

Л. Л. Ключев

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

*Утверждено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов учреждений, обеспечивающих
получение высшего образования по специальностям
«Сети телекоммуникаций», «Многоканальные системы
телекоммуникаций», «Системы радиосвязи, радиовещания
и телевидения», «Защита информации в телекоммуникациях»*



Минск
«Техноперспектива»
2008

УДК 621.391 (075.8)

ББК 32.88-01я 73

К 52

Рецензент:

кафедра сетей и устройств телекоммуникаций Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (зав. каф. – д-р техн. наук, проф. *В. К. Конопелько*)

Клюев, Л. Л.

К 52 Теория электрической связи : учебник / Л. Л. Клюев. – Минск : Техноперспектива, 2008. – 423 с.

ISBN 978-985-6591-58-0.

В учебнике изложены вопросы теории электрической связи, освещены принципы построения систем электросвязи, дан анализ сообщений, сигналов и помех и их математических моделей, рассмотрены методы формирования и преобразования сигналов в системах электросвязи, основы теории передачи и кодирования сообщений, основы теории помехоустойчивости и эффективности систем электросвязи.

Предназначен для студентов высших учебных заведений, слушателей курсов повышения квалификации, специалистов народного хозяйства.

УДК 621.391 (075.8)

ББК 32.88-01я 73

ISBN 978-985-6591-58-0

© Клюев Л. Л., 2008

© ЗАО «Техноперспектива», 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге изложены теоретические основы электрической связи (электросвязи), которые являются базовыми для подготовки инженеров по специальностям: «Сети телекоммуникаций», «Многоканальные системы телекоммуникаций», «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения», «Защита информации в телекоммуникациях».

В основу содержания книги положено исправленное, переработанное и дополненное автором учебное пособие изданное в 1998 г.

Значительное внимание в книге уделено физическому толкованию понятий и математическим выкладкам. Объем сведений из курса высшей математики, читаемого на первом и втором курсах вузов, достаточен для понимания излагаемого материала. Усвоению материала способствует включение в некоторые главы задач. Математический анализ доведен до соотношений, позволяющих производить инженерные расчеты. Для закрепления материала каждая глава содержит контрольные вопросы.

Автор выражает благодарность администрации Высшего Государственного Колледжа Связи и факультета повышения квалификации за созданные условия для написания книги, а также сотрудникам кафедры последипломого образования и студентам, которые принимали участие в подготовке электронного варианта рукописи.

Автор признателен коллективу кафедры сетей и устройств телекоммуникаций Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, заведующему кафедрой, доктору технических наук В. К. Конопелько и рецензентам – кандидату технических наук, доценту М. Ю. Хоменку, кандидату технических наук, доценту И. И. Астровскому за обсуждение рукописи и высказанные замечания.

ВВЕДЕНИЕ

Теория и техника электросвязи (далее в тексте – связи) связаны с открытиями, которые были сделаны в начале XIX века.

В 1800 г. А. Вольта создал химический источник тока. Открытие, сделанное в 1820 г. Г. Х. Эрстедом, касалось способности электрического тока отклонять магнитную стрелку. В том же году А. М. Ампер предложил использовать магнитное действие электрического тока для передачи по проводам буквенного текста. В 1831 г. М. Фарадей открыл закон электромагнитной индукции, устанавливающий связь между электрическими и магнитными возмущениями. С. Б. Якоби в 1839 г. предложил пишущий телеграфный аппарат с записью сигнала в виде ломаной линии. С. Морзе создал в 1844 г. конструкцию более совершенного телеграфного аппарата и предложил телеграфную азбуку, в которой буквы обозначались комбинацией точек и тире. Эта азбука используется и до сих пор.

В России первая линия связи с пишущим телеграфным аппаратом была введена в 1841 г. между Зимним дворцом и Главным штабом в Петербурге, а в США – в 1844 г. между Вашингтоном и Балтимором.

Развитие телеграфа послужило толчком к появлению телефона. Первый опыт использования электричества для передачи речи на расстояние относится к 1837 г. Спустя 40 лет А. Г. Белл запатентовал телефон. Для передачи речи вначале использовались телеграфные линии, но качество принимаемых сообщений было низкое. Поэтому началось строительство специальных двухпроводных телефонных линий. Одна из таких линий была построена в 1898 г. между Петербургом и Москвой.

Начало внедрения телефонной связи в нашей республике относится к 1891 году, когда в г. Минске был установлен первый телефон. Строительство телефонной сети общего пользования началось в 1896 г.

Теоретические основы радиосвязи были разработаны Д. К. Максвеллом. В его работе «Трактат об электричестве и магнетизме», опубликованной в 1873 г., впервые сформулирован важный для практического использования вывод: любой проводник, по которому протекает переменный ток, излучает в пространство электромагнитные волны, которые распространяются со скоростью света. Экспериментально это было подтверждено Г. Герцом в 1888 г. Он осуществил излучение электромагнитных волн в пространство и обнаружил их при помощи простейшего резонатора.

Впервые передача сообщения на расстояние с помощью электромагнитных волн была продемонстрирована в 1895 г. А. С. Поповым при помощи разработанного для этой цели приемника. Позднее, в 1899 г., им была организована радиосвязь на линии протяженностью в 52 км.

Увеличение дальности связи и повышение ее качества стало возможным благодаря изобретению диода А. Флемингом (1904 г.) и триода Л. Д. Форестом (1906 г.). Эти изобретения положили начало развитию электроники.

Первая в мире радиовещательная станция мощностью 12 кВт была построена в 1922 г. в Москве. Позднее была построена радиостанция РВ-10 в Минске. Радиопередачи на этой радиостанции начались в 1925 г. Развитие радио стимулировало рождение нового средства для передачи информации – телевидения. Первые прототипы телевизионной техники, в которых были реализованы два конкурентных принципа – механический и электронный, появились в двадцатых годах XX века. Механический не выдержал испытания временем, а первые экспериментальные телевизионные передачи с применением электронного способа начались в 1929 г. Через семь лет на Би-би-си в Англии организуется постоянная телевизионная служба. Телевидение в нашей республике развивается с 1955 г. Первая телепередача транслировалась из Минска 1 января 1956 г.

Рождение ЭВМ, связанное с именем Дж. Неймана (1947 г.), оказало существенное влияние на развитие систем передачи информации. ЭВМ и микропроцессоры становятся неотъемлемой частью различных сетей и систем, обеспечивая им требуемые качественные показатели и удобство обслуживания.

Запуск первого искусственного спутника Земли 4 октября 1957 г. открывает новую страницу в развитии теории и техники связи. На околоземные орбиты начали выводить специальные спутники с аппаратурой, обеспечивающей: передачу информации на большие расстояния (телевизионных программ, многоканальных телефонных сигналов, сигналов передачи данных и т. д.); охват значительных территорий вещательными и телепрограммами; связь между абонентами, находящимися в любой точке Земного шара.

1958 г. ознаменовался изобретением лазера. С появлением первых промышленных образцов лазера (1961 г.) делаются попытки его внедрения в системы связи. Успех сопутствовал сотрудникам из лаборатории

телекоммуникационных стандартов в Харлоу (Англия). Они предложили для передачи светового сигнала использовать длинные оптические волокна, что послужило началом развития теории и техники волоконно-оптической связи. Применение лазера и направляющей среды – оптического волокна позволило существенно увеличить скорость и достоверность передачи информации, а связь сделать более надежной.

Теория электрической связи – интенсивно развивающаяся область науки. Фундаментом этой науки являются работы выдающихся ученых. Имена некоторых из них названы выше.

Значительный вклад в современную теорию связи внесли также А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин (разработали основы математического аппарата); В. А. Котельников (создал теоретические основы цифровых систем передачи информации, разработал теорию потенциальной помехоустойчивости); К. Э. Шеннон (создал теорию кодирования для повышения качества передачи сообщений).

Дальнейшее развитие теория связи получила в работах А. А. Харкевича, В. И. Сифорова, Х. Найквиста, Р. Хартли, Н. Винера, Ф. М. Вудворда, Я. З. Ципкина и других ученых.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СВЯЗИ

1.1. ИНФОРМАЦИЯ, СООБЩЕНИЕ, СИГНАЛ

В данной книге под словом «*информация*» будем понимать сведения, которые описывают то или иное событие или свойство какого-либо объекта. Когда эти сведения становятся объектом передачи, распределения, преобразования, хранения или непосредственного использования, то они могут быть представлены в виде символов (знаков) или в каком-либо другом виде, например в виде фотографии, рисунка, произнесенных слов, выражающих мысль говорящего, и т. д.

Сообщение является формой представления информации. Одно и то же сообщение может быть представлено в различной форме. Например, сведения о вашем приезде можно сообщить по телефону или телеграммой. Сообщение, которое передается телеграммой, кроме информационной части, из которой получателю становится известным день и время приезда, номер поезда и вагона, содержит также сведения, позволяющие доставить это сообщение в нужное время и по указанному адресу.

Телефонное сообщение с той же информацией содержит, кроме речи, сведения для установления и разъединения тракта передачи.

Сообщение, передаваемое по сети связи, таким образом, содержит информационную и дополнительную (вспомогательную) часть, позволяющую доставить сообщение.

Различают *аналоговые* и *дискретные* сообщения. Аналоговое сообщение описывается функцией времени и непрерывным множеством возможных значений. Источник, на выходе которого вырабатывается непрерывное

по значениям сообщение, называется *аналоговым*. Дискретное сообщение также является функцией времени (дискретного или непрерывного) и принимает конечное число возможных значений. Источник, на выходе которого вырабатывается дискретное сообщение, называется *дискретным*.

Передача сообщений на расстояние осуществляется с помощью какого-либо материального носителя (бумаги, перфоленты, магнитной ленты и т. д.) или физического явления (электрического тока, звукового, электромагнитного поля и т. д.). Физический процесс (колебания электрического тока или напряжения, звуковые и электромагнитные волны), один или несколько параметров которого изменяются случайно в соответствии с передаваемым случайным сообщением или детерминированно (по заранее заданному закону), называется *сигналом*. Сигнал при его передаче по каналу связи подвергается различным преобразованиям. Преобразование одного (преобразуемого) сигнала в другой (преобразованный) путем изменения параметров третьего сигнала (*переносчика* или *носителя* сообщения) называется *модуляцией*. Особенностью сигнала переносчика является постоянство его параметров до передачи и их изменение в соответствии с сообщением при передаче. Преобразуемый сигнал называется *модулирующим*, а сигнал переносчик – *модулируемым*. Поскольку сообщение является случайным по своей природе, т. е. непредсказуемым для получателя, модулирующий и модулированный сигналы являются *случайными*.

Модулирующий сигнал, полученный непосредственным преобразованием сообщения, называется *первичным*. Примером первичного сигнала является электрический ток на выходе микрофона. Преобразованный сигнал на выходе модулятора по отношению к преобразованному первичному сигналу называется *вторичным*.

В системах связи, кроме случайных сигналов, находят применение также неслучайные (*детерминированные*) сигналы, используемые для настройки, управления или контроля. Эти сигналы являются физическими процессами с постоянными или с изменяющимися по известному закону параметрами. По этой причине они никакой информации не несут. Однако при прохождении по каналам связи принимаемые сигналы становятся носителями информации. Эту информацию можно извлечь, измеряя отклонения параметров принимаемого сигнала от параметров передаваемого. Они возникают из-за каких-то нарушений в работе аппаратуры или изменений показателей качества и параметров системы связи.

Параметр сигнала переносчика, отображающий изменения передаваемого сообщения, называется *представляющим* (информационным). Для гармонического колебания – это амплитуда, фаза и частота.

Сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией непрерывного или дискретного времени и непрерывным множеством возможных значений, называется *аналоговым* (непрерывным).

Сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией непрерывного времени и конечным множеством возможных значений, называется *дискретным*.

Дискретный сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией дискретного времени и конечным множеством возможных значений, называется *цифровым*. Если возможные значения представлены совокупностью двоичных чисел, то цифровой сигнал называется *двоичным*. Двоичные сигналы являются самыми простыми и по этой причине используются чаще других сигналов. Наряду с двоичными сигналами в системах связи применяются троичные, четверичные и другие цифровые сигналы.

Сигналы в системах связи являются средством для транспортировки сообщений, а техника связи по существу является техникой транспортирования (передачи) сообщений.

Основными параметрами сигнала с этой точки зрения являются: длительность сигнала T_c , ширина спектра сигнала F_c , динамический диапазон сигнала D_c .

Длительность сигнала определяет интервал времени, в котором этот сигнал существует. *Ширина спектра* сигнала – это интервал частот, в пределах которого сосредоточена основная часть энергии сигнала. *Радиосигнал*, у которого ширина спектра относительно невелика, называется *узкополосным*. В противном случае он называется *широкополосным*. Произведение длительности сигнала на ширину его спектра называется *базой сигнала*. Сигнал, у которого база равна единице, называется *простым*. У *сложного* сигнала база больше единицы. Для сигнала, определенного функцией времени $u(t)$, его *энергия* равна

$$E = \int_0^{T_c} u^2(t) dt.$$

Динамический диапазон – это отношение наибольшей и наименьшей мгновенных мощностей сигнала. Динамический диапазон обычно выражают в децибелах:

$$D_c = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}},$$

где P_{\max} , P_{\min} – максимальное и минимальное значения мгновенной мощности.

Обобщающей характеристикой является объем сигнала, равный произведению его длительности, ширины спектра и динамического диапазона:

$$V_c = T_c F_c D_c.$$

1.2. СВЯЗЬ, СЕТЬ СВЯЗИ, СИСТЕМА СВЯЗИ

Под словом *связь* будем понимать обмен информацией (ее передачу и прием) в соответствии с согласованными правилами, а под словом *электросвязь* – такую связь, при которой обмен информацией осуществляется электрическими, оптическими и радиосигналами с помощью *средств электросвязи*. В дальнейшем вместо слова «электросвязь» будем, как правило, использовать слово «связь».

Связь классифицируется по видам в зависимости от характера передаваемых сообщений или среды распространения сигналов (рис. 1.1).

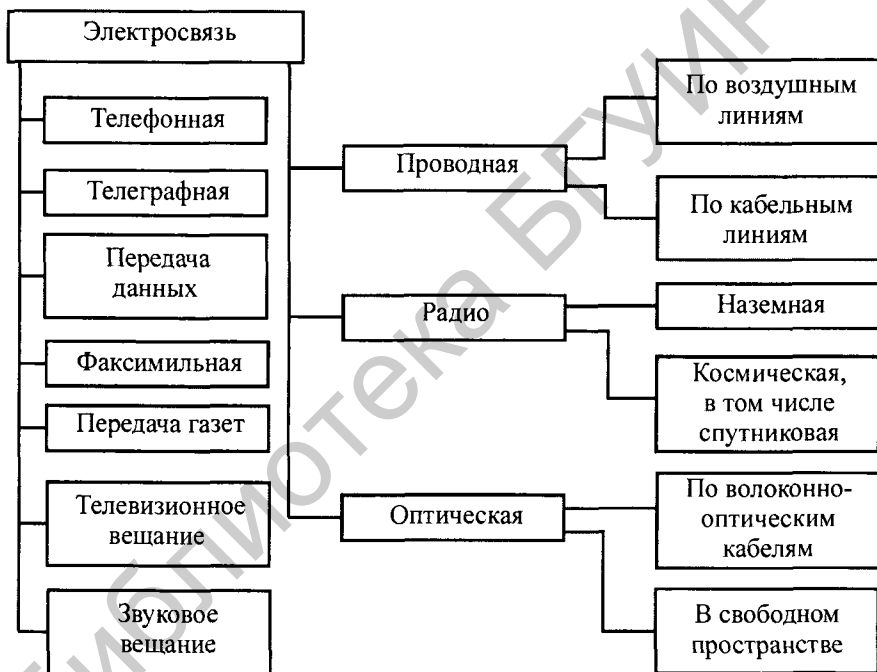


Рис. 1.1. Виды связи

Совокупность узлов и трактов, позволяющая соединять два и более определенных пункта для обеспечения связи между ними, называется *сетью связи*. Здесь под пунктами следует понимать *источники и получатели* (потребители) сообщений, а под трактом – непрерывный путь связи между двумя пунктами. Узел – это промежуточный пункт на сети, в котором возможно соединение нужных входов и выходов.

Система, посредством которой источник может достаточно эффективно и надежно передавать информацию в пункт назначения, называется *системой связи*. Система связи, таким образом, является подсистемой сети связи. Сети связи и системы связи образуют средства

электросвязи. Обобщенная структурная схема системы связи приведена на рис. 1.2.

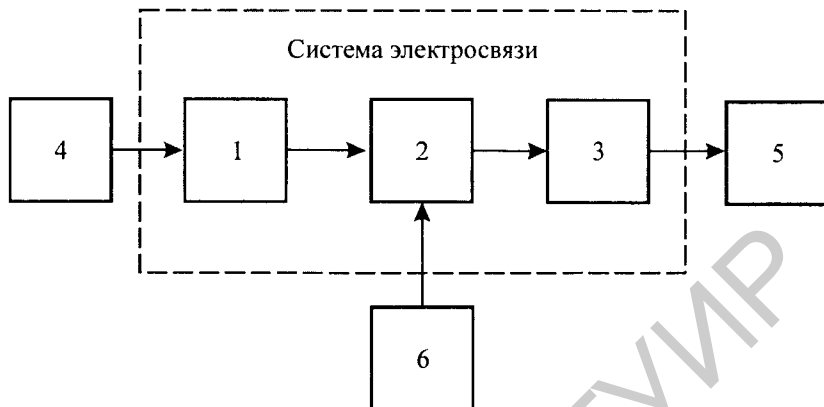


Рис. 1.2. Обобщенная структурная схема системы связи:
1 – передатчик; 2 – линия связи; 3 – приемник; 4 – источник сообщения;
5 – получатель сообщения; 6 – источник помех

В состав системы связи входит *передатчик, среда распространения, приемник*, а также источник и получатель сообщения. Иногда из состава системы источник и получатель сообщения исключаются. Передатчик является устройством, которое преобразует сообщение в сигнал. Вначале сообщение преобразуется в первичный сигнал. Если первичный сигнал можно передать через линию связи, включающую соответствующее оборудование и среду распространения, то он без каких-либо дополнительных преобразований поступает к приемнику. Часто такая передача оказывается невозможной и тогда первичный сигнал посредством модуляции или кодирования преобразуется в сигнал, параметры которого оказываются согласованными с линией связи.

Среда распространения – это физическая цепь, которая содержит одну или несколько пар токопроводящих металлических проводов или светопроводящих стеклянных волокон. В качестве среды распространения используется также открытое пространство. Соответственно системы связи называются *проводными, оптическими* или *радио*.

Приемник является устройством, с помощью которого осуществляется восстановление сообщения по принятому сигналу. Преобразования, выполняемые в приемнике, обратны преобразованиям в передатчике. Это позволяет сохранить информацию, содержащуюся в сообщении при ее передаче. Сигналы на входе приемника отличаются от переданных из-за *искажений и помех*, что является причиной воспроизведения сообщения с некоторой погрешностью (ошибкой). Искажения возникают из-за несовершенства аппаратуры связи и отклонений характеристик каналов связи.

Эти искажения в принципе могут быть устранены соответствующим конструированием аппаратуры связи и коррекцией характеристик каналов. Помехи заранее неизвестны, поэтому их влияние полностью устранить невозможно.

Помехи, действующие в каналах связи, по месту их источника называются *внешними* или *внутренними*. К внешним помехам относятся космические, атмосферные, промышленные, помехи от посторонних радиопередатчиков. Внутренние помехи возникают в самой аппаратуре систем связи. Они обусловлены хаотическим движением носителей заряда в резисторах, электронных и других приборах, взаимным влиянием друг на друга каналов в многоканальных системах связи.

Вид передаваемых сообщений определяет название системы связи. Система, используемая для передачи аналоговых сообщений, называется *аналоговой*, а система, используемая для передачи дискретных сообщений, называется *дискретной (цифровой)*. Применяются также и *смешанные системы*, в которых непрерывные сообщения преобразуются в дискретные с целью использования цифровых методов передачи.

Система, используемая для передачи телефонных сообщений, называется *телефонной*. Система, используемая для передачи телевизионных сообщений, называется *телевизионной*. Назначение системы определяет и другие названия: *телеграфная, фототелеграфная, телеметрическая система, система телеуправления, система передачи данных* и т. д.

Режим использования системы связи определяет названия: *симплексная* и *дуплексная*. Система связи называется *многоканальной*, если она обеспечивает передачу нескольких сообщений по одной общей среде распространения.

Система связи называется *автоматизированной*, если она обеспечивает связь в основном автоматическими устройствами.

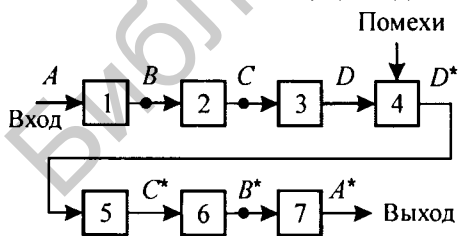


Рис. 1.3. Структурная схема цифровой системы передачи:

1 – кодер источника (блок эффективного кодирования); 2 – кодер канала (блок помехоустойчивого кодирования); 3 – модулятор; 4 – линия связи; 5 – демодулятор; 6 – декодер канала (блок помехоустойчивого декодирования); 7 – декодер источника (блок эффективного декодирования)

Понятие *канал связи* поясним с использованием структурной схемы цифровой системы связи (рис. 1.3). В данной системе кроме пути прохождения сигнала от входа (точка A) до выхода (точка A^*), могут быть выделены также другие отрезки пути: от точки A до точки D^* , от точки B до точки B^* и т. д.

Соответствующие этим отрезкам технические средства и среда распространения являются *каналами связи*. В зависимости от характера сигналов на входе

и выходе каналы могут быть *дискретными, дискретно-непрерывными, непрерывно-дискретными* и *непрерывными*. Дискретные каналы на рис. 1.3 обеспечивают прохождение сигналов по путям A, A' и B, B' . Сигналы на входах и выходах этих каналов дискретные. Дискретно-непрерывным является канал, соответствующий отрезку пути между точками A, D' . Сигнал на входе этого канала дискретный, а на выходе – непрерывный.

В зависимости от вида сообщения каналы связи делятся на: *телефонные, телевизионные, телеграфные, звукового вещания, передачи данных* и др. В зависимости от передачи сигнала по направляющим линиям или в свободном пространстве, каналы называются *каналами связи* или *радиоканалами*. К каналам связи относятся проводные (воздушные и кабельные) каналы, работающие на частотах до тысяч килогерц, а также волоконно-оптические, работающие в оптическом диапазоне волн ($10^{13} - 10^{15}$ Гц).

К радиоканалам относятся каналы связи, работающие в диапазонах волн от сверхдлинных (3 кГц) до децимиллиметровых (3000 ГГц).

Каналы связи характеризуются тремя параметрами: *временем передачи T_k , шириной полосы пропускания F_k и динамическим диапазоном D_k* .

Время передачи T_k – это время, в течение которого ведется передача информации. Ширина полосы пропускания канала F_k – это диапазон частот, в пределах которого значение нормированной амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) канала больше заданного уровня, равного, например, 0,707 (рис. 1.4). Динамический диапазон D_k определяется отношением допустимой максимальной мощности P_{\max} передаваемого сигнала к мощности помехи P_n , присутствующей в канале.

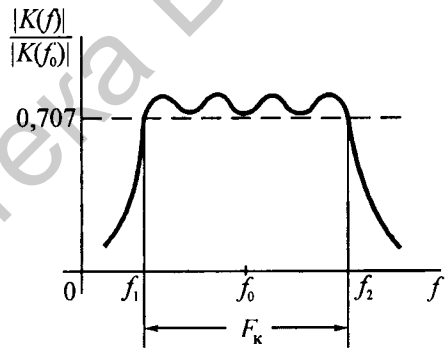


Рис. 1.4. Нормированная амплитудно-частотная характеристика канала

$$D_k = 10 \lg(P_{\max}/P_n).$$

Обобщающей характеристикой канала связи является его объем

$$V_k = T_k F_k D_k.$$

Для неискаженной передачи сигнала по каналу связи необходимо, чтобы объем сигнала был меньше или равен объему канала. Это условие называют *условием согласования сигнала с каналом* и записывают в виде

$$V_c \leq V_k.$$

1.3. КОДИРОВАНИЕ И МОДУЛЯЦИЯ

Кодированием и модуляцией достигается согласование источника сообщений с каналом связи.

Рассмотрим источник дискретного сообщения. Пусть сообщение выражено при помощи некоторых символов, например букв печатного текста. Если далее эти буквы преобразуются в другие символы или последовательности из них по заранее установленному и известному при передаче и приеме правилу, причем преобразование является взаимно однозначным, то говорят, что сообщение дискретного источника кодируется.

Набор символов (букв), над которым определена последовательность символов на выходе дискретного источника, называется *алфавитом*. Число символов в алфавите называется *объемом алфавита*. Рассмотрим пример.

Пример 1.1. Для набора (алфавита) букв a_1, a_2, a_3, a_4 объем равен 4. Определим правило, по которому каждой букве $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ будет соответствовать последовательность b_i над алфавитом объемом 2. Символы этого алфавита – 0 и 1. Такой алфавит называется двоичным. Пусть это правило следующее:

a_i	b_i
a_1	00
a_2	01
a_3	10
a_4	11

В этом случае, например, дискретной последовательности a_1, a_3, a_4 соответствует кодовая последовательность 001011.

Отрезок кодовой последовательности (комбинации) называется *блоком*. Число символов (элементов) в блоке называется *значностью* или *длиной* блока.

Блок, выделенный по определенному признаку и рассматриваемый как одно целое, называется *словом*. Словом, например, является кодовая последовательность (комбинация). Совокупность (множество) всех кодовых комбинаций, возможных при заданном правиле кодирования, образует *код*.

Кодирование источника непрерывных сообщений не отличается от кодирования дискретного, если непрерывное сообщение преобразуется в дискретное. Это преобразование включает дискретизацию, при которой непрерывное во времени сообщение преобразуется в последовательность отсчетов. Далее каждый отсчет сравнивается с заранее заданными уровнями квантования. Ближайший к отсчету уровень переводится в число. Набору квантованных уровней соответствует набор символов (букв), а объем алфавита равен числу квантованных уровней.

Кодовая последовательность $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$, содержащая разряды числа, начиная со старшего, определяет число в системе счисления с основанием m :

$$M = b_{n-1}m^{n-1} + b_{n-2}m^{n-2} + \dots + b_1m^1 + b_0m^0.$$

Коэффициенты $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, принимают значения от 0 до $(m-1)$ и образуют кодовый алфавит. Число кодовых комбинаций равно m^n .

В современных системах связи нашла широкое применение *двоичная система счисления* с основанием $m = 2$. Коэффициенты b_i принимают значения 0 и 1 и могут передаваться отрезками колебаний различных частот, отрезками колебаний с отличающимися начальными фазами или постоянным током с разной амплитудой или полярностью. Это обеспечивает простоту аппаратуры.

Блоки системы связи, в которых осуществляется кодирование, называются *кодерами*.

Коды, у которых все кодовые комбинации имеют одинаковую длину, называются *равномерными*. *Неравномерные* коды содержат кодовые комбинации неравной длины.

Одной из задач кодирования является задача согласования алфавита, из которого построены дискретные сообщения с кодовым алфавитом выходных комбинаций. Кодирование позволяет решить также задачу устранения избыточности источника сообщения и тем самым повысить скорость передаваемой информации. Примерами кодов, решающими эту задачу (задачу эффективного кодирования), являются коды Шеннона – Фано и Хафмена. Эти коды являются неравномерными. Для повышения достоверности передачи дискретной информации применяют *помехоустойчивые коды*. В отличие от простых кодов, у которых все возможные кодовые комбинации используются для передачи информации, помехоустойчивые коды строятся так, что для передачи используется лишь часть от общего числа возможных комбинаций. Благодаря этому появляется возможность обнаруживать и исправлять ошибки. При обнаружении и исправлении ошибок наряду с *информационными символами* по каналу связи передают *проверочные символы*.

В системах связи применяется дискретная и непрерывная модуляция. Под *дискретной модуляцией* понимают такой процесс формирования модулированного сигнала, когда символам кодовой комбинации или набору символов (блоку) ставятся в однозначное соответствие заранее выбранные сигналы. Примерами таких сигналов являются, например, импульсы постоянного тока заданной длительности и амплитуды или импульсы переменного тока заданной амплитуды и длительности с отличающейся частотой.

Непрерывная модуляция – это процесс преобразования непрерывного во времени аналогового сигнала в другой непрерывный сигнал путем

изменения параметров сигнала носителя сообщения (переносчика) в соответствии с преобразуемым сигналом.

Устройства, с помощью которых осуществляется модуляция, называются *модуляторами*.

Используются следующие носители сообщения: постоянный ток, переменный ток (гармоническое колебание), периодическая последовательность импульсов, *шумоподобный сигнал* (ШС). К шумоподобным сигналам относятся такие детерминированные сигналы, вид автокорреляционных функций которых мало отличается от вида автокорреляционной функции флуктуационного шума.

В системах связи применяют от одной до нескольких ступеней модуляции.

Модуляцией первичным непрерывным сигналом одного из параметров гармонического сигнала получают *амплитудную* модуляцию (АМ), *частотную* модуляцию (ЧМ), *фазовую* модуляцию (ФМ).

Воздействуя первичным непрерывным сигналом на один из параметров периодической последовательности видеоимпульсов, получают *амплитудно-импульсную* модуляцию (АИМ), *широтно-импульсную* модуляцию (ШИМ), *фаза-импульсную* (ФИМ) и *частотно-импульсную* (ЧИМ).

Изменением амплитуды или направления постоянного тока в соответствии со следованием символов 0, 1 информационной кодовой последовательности получают двоичные первичные сигналы, построенные из однополярных или разнополярных импульсов одинаковой длительности.

Модулируя один из параметров гармонического сигнала (амплитуду, фазу, частоту) двоичными первичными сигналами, сформированными во времени в соответствии со следованием символов информационной кодовой последовательности, можно получить *двоичный амплитудно-модулированный (АМ) сигнал*, *двоичный частотно-модулированный (ЧМ) сигнал*, *двоичный фаза-модулированный (ФМ) сигнал*. Разновидностью двоичного ФМ сигнала является сигнал с *относительной фазовой модуляцией* (ОФМ).

Примеры модулированных сигналов можно продолжить.

1.4. ДЕМОДУЛЯЦИЯ И ДЕКОДИРОВАНИЕ

Демодуляция в системах связи – это процесс преобразования модулированного сигнала (обычно прошедшего канал и искаженного помехами) в модулирующий сигнал. Восстановление дискретного сообщения по выходному сигналу демодулятора, осуществляемое с учетом правил кодирования, называется *декодированием*. Устройства, с помощью которых производится демодуляция, называются *демодуляторами*. Устройства, с помощью которых ведется декодирование, называются *декодерами*.

Прием сигналов ведется на фоне помех. Они ухудшают качество восстановленного приемником сообщения. Чтобы свести к минимуму влияние помех, смесь сигнала и помех, поступающая на вход приемника, подвергается определенным преобразованиям, которые называют *обработкой сигнала*. Структура приемника, обеспечивающая наилучшее преобразование (с точки зрения заранее сформулированного критерия оптимальности), называется *оптимальной структурой*, а приемник – *оптимальным приемником*.

Характер оптимальной обработки зависит от свойств сигнала и помех, свойств канала, методов модуляции и кодирования, а также от критерия оптимальности.

При оптимальной обработке приемник обеспечивает наибольшую помехоустойчивость. Под *помехоустойчивостью* понимают способность системы связи противостоять вредному влиянию помех на передаваемое сообщение.

Демодуляция относится к числу основных операций, совершаемых приемником. На выходе аналогового демодулятора присутствует колебание, с некоторой погрешностью повторяющее модулирующий сигнал. Это колебание при последующей обработке преобразуется в сообщение.

В цифровых системах связи восстановление сообщения осуществляется чаще всего в два этапа. На первом этапе сигнал демодулируется и на выходе демодулятора выделяется кодовая комбинация. Если решение о каждом элементе кодовой комбинации принимается в результате анализа смеси сигнала и шума только в течение длительности этого элемента и без учета результатов анализа предыдущих элементов, то такой способ обработки называется *позлементным (посимвольным) приемом*.

Возможен также и другой способ приема – *прием в целом*. При этом смесь сигнала и шума, соответствующая передаваемому двоичному слову блока, анализируется целиком. В отличие отazoleментного приема на выходе приемника реализуется оценка не одного информационного символа, а оценка слова блока, содержащего несколько символов. Это позволяет реализовать более высокую помехоустойчивость по сравнению с посимвольным приемом. К сожалению, приемник, в котором используется прием в целом, оказывается во много раз сложнее приемника сazoleментным приемом. На втором этапе оценка слова блока декодируется.

1.5. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ СВЯЗИ

Система связи характеризуется совокупностью параметров. Те из них, которые связаны с качеством системы монотонной зависимостью, называются *показателями качества системы*. Чем больше (меньше) значение показателя качества, тем лучше (хуже) при прочих равных условиях система.

При проектировании системы принимают во внимание большое количество показателей качества и параметров в соответствии с заранее обоснованным критерием оптимальности. Наилучшей (оптимальной) считается такая система, которой соответствует наибольшее (наименьшее) значение некоторой *целевой функции* от показателей качества. Показатели качества и параметры систем связи условно делятся на *информационные*, *техничко-экономические* и *техничко-эксплуатационные показатели*. К информационным показателям относятся *верность*, *скорость* и *задержка передачи информации*. К технико-экономическим показателям – *стоимость*, *габаритные размеры*, *масса*. К технико-эксплуатационным показателям – *среднее время безотказной работы*, *температурный диапазон работы* и т. д.

Выделим показатели, характеризующие систему связи с точки зрения передачи информации.

Помехоустойчивость является одним из основных показателей качества системы связи. Помехоустойчивость при заданной помехе характеризуется *верностью передачи* – степенью соответствия принятого сообщения переданному сообщению. При передаче непрерывных сообщений мерой верности служит среднеквадратичное отклонение между принятым $a^*(t)$ и переданным $a(t)$ сообщениями:

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [a^*(t) - a(t)]^2 dt,$$

где T – время, в течение которого принимается сообщение.

Первичный сигнал $b(t)$ связан с сообщением $a(t)$ линейной зависимостью, т. е.

$$b(t) = ka(t),$$

где k – коэффициент преобразования.

Для простоты будем считать, что $k = 1$. С учетом этого формулу для среднеквадратичного отклонения запишем в виде:

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt.$$

Звездочкой обозначают оценку сигнала, которая отличается от этого сигнала на величину погрешности.

Чем меньше среднеквадратичное отклонение, тем выше помехоустойчивость.

Мерой верности может быть также вероятность того, что погрешность ϵ не превзойдет заранее заданную величину ϵ_0 :

$$P(|\epsilon| \leq \epsilon_0).$$

Чем больше эта вероятность, тем выше помехоустойчивость.

Мерой верности передачи дискретных сообщений является *вероятность ошибки*. Чем меньше эта вероятность, тем больше помехоустойчивость.

Максимальная помехоустойчивость, возможная для заданных условий передачи, называется *потенциальной помехоустойчивостью*.

Другой важный показатель качества системы связи – это *пропускная способность*. Пропускная способность системы связи – это максимальная *скорость передачи* R_{\max} , допускаемая данной системой. Она определяется числом каналов N этой системы и *пропускной способностью канала связи* C :

$$R_{\max} = NC.$$

Для дискретного канала связи без помех

$$C = (1/T)\log_2 m,$$

где T – длительность передачи одного символа, m – объем алфавита.

Для непрерывного канала связи

$$C = F\log_2(1 + P_c/P_{\text{ш}}),$$

где F – ширина полосы канала, P_c – мощность сигнала, $P_{\text{ш}}$ – мощность шума.

Скорость передачи (так же как и пропускная способность) измеряется в битах в секунду.

Задержка передачи определяет время, прошедшее от момента начала передачи сообщения в передатчике до момента выдачи восстановленного сообщения на выходе приемника. Она зависит от протяженности канала связи и длительности преобразований сигнала в передатчике и приемнике. Задержка передачи является одной из важнейших показателей качества системы связи.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под сообщением и сигналом?
2. Какие основные блоки входят в систему связи?
3. В чем различие между системой и каналом связи?
4. В чем различие и единство процессов кодирования и модуляции?
5. Какие процессы при декодировании и демодуляции Вы знаете?
6. Что Вы понимаете под оптимальным приемником?
7. Чем отличается поэлементный прием от приема в целом?
8. Какие характеристики систем связи Вам известны?
9. Что Вы понимаете под сетью связи?

2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ В ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Детерминированными называются такие функции, которые точно определены в любой момент времени. Как показано ранее, сигналы при передаче информации являются случайными процессами, поэтому детерминированные функции не могут быть их математическими моделями. Однако изучение детерминированных функций полезно по ряду причин. Назовем некоторые из них.

1. Результаты анализа (функционального, спектрального и т. д.) детерминированных функций являются базовыми при изучении случайных функций.

2. Случайные процессы в ряде случаев могут быть представлены такими математическими моделями, которые строятся с использованием множества случайных чисел и детерминированных функций (каноническое разложение случайных функций). Это позволяет существенно упростить решение некоторых задач (вычисление корреляционных функций, определение интегралов от случайных функций), так как операции над случайными функциями заменяются операциями над случайными числами и детерминированными функциями.

3. Применение детерминированных функций оказывается полезным также при решении задач анализа линейных и нелинейных узлов, блоков и систем, при оценке искажений сигналов, возникающих при передаче их по каналам связи и т. д.

4. Детерминированные сигналы имеют и самостоятельное значение. Они специально создаются для целей измерения, наладки и регулирования систем связи и используются в качестве эталонов.

Детерминированный сигнал выражается функцией времени $u(t)$. Примером математического выражения гармонического сигнала с постоянными параметрами (амплитудой, частотой и начальной фазой) является функция косинуса:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

При известных параметрах эта функция однозначно определена для любого момента времени и является относительно простой.

Совокупность подобных функций удобно использовать для описания более сложных детерминированных и случайных сигналов. Такие функции называются *базисными*. Математическое выражение некоторого сигнала $u(t)$ в этом случае можно представить суммой произведений некоторых коэффициентов α_k на базисные функции $\varphi_k(t)$:

$$u(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(t). \quad (2.2)$$

Коэффициенты и базисные функции могут быть действительными или комплексными, а пределы суммы равны соответственно $-\infty, \infty$.

Разложение (2.2) справедливо для заданного конечного интервала времени. Условно этот интервал обозначим квадратными скобками с указанием начального и конечного значений времени: $[t_1, t_2]$.

При выбранном наборе базисных функций или *базисе* сигнал (2.2) полностью определяется совокупностью коэффициентов α_k . Такие совокупности называются *дискретными спектрами сигналов*. Базисные функции выбираются так, чтобы они имели простое аналитическое выражение, обеспечивали быструю сходимость ряда, позволяли легко вычислять коэффициенты α_k . Вычисление коэффициентов существенно облегчается, если в качестве базисных выбрать ортогональные функции. Систему комплексных функций $\varphi_k(t)$, $\varphi_l(t)$ называют *ортогональной* на отрезке времени $[t_1, t_2]$, если для всех значений $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ и $l = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ (за исключением случая $k = l$) удовлетворяется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt = 0, \quad k \neq l, \quad (2.3)$$

где $\varphi_l^*(t)$ – комплексно сопряженная функция.

Система комплексных функций называется *нормированной*, если выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} |\varphi_l(t)|^2 dt = 1, \quad \text{для } l = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (2.4)$$

Базисные функции, удовлетворяющие условиям (2.3) и (2.4), называются *ортонормированными*. Умножим левую и правую части выражения (2.2) на $\varphi_l^*(t)$ и результат проинтегрируем:

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) \varphi_l^*(t) dt = \sum_k \alpha_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt.$$

Учитывая выражения (2.3) и (2.4), получим:

$$\alpha_l = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \varphi_l^*(t) dt, \quad l = k.$$

Коэффициенты α_k называют *обобщенными коэффициентами Фурье*, а ряд (2.2) – *обобщенным рядом Фурье*.

Если выбраны экспоненциальные базисные функции

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_1 t}, \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots,$$

то выражение (2.2) можно записать в виде

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.5)$$

где $T = t_2 - t_1$ – интервал разложения сигнала, $\omega_1 = 2\pi/T$,

$$\alpha_k(jk\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Значения времени можно задать: $t_1 = -T/2$, $t_2 = T/2$ или $t_1 = 0$, $t_2 = T$.

Выражение (2.5) преобразуем к виду

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_k(jk\omega_1)}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.6)$$

где

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) известно как *ряд Фурье, записанный в комплексной форме*. Выражение (2.7) определяет дискретный спектр сигнала в базисе экспоненциальных функций.

От двустороннего спектрального представления можно перейти к не имеющему отрицательных частот спектру. В этом случае получаем ряд Фурье в тригонометрической форме.

Преобразуем выражение (2.7), применяя формулу

$$e^{-jk\omega_1 t} = \cos k\omega_1 t - js \sin k\omega_1 t.$$

Получим:

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega_1 t dt - \frac{2}{T} j \int_{\frac{T}{2}}^T u(t) \sin k\omega_1 t dt = a_k - jb_k, \quad (2.8)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T u(t) \sin k\omega_1 t dt.$$

Для чисел k , равных по величине, но разных по знаку, справедливы равенства

$$a_k = a_{-k}, \quad b_k = -b_{-k},$$

так как $\cos(k\omega_1 t) = \cos(-k\omega_1 t)$, $\sin(k\omega_1 t) = -\sin(-k\omega_1 t)$.

Модуль дискретного спектра сигнала характеризует *спектр амплитуд* этого сигнала:

$$|\alpha(jk\omega_1)| = \alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (2.9)$$

Спектр фаз определяется выражением

$$\varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k/a_k). \quad (2.10)$$

Подставим выражение (2.8) в (2.6). В результате получим *ряд Фурье в тригонометрической форме*:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_1 t} - \frac{1}{2} j \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \frac{a_0 - jb_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1)], \quad (2.11) \end{aligned}$$

где $a_k = \alpha(k\omega_1) \cos \varphi(k\omega_1)$, $b_k = -\alpha(k\omega_1) \sin \varphi(k\omega_1)$.

Функции, определяющие ряд Фурье (2.11), являются известной ортонормированной системой:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1/\sqrt{T}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \cos \frac{2\pi t}{T}, \dots, \\ \dots \varphi_{2k-1}(t) &= \sqrt{2/T} \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad \varphi_{2k}(t) = \sqrt{2/T} \cos \frac{2\pi kt}{T}, \dots \end{aligned}$$

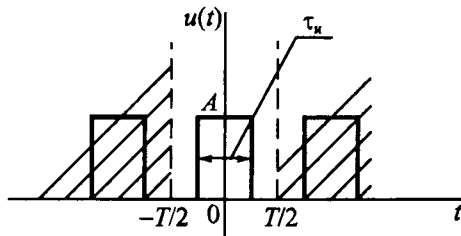


Рис. 2.1. Последовательность прямоугольных импульсов

Возможно также представление сигналов по системам базисных функций: $(\sin x)/x$, Уолша, Хара, Чебышева, Лаггера, Лежандра и др. Это означает, что для любого сигнала можно найти столько разных спектров, сколько может быть найдено разных систем базисных функций.

