1. Один фермер сварил сыр в виде неправильной прямой пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой в два раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Во сколько раз один фермер понёс ущерб больший, чем второй? $(4{,}5)$

2. Во Франции, расстояние (по воздуху) от Шалона до Витри равно 30 км, от Витри до Шомона — 80 км, от Шомона до Сэн-Кэнтэна — 236 км, от Сэн-Кэнтэна до Реймса — 86 км, от Реймса до Шалона — 40 км. Найти расстояние (в км) от Реймса до Шомона. (150)

3. Сколько положительных чисел среди первых ста членов последовательности $\cos 1^\circ$, $\cos 5^\circ$, $\cos 10^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\cos 500^\circ$, $\cos 1000^\circ$, $\cos 5000^\circ$, $\cos 10000^\circ$, $\cos 50000^\circ, \ldots$? (98)

4. Пусть x, y, z — положительные действительные числа, такие, что $x^2+y^2+z^2=25$. Найти минимальное значение выражения $f=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$. $(5\sqrt{3})$

5. Сколько существует квадратных уравнений $x^2-px-q=0$ (p и q — натуральные), имеющих положительный корень, который не превышает 6. (90)

6. Из произведения $1!2!3!\ldots100!$ ста факториалов вычеркнуть один сомножитель так, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа. В ответ записать число, факториал которого вычеркнут. (50)

7. Решить уравнение $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^{y/x}+1}{\left(x^2-y^2\right)^{y/x}-1}$ во множестве натуральных чисел. В ответ записать сумму всех значений x и y. (4)

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ площадью 1. На сторонах AB и CD отмечены точки A', B' и C', D' так, что $\dfrac{|AA'|}{|AB|}=\dfrac{|CC'|}{|CD|}=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{|BB'|}{|AB|}=\dfrac{|DD'|}{|CD|}=\dfrac{1}{3}$. Определить площадь четырёхугольника $A'B'C'D'$. $(\dfrac{7}{15})$

9. Даны матрицы A и B. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=\left(A^{-1}\right)^{2013}B^{2014}$. В ответ записать элемент, стоящий в первой строке и третьем столбце матрицы D, т.е. d_{13}. (-2025078)

10. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 10 & 6 & 4 & 2 & -1 & -2 & 9 & -4 \\ 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 11 & 1 & -1 & 2 & -1 & -4 & 8 & -2 \\ 4 & 4 & 7 & 3 & 2 & 6 & -2 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}.$$

(8820)

11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -15, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 15, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = -6. \end{cases}$$

В ответ записать значение x_3. (-3)

12. Определить поверхность, которую описывает прямая, скользящая по трём прямым: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$. В ответ записать сумму модулей коэффициентов при x^2, y^2, z^2 в общем уравнении поверхности. (9)

13. Составить уравнение поверхности круглого конуса, касающегося трёх плоскостей координат, зная, что ось его проходит в первом и седьмом октантах. В ответ записать сумму модулей коэффициентов полученного уравнения. (9)

14. Вычислить $\int\limits_2^5 x^{\frac{1}{\ln x}} dx$. ($3e$)

15. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$. ($-\frac{\pi^2}{6}$)

16. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. ($\frac{\pi}{2e}$)

17. Решить уравнение $f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x\right)$, где $f\left(x\right) = 2^{-\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x} - 19$. (-3)

18. Определим последовательность $\left(a_n\right)$ следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$ при $n \ge 3$. Найти a_{2012}. (1013042)

19. Найти $\lim\limits_{k \to 0} \int\limits_{-1}^1 \frac{k}{k^2 + x^2} \cdot \frac{x^3 + 3x^2 + 10}{\operatorname{tg}^2 x + 3} dx$. ($\frac{10\pi}{3}$)

20. На прямой расположены десять точек с абсциссами $A_1(2)$, $A_2(5)$, $A_3(6)$, $A_4(8)$, $A_5(9)$, $A_6(12)$, $A_7(15)$, $A_8(16)$, $A_9(18)$, $A_{10}(20)$. В этих точках сосредоточены массы соответственно $m_1 = 10$, $m_2 = 15$, $m_3 = 7$, $m_4 = 20$, $m_5 = 23$, $m_6 = 40$, $m_7 = 15$, $m_8 = 13$, $m_9 = 13$, $m_{10} = 18$. Массы транспортируются к некоторой из точек A_k ($k = \overline{1;10}$). Стоимость транспортировки единицы массы на единицу пути равна γ. В какую точку A_k нужно транспортировать массы, чтобы стоимость транспортировки была наименьшей. В ответ записать k. (6)

21. При каком натуральном k величина $\alpha_k = \dfrac{k^2}{1{,}001^k}$ достигает максимального значения? (2001)

22. Пусть $S_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\ldots+\dfrac{2^n}{n}\right)$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. В ответ записать $8\cdot\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. ($8$)

23. Вычислить сумму $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{624}\right]$, где — целая часть числа x. (10100)

24. Найти частное решение уравнения $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 4$. В ответ записать значение y при $x = 0$. ($\dfrac{15}{8}$)

25. Найти площадь образа при отображении прямоугольника $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ функцией e^z. ($0{,}25\pi\left(e^2-1\right)$)

26. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \left(1 - z + 2z^2\right)\sin\dfrac{1}{z^2}$. В ответ записать коэффициент при пятом члене ряда (при z^{-5}). ($\dfrac{1}{6}$)

27. В шахматном турнире участвовало два преподавателя и несколько студентов первого курса. Каждый играл с каждым ровно один раз. Два преподавателя набрали вместе восемь очков, а все студенты набрали очков поровну. Сколько студентов участвовало в турнире, если число студентов больше, чем число очков, набранных преподавателями? (При игре за победу даётся 1 очко, за ничью — $\dfrac{1}{2}$ очка, за проигрыш — 0 очков). (14)

28. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестёрку для запряжки так, чтобы в неё вошли три лошади из шестёрки $ABCA'B'C'$, но ни одна из пар AA', BB', CC'? (691200)

29. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n\left(n^2+4n+3\right)}{n!}$. ($17e^2$)

30. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{n}{2^{|n|}}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. ($\dfrac{1440}{49}$)