота относительно детали и добиться, чтобы все точки обрабатывались при неизменных конфигурациях;
 2. если такого положения не нашлось, то последовательность точек разбивается на две последовательности, каждая из которых обрабатывается при неизменных конфигурациях. При этом при изменении конфигурации манипулятора инструмент как правило выводится из рабочей зоны.

Поскольку траектория движения сустава при изменении конфигурации произвольная и при изменении конфигурации вблизи препятствий возможно столкновение с этим препятствием.

После обучения манипулятора рабочие точки добавляются точки

подхода и отвода инструмента – это точки расположенные вблизи первой (последней) рабочей точки из обрабатываемого набора, движение которых (из исходного положения манипулятора) допускается по произвольной траектории. Движение из точки подхода к первой обрабатываемой точке выполняется по прямой. Делается это для того, чтобы избежать столкновения манипулятора с обрабатываемой деталью.

Выбор точки подхода/отвода осуществляется следующим образом:

- инструмент помещается в первую (последнюю) рабочего точку;
- выполняется движение манипулятора по прямой в системе координат инструмента. Как правило, движение вычисляется по оси Z;
- расстояние, на которое выполняется движение, выбирается исходя из размеров заготовки и располагают на ней рабочую точку.

Следующим шагом обучения работа является составление технологической программы.

Программу можно разбить на следующие шаги:

1. выполнить движение манипулятора по произвольной траектории из точки начального положения в точку подхода;
2. выполнить движение по прямой в первую обрабатываемую точку;
3. выполнить технологическую операцию;
4. выполнить движение по прямой в следующую точку из набора;
5. выполнить технологическую операцию;
6. предыдущие два шага выполняются до тех пор, пока не будет обработаны все точки;
7. после обработки всех точек движения выполняется движение по прямой в точку отвода;
8. выполняем произвольное движение в исходное положение, либо к следующей точке подхода;
9. составленная программа запускается на выполнение и проверяется ее работоспособность;
10. при выполнении программы может возникнуть ситуация когда манипулятор не может выполнить движение по прямой между двумя рабочими точками. В этом случае необходимо вернуться к этапу выбора рабочих точек и выбрать точку с иной ориентацией инструмента, либо с иной конфигурацией манипулятора (конфигурация манипулятора должна изменяться для всего набора точек);
11. после чего опять проверяется работоспособность программы. Предыдущий шаг повторяется до тех пор пока программа не заработает;
12. если так и не удалось добиться выполнения программы, то выбираем иное положение робота относительно детали и

выполняем все последующие шаги;

13. если изменение положения робота не помогло, то тогда набор точек разбивается на два, чтобы избежать прямолинейного перемещения, которое манипулятор не может выполнить.

5 On-line программирование.

При On-line программировании выполняются все те же шаги, что и при off-line, но все выполняется на реальном оборудовании, и так же положение робота относительно изделия выбирается оператором исходя из его опыта.

5.1 Приемы обучения с помощью языка ARPS.

Нарисовать букву.

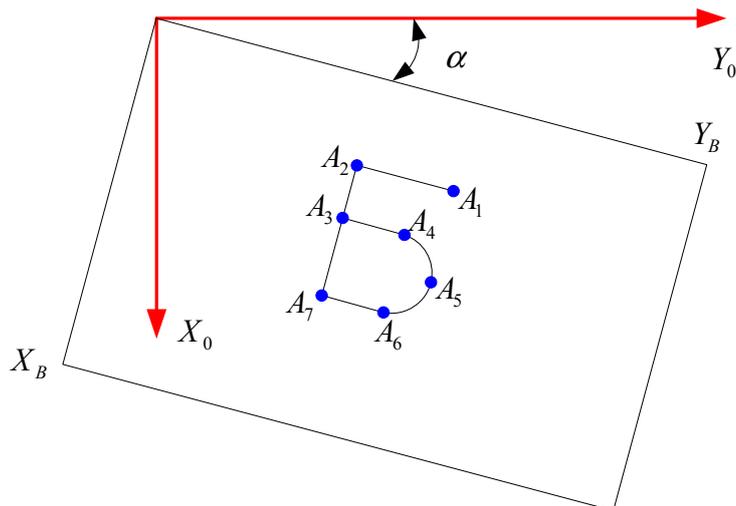


Рис. 31

Существует два варианта выполнения этого задания:

Первый вариант.

Командой BASE осуществляется поворот базовой системы координат на угол α . Командами движения GO и MOVE обучаем манипулятор точкам $A_1 \div A_7$. Если $A_1 \div A_7$ мы будем запоминать как прецизионные, при выполнении программы буква Б будет повернута на угол α .

```
GOS # A1  
GOS # A2  
GOS # A3  
GOS # A4  
GOS # A4, # A5, # A6  
GOS # A7  
GOS # A3
```

Недостатком использования прецизионных точек является то, что мы не можем изменить угол α .

Второй вариант.

Рисуем Б в неповернутом виде.

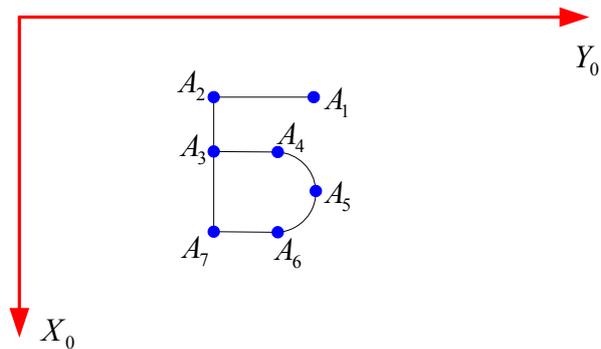


Рис. 32

Запоминаем $A_1 \div A_7$ как обыкновенные точки.

Далее пишем следующую программу:

```

BASE  $\alpha$ 
GO #  $A_1$ 
GOS #  $A_2$ 
GOS #  $A_3$ 
GOS #  $A_4$ 
GOS #  $A_4, \# A_5, \# A_6$ 
GOS #  $A_7$ 
GOS #  $A_3$ 

```

Если фигура составлена из прямых линий, обучение можно проводить в системе координат инструмента, предварительно повернув инструмент вокруг оси Z инструмента на угол α .

5.2 ВЫВОДЫ по разделу:

1. Процесс обучения состоит из следующих этапов:
 - создание модели манипулятора изделия, инструмента и технологического оборудования;
 - нанесения рабочих точек на изделие с учетом технологических особенностей;
 - компоновка рабочей ячейки?
 - обучение робота рабочим точкам
 - составление отладки технологического процесса
2. Процесс обучения робота является итерационным и в значении степени зависит от опыта технолога.
3. При обучении рабочим точкам необходимо использовать возможности движения манипулятора как в базовой системе координат, так и в системе координат инструмента.
4. Использование прецизионных точек не дает возможности для гибкого изменения параметров программы.

6 Кинематика движения.

Конечное движение схвата манипулятора представляется не только движением схвата, но и скоростью движения инструмента.

Для обеспечения нужной скорости необходимо знать соотношение между значениями смещения сустава и позиции схвата. Различают прямую и обратную задачи кинематики движения.

Прямая задача кинематики звучит так: по известным значениям скоростей обобщенных координат вычислить скорость движения схвата. Данная задача используется для моделирования кинематики движения и ее решения базируется на вычислении матрицы Якоби.

$$\begin{cases} x(q_1, q_2) = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y(q_1, q_2) = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (137)$$

В приращениях:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x(q_1, q_2)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x(q_1, q_2)}{\partial q_2} dq_2 \\ dy = \frac{\partial y(q_1, q_2)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y(q_1, q_2)}{\partial q_2} dq_2 \end{cases} \quad (138)$$

$$d\bar{X} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$dq = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} \quad (140)$$

Матрица Якоби (якобиан) имеет вид:

$$\bar{J} = \begin{cases} \frac{\partial x(q_1, q_2)}{\partial q_1} & \frac{\partial x(q_1, q_2)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y(q_1, q_2)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(q_1, q_2)}{\partial q_2} \end{cases} \quad (141)$$

$$\partial \bar{X} = \bar{J} dq \quad (142)$$

Якобиан определяет приращение декартовых координат в соответствии с заданным приращением координат.

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{V} = \bar{J}\dot{q}, \quad (143)$$

где \dot{q} - скорость вращения сустава.

Смещения схвата в трехмерном пространстве будет описано двумя составляющими:

1. трехмерный вектор смещения dX_l ;
2. трехмерный вектор поворота $d\hat{O}_l$.

$$d\bar{p} = \begin{bmatrix} d\bar{X}_l \\ d\bar{\Phi}_l \end{bmatrix} \quad (144)$$

Здесь первые три строки – вектор смещения, последние три строки – вектор поворота.

$$\dot{p} = J\dot{q}, \quad (145)$$

То есть якобиан будет иметь размерность $6 \cdot n$, где n - количество подвижных суставов манипулятора.

Первые три строки якобиана определяют линейную скорость движения схвата, а последние три строки угловую. А каждый столбец определяет линейную и угловую скорости, обусловленные соответствующим суставом. Рассмотрим два вида суставов: вращательный и поступательный.

Для поступательного:

$$\bar{V}_i = \bar{J}_i \cdot \dot{q} = \bar{z}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (146)$$

Для поступательного сустава $q_i = d_i$, то получаем выражение для якобиана:

$$\bar{J}_i(q) = \begin{bmatrix} \bar{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

Для вращательного движения две составляющие:

1. угловая $\bar{w}_i = \bar{z}_{i-1} \cdot \dot{q}$
2. линейная $\bar{w}_i \times {}^{i-1}\bar{P}_6 = (\bar{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\bar{P}_6) \dot{q}$

Полное выражение для якобиана:

$$\bar{J}_i(q) = \begin{bmatrix} \bar{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\bar{P}_6 \\ \bar{z}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (148)$$

Якобиан для манипулятора РМ-01

$$\bar{J}_i(q) = \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \times {}^0P_6 & \bar{z}_1 \times {}^1P_6 & \cdots & \bar{z}_5 \times {}^5P_6 \\ \bar{z}_0 & \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_5 \end{bmatrix} \quad (149)$$

Все вектора в этой матрице записаны в базовой системе координат.

$$z_{i-1} = z_0 \cdot {}^0R_1(q_1) \cdot \dots \cdot {}^{i-1}R_{i-1}(q_{i-1}) \quad (150)$$

Матрица Якоби зависит от углов $q_1 \dots q_6$ и при движении манипулятора изменяет свое значение.

Инверсная задача кинематики движения.