Пример 2.1. Вычислить коэффициенты ряда Фурье для импульса, приведенного на рис. 2.1. Интервал разложения равен $[-T/2, T/2]$.

Решение. Постоянная составляющая

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A dt = \frac{A\tau_n}{T}.$$

Коэффициенты $b_k = 0$, а коэффициенты

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A \cos k\omega_1 t dt = \frac{2A}{k\omega_1 T} \int_{-\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}^{\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}} \cos x dx = \frac{2A\tau_n \sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{T \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}.$$

При вычислении интеграла произведена замена переменной

$$k\omega_1 t = x, dt = dx/k\omega_1.$$

Подставляя вычисленные значения для коэффициентов ряда Фурье в формулу (2.11), получим

$$u(t) = A \frac{\tau_n}{T} + \frac{2A\tau_n}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}} \cos k\omega_1 t. \quad (2.12)$$

На рис. 2.2 приведен график спектра амплитуд, построенный по результатам вычислений. Спектр дискретный, т. е. существует только для дискретных значений частот, которые соответствуют числам $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. В промежутках между этими значениями спектр равен нулю. Число спектральных составляющих в интервале $[0, 2\pi/\tau_n]$ равно $[2\pi/\tau_n] : 2\pi/T = T/\tau_n$. Отношение периода повторения импульсов к длительности импульса называется *скважностью*.

Обратимся к ряду Фурье (2.6) в комплексной форме и запишем выражение для периодической функции времени. *Периодической* называют такую функцию, которая удовлетворяет уравнению:

$$u(t) = u(t + mT) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1(t+mT)} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}.$$

Числа k, m являются целыми, а $\omega_1 T = 2\pi$. Поэтому $e^{jmk\omega_1 T} = 1$ и разложение функции в интервале $[-T/2, T/2]$ совпадает с разложением этой же функции в других интервалах $[T/2, 3T/2]$, $[-T/2, -3T/2]$ и т. д. Другими словами, в ряд Фурье раскладываются и периодические функции времени.

2.2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СИГНАЛА

Пусть период сигнала (см. рис. 2.1) стремится к бесконечности. При увеличении периода T частота $\omega_1 = 2\pi/T$ уменьшается до бесконечно малой величины:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega.$$

Расстояние между спектральными компонентами при этом уменьшается до бесконечно малой величины, а значения $k\omega_1$ превращаются в текущие значения частоты ω (см. рис. 2.2). Интервал разложения стремится

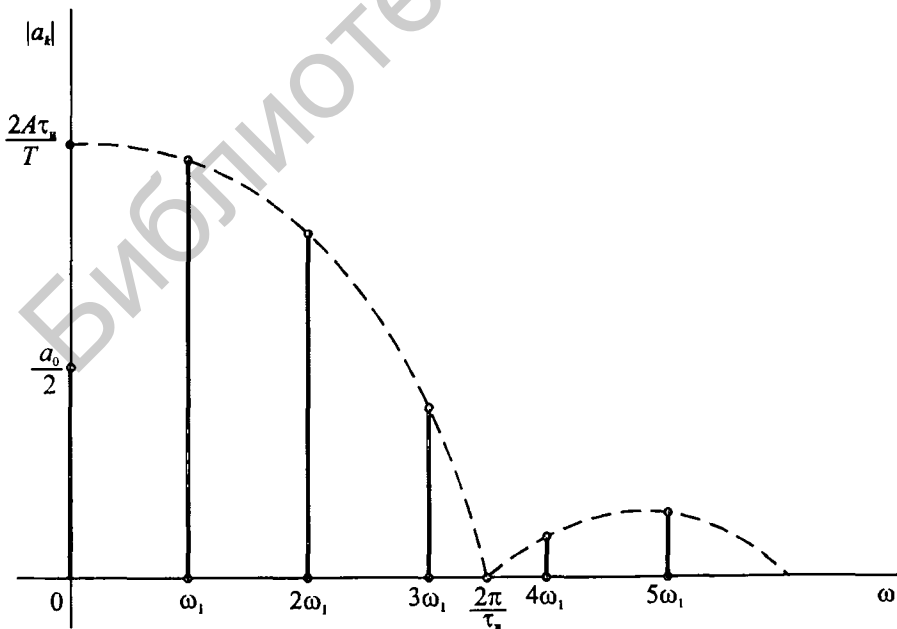


Рис. 2.2. График спектра амплитуд

к бесконечной величине. Это позволяет при вычислении предела ряда Фурье в комплексной форме заменить знак суммы знаком интеграла, основную частоту $\omega_1 = 2\pi/T$ — на $d\omega$, а кратную частоту $k\omega_1$ заменить текущей частотой ω .

$$u(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(\tau) e^{-jk\omega_1 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_1 t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.13)$$

Выпишем интеграл, который записан в скобках выражения (2.13), и обозначим его:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.14)$$

Тогда выражение (2.13) запишется более компактно:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.15)$$

Выражения (2.14) и (2.15) называются соответственно *прямым* и *обратным преобразованиями Фурье*. Функция $S(j\omega)$ называется *спектральной плотностью*. Она является комплексной и имеет размерность [В/Гц].

Преобразование Фурье (2.14) может быть вычислено на основе общих правил интегрирования, если сигнал удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, которое записывается в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty.$$

Условие означает, что преобразование (2.14) существует для тех сигналов, площадь под кривой $|u(t)|$ которых ограничена.

К этому классу не относятся, например, периодические сигналы, которые не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости. Однако это не означает, что для периодических сигналов спектральная плотность не может быть вычислена. Методы вычислений, специально разработанные для этих целей, используют так называемые обобщенные функции. Примером обобщенной функции является дельта-функция. Некоторые свойства дельта-функции приведены в приложении 1.

Продолжим преобразования спектральной плотности сигналов, которые удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости. Такие сигналы ограничены во времени.

С учетом формулы Эйлера перепишем выражение (2.14):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)[\cos\omega t - j\sin\omega t]dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t dt = \\ &= A(\omega) - jB(\omega) = |S(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t dt,$$

$$|S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi\{\omega\} = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Модуль $|S(j\omega)|$ называется *спектральной плотностью амплитуд сигнала* или амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) спектральной плотности сигнала. Функция $\varphi(\omega)$ определяет фазо-частотную характеристику (ФЧХ) спектральной плотности сигнала. АЧХ и ФЧХ спектральной плотности являются непрерывными функциями частоты.

Перейдем к анализу спектральной плотности сигналов, не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости. Такие сигналы не ограничены во времени и имеют бесконечно большую энергию.

На основе сигнала $u_0(t)$, удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости, построим периодически повторяющийся сигнал $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u_0(t - kT)$ и вычислим его спектральную плотность:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t - kT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-j\omega x} dx = \\ &= S_0(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-j\omega kT}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $x = t - kT$.

Размерность спектральной плотности периодически повторяющегося сигнала определяется размерностью спектральной плотности непериодического сигнала, из которого формируется периодически повторяющийся сигнал, — [В/Гц].

Первый множитель полученного выражения определяет спектральную плотность ограниченного во времени сигнала $u_0(t)$, а второй — спектральную плотность периодически повторяющейся дельта-функции $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT)$.

Убедимся в этом, вычисляя эту плотность:

$$S_{\varphi}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}.$$

При вычислении интеграла использовано фильтрующее свойство дельта-функции (см. приложение 1).

Если периодически повторяющуюся дельта-функцию разложить в ряд Фурье в комплексной форме, то ее спектральную плотность можно выразить иначе:

$$S_{\varphi}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_1)t} dt = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1),$$

где $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_1 t},$

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T}.$$

При выводе последней формулы использовано выражение дельта-функции в частотной области. Приравнивая выражения спектральных плотностей, получим:

$$S_{\varphi}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1).$$

Эта функция равна нулю, если $\omega \neq k\omega_1$, и равна ∞ , если $\omega = k\omega_1$.

Подставляя в (2.16) новое выражение $S_{\varphi}(j\omega)$ получим:

$$S(j\omega) = S_0(j\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_0(jk\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1). \quad (2.17)$$

Спектральная плотность периодически повторяющегося сигнала определяется значениями спектральной плотности ограниченного во времени сигнала $u_0(t)$, отсчитанными через интервал, равный $\omega_1 = 2\pi/T$.

Вычислим значение спектральной плотности ограниченного отрезком времени T сигнала.

$$S_0(jk\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Умножим левую и правую части равенства на коэффициент $2/T$.

$$\frac{2}{T} S_0(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \alpha(jk\omega_1),$$

где $\alpha(jk\omega_1)$ – дискретный спектр периодического сигнала в базисе экспоненциальных функций.

С учетом последней формулы спектральную плотность периодически повторяющегося сигнала запишем в виде:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2} \alpha(jk\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \alpha(jk\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \alpha(k\omega_1) e^{j\varphi(k\omega_1)} \delta(\omega - k\omega_1),$$

где модуль спектра определяется в базисе экспоненциальных функций формулой (2.9), а спектр фаз – формулой (2.10).

Выборки $|S_0(jk\omega_1)| = (T/2)|\alpha(jk\omega_1)|$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$ определяют АЧХ спектральной плотности периодически повторяющегося сигнала, а выборки $\varphi(k\omega_1)$ – ФЧХ. АЧХ и ФЧХ являются дискретными функциями частоты.

Рассмотрим некоторые свойства спектральной плотности сигнала, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости.

1. Спектральная плотность (2.14) – это комплексная и непрерывная функция частоты ω , определенная в бесконечном интервале частот.

2. АЧХ и ФЧХ спектральной плотности удовлетворяют уравнениям:

$$|S(j\omega_k)| = |S(-j\omega_k)|, \quad \varphi(-\omega_k) = -\varphi(\omega_k),$$

где $\mp \omega_k$ – выбранные значения частот.

3. Преобразования Фурье (2.14), (2.15) являются линейными преобразованиями. Поэтому спектральная плотность суммы сигналов равна сумме спектральных плотностей этих сигналов, а сумма сигналов определяется обратным преобразованием Фурье от суммы их спектральных плотностей.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N u_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N S_i(j\omega), \\ u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N S_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где $u_i(t)$ – сигнал; $S_i(j\omega)$ – спектральная плотность этого сигнала.

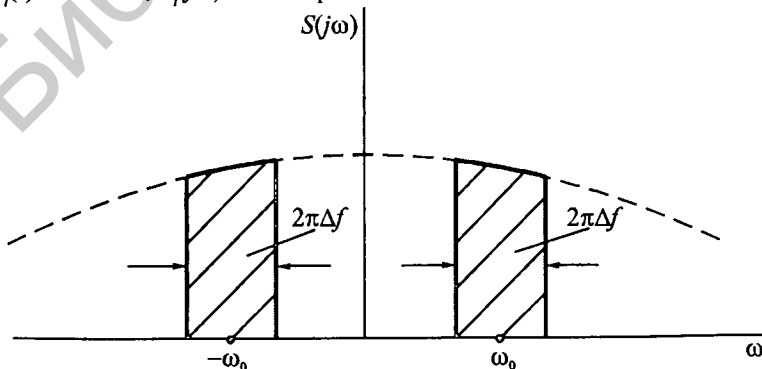


Рис. 2.3. Спектральная плотность гармонического сигнала с бесконечно малой амплитудой

4. Совокупность спектральных компонент спектральной плотности (2.14) ограниченного во времени сигнала в бесконечно малых интервалах $2\pi\Delta f$ (см. рис. 2.3) вблизи, например, частот $-\omega_0$, ω_0 определяет гармонический сигнал с бесконечно малой амплитудой.

Убедимся в этом, считая, что из-за малости Δf значения спектральной плотности около частот $-\omega_0$, ω_0 равны соответственно $S(-j\omega_0) = |S(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}$ и $S(j\omega_0) = |S(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$. Найдем сигнал по спектральной плотности, приведенной на рис. 2.3.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \pi\Delta f}^{-\omega_0 + \pi\Delta f} |S(j\omega_0)| e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega t} d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \pi\Delta f}^{\omega_0 + \pi\Delta f} |S(j\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Поскольку в бесконечно малых интервалах спектральная плотность остается постоянной, можно вынести за знак интегралов выражения $|S(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$ и $|S(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}$. Следовательно,

$$u(t) = \frac{|S(j\omega_0)|}{2\pi} e^{-j\varphi(\omega_0)} \int_{-\omega_0 - \pi\Delta f}^{-\omega_0 + \pi\Delta f} e^{j\omega t} d\omega + \frac{|S(j\omega_0)|}{2\pi} e^{j\varphi(\omega_0)} \int_{\omega_0 - \pi\Delta f}^{\omega_0 + \pi\Delta f} e^{j\omega t} d\omega = \\ = \frac{|S(j\omega_0)|}{\pi t} e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} \left(\frac{e^{j\pi\Delta f t} - e^{-j\pi\Delta f t}}{2j} \right) + \\ + \frac{|S(j\omega_0)|}{\pi t} e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega_0 t} \left(\frac{e^{j\pi\Delta f t} - e^{-j\pi\Delta f t}}{2j} \right) = \\ = \frac{2|S(j\omega_0)|}{\pi t} \sin(\pi\Delta f t) \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] = \\ = 2\Delta f |S(j\omega_0)| \frac{\sin(\pi\Delta f t)}{\pi\Delta f t} \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)].$$

Как следует из полученной формулы, амплитуда полученного сигнала определяется значением спектральной плотности, функцией $(\sin x)/x$ и весьма малым диапазоном частот Δf .

При стремлении Δf к нулю функция $(\sin x)/x$ стремится к единице, а амплитуда становится равной нулю.

5. Если все составляющие спектральной плотности ограниченного во времени сигнала сдвигаются по фазе на $\mp\omega t_0$, то этот сигнал сдвигается во времени на величину $\mp t_0$. Действительно:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{\mp j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t \mp t_0)} d\omega = u(t \mp t_0).$$

6. При передаче ограниченного во времени сигнала через линейный четырехполосник, амплитудно-частотная характеристика которого в полосе пропускания равна постоянной величине K_0 , а фазовая характеристика $\varphi(\omega) = -\omega t_0$, форма этого сигнала остается неизменной, а сигнал запаздывает во времени на величину t_0 :

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = K_0 u(t-t_0).$$

Рассмотрим некоторые отличительные свойства спектральной плотности периодического сигнала.

1. Спектральная плотность периодического сигнала является дискретной функцией частоты. Ее значения равны нулю везде, кроме точек $\omega = \mp k\omega_1$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

2. АЧХ спектральной плотности периодического сигнала является дискретной функцией частоты. Ее значения определяются выборками $|S_0(jk\omega_1)| = (T/2) |\alpha(jk\omega_1)|$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$, которые имеют размерность [В/Гц].

3. ФЧХ спектральной плотности периодического сигнала является дискретной функцией частоты. Ее значения определяются выборками фазовой характеристики спектральной плотности периодического сигнала $\varphi(k\omega_1)$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$.

Пример 2.2. Рассчитать спектральную плотность задержанного во времени одиночного прямоугольного импульса с длительностью τ_u и амплитудой A .

Решение. Спектральная плотность задержанного на время t_0 импульса равна:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-j\omega x} dx = S_0(j\omega) e^{-j\omega t_0},$$

где $u(t)$ – импульс, который расположен в начале координат,

$$S_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-j\omega x} dx, \quad t-t_0 = x, \quad dt = dx.$$

Вычисления дают следующий результат:

$$S(j\omega) = A e^{-j\omega t_0} \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} e^{-j\omega t} dt = \left(A \tau_u \frac{\sin \frac{\omega \tau_u}{2}}{\frac{\omega \tau_u}{2}} \right) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.18)$$

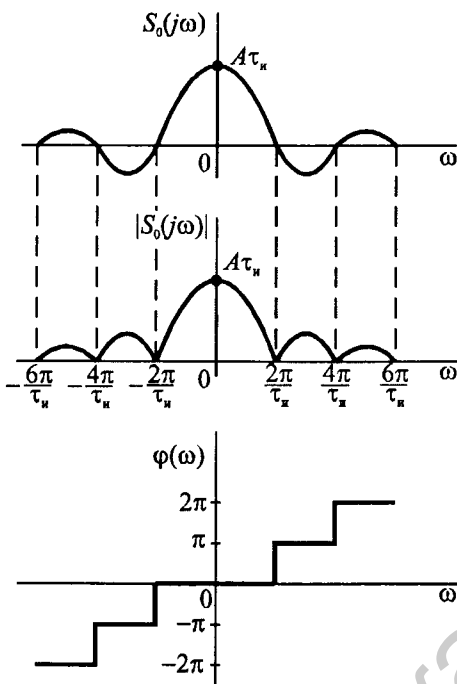


Рис. 2.4. Спектральная плотность, АЧХ и ФЧХ спектральной плотности прямоугольного импульса

характеристика в этих диапазонах соответственно равна $\varphi(\omega) = \mp\pi$, так как $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = -1$ и т. д.

АЧХ спектральной плотности задержанного импульса совпадает с АЧХ спектральной плотности сигнала $u(t)$, а ФЧХ определяется выражением:

$$q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)}.$$

Спектральная плотность прямоугольного импульса, АЧХ и ФЧХ этой плотности изображены на рис. 2.4.

Пример 2.3. Вычислить спектральную плотность кодированного сигнала

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n),$$

где a_k – элементы кодового слова, равные -1 или 1 , т. е. $a_k = \mp 1$, $u_0(t)$ – прямоугольный импульс с амплитудой, равной A , и длительностью τ_n .

Решение. Применим формулу (2.14):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n) e^{-j\omega t} dt.$$

Запишем эту плотность в виде

$$S(j\omega) = S_0(j\omega) e^{-j\omega t_0},$$

где

$$S_0(j\omega) = A\tau_n \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\frac{\omega\tau_n}{2}} \right| q(\omega),$$

$$q(\omega) = \begin{cases} 1, & S_0(j\omega) > 0, \\ -1, & S_0(j\omega) < 0. \end{cases}$$

Последнее выражение определяет фазовую характеристику спектральной плотности сигнала $u(t)$. В диапазоне частот $[-2\pi/\tau_n, 2\pi/\tau_n]$ спектральная плотность является положительной величиной, а $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = 1$. Поэтому в этом диапазоне $\varphi(\omega) = 0$, так как $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = \cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)$.

В диапазонах частот $[-4\pi/\tau_n, -2\pi/\tau_n]$, $[2\pi/\tau_n, 4\pi/\tau_n]$ спектральная плотность является отрицательной величиной. Фазовая характеристика

Производя замену переменной $t - k\tau_n = x$, $dt = dx$, получим

$$S(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\int_0^{\tau_n} u_0(x) e^{-j\omega x} dx \right) e^{-j\omega k\tau_n} = A\tau_n \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\omega\tau_n/2} e^{-j\omega\tau_n/2} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\tau_n}.$$

Пример 2.4. Вычислить спектральную плотность периодического сигнала, записанного в виде ряда Фурье в тригонометрической форме [см. формулу (2.11)]. Записать выражения АЧХ и ФЧХ постоянной, синусной и косинусной составляющих этого ряда.

Решение. Функции, определяющие формулу (2.11), – периодические, за исключением постоянной составляющей. Эту составляющую аппроксимируем периодической косинусной функцией с частотой, которая стремится к нулю.

$$u(t) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} (a_0/2) \cos \Omega t.$$

Вычислим спектральную плотность периодического сигнала $u(t) = a \cos \Omega t$. Запишем его в виде

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT),$$

где $T = 2\pi/\Omega$,

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -T/2, \quad T/2 < t < \infty, \\ a \cos \Omega t, & -T/2 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Спектральная плотность сигнала $u_0(t)$:

$$\begin{aligned} S_0(j\omega) &= a \int_{-T/2}^{T/2} \cos \Omega t e^{-j\omega t} dt = \frac{a}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{-j\Omega t} + e^{j\Omega t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{aT}{2} \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)T/2}{(\Omega + \omega)T/2} + \frac{\sin(\Omega - \omega)T/2}{(\Omega - \omega)T/2} \right]. \end{aligned}$$

Значение первого слагаемого, стоящего в скобках выражения, равно 1, если $\omega = -\Omega$, и равно нулю для других дискретных значений частоты $\omega = k\Omega$, $k = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Значение второго слагаемого равно 1, если $\omega = \Omega$, и равно нулю для других дискретных значений частоты $\omega = k\Omega$, $k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Учитывая это, найдем спектральную плотность, АЧХ и ФЧХ спектральной плотности периодического сигнала $u(t) = a \cos \Omega t$.

$$\begin{aligned} S_c(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} S_0(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) = \\ &= \frac{2\pi}{T} \frac{aT}{2} \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)T/2}{(\Omega + \omega)T/2} + \frac{\sin(\Omega - \omega)T/2}{(\Omega - \omega)T/2} \right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) = \\ &= \pi a [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)]. \end{aligned}$$

Значения АЧХ спектральной плотности в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны $\pi aT/2\pi = aT/2$.

Значения ФЧХ спектральной плотности гармонического сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны нулю.

По формуле спектральной плотности косинусоидального сигнала можно найти спектральную плотность постоянной составляющей.

$$S(j\omega) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{a_0}{2} [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] = \pi a_0 \delta(\omega).$$

АЧХ спектральной плотности постоянной составляющей определяется значением:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi a_0 T / 2\pi = a_0 T / 2 = \infty.$$

Вычисление спектральной плотности синусоидального сигнала аналогично вычислению спектральной плотности косинусоидального сигнала.

Записываем периодический сигнал $u(t) = b \sin \Omega t$ в виде:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT),$$

где $T = 2\pi/\Omega$,

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -T/2, T/2 < t < \infty, \\ b \sin \Omega t, & -T/2 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Вычисляем спектральную плотность сигнала $u_0(t)$.

$$\begin{aligned} S_0(j\omega) &= b \int_{-T/2}^{T/2} \sin \Omega t e^{-j\omega t} dt = \frac{b}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{bTj}{2} \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)T/2}{(\Omega + \omega)T/2} - \frac{\sin(\Omega - \omega)T/2}{(\Omega - \omega)T/2} \right]. \end{aligned}$$

По найденному выражению находим спектральную плотность периодического сигнала $u(t) = b \sin \Omega t$.

$$S_S(j\omega) = j\pi b [\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)].$$

АЧХ спектральной плотности этого сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$:

$$\pi b T / 2\pi = b T / 2.$$

Значения ФЧХ спектральной плотности сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны $\pi/2, -\pi/2$.

Полученные формулы для спектральных плотностей гармонических сигналов позволяют найти спектральную плотность суммы этих сигналов.

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= S_c(j\omega) + S_s(j\omega) = \pi a[\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] + \\
 &+ j\pi b[\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)] = \pi(a + jb)\delta(\omega + \Omega) + \pi(a - jb)\delta(\omega - \Omega) = \\
 &= \pi\alpha(\Omega)\{e^{-j\varphi(\Omega)}\delta(\omega + \Omega) + e^{j\varphi(\Omega)}\delta(\omega - \Omega)\},
 \end{aligned}$$

где $\alpha(\Omega) = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль спектра, равный амплитуде гармонического сигнала, $\varphi(\Omega) = -\arctg(b/a)$ – значение фазы спектра, равное значению начальной фазы этого сигнала.

Ряд Фурье в тригонометрической форме (2.11) содержит бесконечно большое число сумм гармонических сигналов:

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t.$$

Спектральная плотность этой суммы находится по последнему выражению спектральной плотности заменой $\Omega = k\omega_1$. Используя эту формулу и формулу спектральной плотности постоянной составляющей, получим выражение спектральной плотности сигнала, записанного в виде ряда Фурье в тригонометрической форме.

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \pi a_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{(a_k + jb_k)\delta(\omega + k\omega_1) + (a_k - jb_k)\delta(\omega - k\omega_1)\} = \\
 &= \pi a_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \{e^{-j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega + k\omega_1) + e^{j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega - k\omega_1)\},
 \end{aligned}$$

где $\alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – модуль спектра, $\varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k/a_k)$ – значение фазы спектра, равное значению начальной фазы гармонического сигнала.

Для периодической последовательности импульсов, приведенной на рис. 2.1,

$$a_0 = 2A\tau_n/T, \quad a_k = 2A(\tau_n/T) \cdot \left(\sin \frac{k\omega_1\tau_n}{2}\right) / \frac{k\omega_1\tau_n}{2}, \quad b_k = 0.$$

Спектральная плотность

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \delta(\omega) + \\
 &+ 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k\omega_1\tau_n/2}{k\omega_1\tau_n/2} \right| \{e^{-j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega + k\omega_1) + e^{j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega - k\omega_1)\} = \\
 &= 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin k\omega_1\tau_n/2}{k\omega_1\tau_n/2} \right| e^{j\varphi(k\omega_1)} \delta(\omega - k\omega_1).
 \end{aligned}$$

АЧХ спектральной плотности определяется выражением:

$$A\tau_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sink}\omega_1\tau_n/2}{k\omega_1\tau_n/2} \right|.$$

Это выражение найдено по выражению спектральной плотности делением действительных весовых множителей (перед каждой дельта-функцией) на значение круговой частоты $2\pi/T$.

ФЧХ спектральной плотности определяется выборками $\varphi(k\omega_1)$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$. В диапазоне частот $[-2\pi/\tau_n, 2\pi/\tau_n]$ $k = 0$, а выборка $\varphi(0) = 0$. В диапазонах частот $[-4\pi/\tau_n, -2\pi/\tau_n]$, $[2\pi/\tau_n, 4\pi/\tau_n]$ $k = \mp 1$, а выборки фазовой характеристики $\varphi(\mp\omega_1) = \mp\pi$ и т. д.

Вычисленная спектральная плотность является математической моделью периодически повторяющегося видеопульса прямоугольной формы в частотной области. График спектральной плотности показан на рис. 2.5. Дельта-функции на этом рисунке условно изображены стрелками.

График содержит информацию о постоянной составляющей и гармонических сигналах, входящих в ряд Фурье в тригонометрической форме.

Пример 2.5. По спектральной плотности, вид которой приведен на рис. 2.6, вычислить выражение для сигнала $u(t)$.

Решение. Спектральная плотность сигнала ограничена значениями частоты, равными $-\omega_B, \omega_B$.

Сигнал

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = 2F_B \frac{\sin\omega_B t}{\omega_B t}. \quad (2.19)$$

Размерность сигнала – [В].

2.3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА

Под энергией сигнала $u(t)$ понимают величину

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt.$$

Если сигнал имеет конечную длительность T , т. е. не равен нулю на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, то его энергия равна

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt.$$

Запишем выражение для энергии сигнала, используя формулу (2.15):

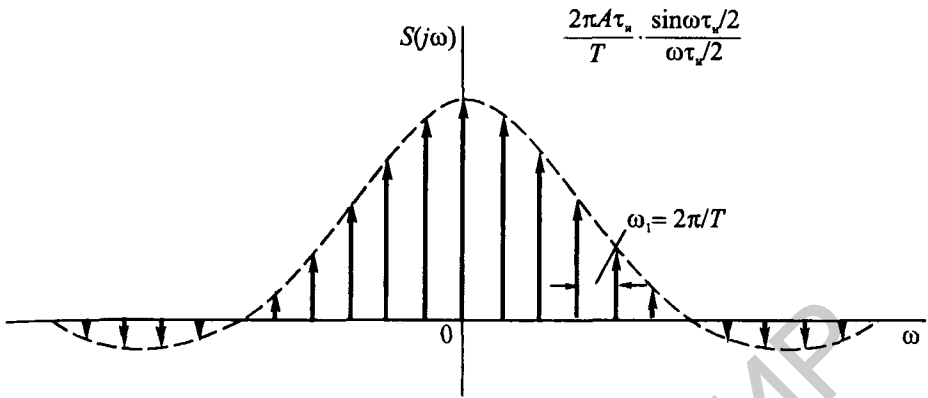


Рис. 2.5. Спектральная плотность периодической последовательности импульсов

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df,$$

где

$$S^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = |S(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)},$$

$$S(j\omega) S^*(j\omega) = |S(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \cdot |S(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} = |S(j\omega)|^2.$$

Полученное равенство называется *равенством Парсеваля*. Оно определяет энергию сигнала через временную функцию или спектральную плотность энергии, которая равна $|S(j\omega)|^2$. Спектральная плотность энергии называется также *энергетическим спектром*.

Рассмотрим сигнал, существующий на ограниченном интервале времени. К такому сигналу применимо равенство Парсеваля. Следовательно,

$$\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df.$$

Разделим левую и правую части равенства на интервал времени, равный T , и устремим этот интервал к бесконечности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) df,$$

где

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} |S(j\omega)|^2 / T. \quad (2.20)$$

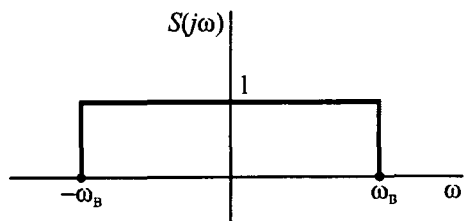


Рис. 2.6. Спектральная плотность сигнала

С увеличением T энергия незатухающих сигналов возрастает, однако отношение $|S(j\omega)|^2/T$ может стремиться к определенному пределу. Этот предел называется *спектральной плотностью мощности* $G(\omega)$. Размерность спектральной плотности мощности $[B^2/Гц]$.

2.4. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Автокорреляционная функция сигнала $u(t)$ определяется следующим интегральным выражением:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau)dt, \quad (2.21)$$

где τ – аргумент, определяющий функцию $R(\tau)$ и имеющий размерность времени; $u(t + \tau)$ – исходный сигнал, сдвинутый во времени на величину $-\tau$.

Автокорреляционная функция имеет следующие свойства.

1. Значение автокорреляционной функции при сдвиге $\tau = 0$ равно энергии сигнала E , т. е.

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = E.$$

2. Автокорреляционная функция при сдвигах $\tau \neq 0$ меньше энергии сигнала:

$$R(\tau) < R(0) = E.$$

3. Автокорреляционная функция является четной функцией, т. е.

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

В справедливости свойств 2 и 3 убедимся на следующем примере.

Пример 2.6. Вычислить автокорреляционные функции сигналов: видеосигнала на рис. 2.7, а и радиосигнала с той же амплитудой и длительностью. Несущая частота радиосигнала равна ω_0 , а начальная фаза равна нулю.

Решение. Первую задачу решим графическим способом. Автокорреляционная функция определяется интегралом от произведения функции $u(t)$ на ее смещенную во времени копию. Смещение видеосигнала находим из уравнения $t + \tau = 0$. График функции $u(t + \tau)$ приведен на рис. 2.7, б. Площадь, определяемая графиком произведения функций $u(t)u(t + \tau)$ (рис. 2.7, в), равна

$$A^2(\tau_n - \tau) = R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau)dt.$$

Отсюда

$$R(\tau) = A^2\tau_n(1 - \tau/\tau_n).$$

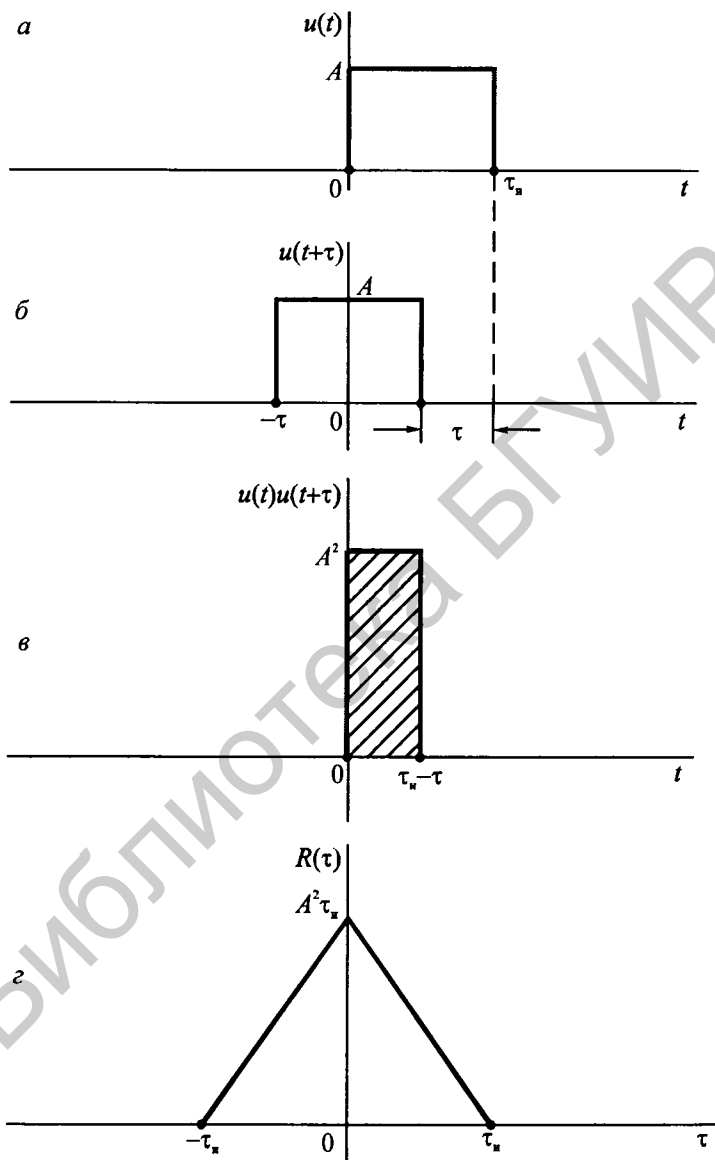


Рис. 2.7. К вычислению автокорреляционной функции прямоугольного видеоимпульса: а – прямоугольный видеоимпульс; б – задержанный во времени прямоугольный импульс; в – произведение импульсов; г – автокорреляционная функция

Функция $R(\tau)$ определяется уравнением прямой (рис. 2.7, з). Функция имеет максимум, если значение аргумента $\tau = 0$, и равна нулю, если $\tau = \tau_n$. Для других значений аргумента функция $R(\tau) < R(0)$. Это свидетельствует о справедливости свойства 2.

Чтобы убедиться в справедливости свойства 3, аналогично вычислим функцию для отрицательных значений τ :

$$R(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t - \tau)dt = A^2\tau_n(1 - \tau/\tau_n).$$

Окончательное выражение для автокорреляционной функции

$$R(\tau) = A^2\tau_n(1 - |\tau|/\tau_n).$$

Функция приведена на рис. 2.7, з и имеет треугольный вид.

Вычислим автокорреляционную функцию радиосигнала, расположив его симметрично относительно оси y . Радиосигнал

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\tau_n/2 > t > \tau_n/2, \\ A\cos\omega_0 t, & \tau_n/2 \geq t \geq -\tau_n/2. \end{cases}$$

Подставляя значения сигнала и его сдвинутой копии в формулу для автокорреляционной функции $R(\tau)$, получим:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= A^2 \int_{(-\tau_n/2)+\tau}^{\tau_n/2} \cos\omega_0 t \cos\omega_0(t - \tau) dt = \\ &= \{A^2\tau_n/2\} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right) \cos\omega_0\tau + \{A^2/2\} \int_{(-\tau_n/2)+\tau}^{\tau_n/2} \cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau) dt = \\ &= \{A^2\tau_n/2\} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right) \cos\omega_0\tau + \{A^2\tau_n/2\} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right) \frac{\sin\omega_0\tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right)}{\omega_0\tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right)}. \end{aligned}$$

Выражение для автокорреляционной функции радиоимпульса состоит из двух слагаемых. Первое из них определяется произведением треугольной функции на гармонический сигнал. На выходе согласованного фильтра это слагаемое реализуется в виде ромбовидного радиоимпульса. Второе слагаемое определяется произведением треугольной функции на функции $(\sin x)/x$, расположенные в точках $\tau = \mp\tau_n$. Значения функций $(\sin x)/x$, которые оказывают заметное влияние на второе слагаемое автокорреляционной функции, весьма быстро убывают при изменении аргумента τ от $-\tau_n$ до ∞ и от τ_n до $-\infty$. Решая уравнение $\omega_0\tau_n(1 - |\tau|/\tau_n) = \pi$, находим интервалы задержки, в пределах которых значения функций $(\sin x)/x$ еще влияют на поведение функции $R(\tau)$. Для положительных значений задержки

$$\tau_{\text{и}} - \tau = 1/2f_0 = T_0/2,$$

где T_0 – период гармонического сигнала.

Аналогично находим интервал для отрицательных значений задержки.

Поскольку влияние второго слагаемого автокорреляционной функции ограничивается весьма малыми (по сравнению с длительностью радиоимпульсов $\tau_{\text{и}}$) интервалами $T_0/2$, в пределах которых значения треугольной функции весьма малы, то вторым слагаемым автокорреляционной функции радиоимпульса можно пренебречь.

Покажем связь автокорреляционной функции $R(\tau)$ со спектральной плотностью энергии сигнала $|S(j\omega)|^2$. Выразим сдвинутый во времени сигнал $u(t + \tau)$ через его спектральную плотность $S(j\omega)$:

$$u(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega. \quad (2.22)$$

Подставим выражение (2.22) в выражение (2.21). В результате получим:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right] e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Нетрудно убедиться также в справедливости равенства

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.24)$$

Разделим левую и правую части равенства на интервал времени T и устремим этот интервал к бесконечности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

С учетом формулы (2.20) перепишем полученное выражение:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.25)$$

где $B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) u(t + \tau) dt$ – предел отношения автокорреляционной функции ограниченного во времени сигнала к значению этого

времени и при стремлении его к бесконечности. Если этот предел существует, то он определяется обратным преобразованием Фурье от спектральной плотности мощности сигнала.

Обобщением понятия «автокорреляционная функция» является *взаимно корреляционная функция*. Эта функция является скалярным произведением двух сигналов

$$R_{u,v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t + \tau)dt.$$

Рассмотрим основные свойства взаимно корреляционной функции.

1. Перестановка сомножителей под знаком интеграла изменяет знак аргумента взаимно корреляционной функции:

$$\begin{aligned} R_{u,v}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \tau)v(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)u(t - \tau)dt = R_{v,u}(-\tau). \end{aligned}$$

В приведенных преобразованиях использована замена $t + \tau = x$.

2. Взаимно корреляционная функция в отличие от автокорреляционной функции не является четной относительно аргумента τ .

3. Взаимно корреляционная функция определяется обратным преобразованием Фурье от произведения спектральных плотностей сигналов $u(t)$, $v(t)$:

$$R_{u,v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega)S_v^*(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Эта формула может быть выведена аналогично формуле (2.23).

Взаимно корреляционная функция между периодически повторяющимся сигналом $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT)$ и непериодическим сигналом $v(t) = u_0(t)$

$$\begin{aligned} R_{u,v}(\tau) &= R_{u,u_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT)u_0(t - \tau)dt = \\ &= \int_0^{\tau} u_0(t)u_0(t + T - \tau)dt + \int_{\tau}^T u_0(t)u_0(t - \tau)dt = \\ &= R(\tau - T) + R(\tau), \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $R(\tau)$ – автокорреляционная функция непериодического сигнала $u_0(t)$.

Выражение полученной функции равно сумме двух интегралов. При сдвиге, равном нулю, первый интеграл равен нулю, а второй равен энергии сигнала. При сдвиге, равном периоду сигнала, первый интеграл равен энергии сигнала, а второй равен нулю. Каждое значение функции при других сдвигах равно сумме значений автокорреляционных функций непериодического сигнала, смещенных относительно друг друга на один период.

Кроме того, взаимно корреляционная функция является периодической функцией, удовлетворяющей уравнению:

$$R_{u,u_0}(\tau) = R_{u,u_0}(\tau + pT), \quad p = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

Взаимно корреляционная функция $R_{u,v}(\tau)$ между сигналом $u(t)$ и сигналом

$$v(t) = u_0(t + nT) + \dots + u_0(t + 2T) + u_0(t + T) + u_0(t) + \\ + u_0(t - T) + u_0(t - 2T) + \dots + u_0(t - nT)$$

равна $R_{u,v}(\tau) = (2n + 1)R_{u,u_0}(\tau)$, где $(2n + 1)T$ – длительность сигнала $v(t)$.

Действительно, вследствие того что период сигнала $u(t)$ равен T , а

$$u_0(t) = u_0(t \mp T) = u_0(t \mp 2T) = \dots = u_0(t \mp nT)$$

взаимно корреляционная функция

$$R_{u,v}(\tau) = R_{u,u_{-n}}(\tau) + \dots + R_{u,u_{-2}}(\tau) + R_{u,u_{-1}}(\tau) + R_{u,u_0}(\tau) + \\ + R_{u,u_1}(\tau) + R_{u,u_2}(\tau) + \dots + R_{u,u_n}(\tau) = (2n + 1)R_{u,u_0}(\tau),$$

где $u_{\mp 1} = u_0(t \pm T)$, $u_{\mp 2} = u_0(t \pm 2T)$, $u_{\mp n} = u_0(t \pm nT)$.

Вычисляя предел функции $(2n + 1)R_{u,u_0}(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$, определяем выражение для автокорреляционной функции периодического сигнала:

$$R(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)R_{u,u_0}(\tau).$$

Значения этой функции при нулевом сдвиге и других сдвигах, для которых функция $R_{u,u_0}(\tau) \neq 0$, равны бесконечности. По этой причине использование последнего выражения в качестве характеристики периодического сигнала теряет смысл.

Разделим последнее выражение на интервал, равный $(2n + 1)T$. В результате получим:

$$B(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)R_{u,u_0}(\tau)/(2n + 1)T = R_{u,u_0}(\tau)/T = \\ = [R(\tau - T) + R(\tau)]/T = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} u_0(t)u_0(t - \tau + T)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T u_0(t)u_0(t - \tau)dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t - \tau)dt, \quad (2.27)$$

так как вследствие периодичности функции $u_0(t - \tau + T) = u_0(t - \tau)$.

Полученная формула определяет функцию $B(\tau)$ как предел отношения автокорреляционной функции сигнала, существующего в интервале времени $(2n + 1)T$, к этому интервалу и стремлению его к бесконечности. Этот

предел для периодически повторяющегося сигнала называется *периодической автокорреляционной функцией сигнала*. Размерность периодической автокорреляционной функции $[B^2]$.

Спектральная плотность мощности одного периода сигнала определяется прямым преобразованием Фурье периодической автокорреляционной функции в пределах только одного ее периода (при этом аргумент изменяется в интервале $\tau = -T/2, \tau = T/2$) (см. (2.20)). Спектральная плотность мощности является непрерывной функцией частоты и по аналогии со спектральной плотностью периодического сигнала по формуле (2.17) определяет *спектральную плотность периодической автокорреляционной функции сигнала*:

$$G_{\Pi}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1),$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

Если автокорреляционная функция записана в виде ряда Фурье в тригонометрической форме, то выражение для ее спектральной плотности

$$G_{\Pi}(\omega) = a_0 \pi \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k [\delta(\omega + k\omega_1) + \delta(\omega - k\omega_1)], \quad (2.28)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau.$$

Пример 2.7. Вычислить периодическую автокорреляционную функцию сигнала $u(t) = A \sin \Omega t$. По найденной функции определить спектральную плотность мощности.

