

1. (3) Решить уравнение  $x^3 - [x] = 3$ , где  $[x]$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . В ответ записать  $x_0^3$ ,  $x_0$  — решение уравнения.

Ответ: 4.

2. (9) При каком значении  $k$  величина  $A_k = \frac{19^k + 66^k}{k!}$  — максимальна.

Ответ: 65.

3. (10)  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что  $a_{a_k} = 3k$  для любого  $k$ . Найти  $a_{100}$ .

Ответ: 181.

4. (5) Задано правило, которое каждой паре чисел  $x, y$  ставит в соответствие некоторое число  $x * y$ , причём для любых  $x, y, z$  выполняются тождества  $x * x = 0$ ,  $x * (y * z) = (x * y) + z$ . Найти  $2012 * 1917$ .

Ответ: 95.

5. (10) Функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[0, 1]$  и в каждой точке этого отрезка имеет первую и вторую производную. Известно, что  $f(0) = f(1) = 0$  и что  $|y''| \leq 1$  на всём отрезке. Какое наибольшее значение  $y_{\max}$  может принимать максимум функции  $f$  для всевозможных функций, удовлетворяющих этим условиям? В ответ записать  $24y_{\max}$ .

Ответ: 3.

6. (6) Вычислить  $I = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx$ . В ответ записать  $\frac{12}{\pi} \cdot I$ .

Ответ: 6.

7. (7) Согласно справочнику Гугла, 1 фунт равен 0,45359237 кг. Найти простую дробь с минимальным числителем и знаменателем, значение которой отличается от этой десятичной дроби менее чем на  $2 \cdot 10^{-5}$ . В ответ записать сумму числителя и знаменателя.

Ответ: 141.

8. (5) Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь контуры двух четырёхугольников?

Ответ: 16.

9. (10) Найти наименьшее значение суммы  $S = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}$ , если числа  $x, y, z$  — неотрицательны и  $x + y + z = 1$ . В ответ записать  $2S^2$ .

Ответ: 20.

10. (10) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} y$ , если  $y = \frac{1}{n} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$ . В ответ записать  $2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} y$ .

Ответ: 4.

11. (6) Вычислить сумму ряда  $S = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$ . В ответ записать

$$\frac{32}{\pi^2} \cdot S.$$

Ответ: 4.

12. (5) Вычислить  $I = \int_{-9}^9 \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}}$ , где  $f(x)$  — нечётная функция. В ответ

записать  $3I$ .

Ответ: 27.

13. (6) Вычислить площадь  $S$  фигуры, ограниченной линиями  $\varphi = 0$  и  $\varphi = -r^3 + 4r$  в полярной системе координат. В ответ записать  $15S$ .

Ответ: 64.

14. (6) Найти  $8f^{(6)}(3)$ , если  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ .

Ответ: 11475.

15. (6) Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} & \frac{4}{15} & 9 & 1 \\ 7 & 10 & 8 & 9 & -4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{17}{20} & 3 & \frac{1}{2} \\ 28 & 24 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ . Найти  $\det A$ . В ответ записать

$20 \det A$ .

Ответ: 0.

16. (10) В торговое помещение вместимостью  $10000 \text{ м}^3$  втекает через вентиляторы в 1 мин  $1000 \text{ м}^3$  свежего воздуха, содержащего  $0,04\%$   $\text{CO}_2$ . В 9 часов утра в помещение входят служащие и через 30 мин содержание  $\text{CO}_2$  в воздухе повышается до  $0,12\%$ . Какой процент  $p$   $\text{CO}_2$  можно ожидать в воздухе к двум часам дня, округлив до  $10^{-3}$ ? В ответ записать  $1000p$ .

Ответ: 124.

17. (10) Оценить сверху интеграл  $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 9} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-\sqrt{3})^2}}$ .

Ответ: 36.

18. (10) Найти работу  $A$  силы притяжения к неподвижному центру  $M_1(1, 4, 2)$  массой  $m_1 = 5$  ед., если точка  $M_2(-1, 2, 3)$  массой  $m_2 = 2$  ед. перемещается из  $M_2$  в  $M_1$ . В ответ записать  $\frac{6}{\gamma} \cdot A$ , где  $\gamma$  — постоянная тяготения.

Ответ: 20.

19. (5) Вычислить интеграл  $I = \oint_L (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz$ , где  $L$  — контур треугольника  $ABC$  с вершинами  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  и  $C(0, 3, 0)$ .

Ответ: 5.

21. (8) Найти сумму  $S = 1 - C_{50}^2 + C_{50}^4 - C_{50}^6 + C_{50}^8 - \dots - C_{50}^{50}$ . В ответ записать  $10S$ .

Ответ: 0.

21. (3) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 128.

22. (3) Найти матрицу  $X$  из уравнения  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . В ответ записать сумму элементов матрицы  $X$ , умноженную на  $-1$ .

Ответ: 15.

23. (4) Найти сумму квадратов всех корней многочлена  $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ . В ответ записать сумму квадратов при  $a_1 = 5$  и  $a_2 = 2$ .

Ответ: 21.

24. (10) Найти радиус  $R$  окружности, на которую функция  $w = \frac{z - 4 - i}{z - 1 + 3i}$  отображает действительную ось. В ответ записать  $12R$ .

Ответ: 10.

25. (5) Найти координаты центра кривой  $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ . В ответ записать их сумму.

Ответ: 12.

26. (6) Вероятность выигрыша по одному билету лотереи  $p = 0,01$ . Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей  $0,95$ ? В ответ записать наименьшее число билетов.

Ответ: 300.

27. (3) Найти все целые значения  $x$ , такие, что  $2x^2 - x - 36$  является квадратом простого числа. В ответ записать их сумму.

Ответ: 18.

28. (3) С какой скоростью  $V$  возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус круга  $R = 10$  см, если радиус растёт равномерно со скоростью 2 см/сек. В ответ записать  $\frac{1}{\pi} \cdot V$ .

Ответ: 40.

29. (6) Пусть функция  $y = y(x)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{d}{dx} \left( y(x) - x \int_0^3 y(x) dx \right) = y(x)$

и условию  $y(0) = 3$ . Найти значение выражения  $y(3) + \frac{47 - 19e^3}{5 - e^3}$ .

Ответ: 10.

30. (10) Пёс и хозяин оказались на противоположных берегах реки один напротив другого. Пёс бросился в воду и поплыл, всё время держа курс на хозяина, со скоростью 2 км/ч. Скорость течения реки постоянна. Хозяин заметил, что собаку перестало сносить течением,

лишь тогда, когда она переплыла  $\frac{2}{3}$  ширины реки, и что, переплывая реку, пёс затратил на 5 мин больше, чем в стоячей воде. Найти ширину реки. Ответ записать в метрах.

Ответ: 500.