Задана линейная и угловая скорости движения манипулятора в декартовой системе координат. Требуется определить значение скоростей определенных координат.

$$\bar{V} = \bar{J} \cdot \dot{\bar{q}} \quad (151)$$

$$\dot{\bar{q}} = \bar{J}^{-1} \cdot \bar{V} \quad (152)$$

Поскольку при движении манипулятора якобиан постоянно изменяется, то в некоторых точках он может вырождаться. Это значит, что инверсный якобиан не определен, а сам Якобиан имеет линейно зависимые столбцы. Поэтому решение инверсной задачи требует анализа вырожденных конфигураций и определения в этих конфигурациях скоростей сустава q_i .

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} - \text{желаемая скорость движения точки } V. \text{ Необходимо найти:}$$

1. скорость обобщенных координат;
2. найти вырожденные координаты;
3. в каких направлениях возможно движение схвата в каждой вырожденных конфигурациях.

Решение:

1. Якобиан выглядит следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} S(q_1) + S(q_1 + q_2) & S(q_1 + q_2) \\ C(q_1) + C(q_1 + q_2) & C(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (153)$$

$$\det J = \sin(q_2)$$

$$J = \begin{bmatrix} S(q_1) + S(q_1 + q_2) & S(q_1 + q_2) \\ C(q_1) + C(q_1 - q_2) & S(q_1 + q_2) + S(q_1) \end{bmatrix} \frac{1}{S(q_2)} \quad (154)$$

2. $\det J = 0 \Rightarrow q_2 = 0, \pi$

Когда $q_2 = 0$ - манипулятор вытянут, когда $q_2 = \pi$ - манипулятор сложен.

Для манипулятора РМ-01 в случае $q_5 = 0$, четвертый и шестой столбцы якобиана становятся линейно зависимыми. Поскольку вектора скорости, определяемые четвертым и шестым суставами, будут совпадать, то четвертый сустав фиксируется, его скорость равна нулю, то есть четвертый выбрасывается из матрицы Якоби. В результате мы получим невырожденную матрицу.

6.1 Динамика промышленных роботов.

Можно выделить две задачи:

- прямая;
- обратная.

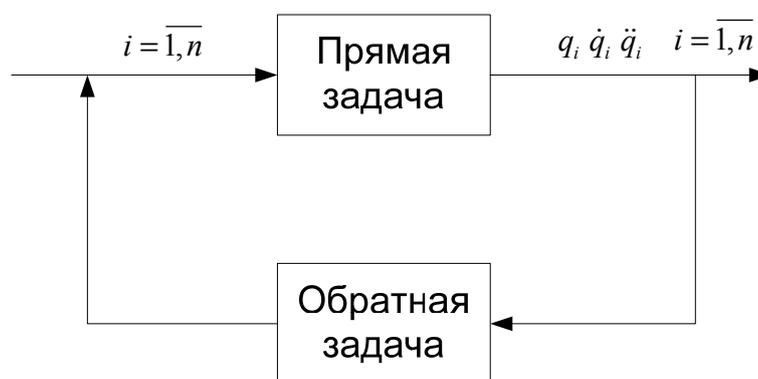


Рис. 33

Определение. Прямая задача динамики – задаются действующие в суставах моменты, необходимо определить обобщенные координаты суставов, их скорости и ускорения, иными словами необходимо определить закон изменения обобщенных координат. Данная задача используется при моделировании динамики промышленных роботов.

Определение. Обратная задача динамики – задается траектория движения манипулятора в виде законов изменения обобщенных координат, их скоростей и ускорений. Необходимо найти моменты, развиваемые валами двигателя при обработке заданной траектории.

Данная задача используется при построении алгоритма управления роботом с использованием динамической модели, при расчете и выборе силовых приборов и при моделировании динамики промышленных роботов.

Момент, развиваемый на валу двигателя можно записать следующим образом:

$$\bar{r}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j}_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k}_2 + G_i \quad i = \overline{1, n} \quad (155)$$

В этом выражении: 1 – это инерционная составляющая момента, она показывает как влияет ускорение в j -ом суставе на момент i -ого сустава. 2 – составляющая, которая обусловлена действием центробежных сил. G_i - обусловлена силой тяжести.

6.2 Метод Ньютона-Эйлера для решения обратной задачи динамики.

Рассмотри два смежных сустава.

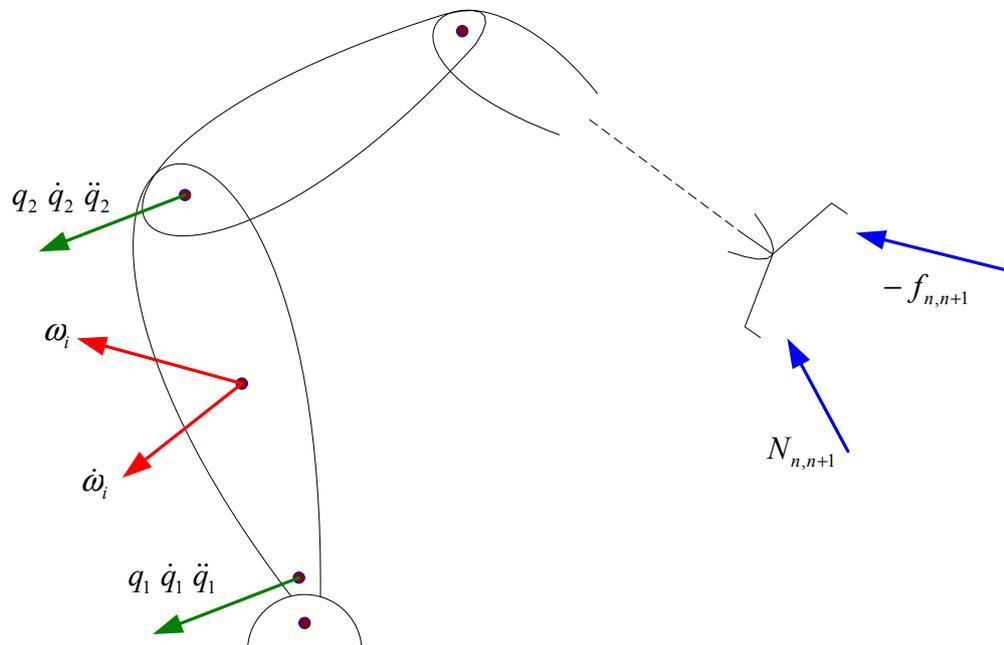


Рис. 34

Метод Ньютона-Эйлера состоит из двух шагов:

1. Нахождение всех кинематических переменных необходимых для получения уравнения динамики. К этим переменным относятся линейные и угловые скорости и ускорения центров масс каждого звена, а также скорости и ускорения обобщенных координат. Алгоритм начинается вычислением первого звена и продолжается до последнего звена с учетом предыдущих результатов.
2. Рекурсивное вычисление уравнения Ньютона-Эйлера с использованием кинематических переменных полученных на первом шаге. Процедура вычисления начинается с последнего звена и движется к первому.

$$f_{n-1,n} = f_{n+1,n} - m_n g + m_n a_{cn} \quad (156)$$

$f_{n-1,n}$ - сила, с которой n -ое звено воздействует на звено $n-1$

$f_{n+1,n}$ - сила, действующая на исполнительный элемент робота (инструмента) в точке касания. она определена вдоль траектории движения и измерена с помощью датчиков.

m_n - масса n -ого звена.

a_{cn} - линейное ускорение центра масс n -ого звена.

Уменьшая n в приведенном уравнении можно рассчитать силы взаимодействия между остальными звеньями.

Для общего случая рекурсивная процедура вычисления сил и моментов в виде уравнения балансов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f_{i-1,i} = f_{i+1,i} - m_i g + m_i a_{ci} \\ N_{i-1,i} = N_{i+1,i} + I_i \omega_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) - r_i c_i \cdot f_{i+1,i} + r_{i-1} c_i \cdot f_{i-1,i} \end{cases} \quad (157)$$

Эта система уравнений полностью описывает поведение i -ого звена робота.

После того как рассчитаны все моменты и силы каждого звена, можно рассчитать моменты, которые приложены на вал исполнительных приводов.

$r_i = b_{i-1} \cdot f_{i-1,i}$ - поступательное движение.

$r_i = b_{i-1}^T \cdot N_{i-1,i}$ - вращательное движение.

b_{i-1} - единичный вектор, направленный вдоль оси Z_{i-1} .

6.3 Рекурсивный алгоритм вычисления кинематики переменных

6.4 на первом шаге.

Для нахождения кинематики переменных текущего звена необходимо знать параметры следующего сочленения.

Если $i+1$ звено поступательное:

$$\omega_{i+1} = \omega_i$$

$$\dot{\omega}_{i+1} = \dot{\omega}_i$$

(158)

Если $i+1$ звено вращательное:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + q_{i-1} b_i$$

$$\dot{\omega}_{i+1} = \dot{\omega}_i + \omega_i \times q_{i+1} b_i + \dot{q}_{i+1} b_i$$
(159)

Выражение для линейных скоростей и ускорений.

Если $i + 1$ звено поступательное:

$$V_{i+1} = V_i + \dot{q}_{i+1} b_i + \omega_i \times r_{i,i+1}$$

$$a_{i+1} = a_i + \ddot{q}_{i+1} b_i + \dot{\omega}_i r_{i,i+1} + 2\omega_i \times \dot{q}_{i+1} b_i + \omega_i \times (\omega_i \cdot r_{i,i+1})$$
(160)

Если $i + 1$ звено вращательное:

$$V_{i+1} = V_i + \omega_i \times r_{i,i-1}$$

$$a_{i+1} = a_i + \dot{\omega}_i r_{i,i-1} + \omega_{i+1} \times (\omega_{i-1} \cdot r_{i,i+1})$$
(161)

6.5 Структура вычисляемого алгоритма.