Решение. Подставляя в выражение (2.27) заданный сигнал, получим выражение для периодической автокорреляционной функции:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin \Omega t \sin \Omega (t - \tau) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos \Omega \tau dt - \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos (2\Omega t - \Omega \tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos \Omega \tau. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.25), получим выражение для спектральной плотности мощности:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\Omega \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \\ &= \frac{A^2 T}{4} \left[\frac{\sin(\Omega + \omega) T/2}{(\Omega + \omega) T/2} + \frac{\sin(\Omega - \omega) T/2}{(\Omega - \omega) T/2} \right]. \end{aligned}$$

Пример 2.8. Для периодической нормированной автокорреляционной функции шумоподобного сигнала (M -последовательности с периодом $N = 1023$) вычислить спектральную плотность. Периодическая функция для последовательности меньшей длины ($N = 15$) приведена на рис. 3.40.

Решение. Для сравнительно большого периода $N = 1023$ значения автокорреляционной функции в интервале $T - \tau_0 \geq \tau \geq \tau_0$, где τ_0 – длительность импульса шумоподобной последовательности, примем равными нулю. В этом случае автокорреляционная функция определяется периодически повторяющейся с периодом T последовательностью треугольных импульсов. Основание каждого треугольника равно $2\tau_0$, а его высота равна 1. Уравнение, определяющее автокорреляционную функцию в пределах одного периода, равно $B(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_0$. Учитывая четность этой функции, определяем коэффициенты ряда Фурье:

$$b_k = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \frac{2}{T} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} (1 - |\tau|/\tau_0) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\tau_0} (1 - \tau/\tau_0) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \frac{2\tau_0}{T} \frac{\sin^2 k\omega_1 \tau_0 / 2}{(k\omega_1)^2 (\tau_0 / 2)^2}, \end{aligned}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

При вычислении интеграла использована формула:

$$\int x \cos ax dx = (\cos ax)/a^2 + (x \sin ax)/a.$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в формулу (2.28), получим:

$$\begin{aligned} G_{\Pi}(\omega) &= (\tau_0/T) 2\pi \delta(\omega) + \\ &+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2\tau_0/T) \frac{\sin^2 k\omega_1 \tau_0 / 2}{(k\omega_1)^2 (\tau_0 / 2)^2} [\delta(k\omega_1 + \omega) + \delta(k\omega_1 - \omega)] \right\} = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tau_0/T) \frac{\sin^2 k\omega_1 \tau_0 / 2}{(k\omega_1)^2 (\tau_0 / 2)^2} \delta(\omega - k\omega_1). \end{aligned}$$

Спектральная плотность периодической автокорреляционной функции равна взвешенной сумме бесконечно большого числа дельта-функций. Весовые множители определяются квадратом функции $(\sin x)/x$, умноженной на постоянный коэффициент $2\pi(\tau_0/T)$.

Корреляционные функции цифровых сигналов связаны с корреляционными функциями последовательностей символов. В п. 1.3 дано определение кода и кодовой последовательности. Для кодовой последовательности конечного числа N двоичных символов автокорреляционная функция записывается в виде:

$$r(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q},$$

где a_k – двоичные символы, равные 0 или 1, или символы, равные $-1, 1$; q – сдвиг между символами, $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Последовательности символов могут быть как детерминированными, так и случайными. При передаче информации характерным свойством последовательности символов является их случайность. Значения автокорреляционной функции (при сдвигах, не равных нулю), вычисленные по заранее записанной случайной последовательности конечной длины, также являются случайными.

Автокорреляционные функции детерминированных последовательностей, которые используются для синхронизации, а также в качестве носителей дискретных сообщений, являются детерминированными функциями.

Сигналы, построенные с использованием кодов или их кодовых последовательностей, называются *кодированными сигналами*.

Большинство свойств автокорреляционной функции кодовой последовательности совпадает с рассмотренными выше свойствами автокорреляционной функции сигнала.

При нулевом сдвиге автокорреляционная функция кодовой последовательности достигает максимума, который равен

$$r(0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2.$$

Если символы равны $-1, 1$, то $r(0) = N$.

Значения автокорреляционной функции при других сдвигах меньше $r(0)$.

Автокорреляционная функция кодовой последовательности является четной функцией.

Обобщением автокорреляционной функции является взаимно корреляционная функция. Для кодовых последовательностей одинаковой длины эта функция

$$r_{1,2}(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k b_{k+q},$$

где a_k, b_k – символы соответственно первой и второй последовательности.

Многие свойства функции $r_{1,2}(q)$ совпадают со свойствами взаимно корреляционной функции рассмотренных выше сигналов. Если функция $r_{i,j}(q)$, $i \neq j$ для любой пары кода при сдвиге $q = 0$ равна нулю, то такие коды называются *ортгоналичными*. Краткое описание некоторых используемых в системах связи кодов приведено в приложении.

Взаимно корреляционная функция между кодовой последовательностью и периодически повторяющейся той же последовательностью называ-

ется периодической автокорреляционной функцией кодовой последовательности. Выражение для функции следует из выражений (2.26, 2.27).

$$b(q) = r(q - N)/N + r(q)/N,$$

где $r(q)$ – непериодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности; q – значение сдвига между последовательностями.

Подставляя в полученную формулу выражения автокорреляционных функций, получим:

$$b(q) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{q-1} a_k a_{k-q+N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k+q},$$

где a_k, a_{k+q} – элементы кодовой последовательности.

Периодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности равна взаимно корреляционной функции, вычисленной для кодовой последовательности и циклически сдвинутых символов этой последовательности. Циклически сдвинутые кодовые последовательности, полученные по исходной последовательности $\vec{a}_0 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$, приведены ниже. Кодовая последовательность \vec{a}_1 получена в результате сдвига исходной последовательности \vec{a}_0 на один символ вправо и переноса последнего символа a_{N-1} в начало сдвинутой последовательности. Остальные последовательности получены аналогично.

$$\vec{a}_1 = a_{N-1}a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-2}$$

$$\vec{a}_2 = a_{N-2}a_{N-1}a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-3}$$

.....

$$\vec{a}_{N-1} = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{N-1}, a_0.$$

Пример 2.9. Вычислить автокорреляционную и периодическую автокорреляционную функцию кодированного сигнала, если сигнал

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n),$$

$u_0(t)$ – прямоугольный импульс с амплитудой A и длительностью τ_n (рис. 2.8, а), $T = N\tau_n$ – длительность сигнала.

Этот сигнал построен из прямоугольных импульсов, знак которых определяется весовыми коэффициентами $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -1, k = 0, 1, 2$.

Решение. Подставляя выражение для сигнала в формулу (2.21), получим

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} a_m u_0(t - m\tau_n - \tau) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t - k\tau_n) \cdot u_0(t - m\tau_n - \tau) dt. \end{aligned}$$

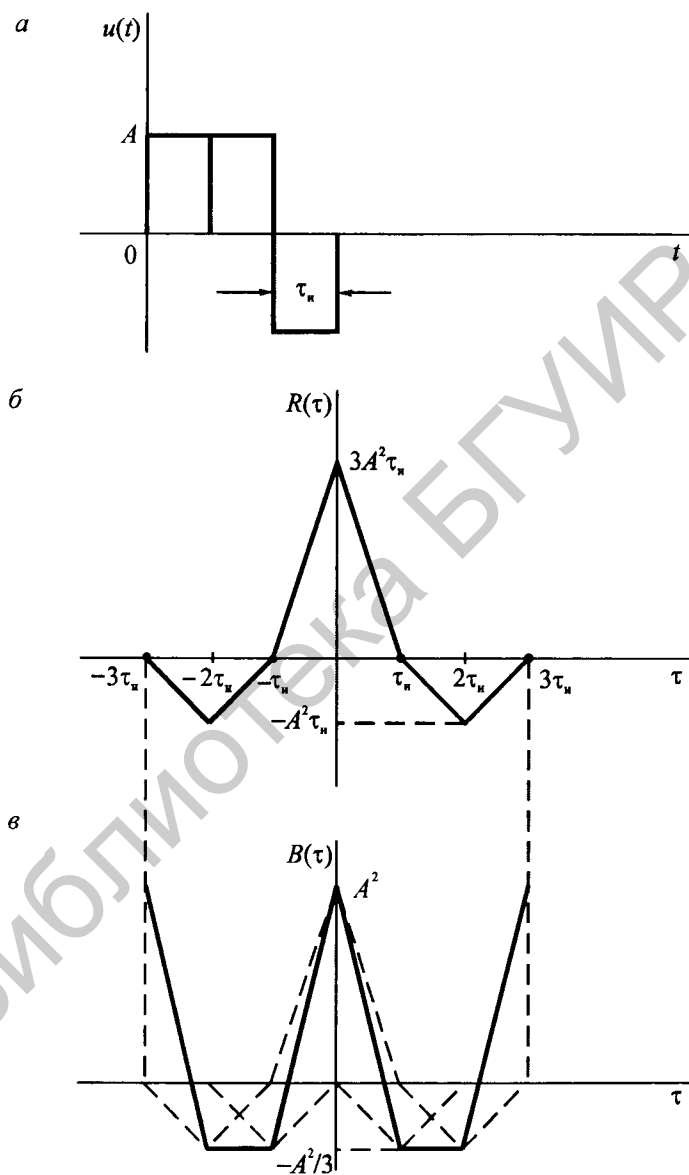


Рис. 2.8. Автокорреляционная функция кодированного сигнала:
 а – кодированный сигнал; б – автокорреляционная функция сигнала; в – автокорреляционная функция периодического сигнала

Произведем замену переменной $t - k\tau_n$ на x :

$$R(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) u_0[x + (k-m)\tau_n - \tau] dx.$$

Обозначим $k - m = q$ и заменим дискретные переменные k, m на переменные k, q .

В результате получим:

$$R(\tau) = \sum_{q=-N+1}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q} R_0(\tau - q\tau_n) = \sum_{q=-N+1}^{N-1} r(q) R_0(\tau - q\tau_n),$$

где

$$R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) u_0(x - \tau) dx, \quad r(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q}.$$

График автокорреляционной функции для заданного сигнала показан на рис. 2.8, б. Эта функция зависит от автокорреляционной функции прямоугольного импульса $R_0(\tau)$ и значений автокорреляционной функции $r(q)$ кодовой последовательности. Вычисленные значения этой функции равны:

$$r(0) = a_0 a_0 + a_1 a_1 + a_2 a_2 = 3,$$

$$r(1) = a_0 a_1 + a_1 a_2 = 1 - 1 = 0,$$

$$r(2) = a_0 a_2 = -1.$$

Вычислим периодическую автокорреляционную функцию, используя рассчитанную выше автокорреляционную функцию. С этой целью в формулу (2.27) подставим выражения для сдвинутых относительно друг друга на один период сигнала автокорреляционных функций:

$$B(\tau) = \frac{1}{N\tau_n} \sum_{p=-N}^{-1} r(p) R_0(\tau - p\tau_n) + \frac{1}{N\tau_n} \sum_{q=0}^{N-1} r(q) R_0(\tau - q\tau_n),$$

где $T = N\tau_n$, $p - q = -N$, $N\tau_n > \tau \geq 0$.

Заменяя в первой сумме дискретный аргумент p на $q - N$ получим:

$$B(\tau) = \frac{1}{N\tau_n} \sum_{q=0}^{N-1} \{r(q - N) R_0[\tau - (q - N)\tau_n] + r(q) R_0(\tau - q\tau_n)\}.$$

Подставляя заданные значения $T = 3\tau_n$, $N = 3$ в полученную формулу, получим:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{3\tau_n} \sum_{q=0}^2 \{r(q - 3) R_0[\tau - (q - 3)\tau_n] + r(q) R_0(\tau - q\tau_n)\} = \\ &= \frac{1}{3\tau_n} [r(-3) R_0(\tau + 3\tau_n) + r(0) R_0(\tau) + r(-2) R_0(\tau + 2\tau_n) + \\ &\quad + r(1) R_0(\tau - \tau_n) + r(-1) R_0(\tau + \tau_n) + r(2) R_0(\tau - 2\tau_n)]. \end{aligned}$$

С учетом значений автокорреляционной функции кодовой последовательности запишем окончательное выражение для периодической автокорреляционной функции кодированного сигнала:

$$B(\tau) = \frac{1}{3\tau_n} [3R_0(\tau) - R_0(\tau + 2\tau_n) - R_0(\tau - 2\tau_n)].$$

График периодической автокорреляционной функции кодированного сигнала, рассчитанный по полученной формуле для заданных условий, приведен на рис. 2.8, в.

Функция периодическая с периодом $T = 3\tau_n$.

2.5. КОМПЛЕКСНОЕ И КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

При анализе прохождения сигнала через блоки системы связи его удобно выразить с помощью *комплексной функции времени*

$$\dot{W}(t) = u(t) + ju^*(t) = \vartheta(t)e^{j\theta(t)}, \quad (2.29)$$

где $u(t) = \text{Re} \dot{W}(t)$ – действительная часть, $u^*(t) = \text{Im} \dot{W}(t)$ – мнимая часть, $\vartheta(t)$ – огибающая, $\theta(t)$ – мгновенная фаза сигнала.

Графическое представление сигнала приведено на рис. 2.9. Поскольку фаза зависит от времени, вектор $\dot{W}(t)$ вращается. Условно считают, что вращение вектора направлено против часовой стрелки.

Сигнал $\dot{W}(t)$ называется *аналитическим*, если функции $u(t)$ и $u^*(t)$ образуют *пару преобразований Гильберта*:

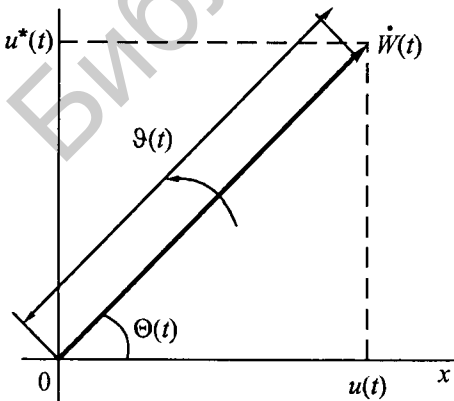


Рис. 2.9. Графическое представление комплексного сигнала

$$u^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

$$u(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^*(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Функция $u^*(t)$ является *сопряженной* по отношению к функции $u(t)$. Если функция $u(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, то она может быть выражена через ее спектральную плотность:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Записанный интеграл можно представить в виде двух интегралов. Первый из них будет соответствовать отрицательным, а второй – положительным частотам:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.30)$$

По функции (2.29) найдем комплексно-сопряженную функцию $\dot{W}_1(t)$.

Складывая ее с функцией (2.29), получим

$$\dot{W}_1(t) + \dot{W}(t) = 2u(t).$$

Следовательно,

$$u(t) = (1/2)[\dot{W}_1(t) + \dot{W}(t)]. \quad (2.31)$$

Сравнивая формулы (2.30) и (2.31), найдем следующие выражения для комплексных функций:

$$\dot{W}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.32)$$

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.33)$$

Из приведенного анализа следует, что если функции $u(t)$ и $u^*(t)$ образуют пару преобразований Гильберта, то аналитический сигнал определяется формулой (2.33). Учитывая, что для любого аналитического сигнала спектральная плотность в области отрицательных частот равна 0, формулу (2.33) можно записать иначе:

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Из последней формулы находим, что спектральная плотность аналитического сигнала

$$S_W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(t) e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 0, & \omega < 0; \\ 2S(j\omega), & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Подставим в (2.34) выражение (2.29). В результате получим:

$$\begin{aligned} S_W(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) + ju^*(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt + j \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) e^{-j\omega t} dt = S(j\omega) + jS^*(j\omega). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Учитывая условия (2.34), запишем выражение (2.35) в виде:

$$S(j\omega) + jS^*(j\omega) = 0, \omega < 0, \quad (2.36)$$

$$S(j\omega) + jS^*(j\omega) = 2S(j\omega), \omega \geq 0. \quad (2.37)$$

Решая уравнения (2.36), (2.37), находим

$$S^*(j\omega) = jS(j\omega), \omega < 0, \quad (2.38)$$

$$S^*(j\omega) = -jS(j\omega), \omega \geq 0. \quad (2.39)$$

Сопряженная спектральная плотность, соответствующая сопряженному сигналу $u^*(t)$, может быть найдена по спектральной плотности сигнала $u(t)$ поворотом всех спектральных составляющих на 90° в области отрицательных частот (см. 2.38) и поворотом всех спектральных составляющих на -90° в области положительных частот (см. 2.39). Если функции $u(t)$, $u^*(t)$ составляют пару преобразований Гильберта, то огибающая и фаза сигнала однозначно определяются по формулам:

$$\vartheta(t) = \sqrt{u^2(t) + u^{*2}(t)}, \quad \theta(t) = \arctg[u^*(t)/u(t)].$$

Производная от фазы сигнала определяет *мгновенную частоту*

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt.$$

По мгновенной частоте находится *мгновенная фаза сигнала*:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Часто фазу сигнала представляют в виде:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi(t), \quad (2.40)$$

где $\varphi(t) = \psi(t) + \varphi_0$; ω_0 – независимая от времени частота, которая называется несущей; $\psi(t)$ – переменная составляющая, а φ_0 – постоянная составляющая мгновенной фазы.

Подставляя (2.40) в (2.29), получим

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \vartheta(t)\cos\theta(t) + j\vartheta(t)\sin\theta(t) = \\ &= \vartheta(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + j\vartheta(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Действительная часть последнего выражения:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \dot{W}(t) = \vartheta(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= A(t)\cos\omega_0 t - B(t)\sin\omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $A(t)\cos\omega_0 t$, $-B(t)\sin\omega_0 t$ – квадратурные составляющие.

Математическим выражением (2.42) пользуются при изучении частотно-избирательных цепей с ограниченной шириной полосы пропускания.

Если эта ширина невелика по сравнению с несущей частотой, то выходной сигнал называется *узкополосным*. Узкополосный сигнал является *квазигармоническим*, т. е. почти гармоническим колебанием, у которого огибающая и фаза являются медленно меняющимися функциями времени.

Пример 2.10. Для функции $u(t) = \cos\omega_0 t$ найти сопряженную по Гильберту функцию $u^*(t)$.

Решение. Применяем прямое преобразование Гильберта:

$$u^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 \tau}{t - \tau} d\tau.$$

Обозначим $t - \tau = -\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0(t + \lambda)}{\lambda} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t \frac{\cos\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega_0 t \frac{\sin\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos\omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \sin\omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \sin\omega_0 t. \end{aligned}$$

При вычислении использованы следующие табличные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \pi.$$

Из приведенного примера видно, что сопряженный по Гильберту сигнал находится путем сдвига фазы на $\pi/2$ у исходного сигнала $u(t) = \cos\omega_0 t$.

2.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

При решении ряда задач, связанных с анализом и преобразованием сигналов, целесообразно отображать эти сигналы векторами некоторого векторного пространства.

Совокупность двух чисел x_1, y_1 определяет координаты вектора \vec{z} в двумерном пространстве (рис. 2.10). Длина вектора \vec{z} равна его норме

$$d = \left\| \vec{z} \right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (2.43)$$

Расстояние между векторами \vec{z}_1 и \vec{z}_2 (см. рис. 2.11)

$$d(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \left\| \vec{z}_1 - \vec{z}_2 \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.44)$$

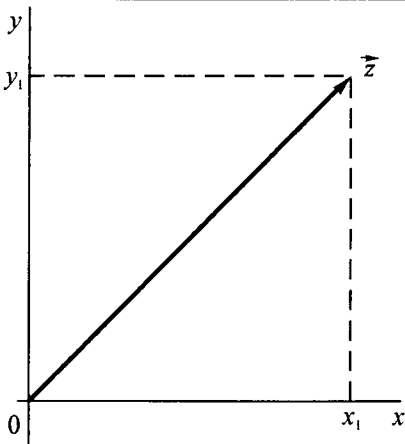


Рис. 2.10. Двухмерный вектор

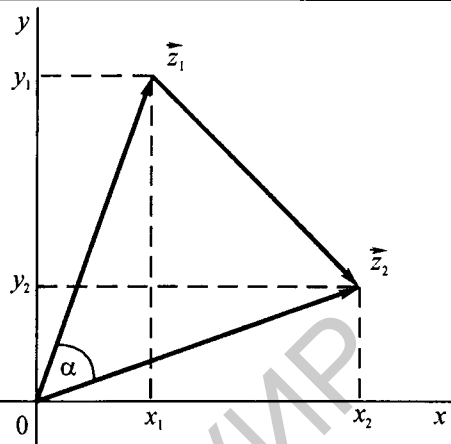


Рис. 2.11. Расстояние между двумя векторами

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad (2.45)$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \|\vec{z}_1\| \cdot \|\vec{z}_2\| \cos \alpha. \quad (2.46)$$

Формула (2.45) определяет скалярное произведение через проекции векторов на оси x и y . Формула (2.46) дает выражение для скалярного произведения через произведение длин двух векторов на косинус угла между ними.

Условие ортогональности векторов:

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \quad (2.47)$$

Многомерное пространство является обобщением двумерного пространства. Поэтому, зная формулы (2.43 – 2.47) для двумерного пространства, легко написать аналогичные формулы для n -мерного. Например, длина n -мерного вектора $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ определяется нормой

$$d = \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Расстояние между двумя n -мерными векторами определяется нормой разности векторов:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}.$$

Скалярное произведение двух n -мерных векторов

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Скалярное произведение обладает свойствами, которые характерны для обычного алгебраического произведения двух величин:

$$\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}),$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}),$$

$$(\vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{u}, \vec{c}) + (\vec{v}, \vec{c}).$$

Если скалярное произведение двух n -мерных векторов равно нулю, то такие векторы называются ортогональными.

Линейное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым*. Если в евклидовом пространстве норма вектора и расстояние между векторами заданы приведенными выше формулами, то такое пространство называется нормированным метрическим пространством.

Развитием понятия векторного пространства является *функциональное пространство*. Норма функции $u(t)$:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt}, \quad (2.48)$$

где T – интервал времени, на котором определена функция $u(t)$. Расстояние между функциями $u(t)$ и $v(t)$ равно норме разности

$$\|u(t) - v(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} [u(t) - v(t)]^2 dt}.$$

Скалярное произведение функций $u(t)$ и $v(t)$:

$$(u, v) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t) dt. \quad (2.49)$$

Функции $u(t)$ и $v(t)$ ортогональны, если

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t) dt = 0.$$

Пространство функций со скалярным произведением (2.49) и нормой (2.48) называется *функциональным пространством Гильберта*.

Раскрывая скобки, для сигналов с одинаковой энергией выражение для нормы разности можно записать иначе:

$$\|u(t) - v(t)\| = \sqrt{2E[1 - r_{u,v}(0)]},$$

где $r_{u,v}(0)$ – значение нормированной взаимно корреляционной функции

$$r_{u,v}(0) = \frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t)dt.$$

Это значение лежит в пределах $-1 \leq r_{u,v}(0) \leq 1$.

Расстояние в функциональном пространстве тем больше, чем больше множитель $1 - r_{u,v}(0)$.

Для противоположных по знаку сигналов $r_{u,v}(0) = -1$ и множитель равен 2. Для этого случая расстояние между сигналами максимально и равно $2\sqrt{E}$. Противоположные по знаку сигналы реализуются при двоичной фазовой модуляции различных носителей сообщений (постоянного тока, гармонического сигнала, шумоподобного сигнала и т. д.). Как будет показано далее, противоположные по знаку сигналы обеспечивают наибольшую помехоустойчивость приема (см. главу 7).

Для ортогональных сигналов $r_{u,v}(0) = 0$, а множитель $1 - r_{u,v}(0) = 1$.

Расстояние между ортогональными сигналами меньше, чем у противоположных сигналов, и равно $\sqrt{2E}$. Поэтому помехоустойчивость приема этих сигналов меньше помехоустойчивости противоположных сигналов. Ортогональные сигналы реализуются при двоичной частотной модуляции.

Для передачи информации кроме двоичных сигналов используют набор сигналов одинаковой энергии. Для каждой пары сигналов $u_i(t)$, $u_j(t)$ из этого набора желательно обеспечить наибольшее расстояние. Максимальное расстояние, равное $\sqrt{2E(1 - r_{i,j})}$, обеспечивается оптимальной системой сигналов, для которой коэффициенты $r_{i,j}$ одинаковы и удовлетворяют условию:

$$\frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1/(M-1), & i \neq j, M - \text{четное}; \\ -1/M, & i \neq j, M - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Это так называемые симплексные сигналы. В $(M-1)$ -мерном пространстве они образуют правильный симплекс с числом вершин, равным M . Набор симплексных сигналов можно получить на основе двоичных M -последовательностей, которые исследуются далее. Коэффициент $r_{i,j}$ симплексных двоичных сигналов выражается также и через значения символов, соответствующих этим сигналам кодовых последовательностей:

$$r_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k}b_{j,k},$$

где a_k, b_k – символы кодовых последовательностей, равные $-1, 1$.

Коды, все пары кодовых комбинаций которых удовлетворяют условию:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1/(M-1), & i \neq j, M - \text{четное}; \\ -1/M, & i \neq j, M - \text{нечетное}, \end{cases}$$

называются *симплексными кодами*.

В системах связи применяют и другие сигналы одинаковой энергии, которые весьма близки к оптимальным сигналам. Число сигналов равно 2^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, а каждая пара сигналов удовлетворяет условию ортогональности:

$$\frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С ростом мерности пространства различие в расстоянии между парами симплексных и ортогональных сигналов быстро уменьшается и, если $M = \infty$, становится равным нулю. К числу ортогональных сигналов относятся сигналы, кодированные последовательностями Уолша и Д-последовательностями (см. приложения 3, 4, 5).

При изучении двоичных кодов используют *неевклидово пространство*, в котором норма и расстояние определяются формулами:

$$\|\vec{a}\| = \sum_{k=1}^N |a_k|,$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sum_{k=1}^N |a_k + b_k|,$$

где a_k, b_k – символы кодовых последовательностей длиной N ; $|a_k|, |a_k - b_k|$ – модуль значения символа и модуль разности значений символов.

Если двоичные последовательности построены из символов 0, 1, то знак модуля в формулах можно опустить. Кроме того, в формуле для расстояния знак вычитания можно заменить знаком суммирования по модулю два. В этом случае норма двоичной кодовой комбинации равна количеству содержащихся в ней единиц, а норма разности двух кодовых комбинаций – числу отличающихся символов в этих комбинациях. Чтобы найти это число, нужно кодовые комбинации поразрядно сложить по модулю два и подсчитать число единиц в полученной сумме. Такое определение расстояния введено Хэммингом и поэтому оно называется *расстоянием Хэмминга*.

Вычислим спектральную плотность произведения двух сигналов.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \int_{-\infty}^{\infty} [S_v(jz)e^{jzt} dz] e^{-j\omega t} dt = \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz) \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j(\omega-z)t} dt dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz) \cdot S_u[j(\omega-z)] dz,$$

где $S_v(jz)$ – спектральная плотность сигнала $v(t)$, $S_u(-jz)$ – зеркальное отображение спектральной плотности сигнала $u(t)$.

Выражение (2.51) называется также *сверткой спектров*.

Свертку можно записать и в другом виде, если учесть, что $S_u[j(\omega - z)] = S_u^*[j(z - \omega)]$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz)S_u^*[j(z - \omega)] dz.$$

Свертка спектров в частотной области определяется произведением соответствующих сигналов во временной области.

При $\omega = 0$ формула (2.51) переходит в формулу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz)S_u^*(jz) dz. \quad (2.52)$$

Если $u(t) = v(t)$, то равенство (2.52) превращается в равенство Парсеваля.

2.7. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Для функций с ограниченным спектром В. А. Котельников доказал теорему, которая является теоретической основой построения дискретных систем связи. Ее содержание следующее.

Любая функция времени $u(t)$ с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями, отсчитанными в дискретные моменты времени через интервал $\Delta t = 1/2F_B$, где F_B – верхняя граничная частота спектра этой функции.

Спектр функции определен в базе тригонометрических функций. Если значения амплитудно-частотной характеристики этого спектра для всех частот $\omega \geq 2\pi F_B$ равняются нулю, то такой спектр называется *ограниченным* верхней частотой F_B . Ограничение спектра, например, первичного низкочастотного сигнала можно реализовать с помощью фильтра нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого для всех частот $\omega \geq 2\pi F_B$ равняется нулю. В этом случае на вход фильтра подают первичный сигнал, спектр которого желательно ограничить.

Значения функции, отсчитанные в дискретные моменты времени, называются *выборками* этой функции. Согласно теореме, при выполнении заданных условий, между функцией и всеми ее значениями в дискретные моменты времени существует взаимно однозначное соответствие, а функцию можно заменить ее значениями. Зависимость между функцией и выборками определяется рядом Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)}. \quad (2.53)$$

Он является разновидностью обобщенного ряда Фурье (2.2) и построен на базе ортонормированных функций:

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2F_B} \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \quad (2.54)$$

где k – целые числа в пределах $-\infty, \infty$.

Эти функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = 0, \quad k \neq l$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^2(t) dt = 1, \quad k = l. \quad (2.55)$$

Выборки $u(k\Delta t)$, входящие в выражение (2.53), связаны с весовыми спектральными коэффициентами α_k и в базе вида $(\sin x)/x$ определяют дискретный спектр сигнала.

Для любого момента времени функция $u(t)$ определяется бесконечным числом произведений коэффициентов α_k на сдвинутые во времени базисные функции вида $(\sin x)/x$.

Однако, учитывая, что каждая базисная функция ограничена во времени и сравнительно быстро убывает до нулевого значения, функция $u(t)$ для любого момента времени определяется ограниченным числом этих произведений.

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi_l(t) dt.$$

Для вычисления коэффициентов воспользуемся формулой (2.52) и результатами примера 2.5. В этом примере по спектральной плотности с единичной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) в диапазоне частот $-\omega_B, \omega_B$ найден сигнал

$$2F_B (\sin \omega_B t) / \omega_B t.$$

Базисная функция отличается от этого сигнала первым множителем (он в $\sqrt{2F_B}$ раз меньше) и сдвигом во времени, который равен $l\Delta t$. Следовательно, спектральная плотность базисной функции равна

$$(1/\sqrt{2F_B}) e^{-j\omega l\Delta t}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.52), получим:

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi_l(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(jz) S_u(-jz) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2F_B}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S_u(-jz) e^{-jz l\Delta t} dz = \frac{1}{\sqrt{2F_B}} u(l\Delta t).$$

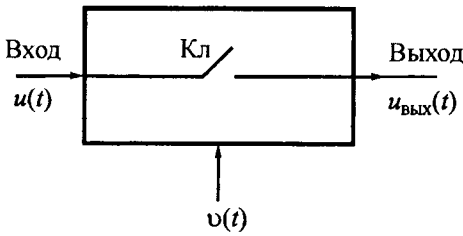


Рис. 2.12. Структурная схема дискретизатора

Из полученного выражения следует, что весовой спектральный коэффициент определяется выборкой функции.

Подставляя выражение спектрального коэффициента α_k и значение базисной функции (2.54) в выражение (2.2), получим ряд Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(k\Delta t)}{\sqrt{2F_B}} \left(\sqrt{2F_B} \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right)$$

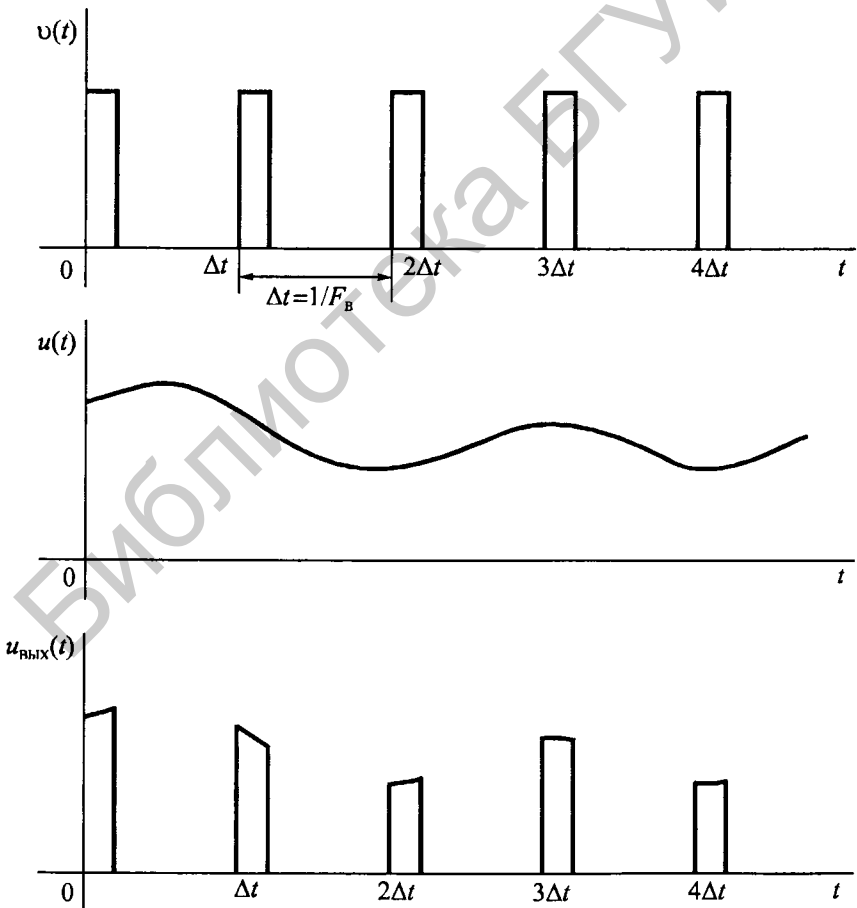


Рис. 2.13. Временные диаграммы, поясняющие работу дискретизатора

Вычислим энергию левой и правой частей полученного ряда.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(k\Delta t)}{\sqrt{2F_B}} \left(\sqrt{2F_B} \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right) \right]^2 dt = \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k\Delta t) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right]^2 dt + \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} u(k\Delta t) u(l\Delta t) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right] \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin 2\pi F_B(t - l\Delta t)}{2\pi F_B(t - l\Delta t)} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k\Delta t). \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

При вычислении энергии использованы формулы (2.55). Равенство (2.56) является аналогом равенства Парсеваля, приведенного в пункте 2.3. Оно определяет энергию сигнала через сумму квадратов спектральных коэффициентов в базисе функций вида $(\sin x)/x$.

Изучая теорему Котельникова, полезно обратить внимание на следующее.

1. В теореме не оговаривается вид функции $u(t)$. Поэтому она может быть и случайной.

2. Из равенства (2.53) следует, что вся информация о функции $u(t)$ содержится в ее выборочных значениях $u(k\Delta t)$, так как базисные функции, являясь известными, никаких сведений не несут. Поэтому, передавая выборочные значения по каналу связи, сохраняем всю необходимую информацию о сообщении. Можно передавать выборочные значения непосредственно, а можно перевести их в числа.

3. Теорема определяет восстановление сообщения на приемном конце: выборочные значения необходимо умножить на базисные функции и результаты сложить.

Процесс взятия выборок называется *дискретизацией* (выборки обычно берут через одинаковые интервалы времени). Устройство, с помощью которого ведется дискретизация, называется *дискретизатором*. Он является частью аналого-цифрового преобразователя. В этом качестве можно использовать управляемый ключ, замыкаемый на непродолжительное время.

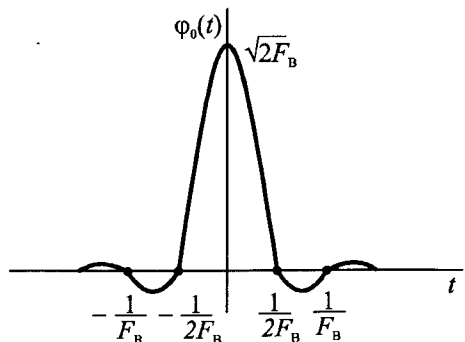


Рис. 2.14. Базисная функция

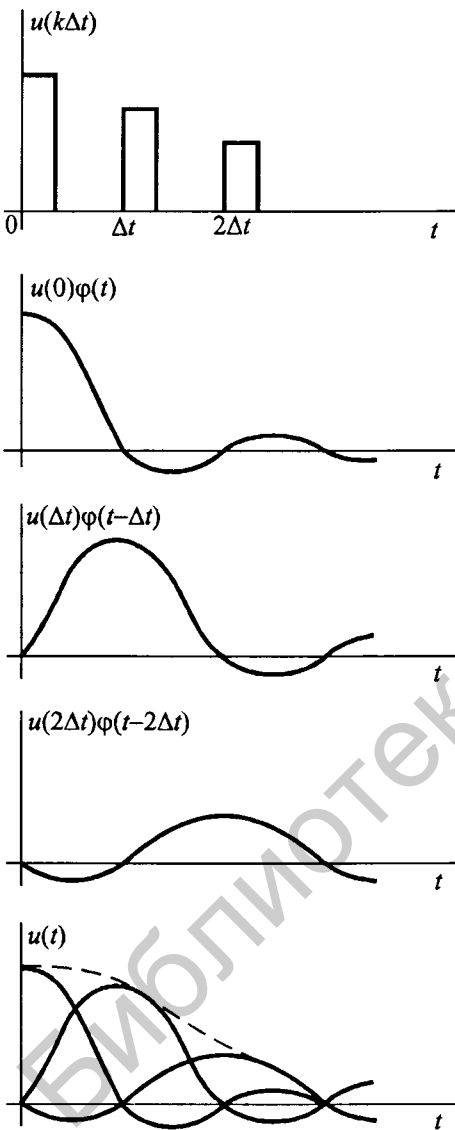


Рис. 2.15. Временные диаграммы, поясняющие восстановление сигнала

Задачу можно решить с использованием ЭВМ, в памяти которой хранятся значения базисной функции, или с использованием фильтра нижних частот. Если на вход фильтра с коэффициентом передачи, равным нулю на всей частотной оси, а в интервале $-\omega_b, \omega_b$, равным K_0 , подать очень короткий видеомпульс с амплитудой, равной выборке сигнала, то на его выходе появится сигнал, повторяющий базисную функцию и пропорциональный этой выборке. Убедимся в этом.

Структурная схема дискретизатора, выполненная на ключе, приведена на рис. 2.12. Временные диаграммы, поясняющие работу дискретизатора, приведены на рис. 2.13. В течение длительности управляющих импульсов $v(t)$ вход ключа соединяется с выходом и на выходе ключа действует входное напряжение в виде модулированных по амплитуде импульсов, длительность которых равна длительности управляющих импульсов. Так как эта длительность, как правило, выбирается весьма малой, непосредственная передача выборок оказывается возможной только по сравнительно широкополосным линиям и на небольшие расстояния. Поэтому в цифровых системах связи значения выборок переводят в двоичные слова, для передачи символов которых требуется меньшая ширина полосы линии связи.

При восстановлении в приемнике непрерывной функции нужно генерировать базисные функции с аргументами $2\pi F_b(t - k\Delta t)$, где $k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$ — номера этих функций, а $k\Delta t$ — дискретные моменты времени. Базисная функция с номером $k = 0$ показана на рис. 2.14.

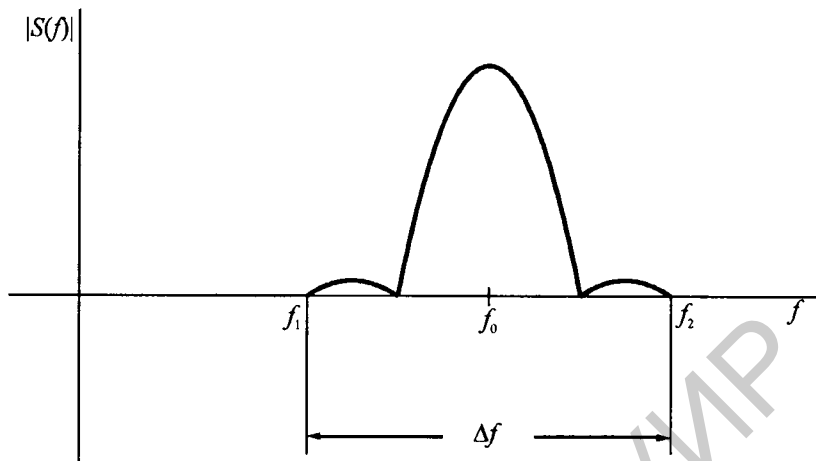


Рис. 2.16. Спектр узкополосного сигнала

Спектральная плотность импульса на входе фильтра определяется формулой (2.18), если $t_0 = 0$:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = u(0)\tau_{\text{и}} \frac{\sin \omega \tau_{\text{и}} / 2}{\omega \tau_{\text{и}} / 2}.$$

Если длительность видеоимпульса выбрана достаточно малой, то в пределах интервала частот $-\omega_{\text{в}}$, $\omega_{\text{в}}$ эту спектральную плотность можно считать постоянной и равной $u(0)\tau_{\text{и}}$. Поэтому спектральная плотность сигнала на выходе фильтра нижних частот

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = u(0)\tau_{\text{и}}K_0.$$

Сигнал на выходе фильтра

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{u(0)\tau_{\text{и}}K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{в}}}^{\omega_{\text{в}}} e^{j\omega t} d\omega = 2u(0)K_0\tau_{\text{и}}F_{\text{в}} \frac{\sin \omega_{\text{в}} t}{\omega_{\text{в}} t}.$$

Процесс восстановления сигнала по его выборкам поясняется рис. 2.15.

Для реальных сигналов, которые начинаются в момент времени $t = 0$ и заканчиваются в момент времени $t = (N - 1)\Delta t$, ряд Котельникова записывается в виде

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_{\text{в}}(t - k\Delta t)}{2\pi F_{\text{в}}(t - k\Delta t)}. \quad (2.57)$$

Энергия таких сигналов почти полностью сосредоточена в указанном интервале времени и в диапазоне частот $-\omega_{\text{в}}$, $\omega_{\text{в}}$. Число отсчетов в интервале времени T определяется формулой $N = T/\Delta t = 2F_{\text{в}} T$.

Если энергия сигнала не будет сосредоточена в указанных временном и частотном интервалах, то формула (2.57) окажется приближенной.

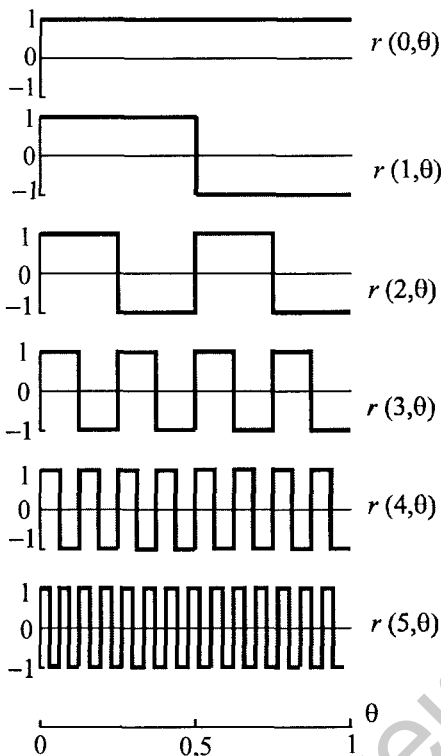


Рис. 2.17. Функции Радемахера

Погрешность представления сигнала его значениями в этом случае определяется отношением:

$$\varepsilon = \Delta E/E,$$

где E – энергия сигнала, ΔE – энергия за пределами частот $\pm\omega_b$.