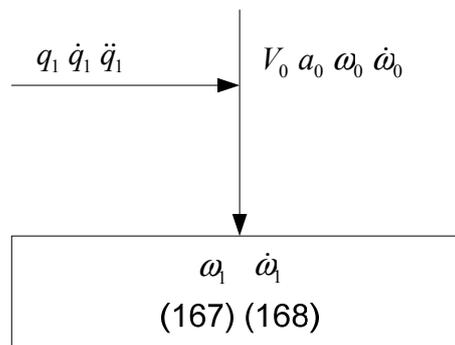


Рис. 35

Линейная скорость и ускорения для центра масс звена:

$$V_{ci} = V_i + \omega_i \times r_{ici}$$

$$a_{ci} = \dot{V}_i + \dot{\omega}_i r_{ici} + \omega_i \times (\omega_i \cdot r_{ici})$$
(162)

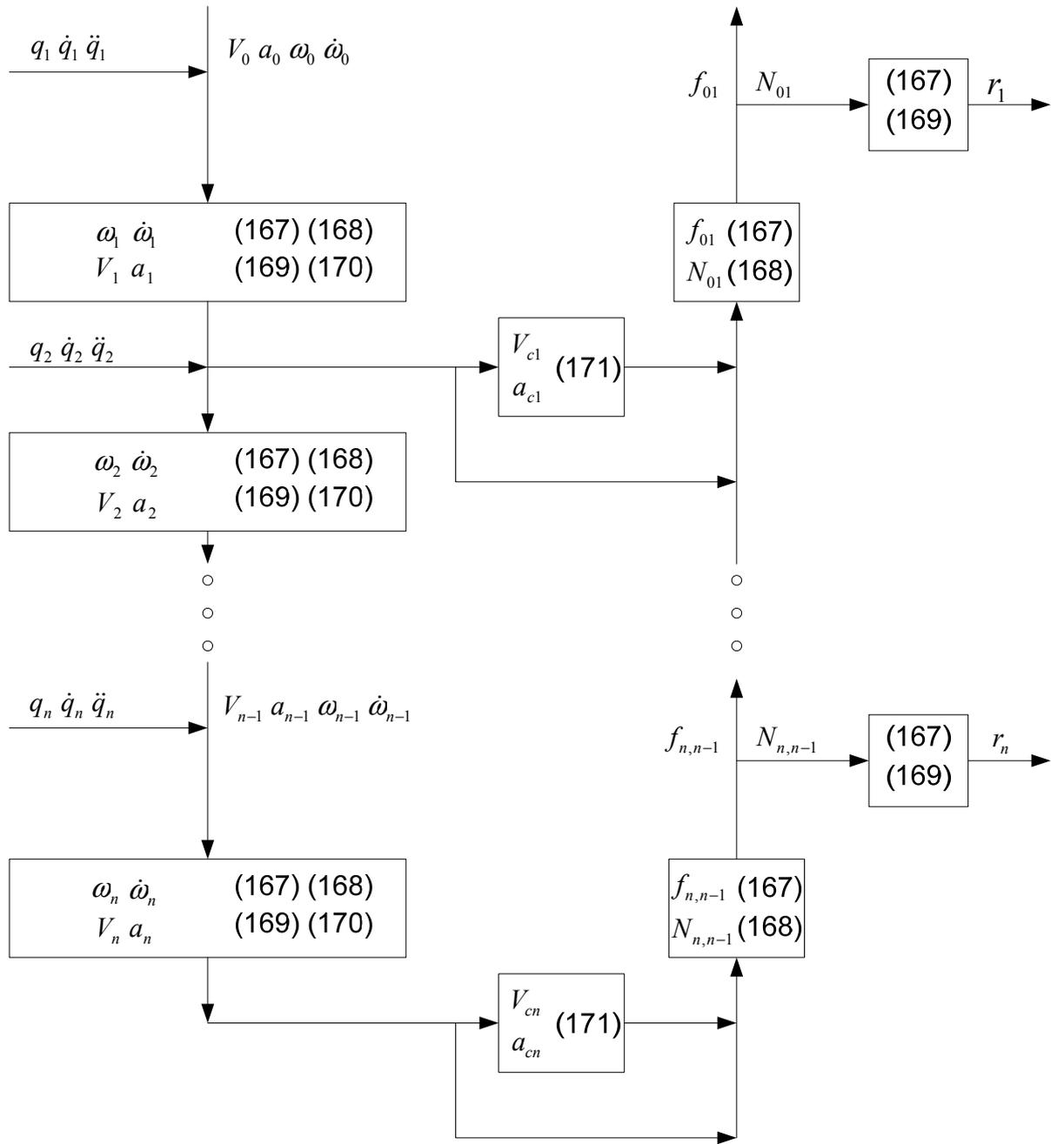


Рис. 36

6.6 Уравнение динамики для плоского двухзвенного робота

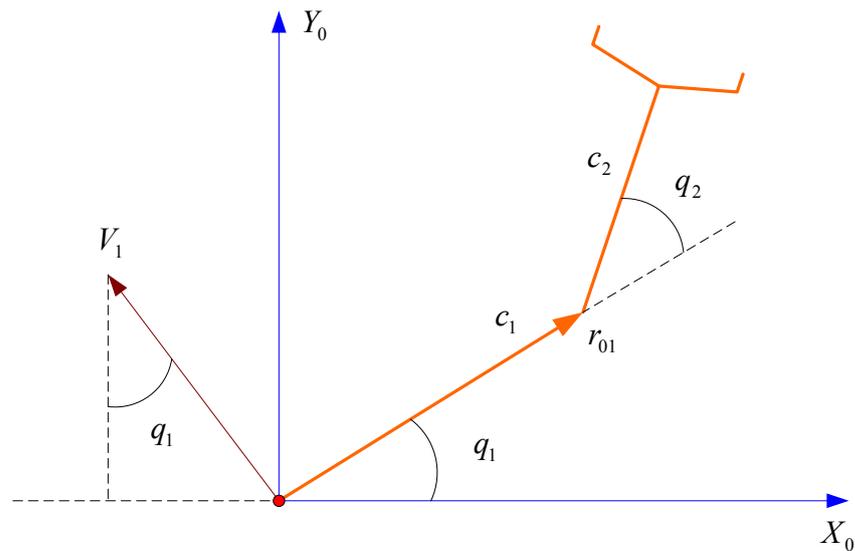


Рис. 37

C_1, C_2 - центр масс звеньев.

Для начала нужно определить угловую скорость начала системы координат для каждого звена.

$$\omega_1 = \dot{q}_1 b_0$$

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{q}_1 b_0$$

Находим линейную скорость

$$V_1 = V_0 + \omega_1 \times r_{01} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 r_1 \sin q_1 \\ \dot{q}_1 r_1 \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (163)$$

где r_{01} - вектор из нулевой системы координат в первую.

$$V_{c1} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 r_{0c} \sin q_1 \\ \dot{q}_1 r_{0c} \cos q_1 \end{bmatrix}$$

Запишем уравнение баланса.

$$\begin{cases} f_{12} + m_2 g - m_2 a_{c2} = 0 \\ N_{12} - r_{1c2} \times f_{12} - I \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases} \quad (164)$$

Для первого звена:

$$\begin{cases} f_{01} - f_{12} + m_1 g - m_1 a_{c1} = 0 \\ N_{01} - N_{12} - r_{2c1} \times f_{12} + r_{0c1} \times f_{01} - I \dot{\omega}_1 \div \cos(I_1 \dot{\omega}_1) = 0 \end{cases} \quad (165)$$

где I - инерции – описывает распределение масс по направлениям относительно центра масс.

Запишем значение для моментов на валу двигателя:

$$\tau_1 = H_{11} \ddot{q}_1 + H_{12} \ddot{q}_2 - h \dot{q}_1^2 - 2h \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G_1$$

$$\tau_2 = H_{12} \ddot{q}_1 + H_{22} \ddot{q}_2 - h \dot{q}_1^2 + G_2$$

$$H_{11} = m l_{c1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2] + I_2$$

$$H_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$h = m_2 l_1 l_2 \sin q_2$$

$$G_1 = m_1 l_{c1} g \cos q_1 + m_2 g [l_{c2} \cos(q_2 + q_1) + l_1 \cos q_1]$$

$$G_2 = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

1. G_i - гравитационная составляющая – она обусловлена действием силы тяжести и находится как моменты, создавшиеся массами звеньев относительно осей их вращения.
2. Предположим, что $\dot{q}_2, \ddot{q}_2 = 0$, т.е. второй сустав не двигается, тогда $\tau_1 = H_{11} \dot{q}_1$. H_{11} интерпретируется, как общий момент инерции от двух степеней подвижности влияющие на первый сустав когда второй неподвижен.
3. Пусть скорости обоих суставов равны нулю и ускорение первого сустава равно нулю $\ddot{q}_1 = 0$, тогда $\tau_1 = H_{12} \dot{q}_2$. H_{12} - учитывает взаимодействие двух суставов, когда второй сустав ускоряется.
4. Пусть скорость второго сустава равна нулю и ускорения первого и второго суставов равны нулю, тогда $\tau_2 = h \dot{q}_1^2$. Составляющая h определяет влияние центробежных сил, под действием которых второй сустав придет в движение из-за движения первого сустава.

6.7 Обобщенная структурная схема динамики промышленного робота с учетом динамики исполнительного привода.

Структурная схема двигателя постоянного тока:

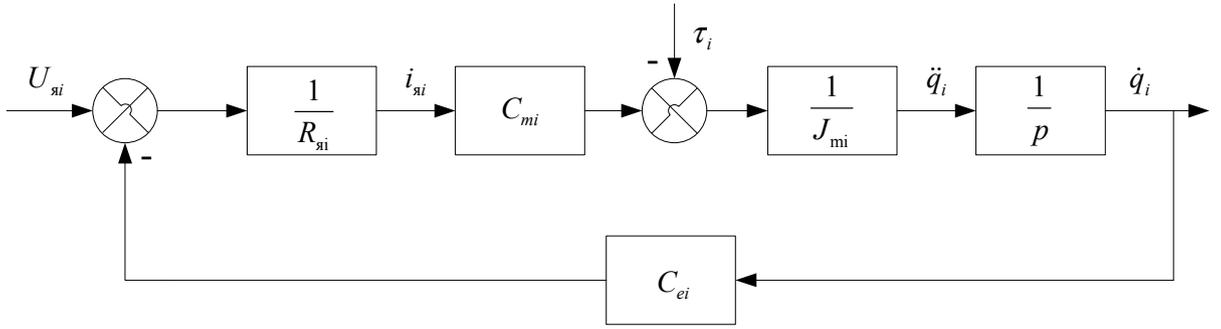


Рис. 38

$$U_{\dot{y}i} - C_{ei} = i_{\dot{y}i} R_{\dot{y}i} \quad (166)$$

$$i_{\dot{y}i} C_{mi} - \tau_i = J_{mi} \ddot{q}_i \quad (167)$$

Из первого выражения выразим ток якоря и подставим во второе.

$$\frac{U_{\dot{y}i} - C_{ei}}{R_{\dot{y}i}} C_{mi} - \tau_i = J_{mi} \ddot{q}_i \quad (168)$$

$J_{mi} \ddot{q}_i + \alpha_i \dot{q}_i + \tau_i = k_i U_{\dot{y}i}$ - уравнение динамики исполнительного привода манипулятора.

$$\alpha_i = \frac{C_{ei} C_{mi}}{R_{\dot{y}i}} \quad (169)$$

$$k_i = \frac{C_{mi}}{R_{\dot{y}i}} \quad (170)$$

Поскольку в манипуляторе несколько исполнительных приводов манипулятора то уравнении динамики

$$J_m \ddot{q} + \alpha \dot{q} + \tau = k U_{\dot{y}} \quad (171)$$

$$J_m = \text{diag}(J_{m1} \dots J_{mn}) \quad (172)$$

$$k = \text{diag}(k_1 \dots k_n) \quad (173)$$

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \quad (174)$$

В полученном уравнении (171) все переменные зависят от τ :

$$\tau = H(q) \ddot{q} + V(q) \dot{q} + G(q) \quad (175)$$

Подставив выражение для τ в уравнение (1) получим:

$$J_m \ddot{q} + H(q) \dot{q} + V(q) \dot{q} + \alpha \dot{q} + G(q) = kU_{\dot{y}} \quad (176)$$

Это уравнение используется для модели динамики исполнительного приводов с учетом динамики самого манипулятора. Поскольку состояния – это матрицы, то для его решения используют следующую схему моделирования.

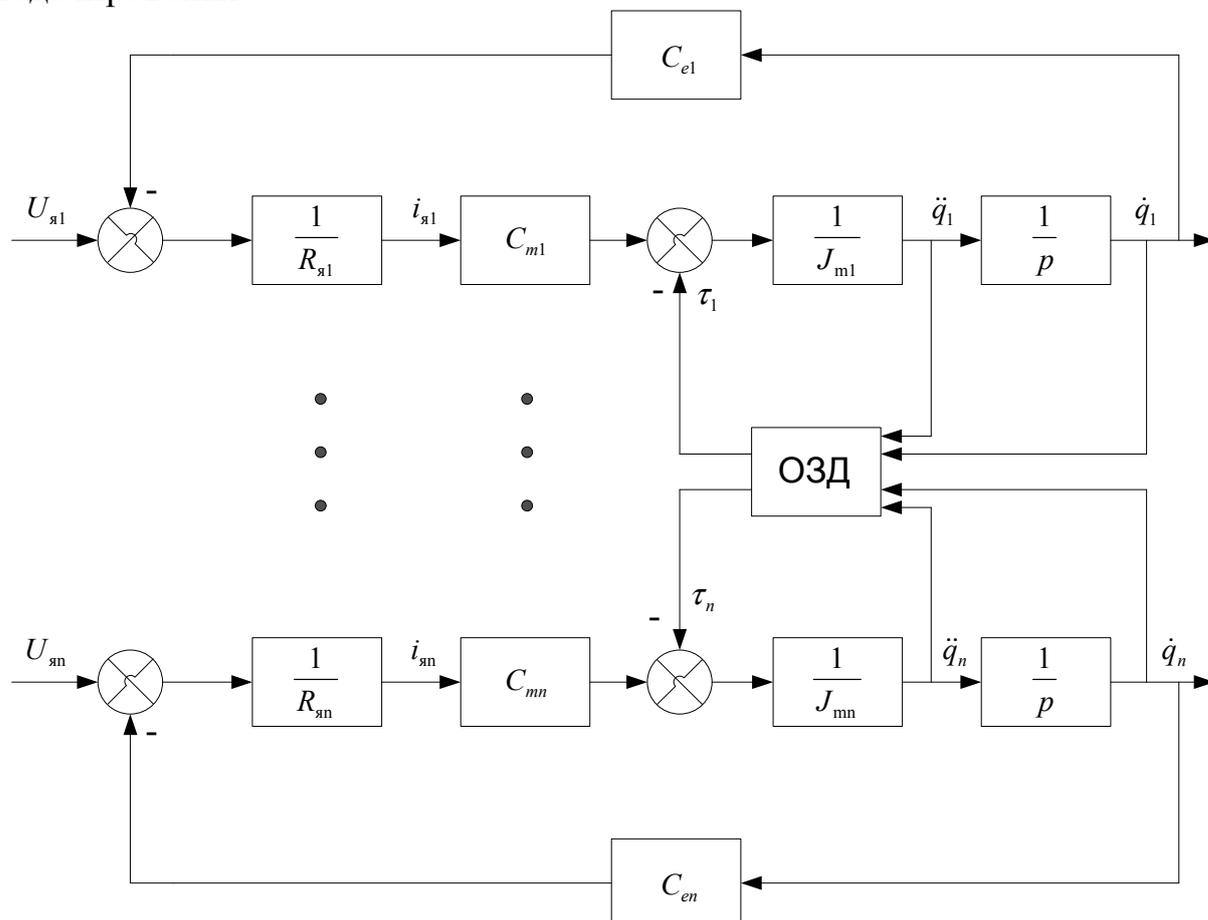


Рис. 39

Эта модель используется при выборе исполнительного двигателя манипулятора.

7 ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ МАНИПУЛЯТОРА

7.1 ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрев в предыдущих главах вопросы кинематики и динамики манипулятора, обратимся теперь к задаче выбора закона управления, обеспечивающего движение манипулятора вдоль некоторой заданной траектории. Перед началом движения манипулятора важно знать, во-первых, существуют ли на его пути какие-либо препятствия, и, во-вторых, накладываются ли какие-либо ограничения на траекторию схвата. В зависимости от ответов на эти два вопроса закон управления манипулятором принадлежит к одному из четырех типов, указанных в Таблица 9. Из таблицы видно, что задача управления манипулятором распадается на две взаимосвязанные подзадачи — выбор (планирование) траектории и осуществление движения манипулятора вдоль выбранной траектории. В этой главе рассмотрены различные способы планирования траекторий манипулятора при отсутствии препятствий на пути движения. Введен формализм описания заданной траектории манипулятора в виде последовательности точек пространства, в которых заданы положение и ориентация манипулятора, и пространственной кривой, соединяющей эти точки. Кривую, вдоль которой схват манипулятора движется из начального положения в конечное, будем называть *траекторией схвата*. Наша задача состоит в разработке математического аппарата для выбора и описания желаемого движения манипулятора между начальной и конечной точками траектории.

Таблица 9 - Типы управления манипулятором

		Препятствия на пути манипулятора	
		Присутствуют	Отсутствуют
Ограничения на траекторию манипулятора	Присутствуют	Автономное планирование траектории, обеспечивающее обход препятствий, плюс регулирование движения вдоль выбранной траектории в процессе работы манипулятора	Автономное планирование траектории плюс регулирование движения вдоль выбранной траектории в процессе работы манипулятора
	Отсутствуют	Позиционное управление плюс обнаружение и обход препятствий в процессе движения	Позиционное управление

Суть различных способов планирования траекторий манипулятора сводится к аппроксимации или интерполяции выбранной траектории полиномами некоторого класса и к выбору некоторой последовательности опорных точек, в которых производится коррекция параметров движения манипулятора на пути от начальной к конечной точке траектории. Начальная и конечная точки траектории могут быть заданы как в присоединенных, так и в декартовых координатах. Более часто, однако, используют для этого декартовы координаты, поскольку в них удобнее задавать правильное положение схвата. Кроме того, присоединенные координаты непригодны в качестве рабочей системы координат еще и потому, что оси сочленений большинства манипуляторов не ортогональны, вследствие чего невозможно независимое описание положения и ориентации схвата. Если же в начальной и конечной точках траектории требуется знание присоединенных координат, их значения можно получить с помощью программы решения обратной задачи кинематики.

Как правило, траектория, соединяющая начальное и конечное положения схвата, не единственна. Возможно, например, перемещение манипулятора как вдоль прямой, соединяющей начальную и конечную точки (прямолинейная траектория), так и вдоль некоторой гладкой кривой, удовлетворяющей ряду ограничений на положение и ориентацию схвата на начальном и конечном участках траектории (сглаженная траектория). В этой главе рассмотрен аппарат планирования как прямолинейных, так и сглаженных траекторий. Сначала мы рассмотрим наиболее простой случай планирования траекторий, удовлетворяющих некоторым ограничениям на характер движения схвата, а затем полученный способ обобщим с целью учета ограничений динамики движения манипулятора.

По смыслу планировщик траекторий можно рассматривать как «черный ящик» (Рис. 40). На вход планировщика траекторий подаются некоторые переменные, характеризующие накладываемые на траекторию ограничения. Выходом является заданная во времени последовательность промежуточных точек, в которых определены в декартовых или присоединенных координатах положение, ориентация, скорость и ускорение схвата и через которые манипулятор должен пройти на пути от начальной к конечной точке траектории. При планировании траекторий обычно применяется один из двух следующих подходов. Первый состоит в том, что исследователь задает точный набор ограничений (например, непрерывность и гладкость) на положение, скорость и ускорение обобщенных координат манипулятора в некоторых (называемых *узловыми*) точках траектории. Планировщик траекторий после этого выбирает из некоторого класса функций (как правило, среди многочленов, степень которых не превышает некоторое заданное n функцию, проходящую через узловые точки и удовлетворяющую в них заданным ограничениям. Второй подход состоит в том, что исследователь задает желаемую траекторию манипулятора в виде некоторой аналитически описываемой функции, как, например, прямолинейную траекторию в декартовых координатах.

Планировщик же производит аппроксимацию заданной траектории в присоединенных или декартовых координатах. В первом подходе определение ограничений и планирование траектории производится в присоединенных координатах. Поскольку на движение схвата никаких ограничений не накладываемся, исследователю трудно представить реализуемую траекторию схвата, и поэтому возникает возможность столкновения с препятствиями, информация о наличии которых на пути схвата отсутствует. При втором подходе ограничения задаются в декартовых координатах, в то время как силовые приводы реализуют изменение присоединенных координат. Поэтому для нахождения траектории, достаточно точно аппроксимирующей заданную, с помощью приближенных функциональных преобразований переходят от ограничений, заданных в декартовых координатах, к ограничениям, заданным в присоединенных координатах, и только после этого отыскивают среди функций заданного класса траекторию, удовлетворяющую ограничениям, выраженным в присоединенных координатах.

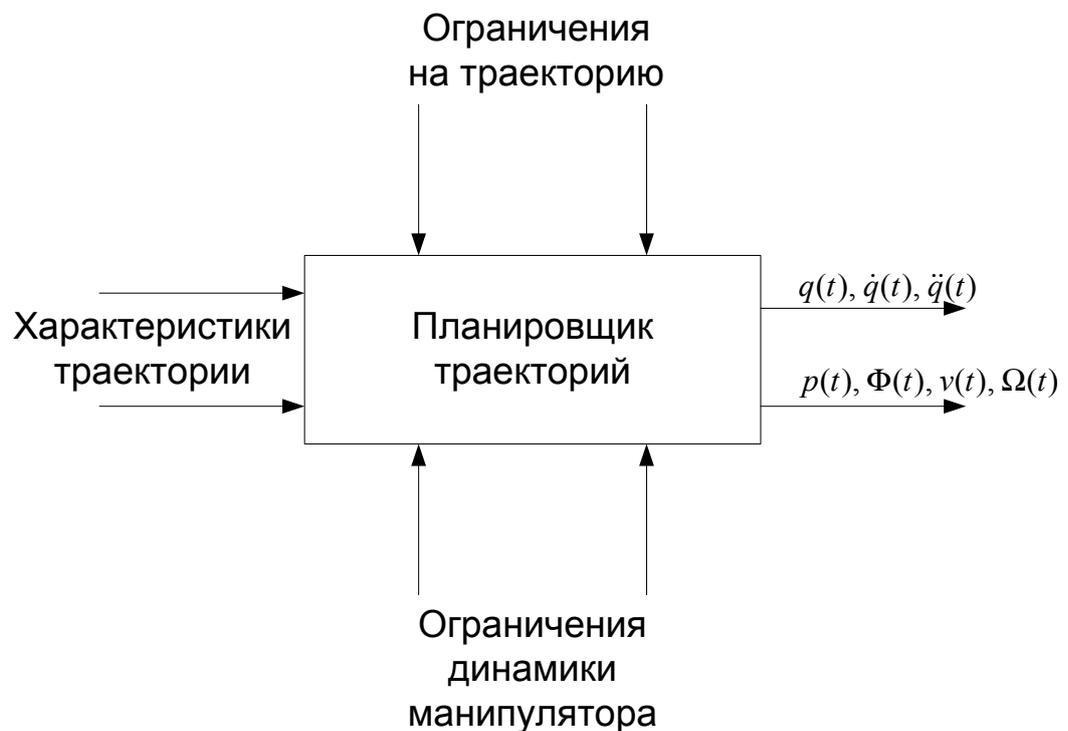


Рис. 40- Блок-схема планировщика траекторий.