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi F_b}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega,$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность сигнала.

Если сигнал имеет относительно узкий спектр, ограниченный частотами f_1 и f_2 (рис. 2.16), и записывается в виде

$$u(t) = \vartheta(t)\cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)],$$

где $f_0 = (f_1 + f_2)/2$, $\vartheta(t)$ – огибающая, $\varphi(t)$ – составляющая фазы узкополосного сигнала, то выражение для сигнала можно разложить в ряд:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n_1} \varphi'_k(t) \vartheta_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k).$$

Выражения, входящие в последнюю формулу, равны:

$$\varphi'_k(t) = \frac{\sin \pi \Delta f (t - k\Delta t)}{\pi \Delta f (t - k\Delta t)}; \quad \Delta f = f_2 - f_1;$$

$$\vartheta_k = \vartheta(k\Delta t); \quad \varphi_k = \varphi(k\Delta t); \quad n_1 = \Delta f T,$$

T – длительность сигнала.

Функция $u(t)$ полностью определяется значениями амплитуды и фазы, взятыми через интервалы времени $\Delta t = 1/\Delta f$. Общее количество выборочных значений равно $2\Delta f T$.

2.8. РЯД УОЛША

С развитием методов обработки цифровых сигналов определенный интерес имеет система базисных функций Уолша, которая имеет следующие свойства.

1. Каждая функция является периодической и на отрезке существования $[0, 1]$ принимает значения $-1, 1$.

2. Любая функция определяется номером n , безразмерным временем $\theta = t/T$ и записывается в виде $\text{Wal}(n, \theta)$.

3. Функции Уолша строятся на основе функций Радемахера $r(m, \theta)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, которые в том же интервале $[0, 1]$ принимают значения $-1, 1$. Например, функция $r(1, \theta)$ равна 1 в интервале относительного времени $[0, 1/2]$ и равна -1 в интервале $[1/2, 1]$, т. е. определяется двоичным словом $1, -1$, длительность каждого символа которого равна $1/2$. Функция $r(2, \theta)$ определяется словом $1, -1, 1, -1$, длительность каждого символа которого равна $1/4$. Функция $r(3, \theta)$ определяется словом $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$, длительность каждого символа которого равна $1/8$, и т. д. На рис. 2.17 показаны функции Радемахера для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$: Выражения некоторых функций Уолша через функции Радемахера приведены в табл. 1

Таблица 1

n	Функция Уолша
0	$\text{Wal}(0, \theta) = 1$
1	$\text{Wal}(1, \theta) = r(1, \theta)$
2	$\text{Wal}(2, \theta) = r(1, \theta) r(2, \theta)$
3	$\text{Wal}(3, \theta) = r(2, \theta)$
4	$\text{Wal}(4, \theta) = r(2, \theta) r(3, \theta)$

4. Произведение любых двух функций Уолша также дает функцию Уолша. Это свойство называется *мультипликативностью*.

5. Среднее значение функции Уолша равно нулю, если $n \neq 0$.

6. Функции Уолша являются ортонормированными функциями. Они удовлетворяют условиям:

$$\int_0^1 \text{Wal}(n, \theta) \text{Wal}(k, \theta) d\theta = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Разложение сигнала в обобщенный ряд Фурье с использованием базисных функций Уолша имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{Wal}(n, \theta), \quad (2.58)$$

где c_n – весовые спектральные коэффициенты.

Умножим левую и правую части выражения (2.58) на функцию Уолша и результат проинтегрируем в пределах интервала разложения T сигнала.

$$\int_0^T u(t) \text{Wal}(k, \theta) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^T \text{Wal}(n, \theta) \text{Wal}(k, \theta) dt.$$

Учитывая, что функции Уолша являются ортонормированными, найдем выражение для весовых спектральных коэффициентов.

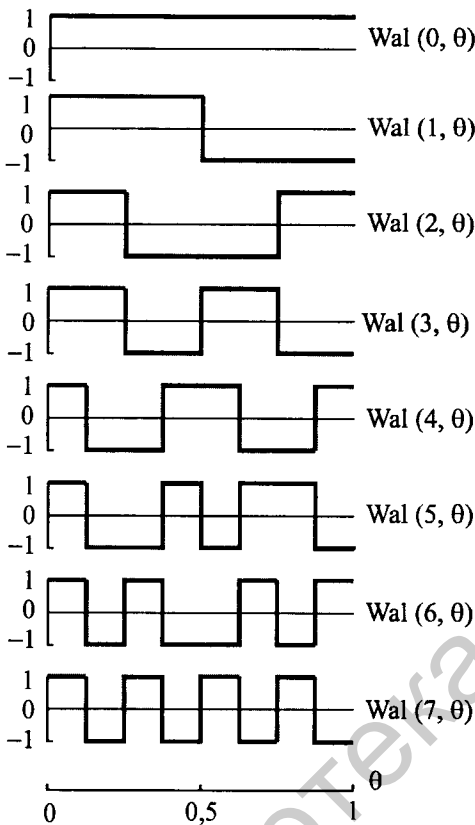


Рис. 2.18. Функции Уолша

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \text{Wal}(n, \theta) dt,$$

где $\theta = t/T$.

Ряд (2.58) называется рядом Уолша.

При разложении сигнала в ряд Уолша и использовании ЭВМ существенно сокращается время выполнения операций по сравнению с разложением в ряд Фурье в тригонометрической форме потому, что при вычислении коэффициентов ряда Фурье в тригонометрической форме сигнал умножается на значения тригонометрических функций. Число этих значений велико, тогда как при вычислении коэффициентов ряда Уолша число значений базисных функций равно двум.

Дальнейшее сокращение времени вычислений дает применение быстрого преобразования Уолша, в котором использу

ются математические преобразования, аналогичные быстрому преобразованию Фурье (см. главу 3, 3.11.4).

Ограничиваясь N членами разложения, получают формулу усеченного ряда Уолша:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{Wal}(n, \theta).$$

Пример 2.11. Вычислить ряд Уолша для последовательности импульсов, если интервал разложения равен $[-T/2, T/2]$, а длительность импульсов равна $T/2$. Функции Уолша приведены на рис. 2.18, а один период сигнала – на рис. 2.19.

Решение. Вычисляем коэффициенты ряда Уолша.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[0, \theta] dt = \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} dt = A/2.$$

$$c_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[1, \theta] dt = \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \text{Wal}[1, \theta] dt = 0.$$

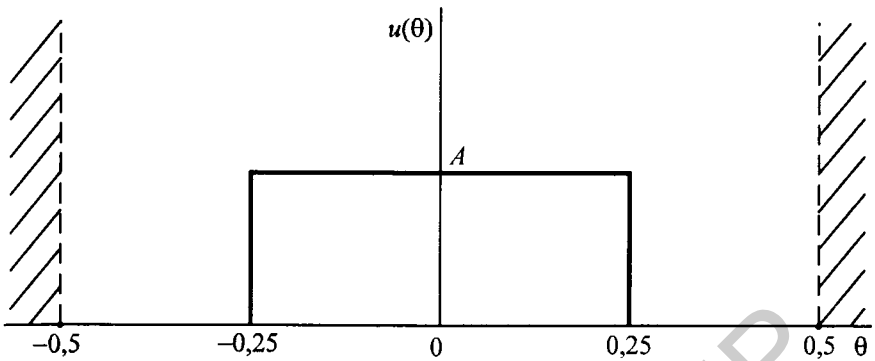


Рис. 2.19. Сигнал в интервале разложения

$$c_2 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[2, \theta] dt = -\frac{A T}{T \cdot 2} = -\frac{A}{2}.$$

Остальные коэффициенты равны нулю.

Ряд Уолша:

$$u(t) = A/2 \text{Wal}[0, \theta] - A/2 \text{Wal}[2, \theta].$$

Контрольные вопросы

1. Что Вы понимаете под детерминированным сигналом?
2. Как записываются выражения для сигнала с использованием рядов Фурье в комплексной и тригонометрической формах?
3. В чем отличие между спектральными плотностями непериодического и периодического сигналов?
4. Как временная функция сигнала $u(t)$ выражается через спектральную плотность $S(j\omega)$?
5. В каком соотношении находятся спектральная плотность мощности и автокорреляционная функция сигнала с неограниченной энергией?
6. Что Вы понимаете под аналитическим сигналом?
7. Какой сигнал называется узкополосным?
8. Какому условию удовлетворяют ортогональные сигналы?
9. Чему равно расстояние между двумя функциями $v(t)$ и $u(t)$?
10. Как формулируется теорема Котельникова?
11. Как записывается выражение для сигнала с использованием ряда Уолша?

3. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ, НЕЛИНЕЙНОЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ

Структурная схема системы связи состоит из отдельных блоков, между которыми заданы определенные связи. Блоки, как и система в целом, имеют входы и выходы.

При подаче сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ на вход блока на его выходе формируется сигнал $u_{\text{вых}}(t)$.

Операция L преобразования входного сигнала, в результате которой формируется определенный выходной сигнал, называется оператором.

Оператор вместе с условиями и ограничениями, которые накладываются на входной и выходной сигналы, определяют *математическую модель блока (системы)*.

Система (или блок), у которой выходное напряжение не зависит от момента времени, с которого начинается входной сигнал, называется *стационарной*. Показатели качества и параметры стационарной системы не зависят от времени. Если указанное условие не выполняется, система называется *нестационарной*.

Под *линейной* понимают такую систему, оператор которой удовлетворяет условиям:

$$L[u_{\text{вх1}}(t) + u_{\text{вх2}}(t)] = L[u_{\text{вх1}}(t)] + L[u_{\text{вх2}}(t)], \quad (3.1)$$

$$L[\alpha u_{\text{вх}}(t)] = \alpha L u_{\text{вх}}(t), \quad (3.2)$$

где α – произвольное число.

Аналогичное определение дается для линейного блока или устройства. В *нелинейной* системе условия (3.1), (3.2) не выполняются.

Равенство (3.1) выражает свойство *аддитивности*, а равенство (3.2) – свойство *однородности*. Свойство аддитивности означает, что реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на каждый из этих сигналов в отдельности. Свойство однородности заключается в том, что отклик линейной системы на увеличенный в α раз входной сигнал равен увеличенному в то же число раз отклику линейной системы на входной сигнал.

Под *параметрической* понимают такую систему, параметры которой изменяются во времени. Параметрические системы могут быть как линейными, так и нелинейными. Отклик линейной параметрической цепи на входной сигнал равен

$$u_{\text{вых}}(t) = \Phi(t)u_{\text{вх}}(t), \quad (3.3)$$

где $\Phi(t)$ – оператор, зависящий от времени и выражающий параметрическое преобразование.

Оператор можно представить в виде полинома по некоторым функциям времени $\varphi_n(t)$:

$$\Phi(t) = q_0 + q_1\varphi_1(t) + q_2\varphi_2(t) + \dots, \quad (3.4)$$

где $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ – постоянные множители.

Ниже рассматриваются только линейные параметрические системы.

3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

3.2.1. Линейные преобразования дискретного спектра

Вычислительный или экспериментальный процесс определения спектрального состава сигнала называется *спектральным анализом*.

Между сигналами и их спектрами существует взаимно однозначное соответствие, поэтому задача преобразования сигнала может быть сформулирована и как задача преобразования его спектра: при заданном входном спектре и операторе преобразования требуется найти спектр выходного сигнала.

Ниже рассмотрены задачи преобразования дискретных спектров, непрерывных и дискретно-непрерывных спектральных плотностей сигналов в линейных, параметрических и нелинейных цепях. В дальнейшем, если это не будет оговорено дополнительно, будем использовать спектр, найденный в базисе тригонометрических функций ($\sin x, \cos x$). Этот спектр определяется амплитудами, фазами и значениями частот гармонических сигналов ряда Фурье в тригонометрической форме. В главе 2 введено также понятие спектральной плотности, которая связана с сигналом

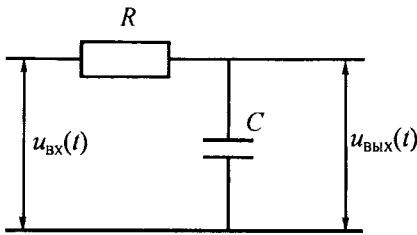


Рис. 3.1. RC – цепь

Для входного дискретного спектра выходной спектр является также дискретным. Пусть входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ в интервале $[-T/2, T/2]$ представлен в виде ряда Фурье в тригонометрической форме:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1)], \quad (3.5)$$

где

$$\alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k / a_k).$$

Ряд (3.5) получен на основе ряда Фурье в комплексной форме. См. формулы (2.6), (2.7).

При воздействии k -й гармоники входного сигнала на линейную цепь с коэффициентом передачи $K(jk\omega_1)$, на ее выходе появится сигнал с амплитудой $\alpha(k\omega_1)K(k\omega_1)$ и начальной фазой $\Psi(k\omega_1) = \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1)$, где $\varphi_k(k\omega_1)$ – фазовый сдвиг линейной цепи на частоте $k\omega_1$.

Суммируя результат воздействия на линейную систему всех гармоник, включая и постоянную составляющую, получим

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{a_0}{2} K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) K(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \psi(k\omega_1)]. \quad (3.6)$$

Пример 3.1. Найти выходное напряжение на выходе RC – цепи (рис. 3.1). Входной сигнал определен рядом Фурье (3.5).

Решение. Коэффициент передачи линейной цепи на частоте $k\omega_1$ имеет вид:

$$K(jk\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_1 RC)^2}} e^{j\varphi_k(k\omega_1)},$$

где $\varphi_k(k\omega_1) = -\arctg(k\omega_1 RC)$.

Подставляем выражение для коэффициента передачи в (3.6), получим:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) |K(jk\omega_1)| \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(k\omega_1)}{\sqrt{1 + (k\omega_1 RC)^2}} \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1)] \end{aligned}$$

прямым преобразованием Фурье и может быть непрерывной, дискретной и дискретно-непрерывной.

При линейном преобразовании спектральные компоненты входного сигнала изменяются по амплитуде и приобретают дополнительный сдвиг по фазе. Это приводит к искажению его формы.

3.2.2. Линейное преобразование непрерывной спектральной плотности

Пусть оператор линейного преобразования сигнала задан в виде *интеграла Дюамеля*

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (3.7)$$

где $h(t)$ – *импульсная характеристика линейной цепи*. Эта характеристика связана с коэффициентом передачи линейной цепи обратным преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Спектральную плотность входного сигнала найдем, применяя прямое преобразование Фурье:

$$S_{\text{ВХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВЫХ}}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x} dx = S_{\text{ВХ}}(j\omega)K(j\omega), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $S_{\text{ВХ}}(j\omega)$ – спектральная плотность входного сигнала; $K(j\omega)$ – коэффициент передачи линейной цепи, связанный с ее импульсной характеристикой прямым преобразованием Фурье.

При вычислении двойного интеграла аргумент импульсной характеристики $(t - \tau)$ заменен буквой x .

Из анализа формул (3.7), (3.8) следует следующий вывод.

Свертке функций во временной области соответствует произведение их спектральных плотностей в частотной области.

Формула (3.8) часто применяется для анализа линейных цепей. Она содержит простую алгебраическую операцию умножения спектральной плотности входного сигнала на коэффициент передачи цепи.

Пример 3.2. Заданы сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$, его спектральная плотность $S_{\text{ВХ}}(j\omega)$ и коэффициент передачи линейной цепи $K(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$.

Найти спектральную плотность сигнала на выходе цепи и соответствующую этой плотности временную функцию.

Решение. Применяем формулу (3.8):

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega)K(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Выходной сигнал найдем по формуле обратного преобразования Фурье:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} = u_{\text{ВХ}}(t-t_0).$$

Линейная цепь передает входной сигнал без изменения его формы, но со сдвигом во времени, равным t_0 . Эта линейная цепь называется *идеальной линией задержки*.

3.2.3. Преобразование дискретного спектра параметрической цепью

При параметрическом преобразовании спектр на выходе параметрической цепи существенно отличается от спектра на входе за счет появления новых составляющих.

Если функции $\Phi(t)$ и $u_{\text{ВХ}}(t)$, входящие в формулу (3.3), разложить в ряды Фурье

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.9)$$

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos k\omega_1 t + q_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.10)$$

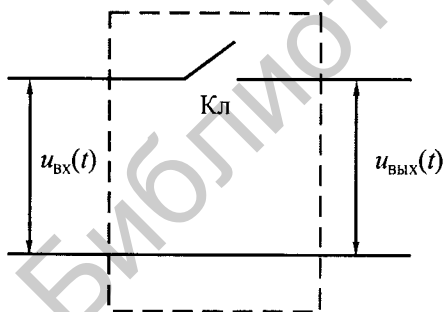


Рис. 3.2. Параметрическая цепь

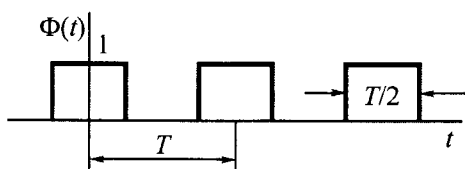


Рис. 3.3. Изменение коэффициента передачи параметрической цепи во времени

то дискретный спектр сигнала на выходе параметрической цепи можно найти умножением функции $\Phi(t)$ на функцию $u_{\text{ВХ}}(t)$ и выделением из произведения постоянной составляющей, первой, второй, третьей и т. д. гармоник.

Задача упрощается, если хотя бы один из рядов (3.9), (3.10) содержит конечное и сравнительно небольшое число членов.

Пример 3.3. В параметрической цепи на рис. 3.2 коэффициент передачи изменяется по закону, показанному на рис. 3.3. Найдти дискретный спектр на выходе параметрической цепи, если частота входного гармонического сигнала $\omega_1 = 2\pi/T$, а амплитуда равна A .

Решение. Используя результат, полученный в примере 2.1, запишем

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \cos k\omega_1 t, \\ u_{\text{вых}}(t) &= \Phi(t) A \cos \omega_1 t = \\ &= \frac{A}{2} \cos \omega_1 t + \frac{A}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} [\cos(k-1)\omega_1 t + \cos(k+1)\omega_1 t] = \\ &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2A}{3\pi} \cos 2\omega_1 t - \frac{A}{3\pi} \cos 4\omega_1 t + \dots\end{aligned}$$

3.2.4. Преобразование параметрической цепью спектральной плотности

Пусть для функций $\Phi(t)$ и $u_{\text{вх}}(t)$, входящих в выражение (3.3), можно найти их спектральные плотности. Тогда спектральная плотность на выходе параметрической цепи определяется сверткой (2.51) этих плотностей.

Пример 3.4. Для параметрической цепи, схема которой показана на рис. 3.2, найти спектральную плотность сигнала на ее выходе, если на входе действует сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, спектральная плотность которого равна $S_{\text{вх}}(j\omega)$. Закон изменения коэффициента передачи показан на рис. 3.3. Функция $\Phi(t)$ периодическая, с периодом $T=1/f_1$.

Решение. Найдем спектральную плотность функции $\Phi(t)$.

Функция $\Phi(t)$ является периодической, определяемой рядом Фурье. Этот ряд, в свою очередь, определяется постоянной составляющей и тригонометрическими функциями типа $\sin x$, $\cos x$, для которых условие абсолютной интегрируемости не выполняется. Вычислим спектральные плотности этих функций, используя выражение (П.1.2) для дельта-функции в частотной области.

Для функции $\cos \omega_0 t$ спектральная плотность

$$\begin{aligned}S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{j(-\omega_0 - \omega)t}] dt = \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],\end{aligned}\tag{3.11}$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp j(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega - \omega_0), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp j(\omega + \omega_0)t} dt = \delta(\omega + \omega_0).$$

Аналогично вычисляем спектральную плотность функций $\sin\omega_0 t$ и $a_0/2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{2} e^{-j\omega t} dt = \pi a_0 \delta(\omega). \quad (3.13)$$

Запишем функцию $\Phi(t)$ в виде ряда Фурье:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \cos k\omega_1 t.$$

Спектральную плотность этой функции вычислим с применением формул (3.11) и (3.13)

$$\begin{aligned} S_{\Phi}(j\omega) &= \pi\delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} [\delta(\omega - k\omega_1) + \delta(\omega + k\omega_1)] = \\ &= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \delta(\omega - k\omega_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Применяя формулу (2.51), найдем спектральную плотность сигнала на выходе параметрической цепи.

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(jz) S_{\Phi}[j(\omega - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(jz) \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \delta[(\omega - k\omega_1 - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} S_{\text{вх}}[j(\omega - k\omega_1)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.5. Безынерционное преобразование дискретного спектра

Рассмотрим задачу преобразования спектра нелинейной системой. Эта задача разбивается на две: преобразования спектра безынерционной и преобразования спектра линейной частями систем. При этом нелинейная система

разбивается на безынерционную и инерционную части так, как показано на рис. 3.4. Подобное разбиение оказывается оправданным потому, что значительное число преобразований сигналов содержит эти части.

К числу устройств, явно содержащих инерционную и безынерционную части, относятся выпрямители, умножители частоты, модуляторы, детекторы и др.

Инерционная часть является линейным четырехполюсником, а безынерционная часть нелинейна и определяется нелинейным уравнением, которое явно не содержит времени. При этом за изменением входного сигнала мгновенно следует изменение выходного.

В отличие от линейной, оператор L безынерционной системы не содержит членов, соответствующих операциям дифференцирования, интегрирования и временного сдвига.

Задача безынерционного преобразования спектра сигнала формулируется следующим образом. Для заданного спектра на входе и при заданном операторе нелинейного преобразования найти выходной спектр.

При нелинейном преобразовании, так же как и при параметрическом, выходной спектр существенно отличается от входного за счет появления новых спектральных составляющих.

Для входного дискретного спектра рассмотрим несколько случаев преобразования.

1. Нелинейный оператор задан полиномом:

$$L[u_{\text{вх}}(t)] = c_0 + c_1 u_{\text{вх}}(t) + c_2 u_{\text{вх}}^2(t) + \dots \quad (3.16)$$

При дискретном спектре входного сигнала, его выражение во временной области можно записать или в виде ряда Фурье, или в виде суммы некоторого числа гармонических колебаний. Сложность решения задачи определяется количеством удерживаемых членов полинома (3.16) и числом гармонических составляющих входного сигнала. Решение задачи сводится к подстановке выражения для входного сигнала в формулу (3.16) и приведения результата к сумме постоянной и гармонических составляющих.

Пример 3.5. Для заданного входного сигнала

$$u_{\text{вх}}(t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.17)$$

и оператора нелинейного преобразования типа (3.16) найти дискретный спектр сигнала на выходе нелинейного безынерционного преобразователя.

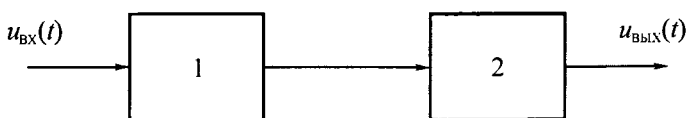


Рис. 3.4. Структурная схема нелинейной системы:
1 – безынерционная часть; 2 – линейная часть

Решение. Сигнал (3.17) называется *бигармоническим*. Выходной сигнал получим, подставив формулу (3.17) в (3.16).

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) = & c_0 + c_1[u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] + \\
 & + c_2[u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^2 = c_0 + 0,5c_2 u_1^2 + 0,5c_2 u_2^2 + \\
 & + c_1 u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_1 u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + 0,5c_2 u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1) + \\
 & + 0,5c_2 u_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2) + c_2 u_1 u_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] + \\
 & + c_2 u_1 u_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2].
 \end{aligned}$$

Проанализируем полученный результат.

На выходе содержится гораздо большее число гармонических составляющих, чем на входе. Кроме того, на выходе присутствует постоянная составляющая, которой нет на входе. Гармонические составляющие на выходе имеют частоты, равные $n\omega_1$, и $m\omega_1$, где n, m – целые числа, а также частоты, равные $n\omega_1 \mp m\omega_2$. Гармонические составляющие с частотами $n\omega_1 \mp m\omega_2$ называются *комбинационными колебаниями*. Число $p = |n| + |m|$ называется порядком комбинационного колебания. В рассматриваемом примере $p = 2$.

Обогащение спектра выходного сигнала новыми гармоническими составляющими является характерным свойством нелинейной цепи.

2. Нелинейный оператор задается в виде *кусочно-линейной функции*.

Пусть характеристика нелинейного элемента (рис. 3.5) определяется выражением

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u < u_0, \\ i_n + su & \text{при } u > u_0. \end{cases}$$

На вход нелинейного элемента подается напряжение

$$u = E + V \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Амплитуда входного колебания V больше разности $|u_0 - E|$.

При выполнении этого условия во входной цепи происходит ограничение гармонического колебания. Угол θ называется углом отсечки. Импульсы тока на выходе нелинейного элемента определяются следующими уравнениями:

$$i = \begin{cases} i_n + su, & 0 \leq \omega t \leq \theta, \\ 0, & \theta < \omega t < 2\pi - \theta, \\ i_n + su, & 2\pi - \theta \leq \omega t < 2\pi. \end{cases} \quad (3.19)$$

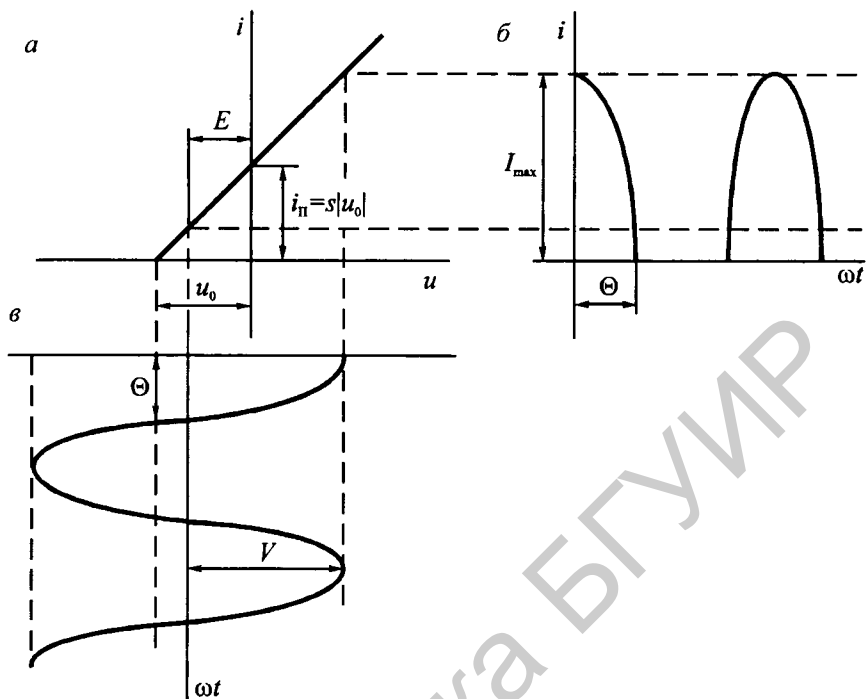


Рис. 3.5. Диаграммы, поясняющие метод угла отсечки

Подставляя (3.18) в (3.19), получим

$$i = i_n + sE + sV \cos \omega t, \quad (3.20)$$

$$0 = i_n + sE + sV \cos \theta. \quad (3.21)$$

Вычтем из левой части уравнения (3.20) левую часть уравнения (3.21). То же сделаем и с правыми частями. В результате получим

$$i = sV(\cos \omega t - \cos \theta). \quad (3.22)$$

Из (3.21) определяем

$$\cos \theta = -(E - u_0)/V.$$

Максимальное значение тока находим из (3.22):

$$I_{\max} = sV(1 - \cos \theta).$$

Найдем амплитуду тока первой гармоники, применяя разложение периодической последовательности импульсов (рис. 3.5, б) в ряд Фурье (2.11):

$$I_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(\omega t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\omega T} \int_{-\theta}^{\theta} i(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{sV}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

Нормированное значение тока

$$\frac{I_1}{I_{\max}} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)} = \alpha_1(\theta).$$

Аналогично находятся отношения $I_0/I_{\max} = \alpha_0(\theta)$, $I_2/I_{\max} = \alpha_2(\theta)$ и т. д. Коэффициенты $\alpha_0(\theta)$, $\alpha_1(\theta)$, $\alpha_2(\theta)$, ... называются *коэффициентами Берга*. Графики зависимостей $\alpha_0(\theta)$, $\alpha_1(\theta)$, $\alpha_2(\theta)$, ... приведены на рис. 3.6. Они позволяют найти значения амплитуд гармоник при заданном угле отсечки.

Пример 3.6. Для заданного значения тока I_{\max} и угла отсечки $\theta = 60^\circ$ найти амплитуды первой и второй гармоник на выходе нелинейного преобразователя.

Решение. Пользуясь графиком для коэффициентов Берга, находим $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,26$.

Амплитуды первой и второй гармоник равны

$$I_1 = I_{\max} \alpha_1 = 0,4 I_{\max}, \quad I_2 = I_{\max} \alpha_2 = 0,26 I_{\max}.$$

3. Нелинейный оператор задан экспоненциальной функцией. Если характеристика нелинейного элемента аппроксимируется экспонентой или экспоненциальным полиномом, то задача анализа упрощается.

Например, если нелинейное уравнение преобразователя равно $e^{a\cos x}$, то это уравнение можно записать в виде следующего ряда Фурье:

$$e^{a\cos x} = I_0(a) + 2I_1(a)\cos x + 2I_2(a)\cos 2x + \dots \quad (3.23)$$

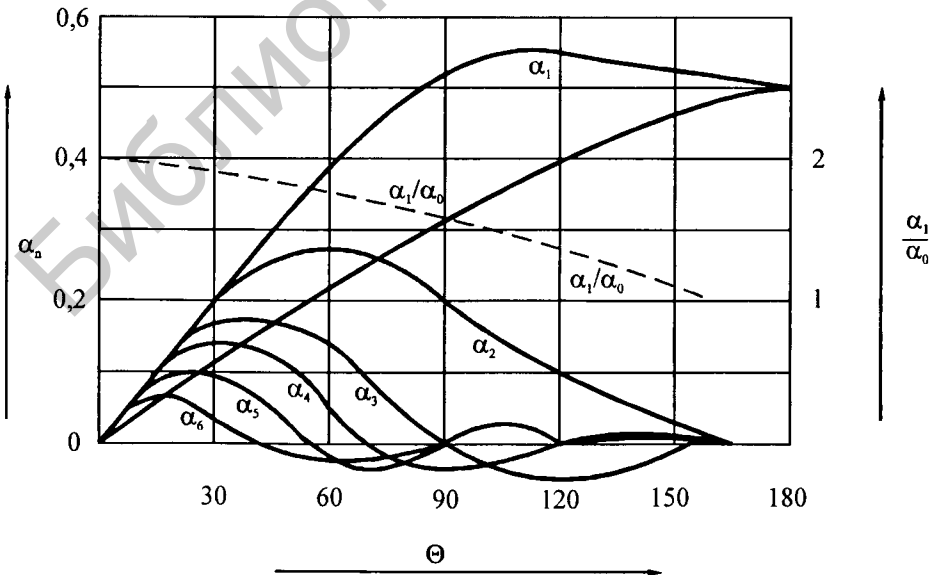


Рис. 3.6. Зависимость коэффициентов Берга от угла отсечки

Аналогично функцию $e^{a \sin x}$ можно записать в виде ряда

$$e^{a \sin x} = I_0(a) + 2I_2(a)\cos 2x + 2I_4(a)\cos 4x + \dots + 2I_1(a)\sin x + 2I_3(a)\sin 3x \dots \quad (3.24)$$

Коэффициентами рядов Фурье в выражениях (3.23), (3.24) являются модифицированные функции Бесселя. Это табличные функции, которые приводятся в справочниках по математике.

Пример 3.7. Для заданной характеристики нелинейного элемента

$$i = f(u) = i_n e^{au}$$

и входного напряжения

$$u = V \cos \omega t$$

найти ток на выходе нелинейного элемента.

Решение. Применяем формулу (3.23):

$$i = i_n e^{aV \cos \omega t} = i_n [I_0(aV) + 2I_1(aV)\cos \omega t + 2I_2(aV)\cos 2\omega t + \dots]$$

3.2.6. Безынерционное преобразование спектральной плотности

Перейдем к рассмотрению случая, когда на входе задана спектральная плотность сигнала. Найдем спектральную плотность на выходе, используя полином (3.16):

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_0 + c_1 u_{\text{вх}}(t) + c_2 u_{\text{вх}}^2(t) + \dots] e^{-j\omega t} dt = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt + \\ &+ c_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}^2(t) e^{-j\omega t} dt + \dots = \\ &= 2\pi c_0 \delta(\omega) + c_1 S_{\text{вх}}(j\omega) + c_2 S_{\text{п}}(j\omega) + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$ – дельта-функция, $S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt$ – непрерывная спектральная плотность входного сигнала; $S_{\text{п}}(j\omega)$ – спектральная плотность произведения двух одинаковых сигналов $u_{\text{вх}}(t)$.

Проанализируем полученное выражение.

Спектральная плотность выходного сигнала дискретно-непрерывная, хотя спектральная плотность входного сигнала дискретных составляющих не имеет. Спектральная плотность, соответствующая квадратичному члену полинома (3.16), находится как спектральная плотность произведения двух одинаковых входных сигналов. Если бы полином содержал кубический член, то соответствующая спектральная плотность была бы найдена по свертке спектральной плотности входного сигнала $S_{\text{вх}}(j\omega)$ и найденной спектральной плотности произведения $u_{\text{вх}}(t) \cdot u_{\text{вх}}(t)$.

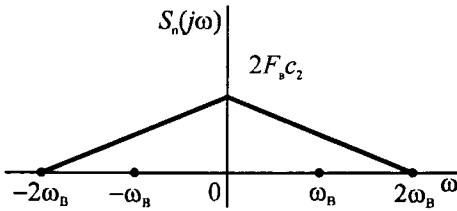


Рис. 3.7. Свертка спектров

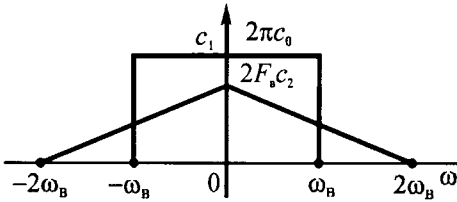


Рис. 3.8. Спектральная плотность выходного сигнала

Свертка спектров

$$S_n(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вх}(jz) S_{вх}[j(\omega - z)] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b + \omega}^{\omega_b} dz = \frac{1}{2\pi} (2\omega_b - \omega), \quad \omega > 0.$$

График свертки показан на рис. 3.7.

На рис. 3.8. показаны составляющие спектральной плотности выходного сигнала.

3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ. МОДУЛЯЦИЯ И ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

3.3.1. Преобразование частоты

Под *преобразованием частоты* понимают процесс переноса без каких-либо искажений спектра сигнала в другую область частот.

Преобразование частоты применяют для размещения спектра сигнала в заданном участке диапазона частот канала связи, а также для повышения чувствительности и избирательности приемников супергетеродинного типа.

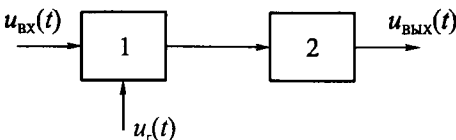


Рис. 3.9. Структурная схема преобразователя частоты:

1 – умножитель; 2 – полосовой фильтр

Пример 3.8. Вычислить спектральную плотность на выходе безынерционной части нелинейной системы. Нелинейный оператор задан полиномом второй степени (3.16), а входной сигнал

$$u_{вх}(t) = 2F_b \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}.$$

Спектральную плотность сигнала найдем с использованием результата, полученного в примере 2.5:

$$S_{вх}(j\omega) = 1, \quad -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b.$$

Принцип преобразования поясняется рис. 3.9, 3.10.

Сигнал на входе преобразователя зависит от времени и первичного сигнала

$$u_{вх}(t) = u[t, b(t)].$$

В множителе он умножается на сигнал гетеродина

$$u_r(t) = A_r \cos(\omega_r t + \varphi_r),$$

а затем фильтруется полосовым фильтром.

Входной сигнал может быть модулированным (непрерывно или дискретно) по амплитуде, фазе, несущей частоте. Пусть спектральная плотность любого модулированного сигнала состоит из спектральных компонент, сконцентрированных около частот $\mp \omega_0$ (рис. 3.10, а):

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt = S[j(\omega + \omega_0)] + S[j(\omega - \omega_0)].$$

Спектральная плотность характеризуется спектральной плотностью амплитуд (АЧХ) и фазовой характеристикой (ФЧХ). Если эти характеристики необходимы для соответствующих расчетов, нужно рассчитать их по формулам и представить в виде графиков.

В других случаях точные данные не требуются и спектральные плотности можно изображать произвольно: например, в виде колоколообразных спектров или треугольников для непрерывных спектральных плотностей или стрелками – для дискретных, как это делается в данной книге.

Вычислим спектральную плотность сигнала гетеродина, используя выражение (П. 1.2) дельта-функции:

$$\begin{aligned} S_{\Gamma}(j\omega) &= A \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_r t + \varphi_r) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(\omega_r t + \varphi_r)} + e^{-j(\omega_r t + \varphi_r)}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \pi A [e^{j\varphi_r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_r - \omega)t} dt + e^{-j\varphi_r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega_r - \omega)t} dt] = \\ &= \pi A [e^{j\varphi_r} \delta(\omega_r - \omega) + e^{-j\varphi_r} \delta(\omega_r + \omega)]. \end{aligned}$$

Полагая, что $\varphi_r = 0$, получим

$$S_{\Gamma}(j\omega) = \pi A [\delta(\omega_r - \omega) + \delta(\omega_r + \omega)]. \quad (3.26)$$

Спектральная плотность гармонического косинусоидального колебания с нулевой начальной фазой (рис. 3.10, б) определяется произведением амплитуды этого колебания, увеличенной в π раз, на сумму двух дельта-функций, расположенных в точках частотной оси $\omega = \mp \omega_r$. Вычислим также спектральную плотность произведения входного сигнала и гетеродина по формуле (2.51):

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(jz) S_{\Gamma}[j(\omega - z)] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S[j(z + \omega_0)] + S[j(z - \omega_0)]\} \times \\ &\quad \times \{A\pi[\delta(\omega + \omega_r - z) + \delta(\omega - \omega_r - z)]\} dz = \\ &= \frac{A}{2} \{S[j(\omega + \omega_r + \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_r - \omega_0)] + \\ &\quad + S[j(\omega - \omega_r + \omega_0)] + S[j(\omega - \omega_r - \omega_0)]\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

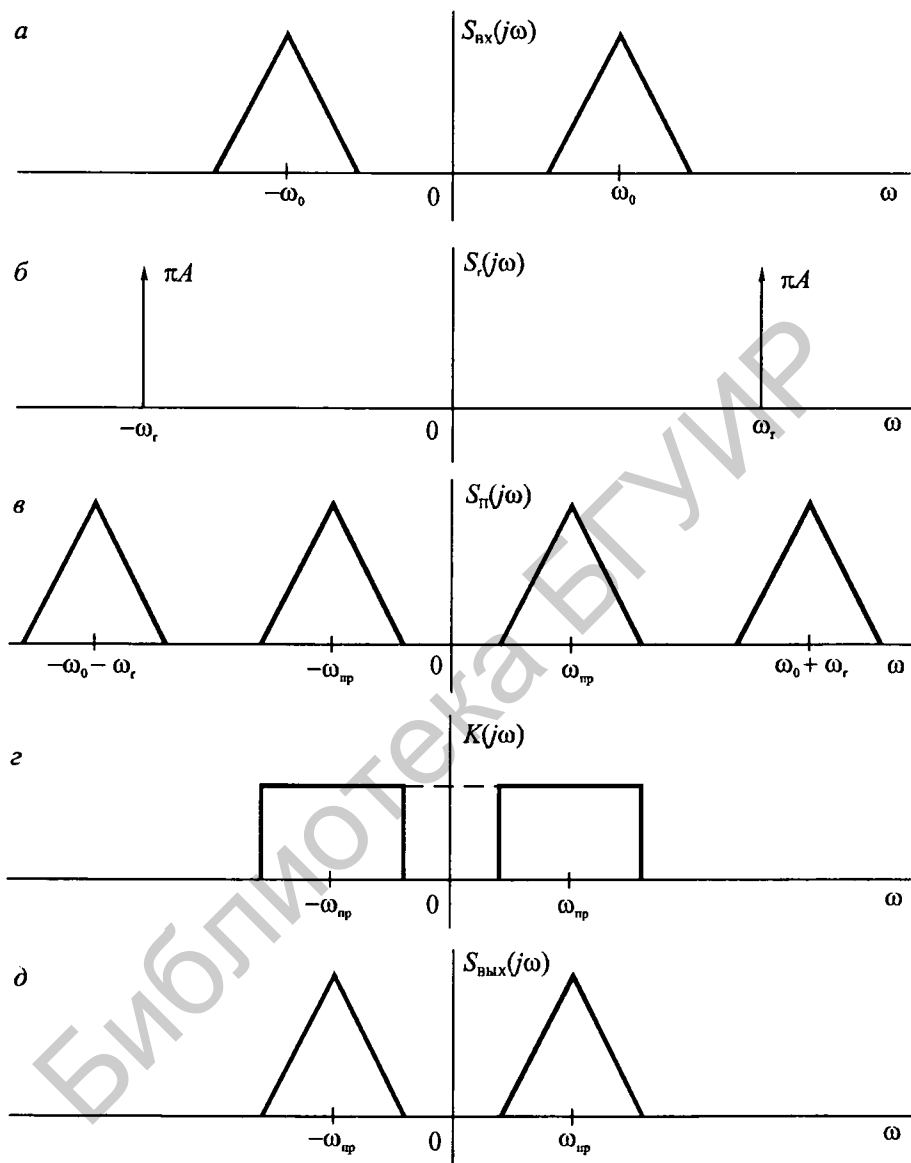


Рис. 3.10. Спектральные диаграммы, поясняющие работу преобразователя

где $\omega_{\text{г}} - \omega_0 = \omega_{\text{пр}}$ – промежуточная частота; $S_{\text{вх}}(j\omega)$, $S_{\text{г}}(j\omega)$ – спектральные плотности входного сигнала и гетеродина соответственно.

В спектральной плотности произведения, показанной на рис. 3.10, в, содержится полезный продукт преобразования (спектральные компоненты вблизи значений промежуточной частоты $\omega = \pm\omega_{\text{пр}}$), а также мешающие компоненты вблизи частот $-\omega_0 - \omega_{\text{г}}$, $\omega_0 + \omega_{\text{г}}$.

Полезные компоненты (см. рис. 3.10, в, з) проходят на выход полосового фильтра, а мешающие этим фильтром существенно ослабляются. Спектральные компоненты на выходе полосового фильтра (рис. 3.10, д) определяются выражением

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{П}}(j\omega)K(j\omega) = \frac{A}{2} \{S[j(\omega + \omega_{\text{пр}})] + S[j(\omega - \omega_{\text{пр}})]\},$$

если коэффициент передачи полосового фильтра $K(j\omega) = 1$ в заданной полосе частот.

Они с точностью до постоянного множителя, равного $A/2$, совпадают со спектральными компонентами сигнала на его входе, а спектр преобразованного сигнала группируется около новых значений частот, равных $\omega = \mp \omega_{\text{пр}}$.

Преобразование частоты используется при модуляции и детектировании сигналов.

3.3.2. Модуляция

На рис. 3.11 приведены примеры носителей (переносчиков) сообщений. Гармонический сигнал $u(t, A, \omega_0, \varphi)$ – наиболее часто используемый носитель (рис. 3.11, а, е). Он определяется функцией времени, амплитуды, частоты и фазы.

В частотной области гармонический сигнал определяется спектральной плотностью $S_u(j\omega)$, представленной двумя дельта-функциями в точках $\omega = \pm \omega_0$. На рис. 3.11 б, ж показан другой носитель сообщения – периодическая последовательность видеоимпульсов. Он задан функцией времени и зависит от амплитуды A , длительности импульсов τ_u и периода T , т. е. $u_{\text{п}}(t) = u(t, A, \tau_u, T)$.

Спектральная плотность периодической последовательности импульсов (рис. 3.11, ж) содержит множество дельта-функций, расположенных в точках $\omega = k\omega_1, k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$. Вычисление спектральной плотности приведено в примере 2.4.

Носитель сообщения – постоянный ток не зависит от времени, т. е. $u_{\text{п}}(t) = A$. Спектральная плотность этого сигнала содержит единственную дельта-функцию в начале координат и определяется формулой (3.13).

В системах связи в качестве носителей сообщений применяются также сложные шумоподобные сигналы (ШС).

Известные подклассы этих сигналов можно получить модуляцией направления постоянного тока (рис. 3.11, з) или модуляцией фазы гармонического носителя (рис. 3.11, д). Она производится заранее известной упорядоченной двоичной последовательностью нулей и единиц (см. п. 3.7.3). Это так называемая псевдослучайная последовательность (слово «псевдо» означает «почти»). Математическая модель ШС задается функцией,

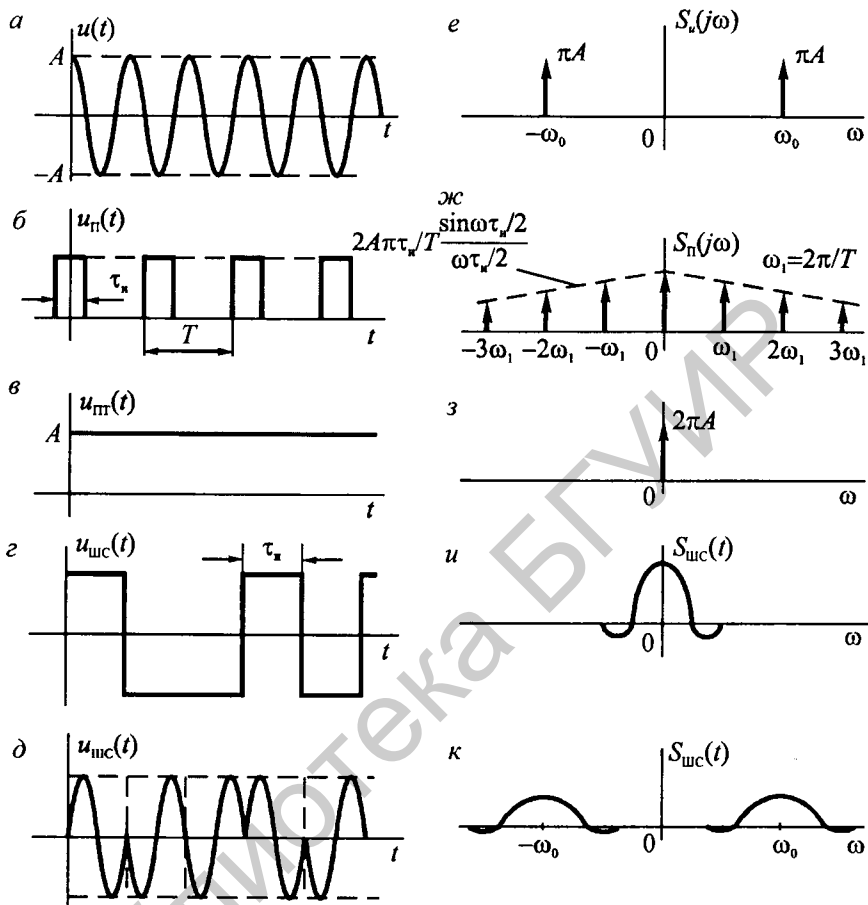


Рис. 3.11. Разновидности носителей сообщений

зависимой от времени, формы единичного импульса $u_0(t)$ и закона формирования двоичной последовательности $q(t)$:

$$u_{шс}(t) = f[t, u_0(t), q(t)].$$

Соответствующие временным функциям (рис. 3.11, з, д) спектры ШС приведены на рис. 3.11, и, к.

Модулирующий сигнал (непрерывный или дискретный) и параметр носителя определяют вид модуляции.

Классификация различных видов модуляции приведена на рис. 3.12.

Модуляцией амплитуды гармонического носителя аналоговым первичным сигналом получают амплитудную модуляцию с большим уровнем несущей (АМ-БУН) а также амплитудную модуляцию с подавленной несущей (АМ-ПН). На основе этих модулированных сигналов получают

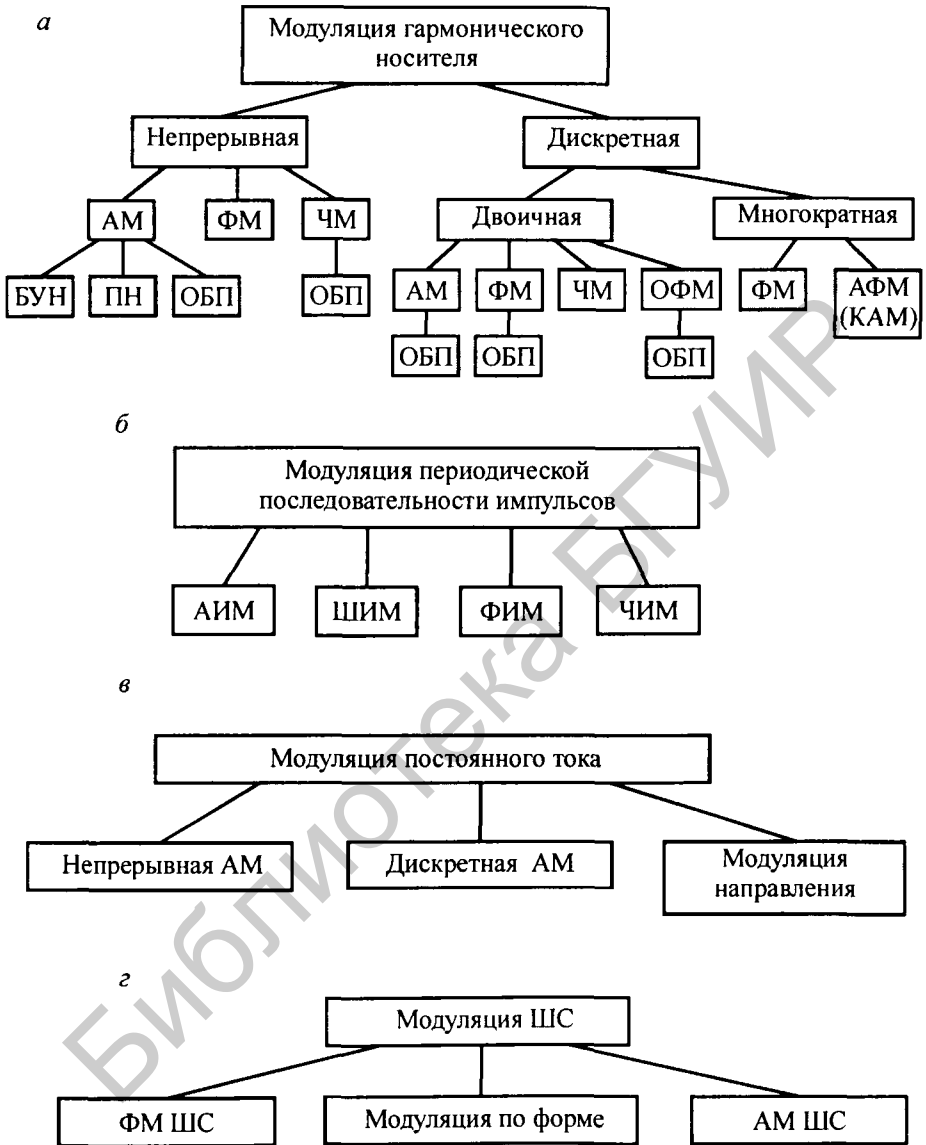


Рис. 3.12. Виды модуляций

амплитудно-модулированные сигналы с одной боковой полосой (АМ-ОБП). Модуляцией частоты и фазы гармонического носителя получают соответственно частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ) модуляции. Модуляцией гармонического носителя дискретным модулирующим сигналом (кодовой комбинацией) получают двоичную АМ, двоичную ЧМ, двоичную ФМ, двоичную ОФМ, многопозиционную (многократную) фазовую модуляцию, амплитудно-фазовую модуляцию.

Модуляцией амплитуды, длительности импульсов, периода повторения периодической последовательности импульсов аналоговым первичным сигналом получают соответственно амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) и связанную с ШИМ фазово-импульсную модуляцию (ФИМ). Частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ) получают в результате воздействия на частоту следования импульсов.

Изменением амплитуды постоянного тока получают непрерывную и дискретную АМ, а коммутацией знака тока – модуляцию его направления.

Модулируя амплитуду или фазу (знак) ШС информационной двоичной последовательностью получают или АМ ШС, или ФМ ШС. Последний вид модуляции называется инверсной модуляцией ШС. Если при изменении кодового слова меняется форма ШС, то такая модуляция называется модуляцией ШС по форме. Амплитудная и фазовая модуляции шумоподобного сигнала являются частными случаями модуляции ШС по форме.

Вид модуляции и связанные с ней преобразования сигналов определяют *математическую модель модулятора*.

Задача модуляции формулируется следующим образом. Нужно так выбрать оператор L , чтобы его действие привело к формированию требуемого модулированного сигнала:

$$u[t, b(t)] = L[u_n(t, a_1, a_2, \dots, a_n)],$$

где $u_n(t, a)$ – носитель сообщения; a_1, a_2, \dots, a_n – параметры носителя, один из которых модулируется; $b(t)$ – модулирующий сигнал.

Решение задачи связано с анализом модулированных сигналов и их спектров (спектральных плотностей). С целью отбора допустимых решений вначале задают структуру модулятора (оператор L), входные сигналы и их спектры (спектральные плотности), затем проводят анализ полученных математических выражений для выходного сигнала и его спектра (спектральной плотности).

Спектральная плотность реального модулированного сигнала является случайной функцией

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u[t, b(t)] e^{-j\omega t} dt,$$

так как модулирующий сигнал $b(t)$ является случайным.

Ее вычисление затруднено. Поэтому для упрощения анализа случайные функции заменяют детерминированными (например, гармоническими функциями $\sin x, \cos x$).

3.3.3. Детектирование

Детектированием называется процесс выделения модулирующего сигнала из принимаемого сигнала. Название детектирования определяется модулируемым параметром сигнала.

Задача детектирования формулируется следующим образом. Для заданного модулированного сигнала $u[t, b(t)]$, найти преобразование, однозначно определяющее модулирующий сигнал

$$b(t) = L\{u[t, b(t)]\}.$$

Под L здесь следует понимать не только линейное или нелинейное, но и параметрическое преобразование.

Основным методом исследования процессов, происходящих при детектировании, является анализ. При этом методе вначале задают оператор преобразования (или структурную схему детектора), а затем решают задачи преобразования сигналов и их спектров. Полученные результаты анализируют. На этой основе принимают решения о соответствии выбранной схемы и ее параметров заданным требованиям.

При выборе модуляции и демодуляции наряду с задачами анализа решают и задачи синтеза. Задачи синтеза сложнее задач анализа. Они формулируются следующим образом. Для заданных сигналов (спектров) на входе и выходе устройства требуется найти схему и параметры его элементов. Из-за отсутствия достаточно разработанных математических методов не все задачи синтеза удается довести до конца. Основные понятия синтеза систем и их отдельных частей даны в девятой главе. Примеры синтеза приведены в седьмой главе.

3.4. АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСЧИКА

3.4.1. Модулирующие сигналы

Физические процессы, происходящие в модуляторах АМ сигналов, аналогичны процессам в преобразователях частоты. Поэтому амплитудную модуляцию можно считать частным случаем этого преобразования.

Модуляцией гармонического носителя непрерывным модулирующим сигналом получают *непрерывный АМ сигнал*, а модуляцией дискретным сигналом – *дискретный АМ сигнал*. Наиболее часто встречающиеся разновидности модулирующих сигналов приведены на рис. 3.13.

Амплитуда непрерывного сигнала (рис. 3.13, а) является случайной величиной и в каждый момент времени принимает одно значение из определенного непрерывного множества. Амплитуда дискретного сигнала определяется или функцией $v(t)$ или равна нулю (рис. 3.13, б) в пределах единичного (тактового) интервала времени. Появление импульса в заданном единичном интервале случайно и определено соответствующим элементом кодового слова – носителя передаваемой информации. Элементы

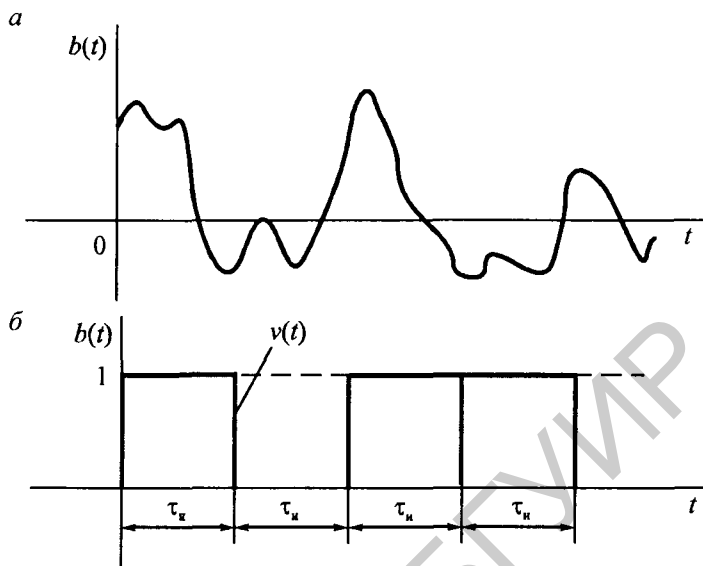


Рис. 3.13. Наиболее часто встречающиеся разновидности модулирующих сигналов при АМ

кодового слова при АМ равны нулю или единице, т. е. принадлежат двоичному алфавиту. Поэтому эта разновидность дискретной модуляции называется двоичной.

Для упрощения анализа случайные модулирующие сигналы заменяют детерминированными. Если модуляция непрерывна, в качестве модулирующего сигнала часто используют сигнал

$$b(t) = b_0 \cos \Omega t,$$

где b_0 – амплитуда, Ω – угловая частота.

При дискретной модуляции случайное кодовое слово заменяют некоторым заранее заданным двоичным числом.

3.4.2. Амплитудная непрерывная модуляция с подавленной несущей

Эта модуляция отличается тем, что в спектре модулированного сигнала нет спектральной составляющей на несущей частоте.

Модулированный сигнал определяется произведением модулирующего сигнала на гармонический сигнал-носитель:

$$u_{\text{АМ-ПН}}(t) = b(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.28)$$

Структурная схема идеального модулятора весьма проста и состоит из умножителя.

Других устройств эта схема не содержит и поэтому является наиболее экономичной. К сожалению, при реализации операции умножения

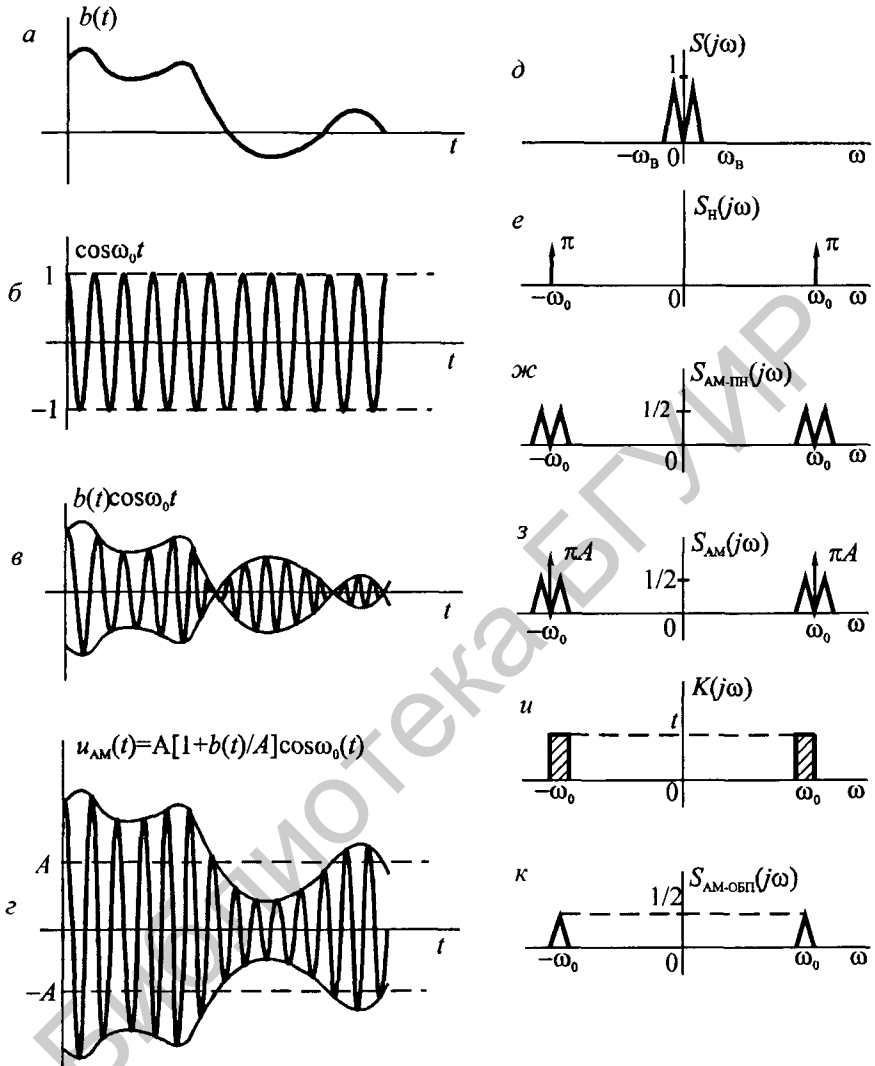


Рис. 3.14. Диаграммы, поясняющие процессы в модуляторах АМ сигналов

в реальную схему модулятора приходится вводить дополнительные блоки, что усложняет ее. Соответственно усложняется и анализ такой схемы. Ограничимся анализом работы идеального модулятора.

Найдем спектральные плотности сигналов на входе и выходе модулятора, используя прямое преобразование Фурье. Спектральная плотность модулирующего сигнала (рис. 3.14, д)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность гармонического сигнала носителя сообщения (рис. 3.14, *е*)

$$S_H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \pi[\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)]. \quad (3.29)$$

Спектральная плотность амплитудно-модулированного с подавленной несущей сигнала (рис. 3.14, *ж*) равна

$$S_{AM-ПН}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt = \frac{1}{2} \{S[j(\omega_0 - \omega)] + S[j(\omega_0 + \omega)]\}, \quad (3.30)$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность модулирующего сигнала.

Спектральная плотность модулированного сигнала состоит из двух частей, сдвинутых по оси частот относительно спектральной плотности модулирующего сигнала на величину $\omega = \mp\omega_0$.

Как это следует из выражения (3.30), амплитуды спектральных компонент модулированного сигнала в два раза меньше амплитуд спектральных компонент модулирующего сигнала. Поэтому если спектральная составляющая на нулевой частоте модулирующего сигнала равна $S(0)$, то составляющие спектра модулированного сигнала на частотах $\omega = \mp\omega_0$ будут равны $S(0)/2$. Это значит, что уровень несущей в исследуемом модуляторе определяется уровнем постоянной составляющей модулирующего сигнала. Если эта составляющая равна нулю, то и спектральные составляющие на частотах $\omega = \mp\omega_0$ будут также равны нулю.

При АМ-ПН спектральная плотность модулирующего сигнала переносится из области нулевой частоты в область более высоких частот, равных $\pm\omega_0$, с уменьшением амплитуд спектральных компонент в 2 раза без какого-либо растяжения или сжатия ее по оси частот. Следовательно, ширина спектра АМ-ПН сигнала определяется шириной спектра модулирующего сигнала.

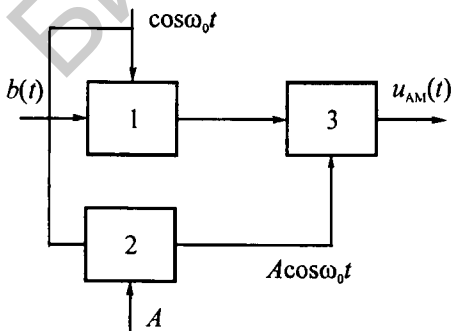


Рис. 3.15. Модулятор АМ сигнала:
1, 2 – умножители; 3 – сумматор

Под *шириной спектра* здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, расположенный в области положительных значений частот, в пределах которого модуль спектральной плотности больше некоторого заданного уровня. Например, таким может быть уровень, взятый из интервала $[0, 1S_{\max}; 0, 707S_{\max}]$, где S_{\max} – максимальное значение модуля спектральной плотности.

Задание уровня означает, что часть спектральных составляющих при расчетах не учитывается. На практике считается допустимым отбрасывать высшие частотные составляющие спектральной плотности, суммарная энергия которых не превышает небольшую заданную часть от общей энергии сигнала. Учитывая это, найдем, что ширина спектра АМ-ПН сигнала в 2 раза больше ширины спектра модулирующего сигнала (рис. 3.14, ж).

3.4.3. Амплитудная непрерывная модуляция с большим уровнем несущей

Этот АМ сигнал равен сумме АМ-ПН сигнала и сигнала несущей $A \cos \omega_0 t$:

$$u_{\text{AM}}(t) = u_{\text{AM-ПН}}(t) + A \cos \omega_0 t = b(t) \cos \omega_0 t + A \cos \omega_0 t = A[1 + b(t)/A] \cos \omega_0 t. \quad (3.31)$$

Функция (3.31) определяет структуру модулятора (рис. 3.15), который содержит два множителя и сумматор.

Она содержит минимально возможное число блоков, отвечающих выражению (3.31) и поэтому является идеальной.

Спектральная плотность АМ сигнала

$$S_{\text{AM}}(j\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} [1 + b(t)/A] \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = S_{\text{H}}(j\omega) + S_{\text{AM-ПН}}(j\omega),$$

где $S_{\text{H}}(j\omega)$ – спектральная плотность несущего колебания; $S_{\text{AM-ПН}}(j\omega)$ – спектральная плотность АМ-ПН сигнала.

Спектральная плотность состоит из двух составляющих: спектральной плотности несущего колебания и спектральной плотности АМ-ПН сигнала (рис. 3.14, з). Поэтому спектральная плотность анализируемого сигнала сохраняет все свойства АМ-ПН сигнала. В частности, ширина его спектра определяется шириной спектра АМ-ПН сигнала, т. е. в два раза больше ширины спектра модулирующего сигнала.

Выберем в качестве модулирующего сигнала простой гармонический сигнал

$$b(t) = b_0 \cos(\Omega t + \theta),$$

где b_0 – амплитуда, Ω – частота, θ – начальная фаза.

Примем также, что начальная фаза гармонического носителя равна φ . С учетом этого, выражение для АМ сигнала (3.31) перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{AM}}(t) &= A \left[1 + \frac{b_0}{A} \cos(\Omega t + \theta) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A [1 + m \cos(\Omega t + \theta)] \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \\ &+ \frac{Am}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \theta] + \frac{Am}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \theta], \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $m = b_0/A$. Число m называется *индексом амплитудной модуляции*. Индекс амплитудной модуляции выбирают в пределах от 0 до 1. Если этот индекс выбрать больше единицы, то в модуляторе возникнут искажения.

Этот режим называется *перемодуляцией*. Работа модулятора поясняется диаграммами на рис. 3.16 и рис. 3.17. На рис. 3.16, *а* приведен модулирующий косинусоидальный сигнал, а его спектральная плотность – на рис. 3.17, *а*. На рис. 3.16, *б* показан носитель сообщения. Его спектральная

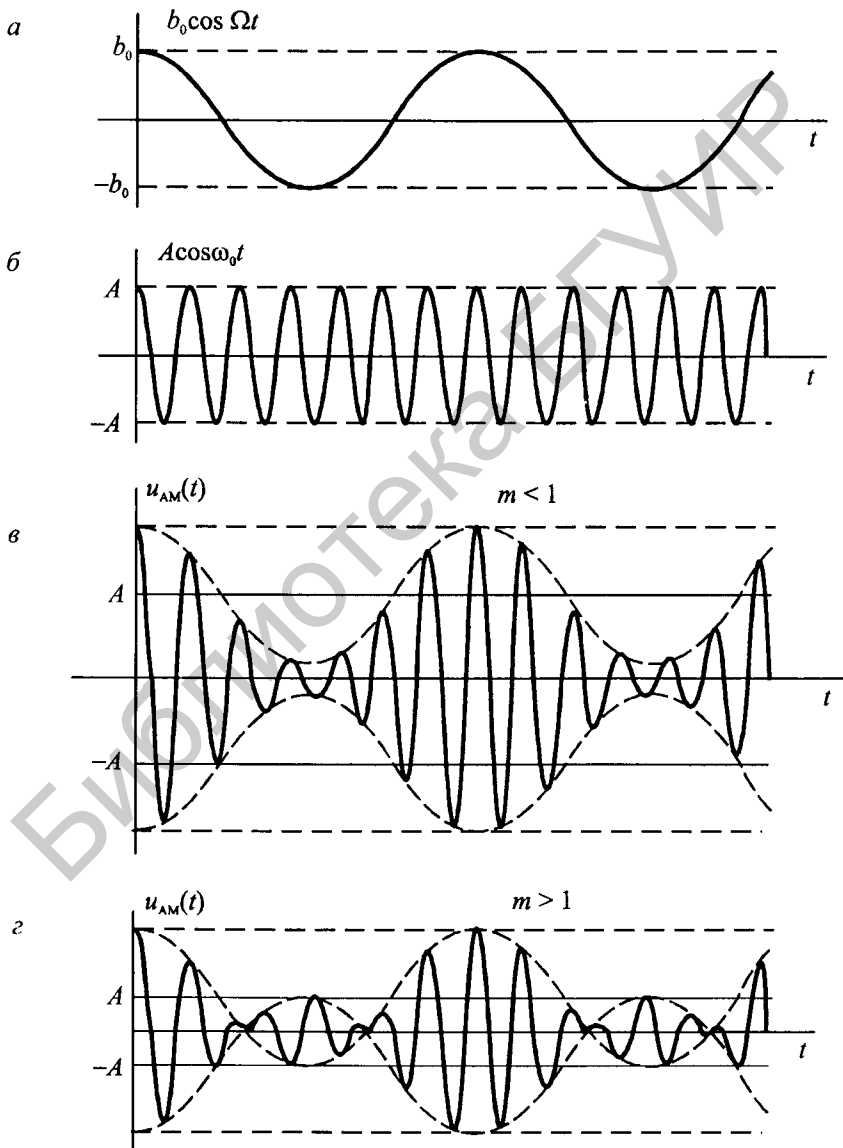


Рис. 3.16. Диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора

плотность приведена на рис. 3.17, б. Диаграммы сигнала и его спектральной плотности приведены на рис. 3.16, в и рис. 3.17, в соответственно.

Для сигнала, записанного в виде (3.32), мощность несущего колебания $P_n = A^2/2$. Мощность боковой спектральной компоненты $P_6 = A^2m^2/8$. Общая мощность сигнала

$$P = \frac{A^2}{2}(1 + m^2/2).$$

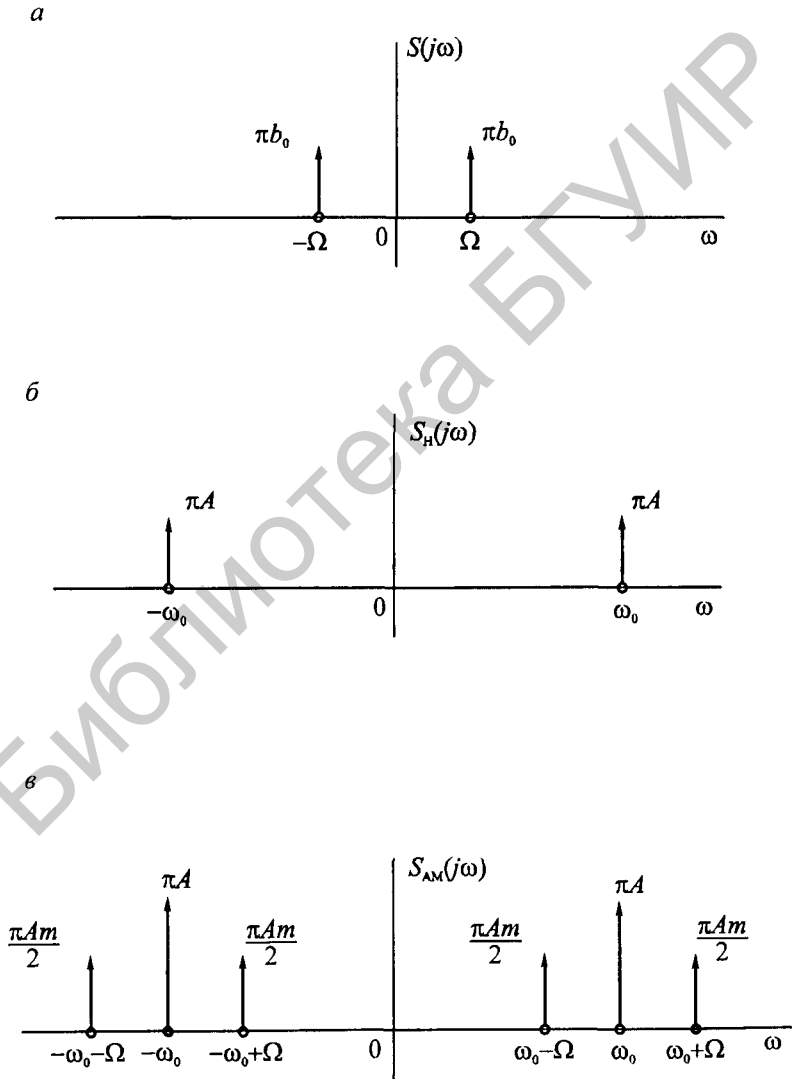


Рис. 3.17. Спектральные диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора

Процентное содержание мощности боковых спектральных компонент определяется отношением:

$$\eta(\%) = \frac{2P_6}{P} 100\% = \frac{m^2}{2+m^2} 100\%.$$

Из приведенной формулы следует, что с уменьшением коэффициента амплитудной модуляции процентное содержание мощности боковых спектральных компонент уменьшается. Это означает, что даже при $m = 1$ около 67 % мощности источника питания бесполезно тратится на передачу несущей.

Несмотря на это, амплитудная модуляция с большим уровнем несущей нашла широкое применение в радиовещании.

3.4.4. Двоичная амплитудная модуляция

Двоичный амплитудно-модулированный сигнал $u(t)$, полученный модуляцией гармонического носителя, показан на рис. 3.18, б. Этот сигнал определяется произведением двоичного модулирующего сигнала на сигнал – переносчик сообщения. Энергия двоичного АМ сигнала в пределах некоторого единичного интервала или не равна, или равна нулю. Такие сигналы называются сигналами с *пассивной паузой*.

Модулирующий двоичный сигнал

$$b(t) = \sum_{k=1}^n b_k v[t - (k-1)\tau_n], \quad (3.33)$$

где b_k – k -й элемент двоичного кодового слова, равный 1 или 0; $v(t)$ – форма импульса, из которого строится модулирующий сигнал.

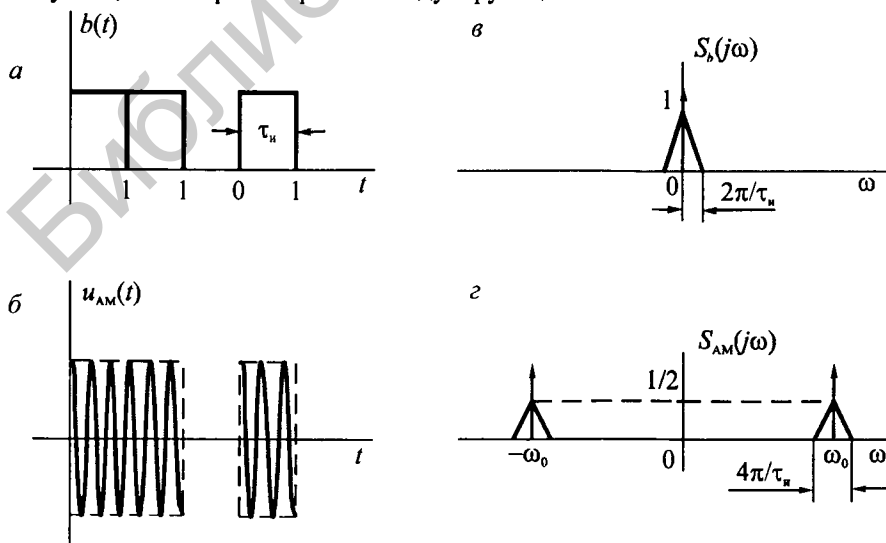


Рис. 3.18. Двоичный дискретный сигнал

При замене случайного кодового слова на неслучайное двоичное число нетрудно вычислить спектральную плотность полученного таким образом модулирующего сигнала.

$$\begin{aligned} S_b(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\infty}^{\infty} v[t - (k-1)\tau_n] e^{-j\omega t} dt = \\ &= S_0(j\omega) \sum_{k=1}^n b_k e^{-j\omega(k-1)\tau_n}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где b_k – элемент двоичного числа; $S_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t} dt$ – спектральная плотность импульса.

Для прямоугольного импульса с амплитудой V и длительностью τ_n

$$v(t) = \begin{cases} V, & \tau_n \geq t \geq 0; \\ 0, & 0 > t > \tau_n, \end{cases}$$

а спектральная плотность

$$S_0(j\omega) = V\tau_n \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\frac{\omega\tau_n}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau_n}{2}}, \quad (3.35)$$

По этой плотности находят ширину его спектра по критерию, приведенному на странице 90. В данной книге используется другая критерий по длине интервала $[0, 2\pi/\tau_n]$. См. АЧХ на рис. 2.4.

Спектральная плотность двоичного АМ сигнала определяется сверткой соответствующих спектральных плотностей:

$$\begin{aligned} S_{AM}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_b(jz) S_H[j(\omega - z)] dz = \quad (3.36) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(jz) \sum_{k=1}^n b_k e^{-jz(k-1)\tau_n} \pi A [\delta(\omega - z + \omega_0) + \delta(\omega - z - \omega_0)] dz = \\ &= \frac{A}{2} \{ S_0[j(\omega + \omega_0)] \sum_{k=1}^n b_k e^{-j(\omega + \omega_0)(k-1)\tau_n} + S_0[j(\omega - \omega_0)] \sum_{k=1}^n b_k e^{-j(\omega - \omega_0)(k-1)\tau_n} \}, \end{aligned}$$

где $S_b(j\omega)$ – спектральная плотность модулирующего сигнала, $b(t)$, $S_n(j\omega)$ – спектральная плотность носителя сообщения (гармонического сигнала).

При преобразовании модулирующего сигнала его спектральная плотность переносится из области нижних в область высоких частот без искажений спектральных составляющих. См. рис. 3.18, в, з.

Ширина спектра модулирующего двоичного сигнала, построенного на основе прямоугольного импульса, равна $2\pi/\tau_n$, а ширина спектра модулированного сигнала равна соответственно $4\pi/\tau_n$.

3.4.5. Амплитудная модуляция с одной боковой полосой

Амплитудную модуляцию с одной боковой полосой (АМ-ОБП) часто получают полосовой фильтрацией непрерывного или двоичного АМ сигнала.

АМ-ОБП сигнал называется также *однополосным АМ сигналом*. Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала с нижней боковой полосой находится в области частот от $-\omega_0$ до $+\omega_0$ (рис. 3.19), а с верхней боковой полосой – в области частот от $-\infty$ до $-\omega_0$ и от ω_0 до $+\infty$.

Структурная схема модулятора сигнала включает модулятор АМ сигнала и полосовой фильтр, настроенный на нижнюю или верхнюю боковую полосу (рис. 3.20).

Например, спектральная плотность непрерывного АМ-ОБП сигнала (см. рис. 3.14, к)

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = S_{\text{АМ}}(j\omega)K(j\omega) = [S_{\text{Н}}(j\omega) + S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega)]K(j\omega), \quad (3.37)$$

где $K(j\omega)$ – коэффициент передачи полосового фильтра.

Подставим в (3.37) выражение (3.30) для спектральной плотности АМ-ПН сигнала. В результате получим:

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = \{S_{\text{Н}}(j\omega) + 0,5S[j(\omega_0 - \omega)] + 0,5S[j(\omega_0 + \omega)]\}K(j\omega). \quad (3.38)$$

Спектральные составляющие АМ-ПН сигнала выразим через нижнюю и верхнюю боковые полосы:

$$S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega) = 0,5\{S[+j(\omega + \omega_0)] + S[-j(\omega - \omega_0)]\} + \\ + 0,5\{S[-j(\omega + \omega_0)] + S[+j(\omega - \omega_0)]\},$$

где $S(+j\omega) = S(j\omega)$, $\omega \geq 0$; $S(-j\omega) = S(j\omega)$, $\omega < 0$; $S(j\omega)$ – спектральная плотность модулирующего сигнала.

Полагая, что полосовой фильтр задерживает спектральные компоненты на несущей частоте и в области верхней боковой полосы, найдем:

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = \frac{1}{2}\{S[+j(\omega + \omega_0)] + S[-j(\omega - \omega_0)]\}. \quad (3.39)$$

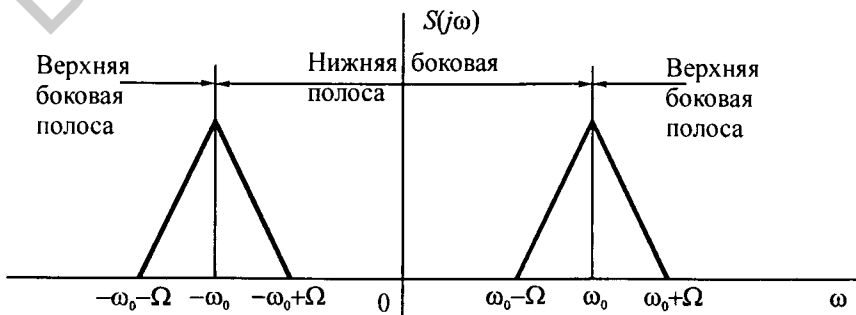


Рис. 3.19. Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала

Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала содержит часть спектральных компонент АМ сигнала – его нижнюю полосу. Амплитуды спектральных составляющих АМ-ОБП сигнала в 2 раза меньше амплитуд спектральных компонент модулирующего сигнала и группируются около значений частот $\omega = \mp\omega_0$.

Ширина спектра АМ-ОБП сигнала равна ширине спектра модулирующего сигнала, т. е. в 2 раза меньше ширины АМ и АМ-ПН сигналов. При настройке полосового фильтра на верхние боковые полосы аналогично получают АМ-ОБП сигнал с верхней боковой полосой.



Рис. 3.20. Модулятор АМ-ОБП сигнала:
1 – модулятор; 2 – полосовой фильтр

3.4.6. Векторное представление непрерывных амплитудно-модулированных сигналов

Кроме временного и спектрального описания непрерывных АМ сигналов полезно использовать и их векторное представление (рис. 3.21).

Непрерывный АМ сигнал, представленный комплексной функцией времени, является вектором OB на рис. 3.21, *а*.

Действительная часть этой функции записывается в виде (3.32) и равна проекции вектора OB на ось x . Векторы EC , ED (рис. 3.21, *а*) вращаются с угловой скоростью Ω относительно точки E по направлениям, показанным стрелками. Вектор OB неподвижен на плоскости, а оси x , y вращаются относительно этого вектора с угловой скоростью ω_0 .

Векторная диаграмма для АМ-ПН сигнала приведена на рис. 3.21, *б*. Она отличается от векторной диаграммы АМ сигнала тем, что вектор OE равен нулю. Временное выражение для АМ-ПН сигнала равно сумме второго и третьего слагаемых выражения (3.32). Векторная диаграмма АМ-ОБП сигнала с нижней боковой полосой приведена на рис. 3.21, *в* и содержит всего один вектор EC , вращающийся по отношению к точке E с угловой скоростью Ω . Временное выражение для АМ-ПН-ОБП сигнала определяется третьим слагаемым выражения (3.32).