Названные выше два подхода к планированию траекторий манипулятора можно было бы использовать для эффективного (практически в реальном времени) построения последовательностей узловых точек траекторий манипулятора. Однако задаваемая во времени последовательность векторов $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$ в пространстве присоединенных переменных формируется без учета ограничений динамики манипулятора, что может приводить к возникновению больших ошибок слежения при управлении

манипулятором.

7.2 ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Планирование траекторий может производиться как в присоединенных, так и в декартовых координатах. При планировании траектории в присоединенных координатах для полного описания движения манипулятора задается зависимость от времени всех присоединенных переменных, а также их первых двух производных. Если планирование траектории ведется в декартовых координатах, задается зависимость от времени положения, скорости и ускорения схвата и по этой информации определяются значения присоединенных координат, их скоростей и ускорений. Планирование в присоединенных переменных обладает тремя преимуществами: 1) задается поведение переменных, непосредственно управляемых в процессе движения манипулятора; 2) планирование траектории может осуществляться практически в темпе реального времени; 3) траектории в присоединенных переменных легче планировать. Недостатком является сложность определения положения звеньев и схвата в процессе движения. Такая процедура часто необходима для того, чтобы избежать столкновения с препятствиями, имеющимися на пути манипулятора.

В общем случае основной алгоритм формирования узловых точек траектории в пространстве присоединенных переменных весьма прост:

$$t = t_0;$$

цикл: ждать следующего момента коррекции;

$$t = t_0 + \Delta t;$$

$h(t)$ - заданное положение манипулятора в пространстве присоединенных переменных в момент времени t ;

Если $t = t_f$, выйти из процедуры;

Выполнить **цикл**;

Здесь Δt — интервал времени между двумя последовательными моментами коррекции параметров движения манипулятора.

Из приведенного выше алгоритма видно, что все вычисления производятся для определения траекторной функции $h(t)$, которая должна обновляться в каждой точке коррекции параметров движения манипулятора. На планируемую траекторию накладываются четыре ограничения. Во-первых, узловые точки траектории должны легко вычисляться рекуррентным способом. Во-вторых, промежуточные положения должны определяться однозначно. В-третьих, должна быть обеспечена непрерывность присоединенных координат и их двух первых производных, чтобы

планируемая траектория в пространстве присоединенных переменных была гладкой. Наконец, в-четвертых, должны быть сведены к минимуму бесполезные движения типа «блуждания».

Перечисленным ограничениям удовлетворяют траектории, описываемые последовательностями полиномов. Если для описания движения некоторого, например, i -го сочленения используется последовательность p полиномов, они должны содержать $3(p+1)$ коэффициентов, выбираемых в соответствии с начальными и конечными условиями по положению, скорости и ускорению и условием непрерывности этих характеристик на всей траектории. Если добавляется дополнительное ограничение, например, задается положение в некоторой промежуточной точке траектории, то для выполнения этого условия требуется дополнительный коэффициент. Как правило, задаются два дополнительных условия по положению (вблизи начальной точки траектории и вблизи конечной), обеспечивающих безопасные направления движения на начальном и конечном участках траектории и более высокую точность управления движением. В этом случае изменение каждой присоединенной переменной может быть описано одним полиномом седьмой степени или двумя полиномами четвертой степени и одним — третьей (4-3-4) или двумя полиномами третьей степени и одним — пятой (3-5-3), или пятью кубическими полиномами (3-3-3-3-3). Эти способы рассмотрены в следующих разделах.

Если планирование траектории производится в декартовых координатах, приведенный выше алгоритм преобразуется к следующему виду:

$$t = t_0;$$

цикл: ждать следующего момента коррекции;

$$t = t_0 + \Delta t;$$

$H(t)$ = положение схвата манипулятора в декартовом пространстве в момент t ;

$Q(H(t))$ = вектор присоединенных координат, соответствующих $H(t)$;

Если $t = t_f$, выйти из процедуры;

Выполнить цикл;

Здесь помимо вычисления траекторной функции $H(t)$ в каждой точке коррекции параметров движения манипулятора требуется определить значения присоединенных переменных, соответствующие вычисленному положению схвата. Матричная функция $H(t)$ описывает положение схвата манипулятора в абсолютном пространстве в момент времени t и представляет собой матрицу преобразования однородных координат размерностью 4×4 .

В общем случае планирование траекторий в декартовых координатах

состоит из двух последовательных шагов: 1) формирование последовательности узловых точек в декартовом пространстве, расположенных вдоль планируемой траектории схвата; 2) выбор некоторого класса функций, описывающих (аппроксимирующих) участки траектории между узловыми точками в соответствии с некоторым критерием. Используемый на втором шаге критерий выбирается, как правило, с учетом применяемых впоследствии алгоритмов управления с тем, чтобы гарантировать возможность движения вдоль выбранной траектории. Существуют два основных подхода к планированию траекторий в декартовом пространстве. В первом из них большинство вычислений, оптимизация траекторий и последующее регулирование движения производятся в декартовых координатах. Узловые точки на заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве выбираются через фиксированные интервалы времени. Вычисление значений присоединенных координат в этих точках производится в процессе управления движением манипулятора. Второй подход состоит в аппроксимации прямолинейных участков траектории в декартовом пространстве траекториями в пространстве присоединенных переменных, полученными в результате интерполяции траектории между соседними узловыми точками полиномами низкой степени. Регулирование движения в этом подходе производится на уровне присоединенных переменных. И предложенный Тейлором метод построения траекторий с ограниченными отклонениями, и разработанный Лином метод описания траекторий кубическими сплайнами используют аппроксимацию прямолинейной траектории полиномами низкой степени в пространстве присоединенных переменных.

Первый из названных выше подходов к планированию траекторий в декартовом пространстве позволяет обеспечить высокую точность движения вдоль заданной траектории. Однако все известные алгоритмы управления движением строятся с учетом отсутствия датчиков, измеряющих положение схвата в декартовом пространстве, в пространстве присоединенных переменных. Это приводит к необходимости производить преобразование декартовых координат схвата в вектор присоединенных координат манипулятора в процессе движения — задача, требующая большого количества вычислений и нередко увеличивающая время управления манипулятором. Кроме того, переход от декартовых к присоединенным координатам плохо обусловлен из-за отсутствия взаимно-однозначного соответствия между этими координатами. Далее, требования к траектории (непрерывность, гладкость, граничные условия) формулируются в декартовых координатах, в то время как ограничения динамики, подлежащие учету на этапе планирования траектории, задаются в пространстве присоединенных переменных. В результате приходится решать задачу оптимизации с ограничениями, заданными в различных системах координат.

Перечисленные недостатки первого подхода приводят к тому, что более

широко используется второй подход, основанный на преобразовании декартовых координат узловых точек в соответствующие присоединенные координаты с последующим проведением интерполяции в пространстве присоединенных переменных полиномами низкой степени. Этот подход обеспечивает меньшие (по сравнению с первым) вычислительные затраты и облегчает учет ограничений динамики манипулятора. Однако точность движения вдоль заданной в декартовом пространстве траектории при этом снижается.

7.3 СГЛАЖЕННЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

При управлении манипулятором, прежде чем приступить к планированию траектории движения, необходимо определить конфигурации манипулятора в начальной и конечной точках траектории. Планирование сглаженных траекторий в пространстве присоединенных переменных следует производить с учетом следующих соображений:

1. В момент поднятия объекта манипулирования движение схвата должно быть направлено от объекта; в противном случае может произойти столкновение схвата с поверхностью, на которой расположен объект.
2. Если задать точку ухода на проходящей через начальное положение схвата нормали к поверхности, на которой расположен объект, и потребовать, чтобы траектория схвата проходила через эту точку, тем самым будет задано допустимое движение ухода. Задавая время, за которое схват попадет в эту точку, можно управлять скоростью движения схвата на начальном участке (участке ухода).
3. Аналогичные условия можно сформулировать для участка подхода к заданному конечному положению: схват должен пройти через точку подхода, расположенную на проходящей через конечное положение схвата нормали к поверхности, на которую должен быть помещен объект манипулирования. Это обеспечит правильное направление движения на конечном участке траектории (участке подхода).
4. Из сказанного следует, что любая траектория движения манипулятора должна проходить через четыре заданные точки: начальную точку, точку ухода, точку подхода и конечную точку (Рис. 41).