3.5. ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСЧИКА

3.5.1. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с малым индексом модуляции

Запишем сигнал в виде комплексной функции времени:

$$\dot{W}(t) = \mathfrak{S}(t)e^{j\theta(t)}, \quad (3.40)$$

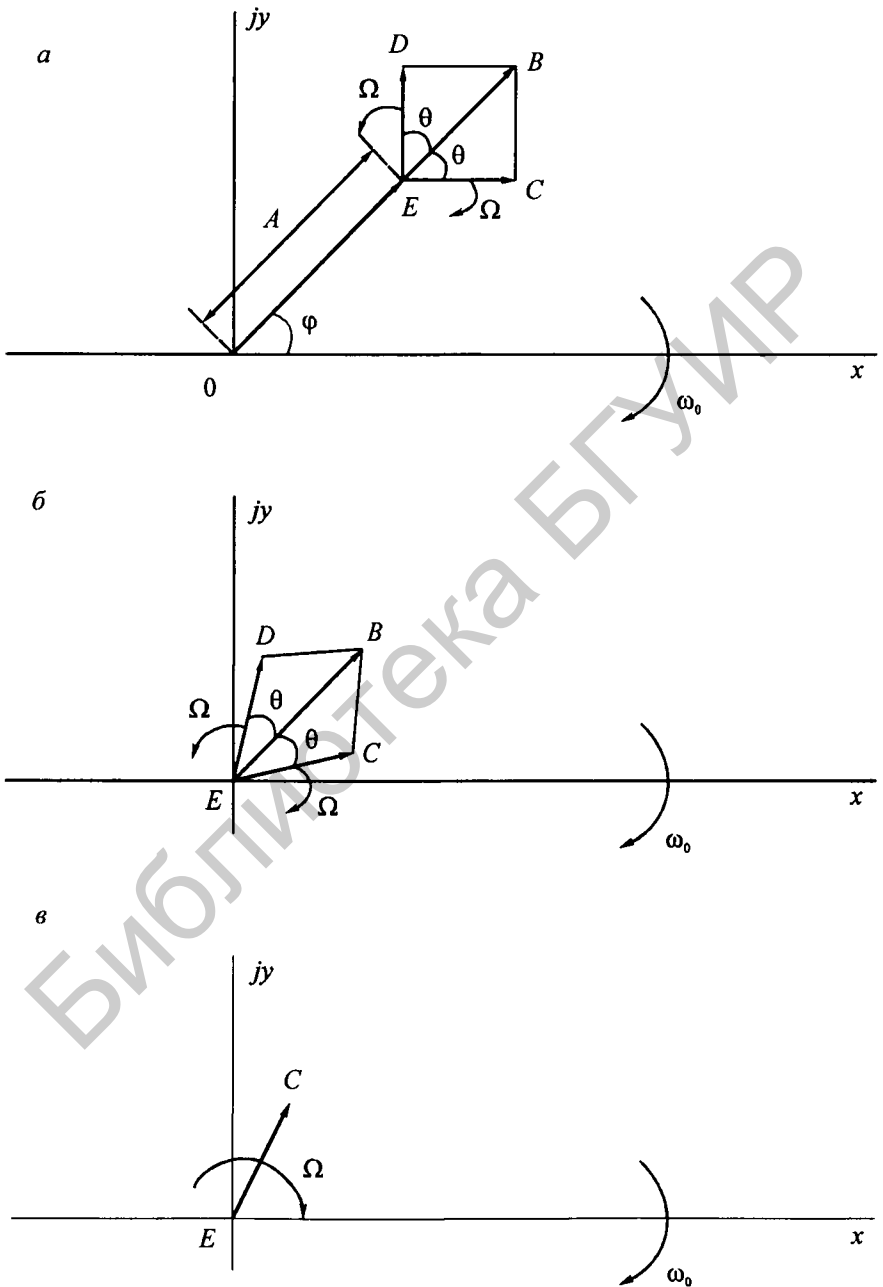


Рис. 3.21. Векторные диаграммы непрерывных АМ сигналов

где $\vartheta(t)$ – огибающая; $\theta(t)$ – мгновенная (текущая) фаза сигнала. Действительная часть выражения (3.40)

$$\operatorname{Re} \dot{W}(t) = \vartheta(t) \cos \theta(t) \quad (3.41)$$

является обобщением косинусоидального сигнала с изменяющейся во времени амплитудой и фазой.

Производная от мгновенной фазы определяет мгновенную частоту этого сигнала:

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt.$$

Соответственно, мгновенная частота определяет и мгновенную фазу:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Модуляция, при которой фаза $\theta(t)$ изменяется в зависимости от модулирующего сигнала $b(t)$, называется *угловой*.

Пусть при передаче информации частота сигнала изменяется по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + 2\pi K b(t),$$

где K – коэффициент пропорциональности с размерностью [Гц/В]. В этом случае мгновенная фаза

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt = \omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt. \quad (3.42)$$

Разновидность угловой модуляции, при которой частота сигнала изменяется пропорционально значению модулирующего сигнала, называется *частотной модуляцией* (ЧМ).

Если при передаче информации мгновенная фаза изменяется в соответствии с выражением

$$\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi K_{\text{ФМ}} b(t), \quad (3.43)$$

то эта разновидность угловой модуляции называется *фазовой модуляцией* (ФМ).

В формуле (3.43) буквой $K_{\text{ФМ}}$ обозначен коэффициент пропорциональности, имеющий размерность [1/В].

Огибающая сигнала $\vartheta(t)$ при угловых способах модуляции остается постоянной величиной. Обозначим ее буквой A . Выражения для ЧМ и ФМ сигналов запишем в виде:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt],$$

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K_{\text{ФМ}} b(t) dt].$$

Сравнивая их, находим, что различие между ЧМ и ФМ сигналами незначительно.

Исследуем ЧМ сигнал при условии, что модулирующий сигнал $b(t) = b_0 \cos \Omega t$.

Его фазу определим из (3.42), полагая, что

$$\omega(t) = \omega_0 + 2\pi K b_0 \cos \Omega t = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega = 2\pi K b_0$ – девиация частоты.

$$\theta(t) = \omega_0 t + (2\pi K b_0 / \Omega) \sin \Omega t = \omega_0 t + (\Delta\omega / \Omega) \sin \Omega t = \omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t, \quad (3.44)$$

где $m_{\text{ЧМ}} = \Delta\omega / \Omega$ – индекс частотной модуляции.

Подставив (3.44) в (3.40), получим выражение для ЧМ сигнала в комплексной форме

$$\dot{W}_{\text{ЧМ}}(t) = A e^{j\omega_0 t} e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t}. \quad (3.45)$$

При малом индексе модуляции ($m_{\text{ЧМ}} \ll 1$) используем разложение

$$e^x \cong 1 + x$$

и запишем выражение для ЧМ сигнала в виде

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{ЧМ}}(t) &= A[\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t][1 + jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t] = \\ &= A[\cos \omega_0 t - m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \sin \omega_0 t + j(\sin \omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \cos \omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Действительная часть комплексной функции определяет ЧМ сигнал во временной области:

$$\begin{aligned} u_{\text{ЧМ}}(t) &= \text{Re} \dot{W}(t) = A[\cos \omega_0 t - m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \sin \omega_0 t] = \\ &= A \cos \omega_0 t - 0,5 A m_{\text{ЧМ}} \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0,5 A m_{\text{ЧМ}} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \end{aligned}$$

Сравним ЧМ сигнал с АМ сигналом. Выражение для ЧМ сигнала почти совпадает с выражением для АМ сигнала. Различие только в знаке перед составляющей с частотой $\omega_0 - \Omega$. Поворот фазы на 180° косинусоидальной компоненты *DE* на рис. 3.22 приводит к «качанию» результирующего

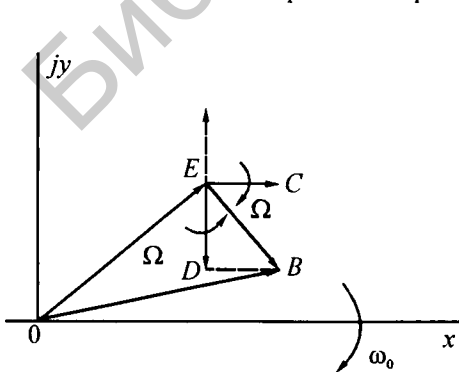


Рис. 3.22. Векторная диаграмма ЧМ сигнала при малом индексе модуляции

вектора *OB* ЧМ сигнала около центрального положения. Такого «качания» у АМ сигнала нет. Кроме того, суммарный вектор *BE* всегда расположен под прямым углом к вектору *OE* несущего колебания. Для АМ сигнала вектор *BE* на рис. 3.21, *a* или совпадает по направлению с вектором *OE*, или прямо противоположен ему.

Спектральная диаграмма ЧМ сигнала с малым индексом модуляции приведена на рис. 3.23.

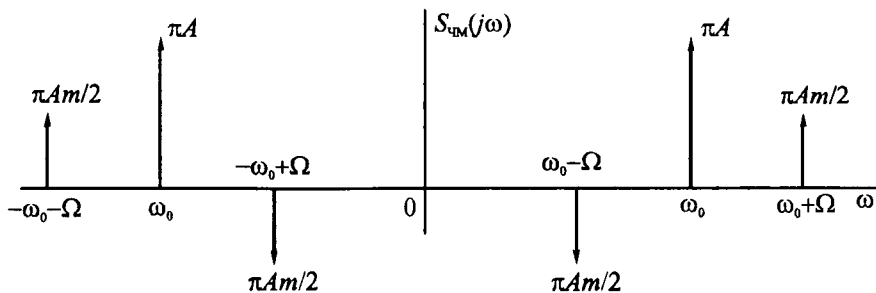


Рис. 3.23. Спектральная диаграмма ЧМ сигнала с малым индексом модуляции

Спектральные компоненты на частотах $\mp(\omega_0 - \Omega)$ у ЧМ сигнала повернуты на 180° по отношению к подобным компонентам для АМ сигнала (см. рис. 3.17, в).

3.5.2. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с большим индексом модуляции

В математике доказывается, что функция

$$e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t}$$

в интервале разложения $[-\pi, \pi]$ раскладывается в ряд:

$$e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) e^{jk\Omega t}, \quad (3.46)$$

где $J_k(m_{\text{ЧМ}})$ – функция Бесселя k -го индекса от аргумента $m_{\text{ЧМ}}$.

Подставляя формулу (3.46) в (3.45), получим

$$\dot{W}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) e^{j(\omega_0 + k\Omega)t}.$$

Действительная часть полученного выражения

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = \text{Re} \dot{W}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \quad (3.47)$$

Из полученного выражения видно, что спектр ЧМ сигнала содержит бесконечное число компонент. Их значения определяются функциями Бесселя, для которых выполняется условие:

$$J_{-k}(m_{\text{ЧМ}}) = (-1)^k J_k(m_{\text{ЧМ}}). \quad (3.48)$$

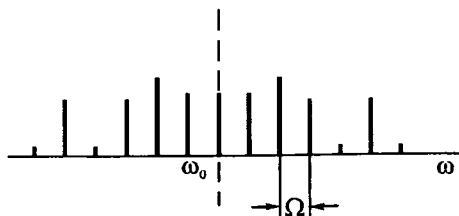


Рис. 3.24. Спектр ЧМ сигнала

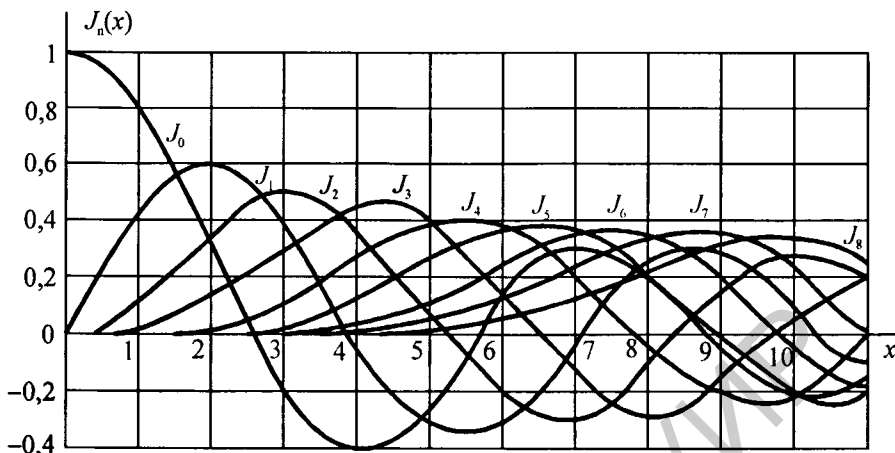


Рис. 3.25. Графики функций Бесселя

Поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами $(\omega_0 + k\Omega)$, $(\omega_0 - k\Omega)$ совпадают, если k – четно и отличаются на 180° , если k – нечетно. Графики функций Бесселя приведены на рис. 3.25

Обращаясь к амплитудному спектру ЧМ сигнала (рис. 3.24), отметим, что с ростом частоты амплитуды убывают. Установлено, что если $k \geq m_{\text{ЧМ}}$, то амплитуды гармоник практически равны нулю. Поэтому *ширина спектра ЧМ сигнала*

$$\Pi = 2m_{\text{ЧМ}}\Omega = 2\frac{\Delta\omega}{\Omega}\Omega = 2\Delta\omega, \quad (3.49)$$

где $\Delta\omega$ – девиация частоты.

Для ЧМ сигнала с малым индексом модуляции ширина спектра $\Pi = 2\Omega$, т. е. такая же, как и для АМ сигнала.

3.5.3. Методы формирования непрерывного частотно-модулированного сигнала

На рис. 3.26 приведена структурная схема модулятора широкополосной ЧМ. В этой схеме вначале формируется сигнал

$$u(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt],$$

а затем в множителе частоты он возводится в квадрат:

$$L[u(t)] = A^2 \cos^2[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt] = \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 4\pi K \int b(t) dt)].$$

При этом несущая частота увеличивается в 2 раза. В такое же число раз увеличивается и индекс частотной модуляции. Очевидно, что при многократном умножении индекс модуляции еще больше увеличивается.

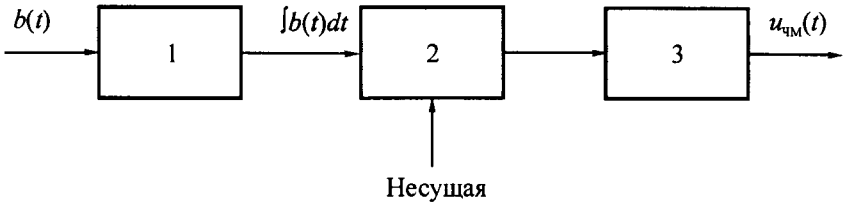


Рис. 3.26. Структурная схема модулятора широкополосной ЧМ:
1 – интегратор; 2 – фазовый модулятор; 3 – умножитель частоты

Другой способ получения ЧМ сигнала связан с воздействием модулирующего сигнала $b(t)$ на реактивные элементы контура генератора. Допустим, что емкость контура изменяется по закону

$$C = C_0 + kb(t) = C_0[1 + b(t)k/C_0],$$

где k – постоянный множитель с размерностью [Ф/В].

Частота напряжения на выходе контура

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0[1 + \frac{k}{C_0}b(t)]^{1/2}}}. \quad (3.50)$$

Если выполнить условие $x = \frac{k}{C_0}b(t) \ll 1$, то функцию $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ можно разложить в ряд Тейлора.

$$f(x) \cong f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a).$$

Вычислив производную $f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$ и положив $a = 0$, получим

$$f(x) = 1 - x/2 = 1 - \frac{kb(t)}{2C_0}.$$

Подставляя полученное выражение в (3.50), получим

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[1 - \frac{kb(t)}{2C_0} \right] = \omega_0 + k_{\text{ЧМ}} b(t),$$

где $K_{\text{ЧМ}} = -\omega_0 k / 2C_0$.

Переменную емкость получают, например, с помощью закрытого полупроводникового диода (варикапа), емкость которого зависит от подводимого к нему напряжения. Переменную индуктивность получают с помощью насыщенной катушки индуктивности. Переменную реактивность (индуктивность или емкость) можно получить также, применяя реактивный каскад на транзисторе или на лампе.

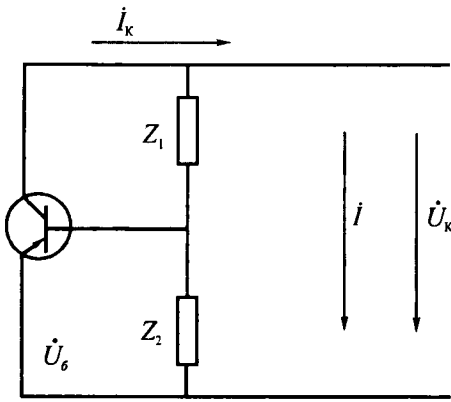


Рис. 3.27. Схема реактивного каскада на транзисторе

Схема реактивного каскада на транзисторе приведена на рис. 3.27. Она содержит транзистор и элементы Z_1, Z_2 , каждый из которых может быть или резистором, или конденсатором.

Выбором параметров Z_1, Z_2 обеспечивается неравенство переменных токов так, что $I_k \gg i$.

Комплексное сопротивление между эмиттером и коллектором равно отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$Z = \dot{U}_k / \dot{I}_k,$$

где $\dot{U}_k = \dot{I}(Z_1 + Z_2)$; $\dot{I}_k = S\dot{U}_6 = S\dot{I}Z_2$; S – мгновенная крутизна характеристики транзистора.

С учетом выражений для комплексных амплитуд напряжения и тока получим

$$Z = (Z_1 + Z_2) / SZ_2.$$

Если выполняется условие $|Z_2| \ll |Z_1|$, то $Z \approx Z_1 / SZ_2$.

Пусть $Z_1 = 1/j\omega C$, а $Z_2 = R$.

В этом случае

$$Z = 1 / j\omega CRS = 1 / j\omega C_3,$$

где $C_3 = SRC$.

Реактивный каскад ведет себя как конденсатор с эквивалентной емкостью $C_3 = SRC$.

Если $Z_1 = R$, а $Z_2 = 1/j\omega C$, то $Z = j\omega CR / S = j\omega L_3$.

Реактивный каскад в этом случае эквивалентен катушке индуктивности величиной

$$L_3 = CR / S.$$

3.5.4. Дискретная частотная модуляция

При дискретной ЧМ информационное двоичное слово разбивают на блоки одинаковой длины k . В каждом блоке содержится одно из 2^k слов, $k = 1, 2, 3, \dots$. Каждому слову блока соответствует значение частоты радиосигнала. Она остается постоянной в пределах каждого блока, но изменяется при переходе от блока к блоку с изменением двоичного слова. Правило отображения двоич-

ных слов блока в значения частоты радиосигнала называется *модуляционным кодом*.

Дискретная ЧМ является вариантом кодирования передаваемой информации.

Если длина блока $k = 1$, то частота сигнала определяется только двумя числами 0 и 1. По этой причине модуляция называется двоичной. Двоичные ЧМ сигналы являются сигналами с активной паузой. Их энергия в любом единичном интервале не равна нулю.

Два или несколько гармонических колебаний называются *когерентными (связанными)*, если их несущие частоты и начальные фазы связаны взаимно однозначной зависимостью. Знание этой зависимости позволяет по значению частоты и фазы, например, 1-го колебания определить частоты и начальные фазы остальных колебаний.

Например, два колебания $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\cos(k\omega_0 t + k\varphi_0)$, где k – целое положительное число, являются когерентными.

Некогерентными называются такие гармонические колебания, несущие частоты и начальные фазы которых не связаны между собой.

В модулятор двоичного ЧМ сигнала подают как когерентные, так и некогерентные гармонические сигналы. Структурная схема модулятора с некогерентными сигналами приведена на рис. 3.28.

Двоичный ЧМ сигнал на выходе модулятора

$$u_{\text{вых}}(t) = Aa(t)\cos\omega_1 t + A\bar{a}(t)\cos\omega_2 t, \quad (3.51)$$

где модулирующие сигналы определены следующими выражениями:

$$a(t) = \sum_{k=1}^n a_k \nu[t - (k-1)\tau_n]; \quad \bar{a}(t) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \nu[t - (k-1)\tau_n].$$

В этих выражениях a_k – k -й элемент информационного двоичного слова, равный 1 или 0; \bar{a}_k – k -й элемент другого слова, определяемый из уравнения $\bar{a}_k + a_k = 1$, где $+$ – знак сложения по модулю два; $\nu(t)$ – форма импульса информационного двоичного сигнала.

Как следует из выражения (3.51), двоичный ЧМ сигнал строится из двух двоичных АМ сигналов. Один из них формируется на выходе первого, другой – на выходе второго умножителя модулятора (рис. 3.28). Поэтому спектральная плотность двоичного ЧМ сигнала равна сумме спектральных плотностей двух двоичных АМ сигналов (рис. 3.29).

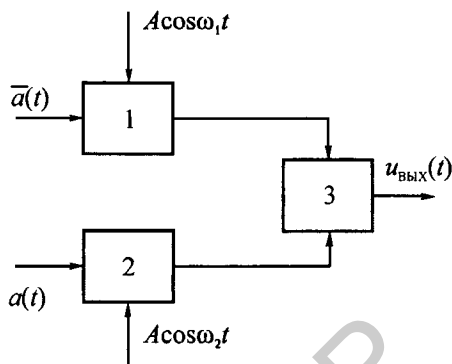


Рис. 3.28. Структурная схема модулятора двоичного ЧМ сигнала:
1, 2 – умножители; 3 – сумматор

Дискретный ЧМ сигнал

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A \sum_{i=1}^n v[t - (i-1)k\tau_n] \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

где τ_n – длительность одного символа информационного двоичного слова, k – длина блока, n – число блоков, A – амплитуда, ω_i – частота, φ_i – начальная фаза радиосигнала, $v(t)$ – форма видеоимпульса длительностью $k\tau_n$.

Значение частоты в i -м блоке определяется числом $\sum_{r=0}^{k-1} a_r 2^r$, где a_r – буква двоичного слова i -го блока, равная 0 или 1.

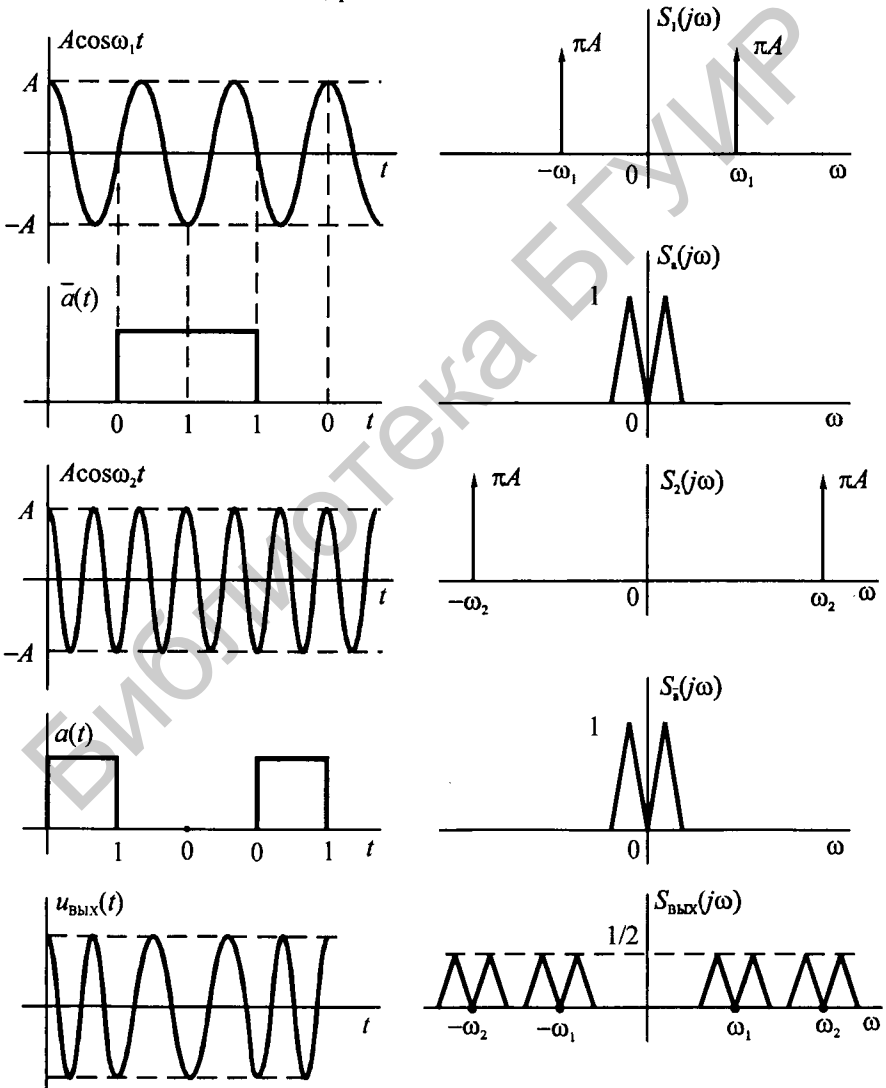


Рис. 3.29. Формирование двоичного ЧМ сигнала (временные диаграммы и спектры)

Спектр сигнала равен сумме спектров радиоимпульсов одинаковой длительности $k\tau_n$, несущие частоты которых определяются модуляционным кодом. Ширина спектра ЧМ сигнала определяется шириной спектра видеопульса $\Delta\omega_n$, разном частот $\omega_i - \omega_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, 2^k$ между соседними спектрами радиоимпульсов, числом 2^k используемых частот:

$$\Delta\omega = \sum_{i=2}^{2^k} (\omega_i - \omega_{i-1}) + 2\Delta\omega_n.$$

Если дискретный ЧМ сигнал построен из прямоугольных радиоимпульсов с одинаковым разном частот, то

$$\Delta\omega = \omega_p(2^k - 1) + 2\Delta\omega_n. \quad (3.52)$$

При выполнении равенства $\omega_p = 2\Delta\omega_n$ ширина спектра равна

$$\Delta\omega = 2^k \frac{4\pi}{k\tau_n}.$$

Произведение длительности сигнала на ширину его спектра называется базой сигнала.

Для дискретного ЧМ сигнала база равна

$$B = k\tau_n \Delta f = k\tau_n 2^k \frac{2}{k\tau_n} = 2^{k+1}.$$

Для двоичного ЧМ сигнала ($k = 1$)

$$\Delta\omega = 8\pi/\tau_n. \quad (3.53)$$

Отношение $m = \Delta\omega/\omega_T$ называется индексом ЧМ, где $\omega_T = 2\pi/\tau_n$.

3.6. ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСЧИКА

3.6.1. Непрерывная фазовая модуляция

В п. 3.5.1 показано, что ФМ является разновидностью угловой модуляции. Для ФМ сигнала его фаза определяется формулой:

$$\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} b(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \cos \Omega t = \omega_0 t + m_{\text{Ф}} \cos \Omega t,$$

где $m_{\text{Ф}} = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0$ – индекс фазовой модуляции.

Мгновенная частота ФМ сигнала:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 - 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega \sin \Omega t,$$

где $\Delta\omega = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega$ – девиация частоты.

ФМ сигнал определяется формулой (3.47) при подстановке вместо $m_{\text{ЧМ}}$ выражения

$$\Delta\omega/\Omega = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega/\Omega = m_{\text{Ф}}$$

Девиация частоты $\Delta\omega$ ФМ сигнала пропорциональна частоте модуляции и ширина спектра ФМ сигнала не будет постоянной, как у ЧМ сигнала, а будет меняться с изменением частоты Ω модулирующего сигнала. По этой причине ФМ сигналы в системах радиовещания не применяются. Однако ФМ сигнал получить легче, чем ЧМ. Поэтому во многих системах ЧМ сигнал получают с помощью фазового модулятора, на вход которого подают прошедший через интегратор сигнал $b(t)$ (см. рис. 3.26).

3.6.2. Двоичная фазовая модуляция

При дискретной фазовой модуляции фаза радиосигнала изменяется дискретно. Число возможных значений этой фазы определяет название модуляции. Если это число равно 2, то модуляция называется двоичной, если 2^k , где k – целое положительное число, причем $k > 2$, то модуляция называется многократной (многопозиционной). При $k = 2$ модуляция называется двукратной фазовой модуляцией (ДФМ).

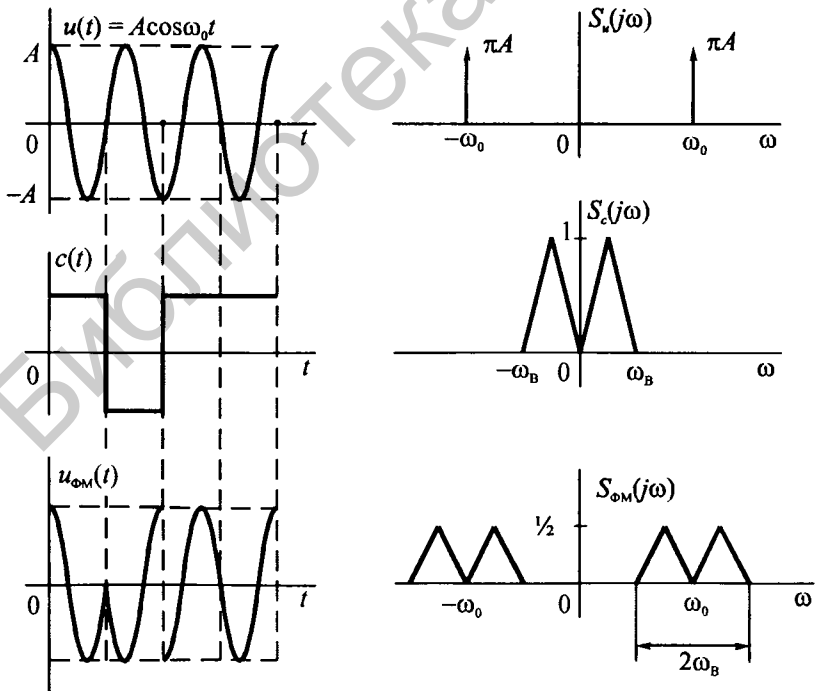


Рис. 3.30. Формирование двоичного ФМ сигнала (временные диаграммы и спектры)

Модулирующий сигнал при двоичной ФМ носителя сообщения

$$b(t) = \sum_{k=1}^n b_k v[t - (k-1)\tau_n],$$

где b_k – элемент информационного двоичного слова, равный или 0, или 1; $v(t)$ – форма импульса модулирующего сигнала; τ_n – длительность импульса.

Фаза радиосигнала в пределах некоторого единичного интервала равна $\theta(t) = \omega_0 t$, если $b_k = 0$ и равна $\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} v[t - (k-1)\tau_n]$, если $b_k = 1$.

Пусть $v(t)$ – прямоугольный импульс имеет длительность τ_n , а амплитуду, равную 1. Тогда, если $b_k = 1$, то $\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}}$. Если коэффициент $k_{\text{ФМ}} = 0,5$, то $2\pi k_{\text{ФМ}} = \pi$ и фаза $\theta(t) = \omega_0 t + \pi$. Двоичный ФМ сигнал в пределах k -го единичного интервала

$$u_k(t) = \begin{cases} Av[t - (k-1)\tau_n] \cos \omega_0 t, & b_k = 0; \\ Av[t - (k-1)\tau_n] \cos(\omega_0 t + \pi) = -Av[t - (k-1)\tau_n] \cos \omega_0 t, & b_k = 1. \end{cases}$$

Этот сигнал можно записать также в виде

$$u_k(t) = Ac_k v[t - (k-1)\tau_n] \cos \omega_0 t,$$

где c_k – k -й элемент, полученный преобразованием k -го элемента информационного двоичного слова по правилу: 0 изменяется на 1, а 1 изменяется на -1 ; $A \cos \omega_0 t$ – носитель сообщения.

Двоичный ФМ сигнал

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A \sum_{k=1}^n c_k v[t - (k-1)\tau_n] \cos \omega_0 t = Ac(t) \cos \omega_0 t, \quad (3.54)$$

где

$$c(t) = \sum_{k=1}^n c_k v[t - (k-1)\tau_n].$$

Поскольку двоичный ФМ сигнал и двоичный АМ сигнал определяются аналогичными формулами, то некоторые свойства спектральных плотностей этих сигналов совпадают.

В частности, ширина спектра двоичного ФМ сигнала определяется той же формулой, что и для двоичного АМ сигнала:

$$\Delta\omega = 2\omega_{\text{в}},$$

где $\omega_{\text{в}} = 2\pi/\tau_n$, τ_n – длительность прямоугольного видеоимпульса.

Диаграммы, поясняющие формирование двоичного ФМ сигнала, приведены на рис. 3.30.

Разновидностью двоичной ФМ является относительная фазовая модуляция (ОФМ). Математическое описание ОФМ сигнала во временной

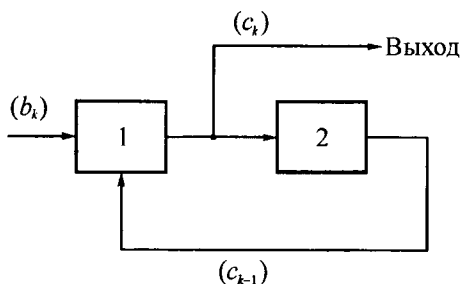


Рис. 3.31. Структурная схема преобразователя: 1 – сумматор по модулю два; 2 – линия задержки

и частотной областях не отличаются от описания ФМ сигнала. Например, двоичный ОФМ сигнал определяется формулой (3.54), т. е. произведением модулирующей функции $c(t)$ на гармонический сигнал. Однако функция $c(t)$ при ОФМ отличается от аналогичной функции $b(t)$ при ФМ и определяется следующим преобразованием:

$$c_k = b_k + c_{k-1}, \quad (3.55)$$

где b_k, c_k – элементы двоичных слов, равные 0 или 1 в k -м единичном интервале; $+$ – знак суммирования по модулю два; $k = 1, 2, \dots, n$.

Преобразование (3.55) определяет так называемый *относительный код*. Например, если $c_0 = 0$ и слово (b_k) равно 11010, то слово (c_k) равно 10011. Структурная схема преобразователя приведена на рис. 3.31.

Из приведенного способа формирования ОФМ сигнала следует, что если передаваемый информационный символ равен 0, то начальная фаза радиопульса в k -м единичном интервале равна начальной фазе радиопульса в предыдущем $(k-1)$ -м единичном интервале. Но если передаваемый символ равен 1, то начальная фаза в k -м единичном интервале меняется на π относительно фазы радиопульса в предыдущем $(k-1)$ -м единичном интервале.

Возможные варианты двоичной фазовой модуляции можно дополнить.

Рассмотрим случай двоичной фазовой модуляции дискретного ЧМ сигнала. Дискретный ЧМ сигнал анализировался в п. 3.5.4. Целью дополнительной модуляции дискретного ЧМ сигнала может быть или повышение помехоустойчивости приема цифровой информации, или увеличение энергетической скрытности, или другие обоснованные причины.

В пределах i -го блока фаза радиосигнала модулируется в соответствии с заранее выбранным двоичным кодовым словом. В качестве такого слова используют M -последовательность, последовательность Уолша, Д-последовательность и другие двоичные последовательности.

Выражение дискретного ФМ-ЧМ сигнала в течение передачи i -го блока равно

$$A \sum_{m=1}^N a_{m,i} v[t - (m-1)\tau_0] \cos(\omega_i t + \varphi_i) = A q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

$$q_i(t) = \sum_{m=1}^N a_{m,i} v[t - (m-1)\tau_0],$$

где $a_{m,i}$ – значение (символ) кодовой последовательности; τ_0 – время передачи этого символа; N – период кодовой последовательности; $q_i(t)$ – модулирующая видеопоследовательность в i -м блоке, длительностью $N\tau_0$.

Модулированный по фазе ЧМ сигнал

$$u_{\text{ЧМ-ФМ}}(t) = A \sum_{i=1}^n q_i [t - (i-1)k\tau_n] \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

где n – число передаваемых информационных блоков; $k\tau_n$ – длина блока; ω_i – круговая частота, которая определяется двоичным символом в i -м блоке.

При фазовой модуляции ЧМ сигнала модуляционный код можно усложнить так, что двоичному слову блока будет соответствовать не только значение частоты, но и номер кодовой последовательности.

Дополнительная фазовая модуляция расширяет спектр ЧМ сигнала, что дает возможность увеличить помехоустойчивость приема ФМ-ЧМ сигнала и увеличить энергетическую скрытность передачи информации. Это объясняется тем, что увеличивается база сигнала. Принимая во внимание формулу (3.52), вычислим ширину спектра ФМ-ЧМ сигнала, если $\omega_p = \Delta\omega_n$. Ширина спектра равна:

$$\Delta\omega = \omega_p(2^k - 1) + 2\Delta\omega_n = 2^{k+1} \Delta\omega_n = 2^k N 4\pi / k\tau_n,$$

где ширина спектра кодированной видеопоследовательности $\Delta\omega_n = 2\pi/\tau_0 = N 2\pi/k\tau_n$; N – период кодовой последовательности; τ_0 – время передачи символа кодовой последовательности; τ_n – время передачи информационного символа.

Ширина спектра больше ширины спектра дискретного ЧМ сигнала в N раз.

Для дискретного ФМ-ЧМ сигнала база равна:

$$B = k\tau_n \Delta f = k\tau_n 2^k N \frac{2}{k\tau_n} = 2^{k+1} N.$$

База больше базы дискретного ЧМ сигнала в N раз.

3.6.3. Многократная фазовая модуляция

В случае *многократной ФМ* информационное двоичное слово, передаваемое по каналу, разбивается на блоки одинаковой длины. Каждому двоичному слову блока ставится в однозначное соответствие значение начальной фазы гармонического сигнала. Если длина блока равна k , то число значений фаз равно 2^k . Правило отображения двоичных слов блока в значения фаз гармонического сигнала называется *модуляционным кодом*.

Фаза гармонического сигнала остается постоянной в пределах каждого блока, но изменяется при переходе от блока к блоку с изменением передаваемой двоичной информации. Если длина блока равна k , а передача одного

символа информационного слова происходит за время τ_n , то фаза гармонического сигнала остается неизменной в течение времени, равного $k\tau_n$.

Частным случаем многократной ФМ является *двухкратная ФМ*. Для этой модуляции $k = 2$.

Пусть информационное слово равно 1001101011. В случае двухкратной ФМ длина блоков равна 2, а блоки, выбранные последовательно во времени, равны 10, 01, 10, 10, 11. Если модуляционный код записан в виде табл. 3.1, то информационному двоичному слову соответствует последовательность фаз $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$. Диаграммы, поясняющие эту модуляцию, приведены на рис. 3.32.

Таблица 3.1

Блок	Фаза
00	$\varphi_1 = 0$
01	$\varphi_2 = \pi/2$
10	$\varphi_3 = \pi$
11	$\varphi_4 = 3\pi/2$

Длительность радиопульса при двухкратной ФМ равна $2\tau_n$, поэтому ширина его спектра равна $\Delta\omega = 4\pi/2\tau_n$, т. е. в два раза меньше ширины спектра двоичной ФМ.

Длительность радиопульса (многократной ФМ с числом значений фаз $N = 2^k$) равна $k\tau_n$

Ширина спектра радиосигнала равна:

$$\Delta\omega = 4\pi / \tau_n \log_2 N = 4\pi / k\tau_n,$$

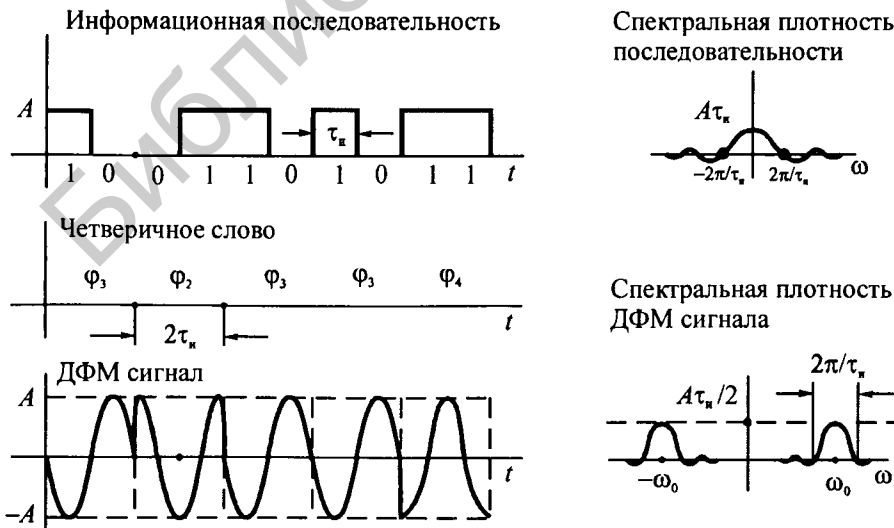


Рис. 3.32. Диаграммы, поясняющие двухкратную фазовую модуляцию

т. е. существенно меньше ширины спектра двоичного ФМ сигнала. Это позволяет при той же полосе, что и для двоичной ФМ, увеличить скорость передачи информации в $k = \log_2 N$ раз.

При многократной ОФМ каждому i -му блоку из k символов информационного двоичного слова ставится в однозначное соответствие значение разности фаз радиоимпульсов в i -м и $(i - 1)$ -м временных интервалах. Правило отображения двоичных слов блоков в значения разности фаз аналогично правилу при многократной ФМ.

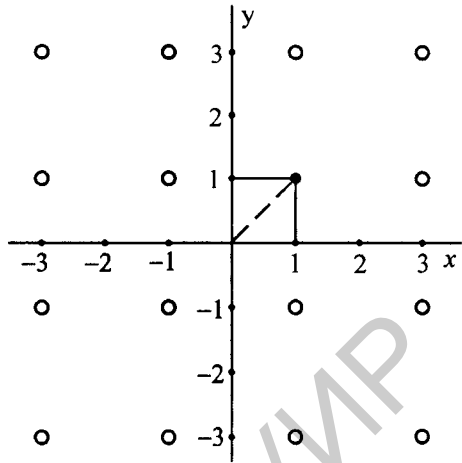


Рис. 3.33. Значения амплитуд и начальных фаз радиосигналов квадратурной АМ

3.6.4. Квадратурная амплитудная модуляция

При *квадратурной амплитудной модуляции* (КАМ) каждому двоичному слову блока длиной k символов ставятся определенные значения начальной фазы и амплитуды гармонического сигнала. Например, двоичным словам из четырех символов можно поставить в соответствие 16 радиосигналов одинаковой длительности, отличающихся друг от друга амплитудой и фазой. Значения амплитуд и фаз для всех 16 радиосигналов определяются с помощью рис. 3.33. Например, для одного из сигналов начальная фаза равна 45° , а амплитуда равна $\sqrt{2}$. Эти значения соответствуют вектору, проведенному из начала координат до выделенной точки.

Квадратурно амплитудно-модулированный сигнал формируется посредством кодирования. Модуляционный код определен при этом правилом отображения двоичных слов блока в начальные фазы и амплитуды радиосигналов.

Радиосигнал с КАМ

$$u(t) = \sum_{i=1}^n A_i v[t - (i-1)k\tau_n] \cos(\omega_0 t + \varphi_i) = \\ = \sum_{i=1}^n \{A_i \cos \varphi_i v[t - (i-1)k\tau_n] \cos \omega_0 t - A_i \sin \varphi_i v[t - (i-1)k\tau_n] \sin \omega_0 t\}, \quad (3.56)$$

где $v(t)$ – форма видеоимпульса; A_i – амплитуда; φ_i – начальная фаза i -го радиоимпульса; τ_n – длительность единичного (тактового) интервала.

Если амплитуда импульсов остается постоянной, то сигнал с КАМ превращается в сигнал с многократной ФМ.

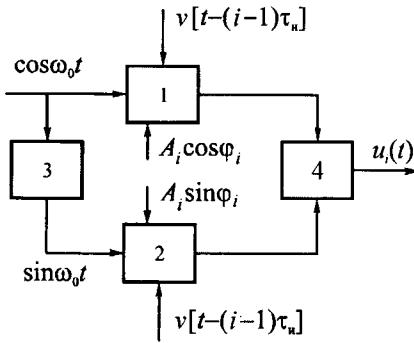


Рис. 3.34. Структурная схема модулятора сигнала с КАМ: 1, 2 – умножители; 3 – фазосдвигающее на $\pi/2$ устройство; 4 – вычитающее устройство

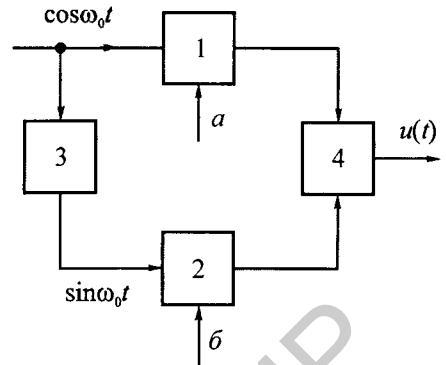


Рис. 3.35. Структурная схема модулятора: 1, 2 – умножители; 3 – фазосдвигающее на $\pi/2$ устройство; 4 – сумматор

Структурная схема модулятора, поясняющая формирование радиосигнала с КАМ $u_i(t)$ в течение i -го блока, показана на рис. 3.34.