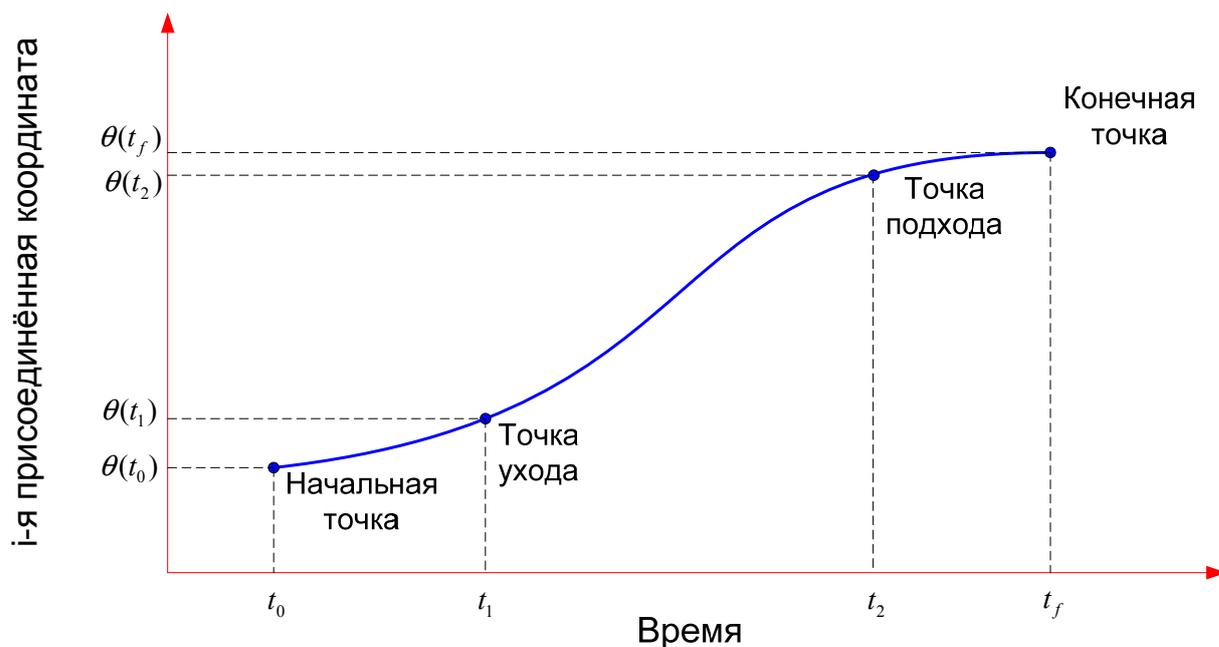


Рис. 41 - Ограничения по положению для траектории в пространстве присоединенных переменных

5. На траекторию накладываются условия:
 - начальная точка: заданы скорость и ускорение (обычно нулевые);
 - точка ухода: непрерывность положения, скорости и ускорения;
 - точка подхода: то же, что и для точки ухода;
 - конечная точка: заданы скорость и ускорение (обычно нулевые).
6. Значения присоединенных координат должны лежать в пределах физических и геометрических ограничений каждого из сочленений манипулятора.

Таблица 10 - Ограничения на траекторию в пространстве присоединенных переменных

Начальная точка:

1. Положение (задано).
2. Скорость (задана; обычно нулевая).
3. Ускорение (задано; обычно нулевое).

Промежуточные точки:

4. Положение в точке ухода (задано).
5. Положение в точке ухода (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
6. Скорость (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
7. Ускорение (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
8. Положение в точке подхода (задано).
9. Положение в точке подхода (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
10. Скорость (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
11. Ускорение (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).

Конечная точка:

12. Положение (задано).
13. Скорость (задана; обычно нулевая).
14. Ускорение (задано; обычно нулевое).

7. При определении времени движения необходимо учесть следующее:

- время прохождения начального и конечного участков траектории выбирается с учетом требуемой скорости подхода и ухода схвата и представляет собой некоторую константу, зависящую от характеристик силовых приводов сочленений,
- Время движения по среднему участку траектории определяется максимальными значениями присоединенных скоростей и ускорений каждого из сочленений.

Для нормировки используется максимальное время, необходимое для прохождения этого участка траектории наиболее медленным сочленением.

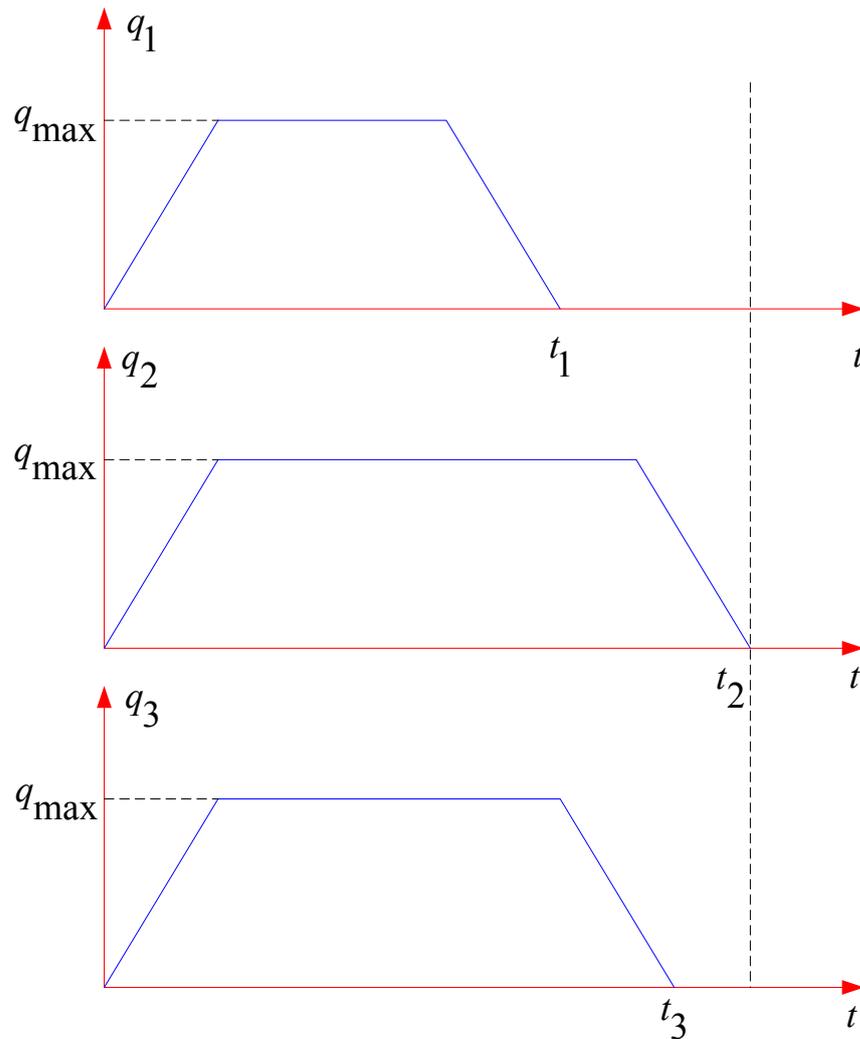


Рис. 42

Условия, которым должна удовлетворять типичная сглаженная траектория в пространстве присоединенных переменных, перечислены в Таблица 10. Требуется выбрать некоторый класс полиномиальных функций степени не выше n , позволяющих производить интерполяцию траектории по заданным узловым точкам (начальная точка, точка ухода, точка подхода, конечная точка), обеспечивающую выполнение условия непрерывности положения, скорости и ускорения на всем интервале времени $[t_o, t_f]$. Один из способов состоит в том, чтобы описать движение i -го сочленения полиномом седьмой степени:

$$q_i(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (177)$$

в котором неизвестные коэффициенты a_j определяются из заданных граничных условий и условий непрерывности. Однако использование такого полинома высокой степени обладает целым рядом недостатков. В частности, представляет трудность определение его экстремальных значений. Кроме

того, интерполяция полиномами высокой степени подвержена возникновению «биений» интерполирующей функции, обуславливающих бесполезные движения манипулятора. Альтернативный подход состоит в том, чтобы разбить траекторию движения на несколько участков, и каждый из этих участков интерполировать полиномом низкой степени. Существуют различные способы разбиения траектории на участки, каждый из которых обладает достоинствами и недостатками. Наиболее распространены следующие способы:

4-3-4-траектории. Траектория изменения каждой присоединенной переменной разбивается на три участка. Первый участок, задающий движение между начальной точкой и точкой ухода, описывается полиномом четвертой степени. Второй (средний) участок траектории между точкой ухода и точкой подхода описывается полиномом третьей степени. Последний участок траектории между точкой подхода и конечной точкой описывается полиномом четвертой степени.

3-5-3-траектории. Разбиение траектории на участки производится так же, как для 4-3-4-траекторий, но используются другие полиномы: первый участок описывается полиномом третьей степени, второй участок — полиномом пятой степени, последний участок — полиномом третьей степени.

Кубический сплайн. Используется кубический сплайн при разбиении траектории на пять участков.

Заметим, что все предыдущие рассуждения относятся к описанию траектории каждой присоединенной переменной, т. е. на три или на пять участков разбивается траектория каждой присоединенной переменной. Следовательно, число полиномов, используемых для полного описания 4-3-4-траектории N -звенного манипулятора, равно $N \times 3 = 3N$, а число подлежащих определению коэффициентов равно $7N$. При этом требуется еще определить экстремумы для всех $3N$ участков траекторий. В следующем разделе мы рассмотрим схемы планирования 4-3-4-траекторий и траекторий, задаваемых кубическими сплайнами.

7.4 Расчет 4-3-4-траектории

В связи с тем, что для каждого участка траектории требуется определить N траекторий присоединенных переменных, удобно воспользоваться нормированным временем $t \in [0, 1]$.

Это позволяет достичь единообразия уравнений, описывающих изменение каждой из присоединенных переменных на каждом участке траектории. При этом нормированное время будет изменяться от $t = 0$ (начальный момент для каждого из участков траектории) до $t = 1$ (конечный момент для каждого из участков траектории). Введем следующие обозначения:

t — нормированное время, $t \in [0, 1]$; τ — реальное время, измеряемое в

секундах; τ_i — момент (в реальном времени) окончания i -го участка траектории; $t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ — интервал реального времени, затрачиваемый на прохождение i -го участка траектории;

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}; \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]; \quad t \in [0, 1]. \quad (178)$$

Траектория движения j -й присоединенной переменной задается в виде последовательности полиномов $h_i(t)$. На каждом участке траектории для каждой присоединенной переменной используемые полиномы, выраженные в нормированном времени, имеют вид

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad (1\text{-й участок}), \quad (179)$$

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \quad (2\text{-й участок}), \quad (180)$$

$$h_n(t) = a_{n4}t^4 + a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0} \quad (\text{последний участок}). \quad (181)$$

Индекс u переменной, стоящей в левой части каждого из равенств, обозначает номер участка траектории; n -й участок — последний. Индексы в обозначении неизвестных коэффициентов a_{ij} имеют следующий смысл: i -й коэффициент для j -го участка траектории рассматриваемой присоединенной переменной. Граничные условия, которым должна удовлетворять выбранная система полиномов, следующие:

1. Начальное положение = $\theta_0 = \theta(t_0)$.
2. Значение начальной скорости = v_0 (обычно нулевое).
3. Значение начального ускорения = a_0 (обычно нулевое).
4. Положение в точке ухода = $\theta_1 = \theta(t_1)$.
5. Непрерывность по положению в момент t_1 (т.е. $\theta(t_1^-) = \theta(t_1^+)$).
6. Непрерывность по скорости в момент t_1 (т.е. $v(t_1^-) = v(t_1^+)$).
7. Непрерывность по ускорению в момент t_1 (т.е. $a(t_1^-) = a(t_1^+)$).
8. Положение в точке = $\theta_2 = \theta(t_2)$.
9. Непрерывность по положению в момент t_2 (т.е. $\theta(t_2^-) = \theta(t_2^+)$).
10. Непрерывность по скорости в момент t_2 (т.е. $v(t_2^-) = v(t_2^+)$).
11. Непрерывность по ускорению в момент t_2 (т.е. $a(t_2^-) = a(t_2^+)$).
12. Конечное положение = $\theta_f = \theta(t_f)$

13. Значение конечной скорости = v_f (обычно нулевое).

14. Значение конечного ускорения = a_f (обычно нулевое).

Т.е. имеется 14 ограничений для вычисления коэффициентов в точках пересечения трех участков траекторий.

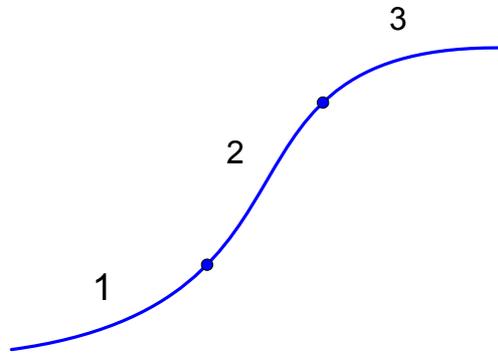


Рис. 43

Поскольку ограничивающий коэффициент 3 является свободным, т.е. не умножен на время, то остается 11 ограничений, и соответственно мы можем вычислить полиномы, включающие сумму 11 коэффициентов.

7.5 Планирование траектории в пространстве обобщенных координат для двух точек.

Команда GO.

Заданы начальная и конечная точки.

$$\begin{cases} \{q_1^i \dots q_n^i\} \\ \{q_1^{\hat{e}} \dots q_n^{\hat{e}}\} \end{cases}$$

Необходимо найти законы изменения каждой обобщенной координаты для перехода из начальной точки в конечную с учетом ограничений на скорость и ускорение.

$$|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_i^{\max}$$

$$|\ddot{q}_i| \leq \ddot{q}_i^{\max}$$

Команда GO выполняется, т.е. траектория является прямой и она разделена на три участка.

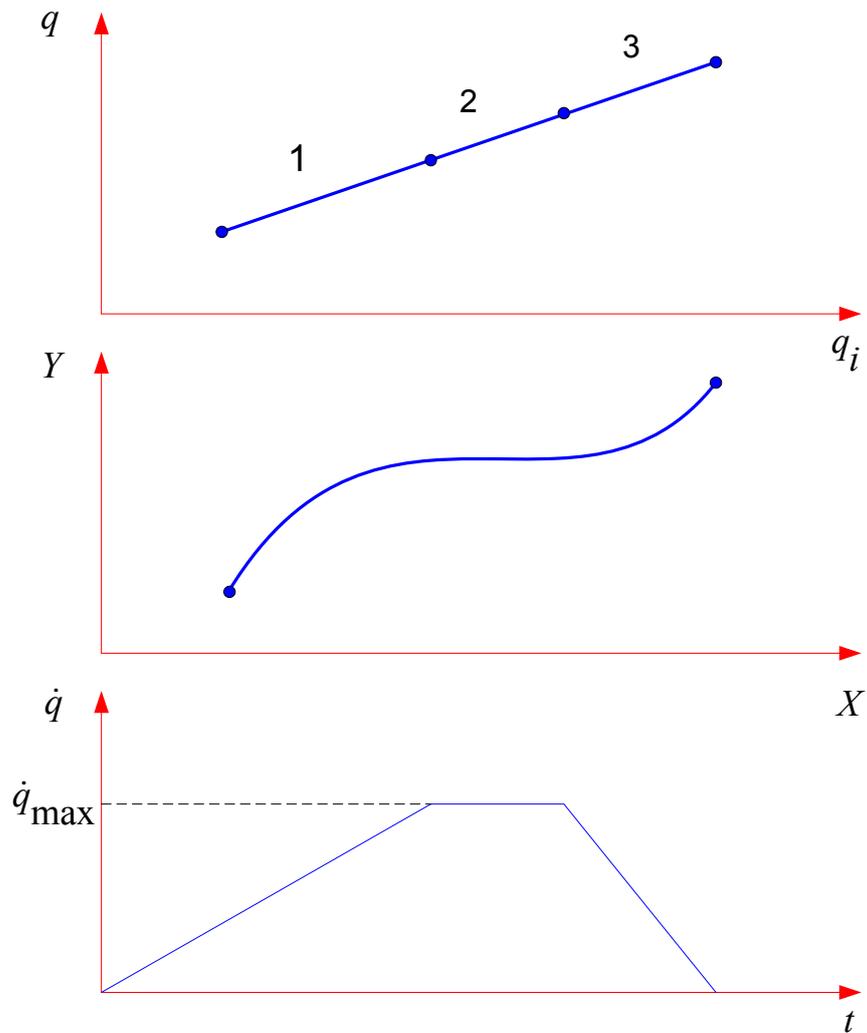


Рис. 44

I – разгон с $a = const$.

II – движение с $V = const$

III – торможение с постоянным ускорением.

Уравнение прямой I-II-III имеет вид:

$$q_i = q_i^{\hat{e}} + \alpha(t)[q_i^i - q_i^{\hat{e}}], \quad (182)$$

где q_i - координата в любой момент времени; $\alpha(t)$ - путь, который необходимо пройти до конца движения.

Поскольку все суставы начинают и заканчивают движения одновременно, то $\alpha(t)$ одинаково для всех суставов.

Задача сводится к нахождению законов изменения $\alpha(t)$.

$$\alpha(t^i) = 1$$

$$\alpha(t^{\hat{e}}) = 0$$

$$\dot{q}_i = \dot{\alpha}(t) [q_i^i - q_i^{\hat{e}}]$$

$$\ddot{q}_i = \ddot{\alpha}(t) [q_i^i - q_i^{\hat{e}}]$$

Поскольку \dot{q} ограничен максимальной скоростью, то:

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq \frac{\dot{q}_i^{\max}}{|q_i^i - q_i^{\hat{e}}|}$$

$$|\ddot{\alpha}(t)| \leq \frac{\ddot{q}_i^{\max}}{|q_i^i - q_i^{\hat{e}}|}$$

Требуется найти наилучший вариант $\dot{\alpha}(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$ и принять его для решения задачи.

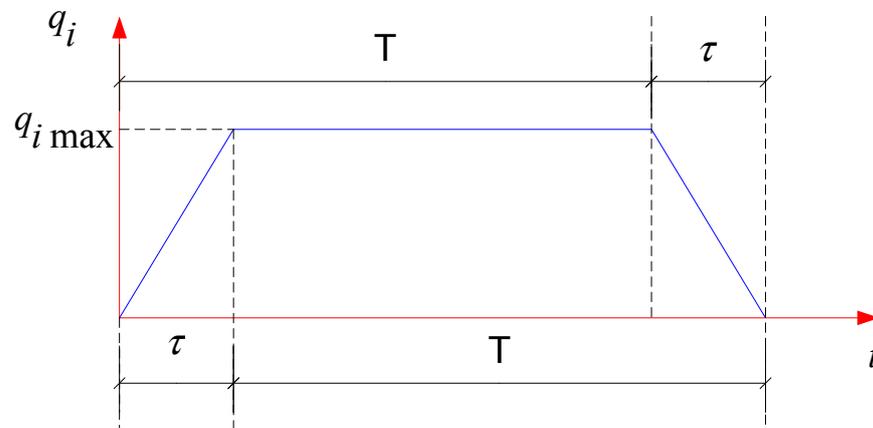


Рис. 45

$\dot{\alpha}(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$ будут определять время с постоянной скоростью и время разгона. Далее будем оперировать T и τ .

$$T_i = \frac{(q_i^K - q_i^H)}{\dot{q}_i^{\max}} \quad (183)$$

$$\tau = \frac{\dot{q}_i^{\max}}{\ddot{q}_i^{\max}} \quad (184)$$

И в случае не трапецидального, а треугольного профиля:

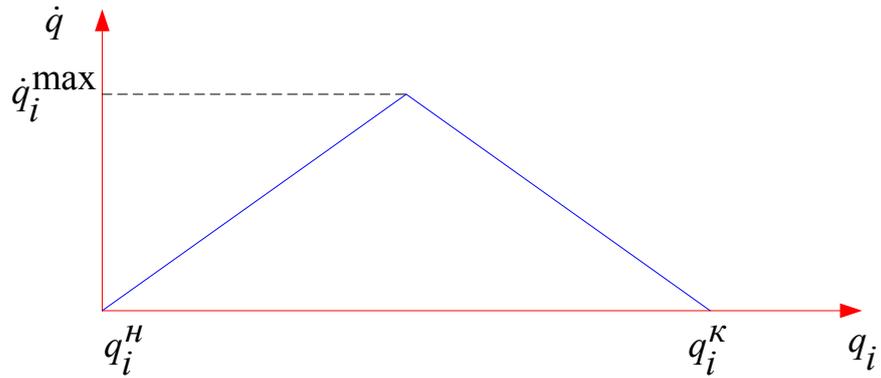


Рис. 46

$$T_i = \tau = \sqrt{\frac{(q_i^{\hat{e}} - q_i^i)}{\dot{q}_i^{\max}}} \quad (185)$$

Треугольный профиль получается когда при заданном ускорении суставов не успевает развить максимальную скорость. После того как вычислили T и τ для каждого сустава выбираем максимальное значение T из всех суставов:

$$T = \max\{T_{\min}, T_1, \dots, T_n\}.$$

И поэтому оно должно быть не меньше T_{\min} , которое равно двум периодом дискретизации.

Аналогично вычисляем τ .

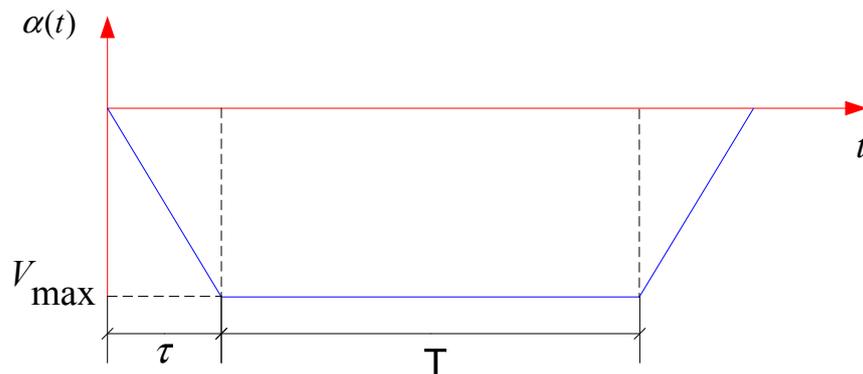


Рис. 47

Максимальная скорость $V_{\max} = \frac{1}{T}$, ускорение $a = \dot{V}_{\max} = \frac{1}{T\tau}$.

Величины T и τ определяются в целых числах, как число периодов дискретизации верхнего уровня.

Закон изменения $\alpha(t)$ распишем для трех участков: ускорения,

равномерного движения и торможения.