Использование КАМ позволяет (как и при многократной ФМ) сократить ширину спектра сигнала в $\log_2 N$ раз или при той же полосе, что и для двоичной ФМ, увеличить скорость передачи информации в $k = \log_2 N$ раз.

3.6.5. Двоичная фазовая модуляция с одной боковой полосой

Формирование двоичной ФМ с ОБП мало отличается от рассмотренного ранее формирования АМ-ОБП. При этом структурная схема модулятора аналогична схеме на рис. 3.20. Она содержит модулятор двоичного сигнала и полосовой фильтр, настроенный на нижнюю или верхнюю боковую полосу.

При двоичной ФМ с ОБП сохраняются характерные для АМ-ОБП свойства преобразований во временной и частотной областях.

3.6.6. Квадратурная двоичная фазовая модуляция

Структурная схема модулятора приведена на рис. 3.35. Двоичные кодовые последовательности a, b от двух источников информации модулируют по фазе на $0 - \pi$ радиан квадратурные составляющие, а затем полученные сигналы складываются. В результате на выходе модулятора формируется сигнал, равный сумме двух кодофазомодулированных сигналов:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n q_i v[t - (i-1)\tau_u] \cos \omega_0 t + \sum_{j=1}^n q_j v[t - (j-1)\tau_u] \sin \omega_0 t,$$

где q_i, q_j – элементы источников информации, равные ∓ 1 ; $v(t)$ – форма видеоимпульса источника информации; τ_u – длительность видеоимпульса.

3.7. ДИСКРЕТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ШУМОПОДОБНОГО СИГНАЛА

3.7.1. Двоичная модуляция постоянного тока

Известны две разновидности двоичной модуляции постоянного тока: *модуляция по амплитуде (АМ)* и *модуляция по знаку*.

При АМ изменяется амплитуда, а при модуляции знака – направление тока в соответствии с передаваемым информационным двоичным словом. Во временной области сигналы определяются формулой (3.33), а в частотной – формулой (3.34). Для АМ сигнала $b_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для модулированного по знаку сигнала $b_k \in \{-1, 1\}$. Структурные схемы модуляторов приведены на рис. 3.36, 3.37. В структуре амплитудного модулятора содержится ключ, а в структуре знакового модулятора – переключатель. Ключ и переключатель являются управляемыми, а их состояния определяются элементами информационного слова.

3.7.2. Генерирование шумоподобных сигналов

Шумоподобные сигналы можно получить, используя модуляторы постоянного тока и генераторы. В случае применения модуляторов кодовые слова, определяющие закон формирования ШС, хранятся в запоминающем устройстве. Сигналы, формируемые в соответствии с этими словами, поступают на управляющий вход ключа (рис. 3.36) или переключателя (рис. 3.37).

Генераторы строятся по автономной схеме, структура которой определяется законом формирования ШС.

Наиболее распространенный подкласс генераторов ШС строится на базе *цифровых автоматов*. Если формируемая на его выходе двоичная последовательность получена с использованием операций задержки и логической операции суммирования по модулю два, то такой автомат называется *линейным*, а формируемая на его выходе последовательность – *линейной последовательностью*. Если кроме указанных операций используются другие логические операции (например, операция И), то формируемая цифровым автоматом двоичная последовательность называется *нелинейной*.

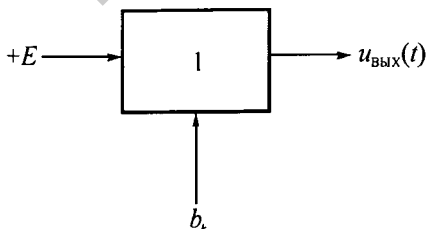


Рис. 3.36. Структурная схема модулятора постоянного тока по амплитуде:
1 – управляемый ключ; b_k – двоичное слово

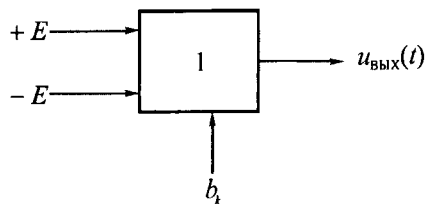


Рис. 3.37. Структурная схема модулятора постоянного тока по знаку:
1 – переключатель; b_k – двоичное слово

Рассмотрим пример генерирования линейной последовательности.

На рис. 3.38 приведена схема генератора M -последовательности. Буквой M принято обозначать разновидность линейных двоичных последовательностей. M -последовательность относится к классу *псевдослучайных* последовательностей.

Генератор построен на регистре сдвига с обратными связями и сумматоре по модулю два. Подключение входов сумматора к выходам определенных ячеек регистра определяет структуру M -последовательности.

Пусть до подачи тактовых импульсов (ТИ) в регистр было введено число 1000. С поступлением первого тактового импульса в первую ячейку регистра запишется цифра 0, так как сумма по модулю два цифр третьего и четвертого разрядов равна 0, а во вторую ячейку перейдет цифра 1, ранее записанная в первой ячейке. Соответственно в третью и четвертую ячейки запишутся цифры, ранее содержащиеся во второй и третьей ячейках, и т. д. Эти состояния ячеек приведены в первой строке табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номер тактового импульса	Состояние ячеек регистра сдвига			
	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	1	1
7	0	1	0	1
8	1	0	1	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	0
11	1	1	1	1
12	0	1	1	1
13	0	0	1	1
14	0	0	0	1
15	1	0	0	0

С поступлением последующих тактовых импульсов процесс смены состояний ячеек продолжится. В результате на их выходах будут генерироваться сдвинутые относительно друг друга M -последовательности. Например, на выходе четвертой ячейки регистра генерируется последовательность 00100110101110. Она записана в последнем столбце табл. 3.2. На выходе третьей ячейки генерируется последовательность 01001101011100. Она записана в четвертом столбце табл. 3.2 и т. д.

Каждая из последовательностей физически реализуется сдвинутыми во времени видеоимпульсами прямоугольной формы в соответствии с положением символов 1 в одном периоде M -последовательности. Длительность видеоимпульсов τ_0 определяется периодом тактовых импульсов. При

непрерывном поступлении тактовых импульсов последовательность периодически повторяется через время, равное $N\tau_0 = 15\tau_0$, где $N = 2^k - 1$ – период M -последовательности, определяемый числом разрядов регистра сдвига (в нашем примере $k = 4$). Начальную комбинацию можно задавать любым из 16 двоичных чисел, кроме числа 0000. Генерируемые последовательности остаются при этом одними и теми же, но только сдвигаются в зависимости от начальной кодовой комбинации.

Циклические сдвиги можно получить иначе на основе свойства M -последовательности, которое заключается в следующем.

Сложение по модулю два M -последовательности и ее задержанной копии дает M -последовательность, задержанную относительно суммируемых последовательностей.

Для произвольного числа ячеек регистра сдвига число задержанных относительно друг друга M -последовательностей определяется суммой

$$N - k = C_k^2 + C_k^3 + \dots + C_k^k.$$

Остальные k последовательностей образуются на выходах ячеек регистра. Поэтому общее число сдвинутых последовательностей равно

$$N = \sum_{q=1}^k C_k^q.$$

Общее число сумматоров по модулю два для получения всех циклических сдвигов M -последовательности равно $N - k$. Первый сумматор содержит два входа, второй – три и т. д., последний содержит k входов.

Изменяя подключение входов сумматора по модулю два к тем или другим ячейкам регистра сдвига, можно получать разные по структуре последовательности, но с одними и теми же свойствами. Число таких последовательностей равно $\frac{1}{k} \varphi(2^k - 1)$, где $\varphi(x)$ – функция Эйлера.

ТИ

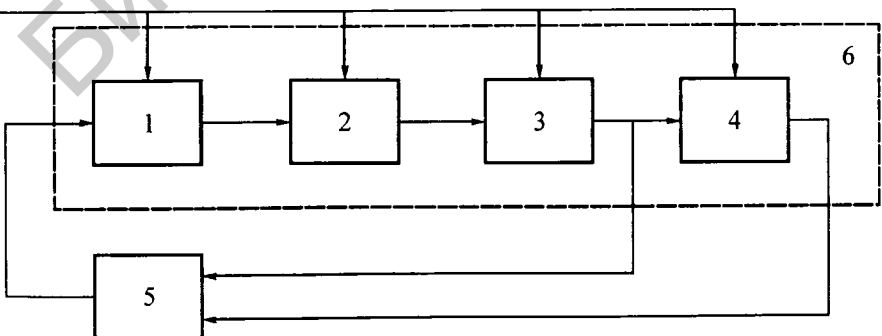


Рис. 3.38. Генератор шумоподобного сигнала:

1, 2, 2, 4 – ячейки регистра сдвига; 5 – сумматор по модулю два; 6 – регистр сдвига

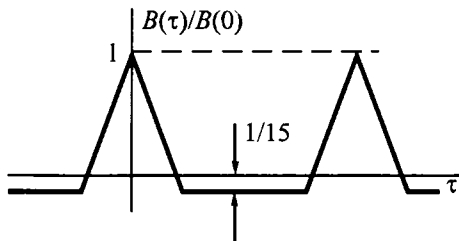


Рис. 3.39. Периодическая автокорреляционная функция ШС

Например, для $k = 4$ число M -последовательностей равно 2, а для $k = 11$ – равно 176, т. е. с ростом длины их число резко увеличивается.

Периодическая нормированная автокорреляционная функция M -последовательности длиной $N = 15$ символов приведена на рис. 3.39. Положительные значения

этой функции не превышают единицы, а отрицательные определяются числом, которое обратно пропорционально периоду M -последовательности. Поэтому с ростом периода отрицательные значения функции стремятся к нулю. Вид периодической нормированной автокорреляционной функции определяется свойствами последовательности, в том числе следующим свойством. Оно заключается в том, что в пределах периода M -последовательности число символов 1 больше числа символов 0 ровно на единицу.

Нормированная непериодическая функция автокорреляции того же ШС имеет значения, не превышающие $1/\sqrt{N}$ (при сдвигах, не равных нулю).

Непериодическая автокорреляционная функция M -последовательности напоминает автокорреляционную функцию шума, возникающего во входных цепях усилителей. По этой причине такие сигналы называются шумоподобными.

3.7.3. Модуляция шумоподобного сигнала по форме

При этой модуляции сообщение в виде двоичного слова разбивается на блоки длиной из k символов. Набору 2^k , $k = 1, 2, 3, \dots$ двоичных слов блока ставится в однозначное соответствие набор отличающихся по форме ШС. Правило отображения двоичных слов блока формам ШС образует модуляционный код. В соответствии с этим кодом формируется модулированный сигнал.

Частными случаями этой модуляции являются: амплитудная модуляция ШС и фазовая модуляция ШС. Для АМ и ФМ ШС длина блоков $k = 1$, а число возможных форм равно 2.

На рис. 3.40 приведена схема модулятора АМ ШС. Генератор ШС выдает периодическую двоичную псевдослучайную видеопоследовательность $u_1(t)$, определяемую периодическим двоичным кодовым словом. Для иллюстрации работы схемы (см. рис. 3.41) это слово равно коду Баркера длиной в 7 символов: 1011000. Длительность импульса видеопоследовательности равна τ_0 . Она меньше длительности $\tau_{\text{и}}$ импульса информационной последовательности $b(t)$ в $\tau_{\text{и}}/\tau_0$ раз. Положение управляемого ключа определяется элементом информационного слова: если этот элемент равен 1,

то ключ замкнут, а если равен 0, то – разомкнут. Ширина спектра сигнала $u_2(t)$ на выходе ключа определяется длительностью τ_0 импульса видеопоследовательности. Если это прямоугольный импульс, то ширина спектра равна $1/\tau_0$ Гц. Она в τ_n/τ_0 раз больше ширины спектра информационной двоичной последовательности.

База этого ШС

$$B = \tau_n \frac{1}{\tau_0} = N, \quad (3.57)$$

где N – длина слова псевдослучайной последовательности. В рассматриваемом нами примере $N = 7$. В некоторых случаях сигнал $u_2(t)$ непосредственно поступает в канал, а в других – преобразуется в радиосигнал $u_3(t)$ в амплитудном модуляторе. При этом ширина спектра и база удваиваются. На рис. 3.42, 3.43 приведены схема фазового модулятора ШС и временные диаграммы, поясняющие его работу.

Псевдослучайная последовательность с выхода генератора ШС поступает на управляемый переключатель и в зависимости от символа передаваемого информационного слова $b(t)$ (1 или 0) меняет свой знак на выходе управляемого

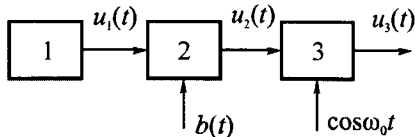


Рис. 3.40. Амплитудный модулятор шумоподобного сигнала:

1 – генератор ШС; 2 – управляемый ключ (первый АМ); 3 – второй АМ

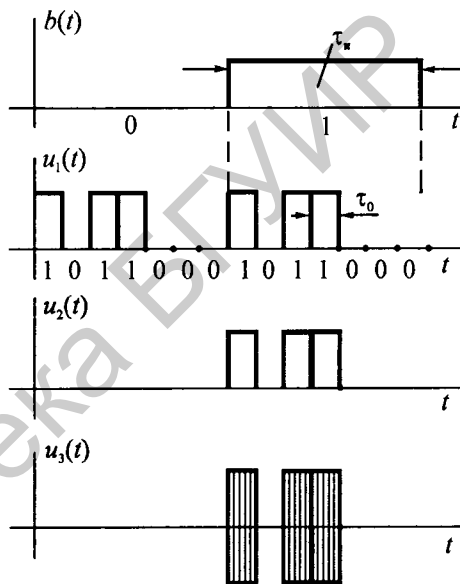


Рис. 3.41. Временные диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора ШС

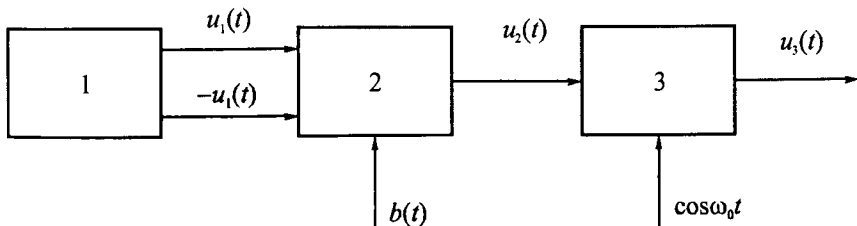


Рис. 3.42. Фазовый модулятор шумоподобного сигнала:

1 – генератор ШС; 2 – управляемый переключатель (первый ФМ); 3 – второй ФМ

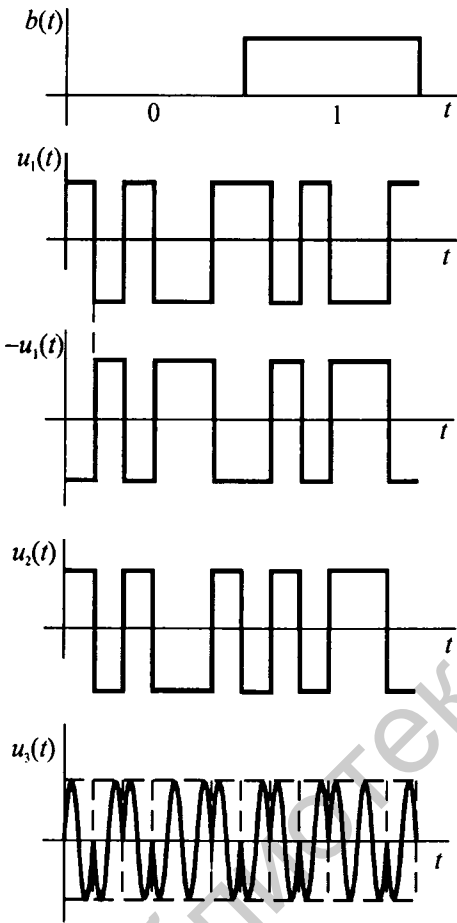


Рис. 3.43. Диаграммы, поясняющие работу фазового модулятора ШС

переключателя. Так же как и при АМ, сигнал $u_2(t)$ или поступает в канал непосредственно, или преобразуется с помощью фазового модулятора в радиосигнал.

Ширина спектра сигнала на выходе переключателя определяется длительностью импульса и равна $1/\tau_0$ [Гц], если этот импульс имеет прямоугольную форму. Его база равна базе АМ ШС и определяется формулой (3.57). Ширина спектра и базы радиосигнала в два раза больше.

На рис. 3.44 приведена структурная схема модулятора ШС по форме ($k > 1$).

Поясним его работу на примере использования симплексного кода длиной в 7 символов. Код из N слов называется симплексным, если скалярное произведение любой пары слов этого кода равно $-1/(N-1)$, где N – четное и равно $-1/N$, где N – нечетное. Для выбранного кода скалярное произведение равно $-1/7$.

В табл. 3.3 приведены кодовые слова симплексного кода, а также двоичные слова длиной 2

с выхода источника дискретных сообщений. Каждому двоичному слову блока соответствует кодовое слово симплексного кода, определяющее форму шумоподобного сигнала.

Таблица 3.3

Двоичный код	Кодовые слова, определяющие ШС						
00	-1	1	-1	-1	1	1	1
01	1	-1	1	-1	-1	1	1
10	1	1	-1	1	-1	-1	1
11	1	1	1	-1	1	-1	-1

Положение управляемого переключателя на рис. 3.44 определяется двоичным словом с выхода источника дискретного сообщения. Например, если слово равно 00, то выход управляемого переключателя соеди-

нен с выходом генератора 2, генерирующего ШС на основе слова симплексного кода первой строки табл. 3.3, а если число равно 01, то выход управляемого переключателя соединен с выходом генератора 3, генерирующего ШС на основе слова второй строки, и т. д.

Тактовый генератор поддерживает синхронизацию и позволяет обеспечить временные соотношения между сигналами с выходов генераторов и сигналом на выходе источника сообщений.

Из описания работы модулятора следует, что за время передачи одного блока в канал поступает один период ШС.

Следовательно, $k\tau_n = N\tau_0$, где k – длина блока; τ_n – длительность информационного символа; τ_0 – длительность символа псевдослучайной последовательности; N – период псевдослучайной последовательности.

Ширина спектра сигнала на выходе переключателя равна $F = 1/\tau_0 = N/k\tau_n$, т. е. в N/k раз больше ширины спектра двоичной информационной последовательности и меньше ширины спектра сигналов на выходах модуляторов АМ и ФМШС в k раз.

Модулированный сигнал с выхода переключателя поступает в канал или непосредственно, или преобразуется, например, с помощью фазового модулятора (см. рис. 3.44).

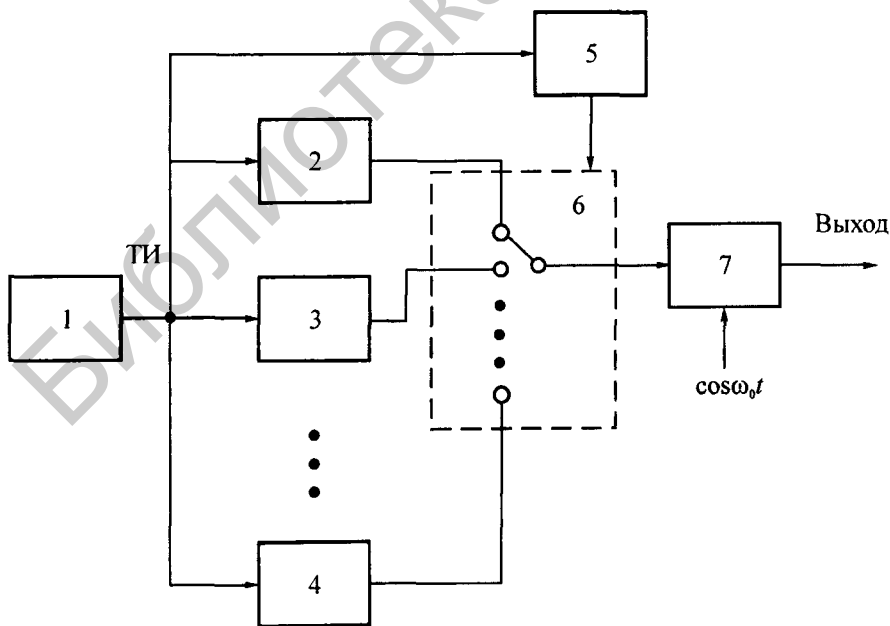


Рис. 3.44. Модулятор шумоподобного сигнала по форме:

1 – тактовый генератор; 2, 3, 4 – первый, второй и 2^k -й генераторы шумоподобных сигналов; 5 – источник дискретных сообщений; 6 – управляемый переключатель; 7 – фазовый модулятор

Скорость передачи информации определяется длительностью информационного символа и для всех рассматриваемых модуляций является одинаковой:

$$R = (\log_2 2^k) / k\tau_n.$$

Если ширина спектра модулированных сигналов для всех модуляций выбрана одинаковой, то модуляция по форме позволяет получить выигрыш в скорости передачи по сравнению с АМ ШС и ФМ ШС в $R/R_0 = k$ раз. Убедимся в этом.

При амплитудной и фазовой модуляции ШС один период псевдослучайной последовательности равен длительности одного информационного символа $\tau_{н1}$. При модуляции ШС по форме тот же период равен длине блока $k\tau_{н2}$. Приравнявая длительности символа и блока, получим:

$$\tau_{н1} = k\tau_{н2}.$$

Из полученного равенства находим скорость передачи для случая модуляции ШС по форме:

$$R = 1/\tau_{н2} = k/\tau_{н1} = kR_0,$$

где R_0 – скорость передачи при АМ или ФМ ШС.

Рассмотрим узкополосную радиосистему передачи информации и радиосистему передачи информации с ШС, которые работают на одной и той же несущей частоте в заданном частотном диапазоне.

На рис. 3.45 приведены спектры узкополосного сигнала (первая зависимость) и ШС (вторая и третья зависимости). Сигналы имеют одинаковые энергии, а их базы определяются неравенствами $B_1 < B_2 < B_3$. При приеме узкополосного сигнала 1 в полосе Δf шумоподобные сигналы 2, 3 создают помеху тем большей мощности, чем меньше их база. С увеличением этой базы интенсивность спектральных компонент ШС 3 в полосе Δf уменьшается, так как его энергия остается постоянной, а спектральные компоненты ШС распределяются в большем диапазоне. При дальнейшем увеличении базы ШС его спектральные компоненты могут измениться настолько, что их интенсивность будет намного меньше флуктуационного шума входных цепей приемника, осуществляющего прием сигнала 1.

Помеха, создаваемая ШС, становится пренебрежимо малой. Этот пример показывает возможность совмещения в одном и том же частотном диапазоне как обычных систем, так и систем с ШС. Кроме того, в системах с ШС обеспечивается скрытность передачи, если код, определяющий форму ШС, известен только своему корреспонденту, а база ШС выбрана такой величины, при которой уровень полезного сигнала меньше уровня флуктуационного шума, возникающего во входных цепях приемника.

3.8. МОДУЛЯЦИЯ ИМПУЛЬСНОГО ПЕРЕНОСЧИКА

3.8.1. Амплитудно-импульсная модуляция

В качестве переносчика сообщения в технике связи используется и последовательность видеоимпульсов. Если амплитуды импульсов изменяются в соответствии с передаваемым сообщением, то формируемый сигнал называется амплитудно-импульсно-модулированным (АИМ) сигналом. Различают АИМ сигналы первого и второго рода. При АИМ первого рода амплитудные значения изменяются с изменением передаваемого сообщения [модулирующего сигнала $b(t)$], а при АИМ второго рода амплитуда импульса пропорциональна значению модулирующего сигнала в момент времени, совпадающий с началом или серединой этого импульса.

Рассмотрим АИМ сигнал первого рода.

Схема модулятора и диаграммы, поясняющие его работу, приведены на рис. 3.46, 3.47.

На вход умножителя поступает модулирующий непрерывный сигнал $b(t)$, соответствующий передаваемому сообщению. На его второй вход подают носитель сообщения в виде видеоимпульсов $a(t)$ с постоянной амплитудой и постоянной длительностью. Период повторения импульсов обычно определяется верхней граничной частотой спектра первичного сигнала.

Так как АИМ сигнал равен произведению

$$u_{\text{АИМ}}(t) = a(t)b(t),$$

то его спектральная плотность определяется сверткой спектральных плотностей модулирующего сигнала и видеоимпульсов:

$$S_{\text{АИМ}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(jz)S_c[j(\omega - z)]dz. \quad (3.58)$$

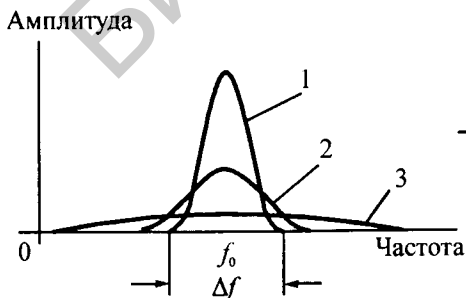


Рис. 3.45. Спектры сигналов

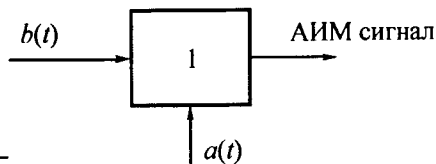


Рис. 3.46. Структурная схема модулятора АИМ сигнала:
1 – умножитель

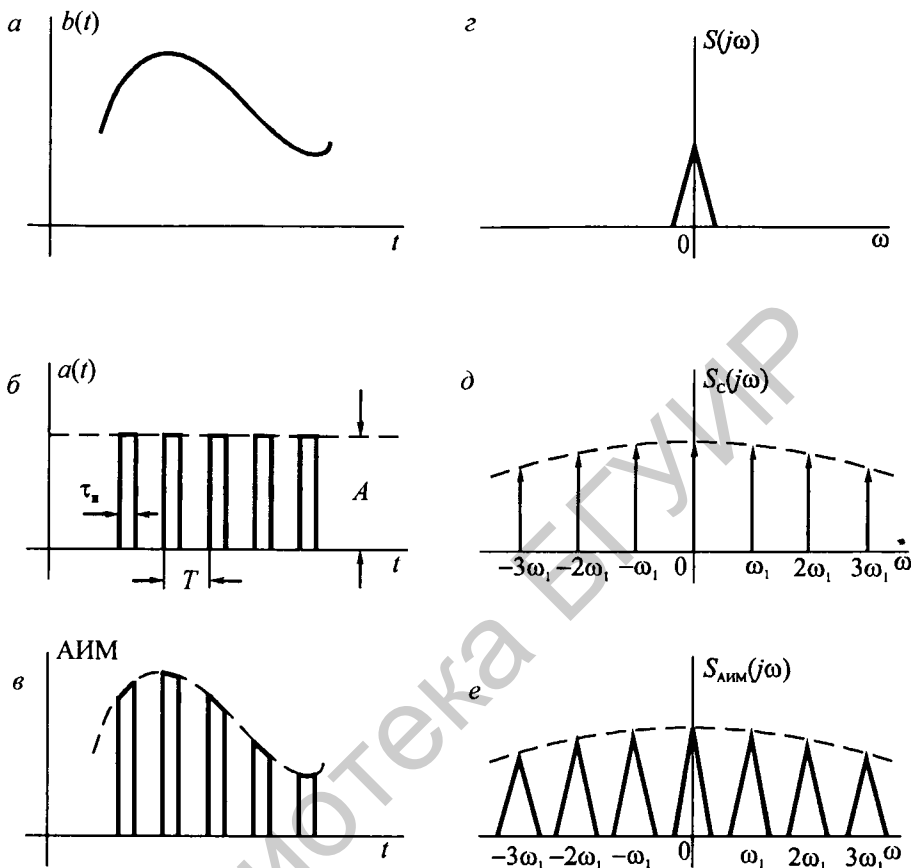


Рис. 3.47. Диаграммы, поясняющие работу модулятора АИМ сигнала

Спектральная плотность носителя сообщения

$$S_c[j(\omega)] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2A\tau_n \sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{Tk\omega_1 \tau_n / 2} \delta(\omega - k\omega_1), \quad (3.59)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

Спектральная плотность периодических видеоимпульсов вычислена в примере 2.4 и показана на рис. 3.47, д.

Подставляя выражение (3.59) в (3.58), получим (рис. 3.47, е):

$$S_{\text{АИМ}}j(\omega) = \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{k\omega_1 \tau_n / 2} S[j(\omega - k\omega_1)]. \quad (3.60)$$

Анализируя полученный результат, находим, что спектральные компоненты группируются около значений частот $\omega = 0, \mp \omega_1, \mp 2\omega_1, \mp 3\omega_1$ и т. д. и повторяют с точностью до постоянной величины спектр $S(j\omega)$ модулирующего сигнала (рис. 3.47, з, е).

При увеличении частоты интенсивность спектральных компонент убывает по закону $(\sin x)/x$, причем скорость убывания определяется длительностью видеоимпульса τ_n . Чем меньше эта длительность, тем медленнее убывают спектральные компоненты и наоборот. Длительность прямоугольного видеоимпульса τ_n определяет ширину спектра АИМ сигнала, которая равна $2\pi/\tau_n$.

3.8.2. Широтно-импульсная модуляция. Фазо-импульсная модуляция

Сигнал, у которого в соответствии с сообщением изменяются длительности импульсов импульсного переносчика, называется *широтно-импульсно-модулированным (ШИМ) сигналом*. Если в соответствии с передаваемым сообщением изменяется задержка импульсов, то такой сигнал называется *фазо-импульсно-модулированным (ФИМ) сигналом*.

Структурная схема модулятора ШИМ сигнала приведена на рис. 3.48, а временные диаграммы, поясняющие его работу, — на рис. 3.49.

Генератор импульсов переменной длительности является импульсным устройством. Запуск генератора осуществляется видеоимпульсами $a(t)$

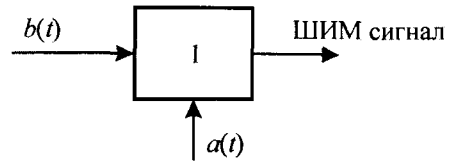


Рис. 3.48. Структурная схема модулятора ШИМ сигнала:
1 — генератор импульсов переменной длительности

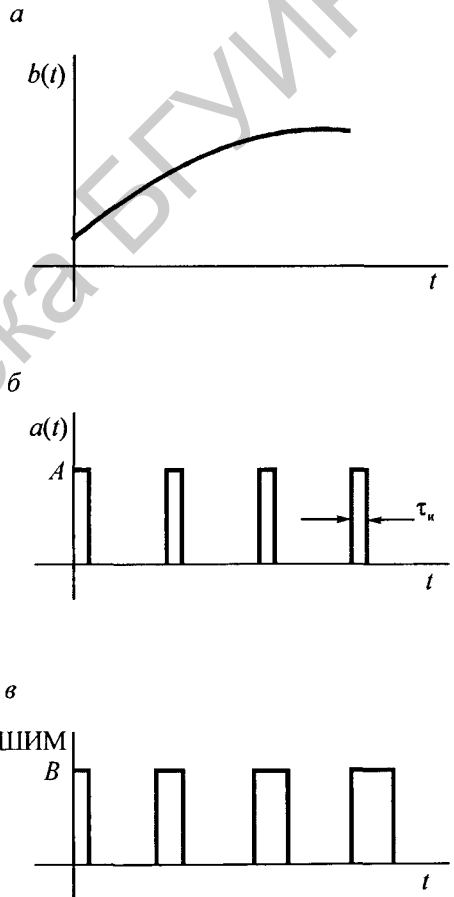


Рис. 3.49. Диаграммы, поясняющие работу модулятора ШИМ сигнала

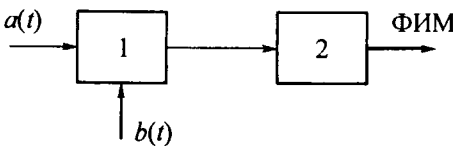


Рис. 3.50. Структурная схема модулятора ФИМ сигнала: 1 – генератор ШИМ сигнала; 2 – формирователь импульсов

с амплитудой A , длительностью τ_n и периодом $T = 1/2F_n$. С приходом каждого импульса генератор вырабатывает импульс с постоянной амплитудой B и длительностью, прямо пропорциональной значению модулирующего сигнала $b(t)$.

Формирование ФИМ сигнала поясняется рис. 3.50 и рис. 3.51. Схема модулятора содержит: генератор импульсов переменной длительности и формирователь выходных импульсов. В качестве генератора часто используют формирователь ШИМ сигнала. Рис. 3.51, а, б, в иллюстрирует работу генератора импульсов переменной длительности, рис. 3.51, г, д поясняет работу формирователя выходных импульсов.

Основными операциями формирователя выходных импульсов являются: дифференцирование ШИМ сигнала; ограничение положительных импульсов на выходе дифференцирующей цепи; преобразование отрицательных импульсов на выходе дифференцирующей цепи в импульсы заданной формы и длительности.

Отыскание спектральных плотностей ШИМ и ФИМ сигналов при произвольном модулирующем сигнале (как это было сделано для АИМ сигнала) затруднено. Поэтому их вычисляют для гармонического сигнала.

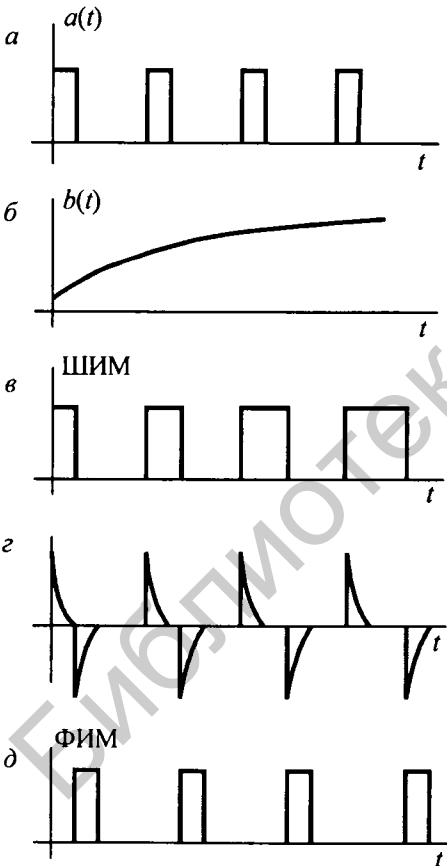


Рис. 3.51. Диаграммы, поясняющие работу модулятора ФИМ сигнала

3.8.3. Импульсно-кодовая модуляция

Преобразование непрерывного первичного аналогового сигнала в код называется *импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ)*.

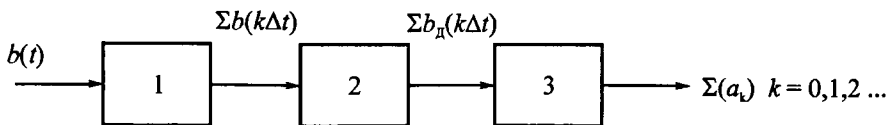


Рис. 3.52. Аналого-цифровой преобразователь:

1 – дискретизатор; 2 – квантователь; 3 – кодер

Основание кода может быть любым. В системах электросвязи наибольшее распространение получили двоичные коды, реализуемые с меньшими аппаратными затратами.

Устройство, преобразующее непрерывный первичный аналоговый сигнал в двоичный код, называется *аналого-цифровым преобразователем* (АЦП). Структурная схема АЦП и диаграммы приведены на рис. 3.52, 3.53. Основными операциями при ИКМ являются операции дискретизации, квантования и кодирования. При дискретизации получают выборочные значения из непрерывного аналогового сигнала. Эти значения являются скалярным произведением функции $b(t)$, определяющей этот сигнал, и обобщенной функции, равной сумме бесконечного числа дельта-функций:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k\Delta t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) dt, \\ &k = 0; \mp 1; \mp 2, \dots \end{aligned}$$

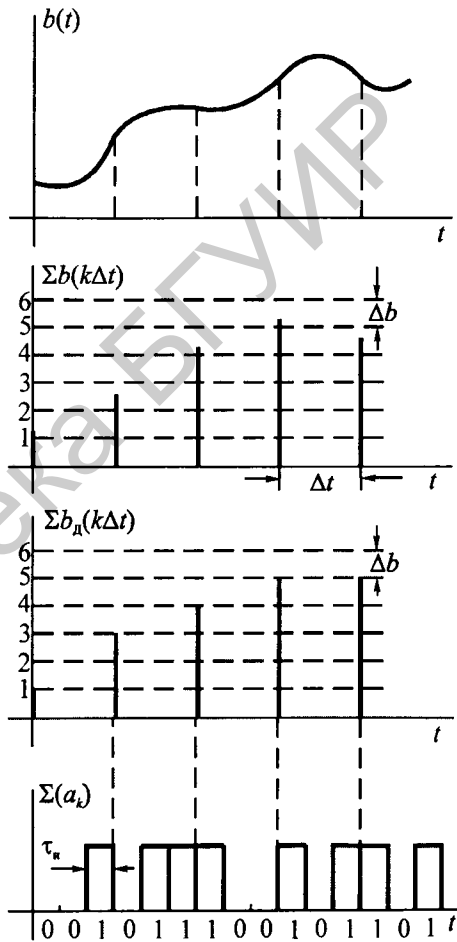


Рис. 3.53. Диаграммы, поясняющие работу АЦП

В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание фильтрующее свойство дельта-функции.

Алгоритм определения выборочных значений прост и сводится к умножению входного непрерывного сигнала на весьма короткие импульсы, возникающие в моменты времени $k\Delta t$.

Интервал Δt называется *интервалом дискретизации*. Его величина выбирается в соответствии с теоремой Котельникова. Согласно этой теореме, дискретизация не приводит к искажениям, если $\Delta t \leq 1/2F_b$, где F_b – верхняя граничная частота спектра сигнала $b(t)$. Алгоритм дискретизации аналогичен АИМ.

Полученные в результате дискретизации выборочные значения далее переводятся в двоичные числа. Вначале каждое значение $b(k\Delta t)$ сравнивается с заранее заданными постоянными уровнями напряжения (тока), которые называются *уровнями квантования*. Затем ближайший к выборочному значению уровень $b_d(k\Delta t)$ переводится в двоичное число $\Sigma(a_k)$. Процесс замены выборочного значения ближайшим к нему уровнем называется *квантованием*. Совокупность уровней квантования образует шкалу квантования. Разность значений напряжений (токов) двух соседних по шкале уровней квантования называется *интервалом квантования*. Если эта разность одинакова для всей шкалы квантования, то такая шкала называется *линейной*. При квантовании возникает погрешность

$$\Delta b = b(k\Delta t) - b_d(k\Delta t). \quad (3.61)$$

Ее величина тем меньше, чем больше уровней квантования L . Таким образом, каждое выборочное значение заменяется на одно из возможных уровней, которое далее преобразуется в двоичное кодовое слово. Его длина $n = \log_2 L$. Длина двоичного сигнала на выходе АЦП, определяемая длиной кодового слова, не должна превышать интервал дискретизации, т. е.

$$n\tau_n < \Delta t.$$

Следовательно, длительность передачи одного символа кодового слова

$$\tau_n \leq \Delta t/n = 1/2F_b n = 1/2F_b \log_2 L. \quad (3.62)$$

Если сигнал на выходе АЦП содержит импульсы прямоугольной формы, то ширина его спектра будет равна

$$1/\tau_n = 2F_b \log_2 L.$$

3.8.4. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция

В отличие от ИКМ при дифференциальной импульсно-кодовой модуляции (ДИКМ) по каналу связи передаются двоичные слова, которые соответствуют не отсчетным значениям первичного сигнала $b(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а разностям

$$\varepsilon(k) = b(k) - \tilde{b}(k),$$

где $\tilde{b}(k)$ отсчетные значения сигнала предсказания, сформированного из предыдущих отсчетов.

Поскольку амплитудный диапазон разностей меньше диапазона отсчетных значений, то слова на выходе АЦП при ДИКМ содержат меньше разрядов, чем при ИКМ при той же частоте дискретизации. При сильных корреляционных связях значение $\tilde{b}(k)$ определяется по правилу:

$$\tilde{b}(k) = b(k-1). \quad (3.63)$$

При этом разности отсчетов, передаваемые по каналу связи

$$\varepsilon(k) = b(k) - b(k-1).$$

Если $b(k) \approx b(k-1)$ то передаваемые разности $\varepsilon(k) = 0$.

На рис. 3.54 приведена упрощенная структурная схема передатчика, в котором реализована ДИКМ. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, приведены на рис. 3.55.

Выборки сигнала подаются на первый вход вычитающего устройства, а на его второй вход поступают значения сигнала предсказания. При реализации правила (3.63) предсказатель является идеальной линией задержки, которая задерживает без искажений выборки на время, равное интервалу дискретизации Δt .

Пример 3.9. Определить экономно числа разрядов в случае применения ДИКМ по сравнению с ИКМ при преобразовании синусоидального сигнала с частотой 800 Гц.

Решение. Найдем число разрядов двоичного слова в системе с ИКМ, если шкала квантования линейная, а входным аналоговым сигналом является

$$b(t) = A \sin 2\pi 800t.$$

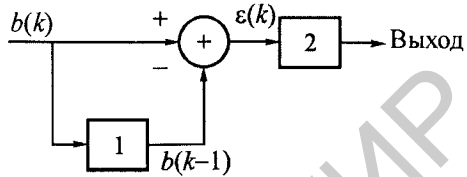


Рис. 3.54. Структурная схема передатчика: 1 – предсказатель; 2 – преобразователь разности в двоичный код

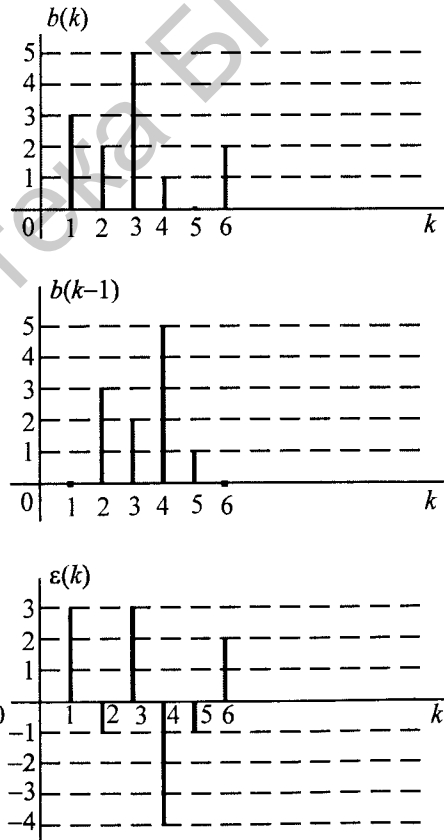


Рис. 3.55. Диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 3.55

Это число

$$n_n = \log_2 L_n,$$

где $L_n = 2A/\Delta b$ – число уравнений квантования; A – амплитуда; Δb – интервал квантования.