$0 \leq t < \tau$ - ускорение (разгон).

$$\alpha(t) = 1 - \frac{1}{2T\tau} t^2$$

$\tau \leq t < T$

$$\alpha(t) = \alpha(\tau) - \frac{1}{T}(t - \tau) = 1 + \frac{\tau}{2T} - \frac{t}{T}$$

$T \leq t \leq T + \tau$ - торможение.

$$\alpha(t) = \alpha(\tau) + \frac{1}{2T\tau}(t - \tau)^2$$

7.6 Алгоритм интерпретации команды GO.

1. Для каждого сустава вычисляем $\Delta q_i, \dot{q}_i^{\max}, \ddot{q}_i^{\max}$.
2. Исходя из этих данных строится предельная трапеция для каждого сустава, т.е. профиль скорости для каждого сустава.
3. По суставу, требующего наибольшего время на перемещение, определяется время за которое будет выполняться команда GO. параметры T и τ для каждого сустава будет выбрана в качестве параметров $\alpha(t)$. При движении из начальной точки в каждую $\alpha(t)$ рассчитывается по приведенным формулам.

Даже с учетом полученных $\alpha(t)$ с периодам дискретизации верхнего уровня решается уравнение прямой

$$q_i = q_i^{\hat{e}} + \alpha(t)[q_i^i - q_i^{\hat{e}}] \quad (186)$$

- полученные значения подаются на вход СУ.
- на нижнем уровне для получения траектории используется параболическая интерполяция.

Замечание:

1. В некоторых СУ имеется возможность изменять максимальную скорость и ускорение для каждого сустава.
2. Для манипулятора РМ 01 имеется возможность одновременно изменять скорость для всех суставов.

7.7 Планирование траектории в пространстве декартовых координат.

Команда GO.

При решении задач планирования в пространстве декартовых координат отдельно решается задача планирования для координат XYZ и отдельно для углов OAT .

Рассмотрим для XYZ .

Изменение координат XYZ при движении по прямой будет происходить по следующему закону:

$$\begin{cases} x(t) = x^{\hat{e}} + \alpha(t)[x^i - x^{\hat{e}}] \\ y(t) = y^{\hat{e}} + \alpha(t)[y^i - y^{\hat{e}}] \\ z(t) = z^{\hat{e}} + \alpha(t)[z^i - z^{\hat{e}}] \end{cases} \quad (187)$$

(187) – параметры уравнения прямой в декартовом пространстве, которое используется в случае команды GOS.

В этих уравнениях $\alpha(t)$ изменятся от единицы до нуля и профиль скорости также будет состоять из интервалов разгона, движения с постоянной скоростью и торможения.

Параметры T и τ для траектории $\dot{\alpha}(t)$ находят, как и в предыдущем случае.

$$T = \max\{T_{\min}, T_0, T_1, \dots, T_n\} \quad (188)$$

$$\tau = \max\{\tau_{\min}, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \quad (189)$$

T_0, τ_0 - определяют исходя из ограничений на минимум скорости и ускорения схвата манипулятора на траекторию.

Если профиль скорости трапецевидный:

$$T_0 = \frac{\Delta S}{\dot{S}_{\max}}, \tau_0 = \frac{\dot{S}_{\max}}{\ddot{S}_{\max}}, \text{ при } \Delta S \geq \frac{\dot{S}_{\max}^2}{\ddot{S}_{\max}} \quad (190)$$

Если профиль скорости треугольный:

$$T_0 = \tau_0 = \sqrt{\frac{\Delta S}{\ddot{S}_{\max}}}, \text{ при } \Delta S < \frac{\dot{S}_{\max}^2}{\ddot{S}_{\max}} \quad (191)$$

ΔS - путь, пройденный схватом в декартовом пространстве.

\dot{S}_{\max} - максимальная линейная скорость схвата.

\ddot{S}_{\max} - максимальное линейное ускорение схвата.

Значение T_1, \dots, T_n и τ_1, \dots, τ_n вычисляются, как и для команды GO.

7.8 Планирование для углов OAT .

Два метода:

- метод трех углов;
- метод двух углов.

Для метода трех углов используется следующее выражение:

$$\begin{cases} O(t) = O^{\hat{e}} + \alpha(t)[O^i - O^{\hat{e}}] \\ A(t) = A^{\hat{e}} + \alpha(t)[A^i - A^{\hat{e}}] \\ T(t) = T^{\hat{e}} + \alpha(t)[T^i - T^{\hat{e}}] \end{cases} \quad (192)$$

Недостаток метода в том, что вектор ориентации Z_{tool} перемещается из начального в конечное положение не по кратчайшему пути, при этом возникает большие маховые движения инструмента, поэтому чаще используется метод двух углов, который предполагает, что движение планируется во вспомогательной системе координат. При этом ось ориентации инструмента Z_{tool} перемещается в плоскость.

Порядок планирования во втором случае:

1. Вводится дополнительная система координат, описываемая соотношением

$$R_z(\gamma) R_x(\gamma_1)$$

R_z, R_x - матрицы поворота вокруг осей Z и X .

γ, γ_1 - это параметры, зависящие от начальной и конечной ориентации вектора Z_{tool} .

Т.е. ось X вспомогательной системы координат лежит в плоскости XU мировой системы координат, а ось U вспомогательной системы координат лежит перпендикулярно осям $Z^i_{tool}, Z^{\hat{e}}_{tool}$.

2. Определяются величины углов L, R , которые определяют ориентацию инструмента во вспомогательной системе координат.
3. По соотношению

$$\begin{cases} L(t) = L^{\hat{e}} + \alpha(t)[L^i - L^{\hat{e}}] \\ R(t) = R^{\hat{e}} + \alpha(t)[R^i - R^{\hat{e}}] \end{cases}$$

определяют законы изменения $L(t), R(t)$. После чего производится перемещение в мировую систему координат.

$$T(t) = R_z(\gamma)R_x(\gamma_1)R_y[R^{\hat{e}} + \alpha(t)(R_1 - R_{\hat{e}})]R_z(L^{\hat{e}} + \alpha(t)[L^i - L^{\hat{e}}]) \quad (193)$$

7.9 Планирование сглаживание траектории.

Рассмотри методы планирования траектории позволяющих построить траектории с остановками в узловых точках.

Чтобы исполнить остановку манипулятора в узловых точках допускается сглаживание траектории и как следствие отклонение реальной траектории от требуемой. Основная идея планирования такой траектории заключается в совмещении интервала торможения предыдущего участка с интервалом разгона для последующего.

В общем случаи такое совмещение осуществляется для профиля скорости параметра $\alpha(t)$.

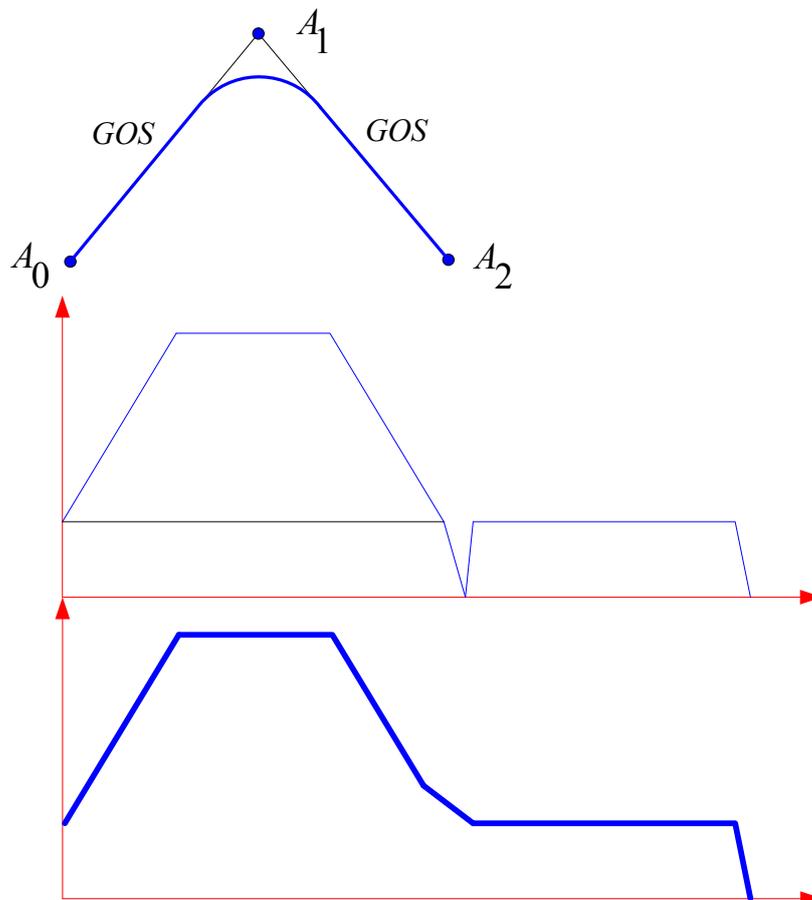


Рис. 48

Первые две траектории определяют $\dot{\alpha}(t)$ для каждого из участков в отдельности и третья траектория определяет сглаженную траекторию состоящую из двух прямых.

Совмещение углов разгона и торможения может быть как полным, так и частичным. тут все зависит от СУ.

Алгоритм интерпретации команды GOS:

1. Для каждого сустава задаются $\Delta q_i, \dot{q}_i^{\max}, \ddot{q}_i^{\max}$. Также известно, что схват должен двигаться из начального положения в конечное, по прямой с заданной скоростью.
2. Время выполнения команды определяется по наиболее ~~~~ суставу и при его нахождении учитывается линейная скорость схвата. Параметры T, τ используются для определения закона изменения $\alpha(t)$.
3. На верхнем уровне СУ решается параметрическое уравнение прямой и через обратную задачу кинематики формируется управление сигналом на вход СУ приводом.
4. На нижнем уровне решается задача интерполяции полинома низкой степени.

8 Учебно-методические материалы по дисциплине

8.1 ОСНОВНЫЕ

5. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника.-М.: Мир, 1989.-624 с.
6. Шахинпур М. Курс робототехники.-М.: Мир, 1990.-527 с.
7. Лабораторный практикум по курсу «Системы управления промышленными роботами» для студентов специальности Т. 11.01.00 «Автоматическое управление в технических системах».- Мн.: БГУИР, 2000.-51с.
8. Программа, методические указания и контрольные задания по курсу "Управление промышленными роботами". Составители Фурман Ф.В., Юркевич Ю.Л., МРТИ, 1993.

8.2 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ

1. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора.-М.: Наука, 1976.-104 с.
2. Робототехника и гибкие автоматизированные производства. В девяти книгах.-М.: Наука, 1986.
3. Справочник по промышленной робототехнике. В двух книгах.-М.: Машиностроение. 1989.
4. Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н. Проектирование манипуляторов, промышленных роботов и роботизированных комплексов. Учебное пособие.-М.: Высш.школа, 1986.-264 с.