Число разрядов в системе с ДИКМ

$$n_d = \log_2 L_d,$$

где $L_d = 2\Delta b_{\max}/\Delta b$ – число уравнений квантования; Δb_{\max} – максимальная разность выборочных значений.

Эту разность найдем по производной сигнала

$$db(t)/dt = A2\pi800\cos2\pi800t.$$

Максимальное значение производной

$$\left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} = A2\pi800.$$

Умножив это значение на интервал дискретизации $\Delta t = 1/2F_b$, получим

$$\begin{aligned} \Delta b_{\max} &= \left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} \Delta t = \\ &= \frac{1}{2F_b} \left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} = \frac{A2\pi800}{2F_b}. \end{aligned}$$

В цифровых системах связи верхнюю граничную частоту берут равной 4 кГц. Для этого значения частоты $\Delta b_{\max} = 0,628A$.

Экономия числа разрядов определяется разностью

$$\begin{aligned} n_n - n_d &= \log_2 L_n - \log_2 L_d = \\ &= \log_2 \frac{2A \cdot \Delta b}{\Delta b \cdot 2 \cdot 0,628A} = \log_2 \left(\frac{1}{0,628} \right) = 0,67. \end{aligned}$$

Альтернативный способ уменьшения числа разрядов, применяемый в цифровых системах связи – использование нелинейного преобразования выборочных значений до их квантования.

Использование этого способа предполагает вначале компрессирование (сжатие) выборочных значений, а затем их квантование с использованием линейной шкалы квантования.

На приемном конце восстановленные выборки преобразуются нелинейным устройством с характеристикой, обратной характеристике компрессирования. Это преобразование называется экспандированием. Процесс, при котором сначала осуществляется компрессирование, а затем экспандирование, называют компандированием.

3.8.5. Дельта-модуляция

Дельта-модуляция (ДМ) отличается от ДИКМ тем, что по линии передается только знак разности.

$$\varepsilon(k) = b(k) - \tilde{b}(k-1).$$

Знак разности

$$\gamma(k) = \begin{cases} +1, & \text{если } \varepsilon(k) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \varepsilon(k) < 0. \end{cases}$$

В передатчике (рис. 3.56) знаки разности подаются на интегратор, на выходе которого вычисляется произведение интервала квантования Δb на сумму всех предыдущих знаков:

$$\tilde{b}(k-1) = \Delta b \sum_{i=0}^{k-1} \gamma(i). \quad (3.64)$$

В вычитающем устройстве это произведение вычитается из выборки первичного сигнала $b(k)$.

Если $b(k) > \tilde{b}(k-1)$, на выходе устройства квантования формируется 1, а если $b(k) < \tilde{b}(k-1)$, то формируется -1 (см. рис. 3.57). На передачу этих символов (знаков) требуется время, равное интервалу дискретизации.

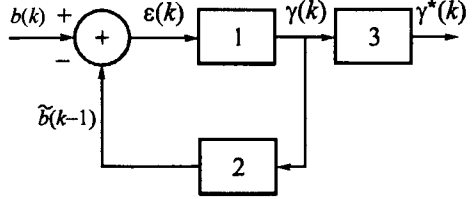


Рис. 3.56. Структурная схема передатчика дельта-модулированного сигнала:
1 – квантователь; 2 – интегратор;
3 – линия связи

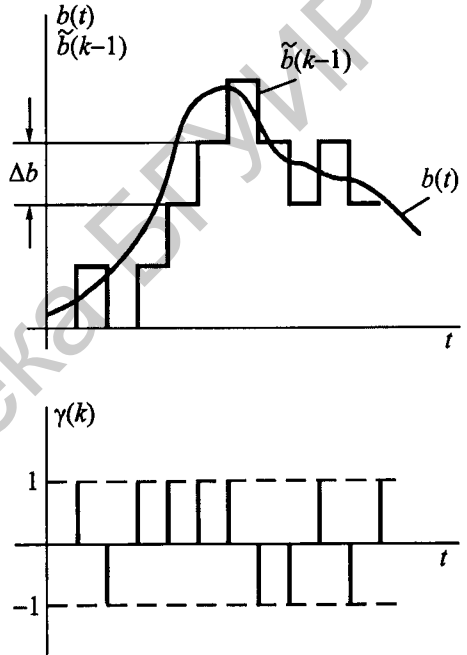


Рис. 3.57. Диаграммы, поясняющие принцип формирования дельта-модулированных сигналов

3.9. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

3.9.1. Некогерентное детектирование непрерывных амплитудно-модулированных сигналов

Некогерентное детектирование оказывается возможным только при приеме АМ сигнала с большим уровнем несущей и если индекс модуляции находится в пределах $1 \geq m \geq 0$.

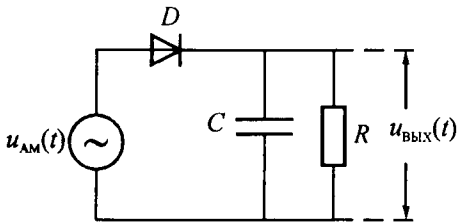


Рис. 3.58. Схема некогерентного детектора

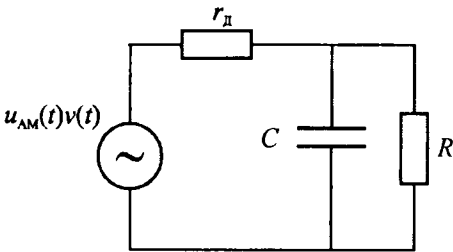


Рис. 3.59. Эквивалентная схема некогерентного детектора

При АМ-ПН, АМ-ОБП и АМ-БУН, когда $m > 1$, возникают искажения. Это объясняется тем, что некогерентный детектор (рис. 3.58), содержащий диод D и цепочку RC , выделяет огибающую, которая для АМ-ПН, АМ-ОБП и АМ-БУН при $m > 1$ не совпадает с формой модулирующего сигнала (сравните огибающие на рис. 3.16, в, з).

Рассмотрим работу некогерентного детектора при АМ с $m \leq 1$. Когда входное напряжение положительно, через диод протекает ток, а когда отрицательно, ток равен нулю. Это позволяет этот диод считать ключом, который замкнут, если входное напряжение

положительно, и разомкнут, если это напряжение отрицательно. Поэтому схему детектора можно представить в виде последовательно соединенной параметрической цепи с коэффициентом передачи $v(t)$ и фильтра нижних частот с коэффициентом передачи $K(j\omega)$ и заменить ее эквивалентной схемой (рис. 3.59).

В этой схеме входное напряжение равно произведению двух напряжений: входного АМ сигнала (рис. 3.61, а) и напряжения в виде последовательности прямоугольных импульсов с единичной амплитудой, длительностью импульсов $\tau_{и} = T/2$ и с периодом повторения, который равен периоду высокочастотного заполнения АМ сигнала, т. е. $T = 2\pi/\omega_0$ (рис. 3.60, б).

Сигнал на выходе эквивалентной схемы найдем как обратное преобразование Фурье от спектральной плотности выходного сигнала

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{пн}}(j\omega)K(j\omega).$$

Спектральная плотность $S_{\text{пн}}(j\omega)$ равна свертке спектральных плотностей АМ сигнала и последовательности прямоугольных импульсов $v(t)$.

$$S_{\text{пн}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АМ}}(jz)S_v[j(\omega - z)]dz, \quad (3.65)$$

где $S_{\text{АМ}}(j\omega)$ – спектральная плотность АМ сигнала (рис. 3.61, з); $S_v(j\omega)$ – спектральная плотность последовательности прямоугольных импульсов (рис. 3.61, д).

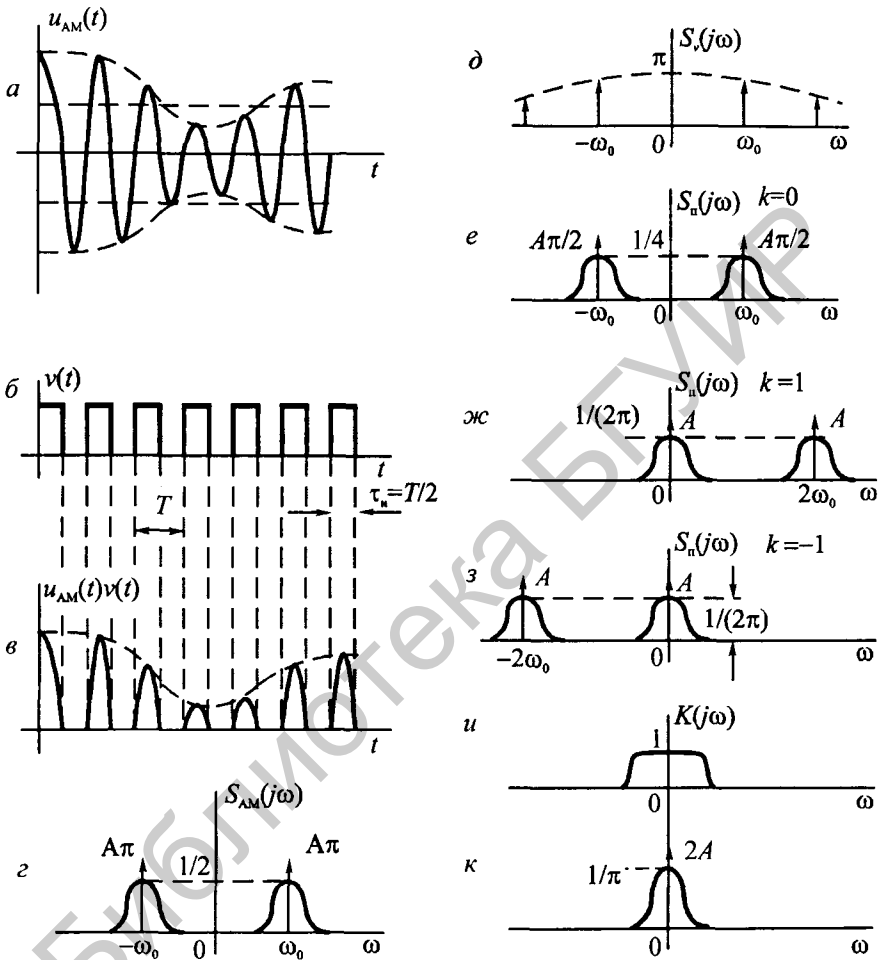


Рис. 3.60. Диаграммы, поясняющие работу некогерентного детектора: *a* – амплитудно-модулированный сигнал; *б* – прямоугольные импульсы с единичными амплитудами; *в* – произведение амплитудно-модулированного сигнала на прямоугольные импульсы; *г* – спектральная плотность амплитудно-модулированного сигнала; *д* – спектральная плотность последовательности прямоугольных импульсов; *е* – спектральная плотность произведения при $k = 0$; *ж* – спектральная плотность произведения при $k = 1$; *з* – спектральная плотность произведения при $k = -1$; *и* – коэффициент передачи ФНЧ; *к* – спектральная плотность сигнала на выходе детектора

Вычисление спектральной плотности $S_v(j\omega)$ аналогично вычислению, приведенному в примере 3.4. Функция $v(t)$ (рис. 3.60, б) записывается в виде ряда Фурье в тригонометрической форме, а затем вычисляется ее спектральная плотность.

$$S_v(j\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \delta(\omega - k\omega_0), \quad (3.66)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – несущая частота АМ сигнала.

Подставляя формулу (3.66) в (3.65) с учетом фильтрующего свойства дельта-функции, получим

$$S_{\Pi}(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} S_{AM}[j(\omega - k\omega_0)]. \quad (3.67)$$

Проанализируем полученное выражение. Спектральная плотность произведения $u_{AM}(t)v(t)$ сигналов является взвешенной суммой сдвинутых по оси частот спектральных плотностей АМ сигнала.

Вес этих составляющих определяется функцией $(\sin \frac{k\pi}{2}) / \frac{k\pi}{2}$ для чисел k , которые принимают целочисленные значения в интервале $[-\infty, \infty]$.

$$S_{\Pi}(j\omega) = \frac{1}{2} S_{AM}(j\omega), \quad k = 0,$$

$$S_{\Pi}(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} S_{AM}[j(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{\pi} S_{AM}[j(\omega - \omega_0)], \quad k = 1,$$

$$S_{\Pi}(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} S_{AM}[j(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{\pi} S_{AM}[j(\omega + \omega_0)], \quad k = -1.$$

Эти составляющие показаны на рис. 3.60, е; 3.60, ж; 3.60, з соответственно.

Полагая, что фильтр нижних частот пропускает только те спектральные составляющие $S_{\Pi}(j\omega)$, которые группируются около нулевой частоты (см. рис. 3.60, и), получим выражение для спектральной плотности сигнала на выходе детектора (см. рис. 3.60, к):

$$S_{\text{вых}} = \left\{ \frac{1}{\pi} S_{AM}[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{\pi} S_{AM}[j(\omega + \omega_0)] \right\} K(j\omega), \quad (3.68)$$

где $K(j\omega)$ – коэффициент передачи фильтра.

Если $K(j\omega) = 1$, то

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{2} S(j\omega) + 2A\pi\delta(\omega) \right\} = \frac{1}{\pi} S(j\omega) + 2A\delta(\omega),$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность модулирующего сигнала.

Сигнал на выходе некогерентного детектора равен

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} S(j\omega) + 2A\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} b(t) + \frac{1}{2\pi} 2A[e^0] = \frac{1}{\pi} [A + b(t)].
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Выражение для сигнала на выходе некогерентного детектора содержит постоянное значение A/π , которое определяет постоянное напряжение и функцию $b(t)/\pi$, описывающую переменное напряжение, совпадающее по форме с модулирующим сигналом $b(t)$.

3.9.2. Некогерентное детектирование двоичных сигналов

Некогерентное детектирование применяется при приеме двоичных АМ и ЧМ сигналов. Оно мало отличается от некогерентного детектирования непрерывных АМ сигналов. Некоторые особенности связаны с импульсным характером сигналов. Это предъявляет определенные требования к параметрам фильтра нижних частот и полупроводникового диода.

При некогерентном детектировании двоичных ЧМ сигналов используются два канала обработки. Каждый канал содержит полосовой фильтр и амплитудный некогерентный детектор.

Полосовые фильтры, настроенные на несущие частоты носителей двоичных кодовых последовательностей, разделяют четные и нечетные элементы ЧМ сигнала, которые в дальнейшем детектируются амплитудными некогерентными детекторами. При вычитании выделенных на их выходах двоичных кодовых последовательностей образуется выходной сигнал – принимаемая информационная последовательность (рис. 3.61, 3.62).

3.9.3. Детектирование непрерывных частотно-модулированных сигналов

Одним из самых распространенных методов детектирования основан на преобразовании ЧМ сигнала в АМ сигнал. Диаграммы, поясняющие этот метод, приведены на рис. 3.63, а вариант детектора – на рис. 3.64. Частотный детектор содержит два резонансных контура, два диода и два фильтра нижних частот, выполненных на RC -цепях.

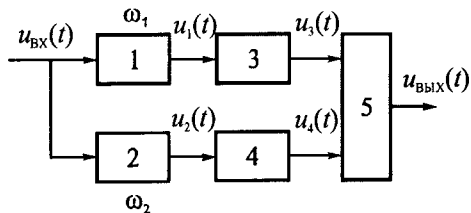


Рис. 3.61. Некогерентный детектор двоичного ЧМ сигнала:

- 1, 2 – полосовые фильтры;
- 3, 4 – амплитудные детекторы;
- 5 – вычитающее устройство

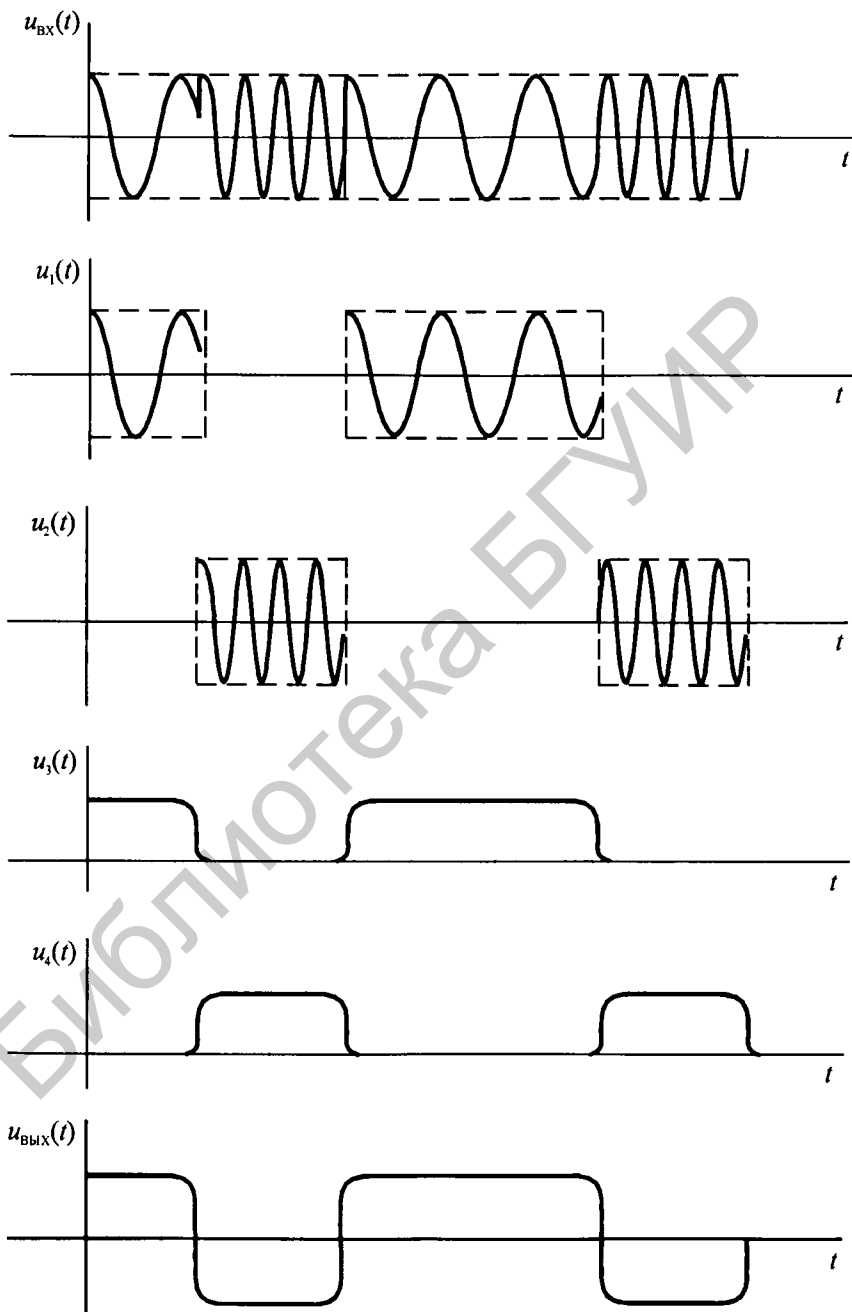


Рис. 3.62. Диаграммы, поясняющие работу двоичного ЧМ детектора

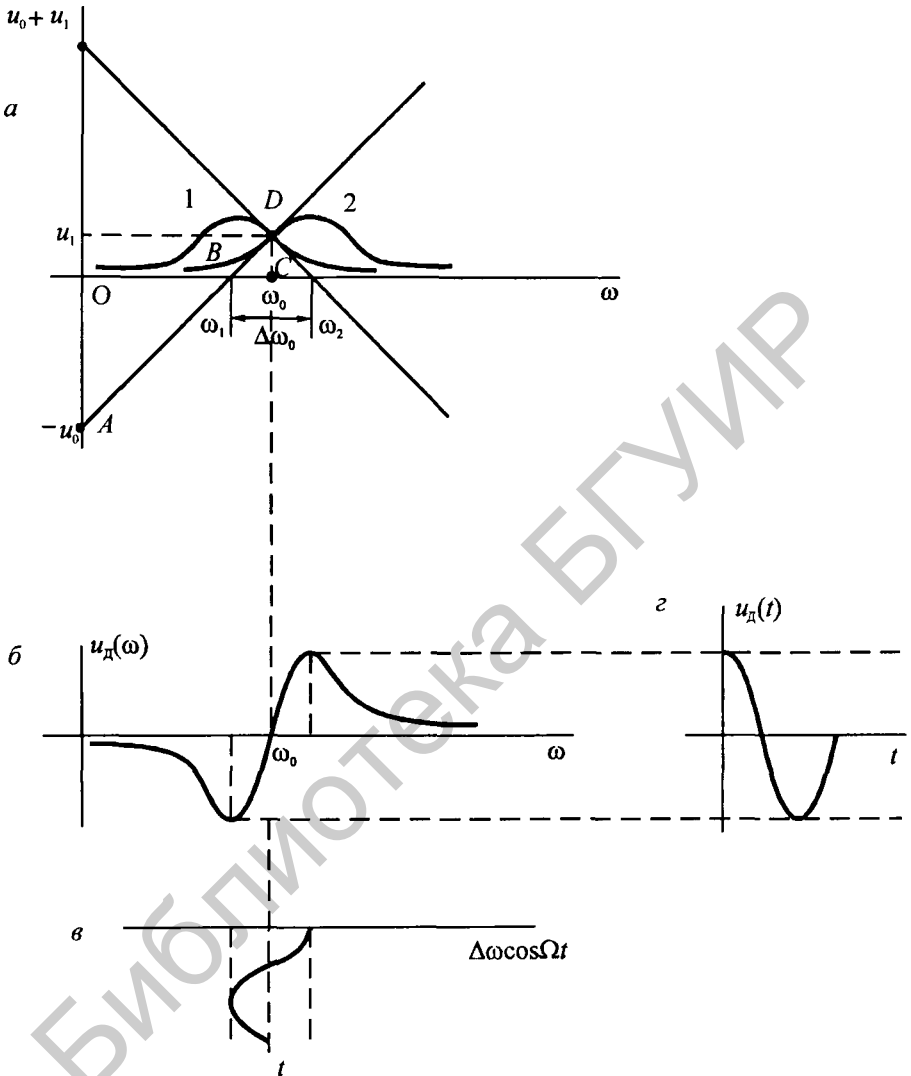


Рис. 3.63. Диаграммы, поясняющие работу детектора непрерывного ЧМ сигнала: а – АЧХ резонансных контуров; б – характеристика детектора; в – модулирующий сигнал; г – напряжение на выходе детектора

Резонансные контуры несколько расстроены относительно средней частоты ω_0 ЧМ сигнала.

Аппроксимируем участки кривых амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) контуров линейными функциями (рис. 3.63, а):

$$u = -\frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \omega + \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2} \right), \quad (3.70)$$

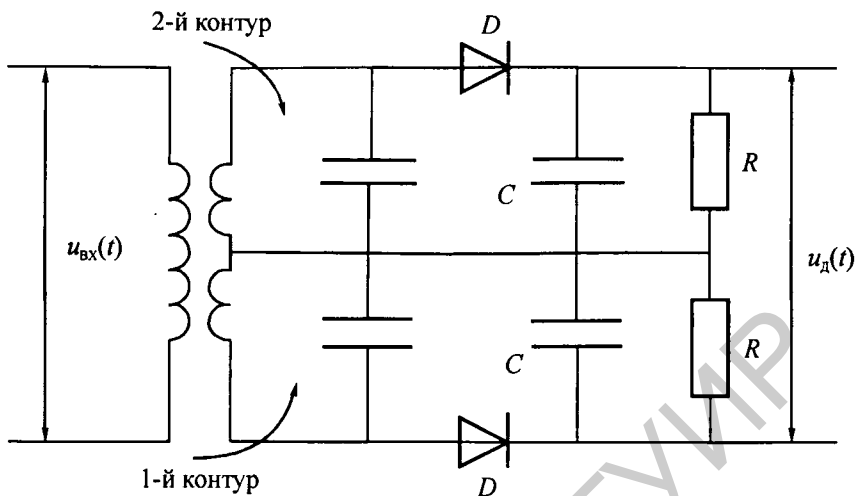


Рис. 3.64. Детектор непрерывного ЧМ сигнала

$$u = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \omega - \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2} \right), \quad (3.71)$$

где u_1 – значение напряжения на выходе контуров при $\omega = \omega_0$; $\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ – разность значений частот, которые совпадают с точками пересечений прямых линий с осью ω .

Каждое из приведенных уравнений найдено по исходному уравнению

$$u = a\omega + b.$$

Например, постоянные, определяющие уравнение (3.71), равны: $a = u_0/\omega_1$; $b = -u_0$.

Из подобных треугольников OAB и BDC находим

$$\frac{u_0}{\omega_1} = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}, \quad u_0 = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \omega_1 = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2} \right).$$

Разность левых и правых частей уравнений (3.71), (3.70) определяет линейную часть характеристики детектора:

$$u_{л}(\omega) = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0} \omega - \frac{4u_1\omega_0}{\Delta\omega_0} = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0} (\omega - \omega_0) = K_{д}(\omega - \omega_0), \quad (3.72)$$

где $K_{д} = 4u_1/\Delta\omega_0$ – крутизна характеристики детектора.

Характеристика детектора показана на рис. 3.63, б. Она получена вычитанием из значений кривой 2 соответствующих значений кривой 1 на рис. 3.63, а.

Найдем отклик частотного детектора на входной сигнал, считая, что девиация $\Delta\omega < \Delta\omega_0$.

Подставляя выражение для частоты сигнала

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t. \quad (3.73)$$

в уравнение (3.72), получим

$$u_{\text{п}}(\omega) = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0} (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t - \omega_0) = K_{\text{д}} \Delta\omega \cos \Omega t.$$

Отклик частотного детектора на входной ЧМ сигнал прямо пропорционален модулирующему сигналу (рис. 3.63, в). На рис. 3.63, г показано напряжение на выходе детектора, которое определяется девиацией частоты $\Delta\omega$ и крутизной $K_{\text{д}}$ характеристики детектора.

Поясним работу частотного детектора. При поступлении на его вход ЧМ сигнала с постоянной амплитудой и с частотой (3.73) на выходах контуров появляются модулированные как по частоте, так и по амплитуде сигналы.

Убедимся в изменении амплитуды напряжения на выходе 2-го контура, подставив в формулу (3.71) формулу (3.73) для частоты сигнала:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) - \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2} \right) = \\ &= u_1 + \frac{2u_1 \Delta\omega}{\Delta\omega_0} \cos \Omega t = u_1 [1 + m \cos \Omega t], \end{aligned}$$

где $m = 2\Delta\omega/\Delta\omega_0$.

Заметим, что ЧМ сигнал перед подачей на частотный детектор ограничивается по амплитуде двусторонним ограничителем для устранения паразитной амплитудной модуляции сигнала. Если эту модуляцию не устранить, то на выходе частотного детектора появится помеха, ухудшающая качество воспроизведения модулирующего сигнала. Причина возникновения этой паразитной амплитудной модуляции обусловлена неравномерностью АЧХ тракта до детектора.

3.9.4. Детектирование сигналов с амплитудно-импульсной модуляцией

Детектором сигнала с АИМ является фильтр нижних частот (ФНЧ). Этот фильтр пропускает на выход только те спектральные компоненты, которые расположены около нулевой частоты (см. рис. 3.47, е).

Обратное преобразование Фурье этих спектральных компонент дает сигнал на выходе ФНЧ:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АИМ}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A\tau_{\text{н}}}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A\tau_{\text{н}}}{T} b(t), \end{aligned}$$

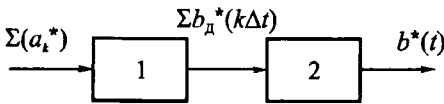


Рис. 3.65. Структурная схема цифро-аналогового преобразователя: 1 – преобразователь двоичных слов в оценки выборочных значений; 2 – фильтр нижних частот

где $S_{\text{АИМ}}(j\omega)$ – спектральная плотность АИМ сигнала, определяемая формулой (3.60); $K(j\omega)$ – коэффициент передачи ФНЧ; $b(t)$ – модулирующий сигнал; A , τ_n – соответственно амплитуда и длительность импульсов.

Сигнал на выходе ФНЧ с точностью до постоянной величины совпадает с модулирующим сигналом $b(t)$.

3.9.5. Декодирование сигналов с импульсно-кодовой модуляцией

При приеме сигнала с ИКМ двоичные слова преобразуются в значения амплитуд коротких видеоимпульсов, следующих через интервал $T = 1/2F_v$, где F_v – верхняя граничная частота первичного сигнала $b(t)$. Полученный таким способом АИМ сигнал далее фильтруется ФНЧ.

Устройство, осуществляющее эти преобразования, называется *цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП)*. Его структурная схема приведена на рис. 3.65.

Теоретические основы ЦАП определены теоремой Котельникова (см. раздел 2.7).

3.9.6. Декодирование сигналов с дифференциальной импульсно-кодовой модуляцией

Структурная схема декодирующего устройства приведена на рис. 3.66.

Двоичные слова с выхода линии связи поступают на вход преобразователя, который восстанавливает разности $\varepsilon^*(k)$ между соседними выборками. В сумматоре эти разности суммируются с выходным сигналом $b^*(k-1)$ предсказателя. В результате на выходе сумматора формируется оценка

$$b^*(k) = \varepsilon^*(k) + b^*(k-1). \quad (3.74)$$

Диаграммы, приведенные на рис. 3.67, поясняют работу схемы при отсутствии помех в линии связи. Применяя правило формирования оценки, находим значения оценок:

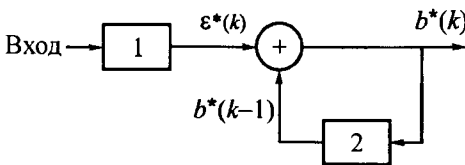


Рис. 3.66. Структурная схема декодирующего устройства: 1 – преобразователь двоичного слова в оценку разности; 2 – предсказатель

$$b^*(0) = \varepsilon^*(0) + b^*(-1) = 0,$$

т.к. $\varepsilon^*(0)$, $b^*(-1) = 0$,

$$b^*(1) = \varepsilon^*(1) + b^*(0) = \varepsilon^*(1) + \varepsilon^*(0),$$

$$b^*(2) = \varepsilon^*(2) + b^*(1) \text{ и т. д.}$$

3.9.7. Декодирование дельта-модулированных сигналов

Структурная схема декодирующего устройства приведена на рис. 3.68. Схема содержит точно такой же интегратор, какой имеется в передатчике (см. рис. 3.56). Разнополярные импульсы с выхода линии связи суммируются в этом интеграторе по правилу, аналогичному (3.64). Полученное на его выходе ступенчатое напряжение сглаживается фильтром нижних частот. Оценка передаваемого сообщения $b^*(t)$ на выходе ФНЧ зависит от уровня шума в линии связи и от шага квантования Δb . Размер шага определяет величину шума квантования. Чем меньше шаг и чем выше частота дискретизации, тем меньше этот шум. К сожалению, уменьшение шага квантования может привести к искажениям из-за быстрого изменения сообщения. В этом случае возникают «перегрузки по наклону», когда оценка $b^*(t)$ запаздывает по отношению к сообщению $b(t)$. Для того чтобы устранить это нежелательное явление, нужно обеспечить выполнение неравенства:

$$\Delta b \geq |b'(t)|_{\max} \Delta t, \quad (3.75)$$

где $|b'(t)|_{\max}$ – максимальное значение крутизны сообщения.

Учитывая, что

$$\Delta b = \frac{2|b(t)|_{\max}}{L},$$

где $|b(t)|_{\max}$ – максимальное значение сообщения; L – число уровней квантования, из (3.75) найдем выражение для интервала дискретизации:

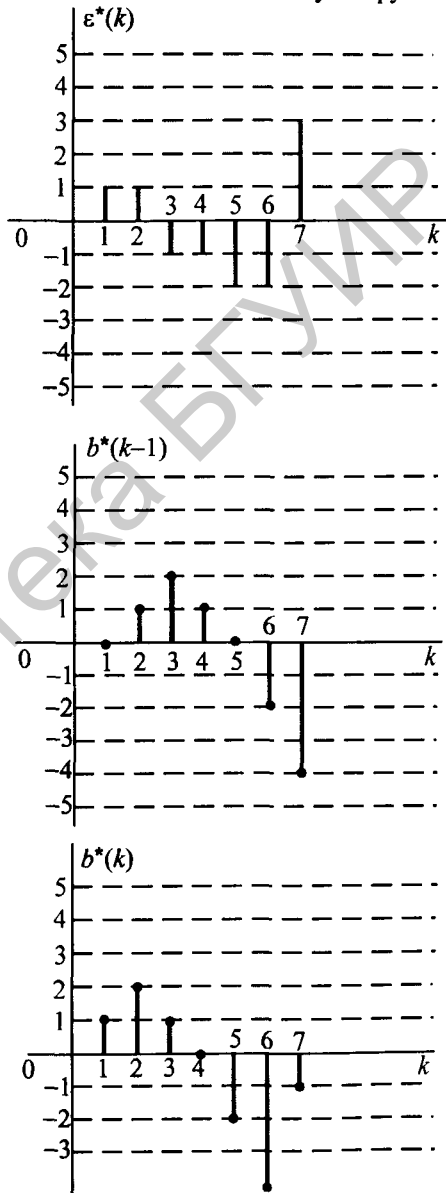


Рис. 3.67. Диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 3.66 при отсутствии помех в канале связи

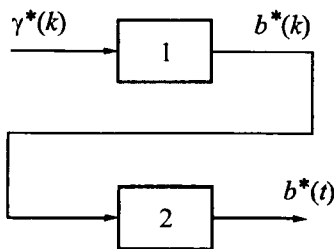


Рис. 3.68. Структурная схема декодирующего устройства: 1 – интегратор; 2 – фильтр нижних частот

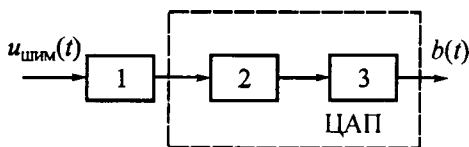


Рис. 3.69. Детектор сигнала с ШИМ: 1 – преобразователь ширины импульса в двоичное слово; 2 – преобразователь двоичного слова в значение амплитуды короткого видеопульса; 3 – фильтр нижних частот



Рис. 3.70. Детектор сигнала с ФИМ: 1 – преобразователь ФИМ сигнала в ШИМ сигнал; 2 – детектор ШИМ сигнала, строящийся с использованием ЦАП

$$\Delta t \leq \frac{2|b(t)|_{\max}}{L|b'(t)|_{\max}}. \quad (3.76)$$

С ростом Δb уменьшается «перегрузка по наклону», но растет шум квантования. Поэтому окончательный выбор интервала квантования производится, исходя из компромиссного удовлетворения этим двум требованиям.

Для передачи телефонных сообщений требуемая частота дискретизации не менее 150...200 кГц. В случае использования восьмиразрядной ИКМ тактовая частота составляет 64 кГц, т. е. меньше тактовой частоты при использовании дельта-модуляции (ДМ). Это означает, что ширина полосы линейного тракта для передачи сигнала при ДМ больше. Требуемая частота дискретизации существенно меньше при использовании ДМ с переменным шагом квантования. Системы связи, в которых используется такой вид модуляции, являются *адаптивными*. В этих системах удается снизить частоту дискретизации до значений, которые даже ниже, чем в системах с ИКМ.

3.9.8. Детектирование сигналов с широтно-импульсной и сигналов с фазо-импульсной модуляцией

Детектирование ШИМ сигнала возможно с помощью ЦАП, если этот сигнал предварительно преобразуется в двоичное число. Структурная схема детектора приведена на рис. 3.69.

Детектор ШИМ сигнала можно использовать для детектирования ФИМ сигнала, если предварительно преобразовать его в ШИМ сигнал (рис. 3.70).

3.10. КОГЕРЕНТНОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

3.10.1. Математическая модель когерентного детектора

Когерентное детектирование используется для выделения модулирующих сигналов из принимаемых АМ-ПН, АМ-ПН-ОБП, ФМ и ЧМ сигналов, а также для выделения модулирующих двоичных сигналов из двоичных АМ, ЧМ, ФМ и ОФМ сигналов, шумоподобных сигналов, модулированных по амплитуде, знаку и форме, сигналов с многократной ФМ и сигналов с КАМ.

Когерентное детектирование можно применять и при приеме непрерывного АМ сигнала с большим уровнем несущей. Но на практике этот способ детектирования не нашел применения, так как когерентный детектор по ряду показателей (габариты, вес, потребляемая мощность, стоимость) уступает некогерентному детектору.

Когерентное детектирование называют также *синхронным*, а когерентный детектор – *синхронным детектором*.

Структурная схема когерентного детектора приведена на рис. 3.71. Она содержит умножитель 1 и фильтр нижних частот 2.

На первый вход умножителя подают входной модулированный сигнал, а на второй – опорный сигнал, который генерируется (формируется) в приемнике.

Особенностью приема АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП сигналов является то, что опорные сигналы нельзя получить фильтрацией АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП сигналов, так как в их спектрах нет спектральных компонент на несущей частоте. Это существенно усложняет прием.

Вариант схемы формирователя опорного сигнала показан на рис. 3.72. Входной АМ-ПН или АМ-ПН-ОБП сигнал возводят в квадрат:

$$u_{\text{вх}}^2(t) = b^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{b^2(t)}{2} + \frac{1}{2} b^2(t) \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0).$$

Далее составляющую с частотой $2\omega_0$ отфильтровывают узкополосным полосовым фильтром. Напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ управляемого генератора также возводится в квадрат, а составляющая с частотой $2\omega_0$ отфильтровывается узкополосным полосовым фильтром. Полученные таким образом узкополосные напряжения сравниваются по фазе с помощью фазового (синхронного) детектора. Выходное низкочастотное напряжение этого детектора далее используется для подстройки фазы управляемого генератора.

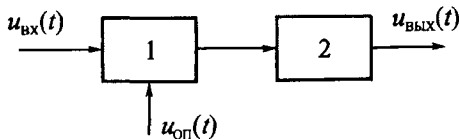


Рис. 3.71. Структурная схема когерентного детектора:

1 – умножитель; 2 – фильтр нижних частот

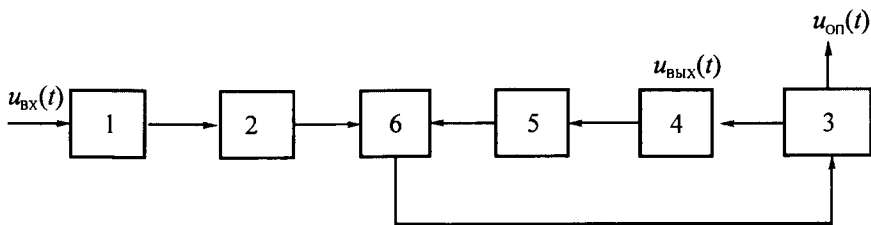


Рис. 3.72. Устройство формирования опорного сигнала при АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП:
 1, 4 – квадраторы; 2, 5 – узкополосные фильтры, настроенные на частоту $2\omega_0$;
 3 – управляемый генератор; 6 – синхронный детектор

На его выходе формируется опорный сигнал с несущей частотой ω_0 , необходимый для нормальной работы когерентного детектора.

В ряде случаев подстройку начальной фазы опорного сигнала ведут по специально передаваемому передатчиком гармоническому сигналу. Для него, иногда называемого пилот-сигналом, выделяется отдельный узкополосный канал.

При приеме двоичного АМ сигнала опорное напряжение можно получить с помощью узкополосного полосового фильтра, настроенного на несущую частоту сигнала. Это объясняется тем, что спектральная плотность этого сигнала (рис. 3.18, з) имеет спектральные составляющие на частотах $\mp\omega_0$.

Формирование опорного сигнала при двоичной ФМ производится так же, как и при АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП. Формирование опорных сигналов в схеме когерентного детектора двоичного ЧМ сигнала не отличается от формирования опорных двоичных АМ сигналов. Задача получения опорного сигнала существенно упрощается при ОФМ. Опорный сигнал в этом случае – это сигнал на входе детектора, задержанный на время, равное одному единичному (тактовому) интервалу.

Рассмотрим работу когерентного детектора, полагая, что начальная фаза опорного сигнала совпадает с начальной фазой принимаемого. Входной сигнал

$$u_{\text{вх}}(t) = b(t)\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $b(t)$ – модулирующий непрерывный или дискретный сигнал; ω_0 – несущая частота; φ – начальная фаза.

Опорный сигнал

$$u_{\text{оп}}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Сигнал на выходе умножителя

$$u_{\text{п}}(t) = b(t)\cos^2(\omega t + \varphi) = b(t)[0,5 + 0,5\cos(2\omega t + 2\varphi)].$$

Низкочастотная часть этого сигнала

$$u_{\text{вых}}(t) = b(t)/2$$

выделяется на выходе фильтра нижних частот.

Перейдем к рассмотрению особенностей когерентного детектирования некоторых видов непрерывных и дискретных сигналов.

3.10.2. Когерентное детектирование амплитудно-модулированного сигнала с одной боковой полосой

Пусть на вход когерентного детектора подается АМ-ОБП сигнал с нижней боковой полосой. Его спектральные компоненты определяются формулой (3.39) и зависят от спектральной плотности модулирующего сигнала (рис. 3.73, а). Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала приведена на рис. 3.73, б.

В умножителе входной сигнал умножается на когерентный опорный сигнал, спектральная плотность которого (рис. 3.73, в) определяется формулой (3.29).

Спектральная плотность произведения этих двух сигналов (рис. 3.73, з)

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АМ-ОБП}}(jz) \pi [\delta(\omega - z + \omega_0)] + \delta[(\omega - z - \omega_0)] dz = \\ &= \frac{1}{4} \{S^+[j(\omega + 2\omega_0)] + S^-[j(\omega)] + S^+[j(\omega)] + S^-[j(\omega - 2\omega_0)]\}, \end{aligned}$$

где

$$S^*(j\omega) = S(j\omega), \omega > 0; S^*(j\omega) = S(j\omega), \omega < 0;$$

$S^*(j\omega) + S^*(j) = S(j\omega)$, спектральная плотность модулирующего сигнала (рис. 3.73, а).

Так как высокочастотные составляющие подавляются фильтром нижних частот, то спектральная плотность сигнала на его выходе (рис. 3.73, е) определяется только теми составляющими, которые группируются около нулевой частоты.

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\Pi}(j\omega)K(j\omega) = 0,25\{S^-[j(\omega)] + S^+[j(\omega)]\} = 0,25S(j\omega),$$

где $K(j\omega)$ – коэффициент передачи фильтра нижних частот.

Спектральная плотность сигнала на выходе детектора по форме не отличается от спектральной плотности модулирующего сигнала. Поэтому модулирующий сигнал воспроизводится без искажений:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4} b(t).$$

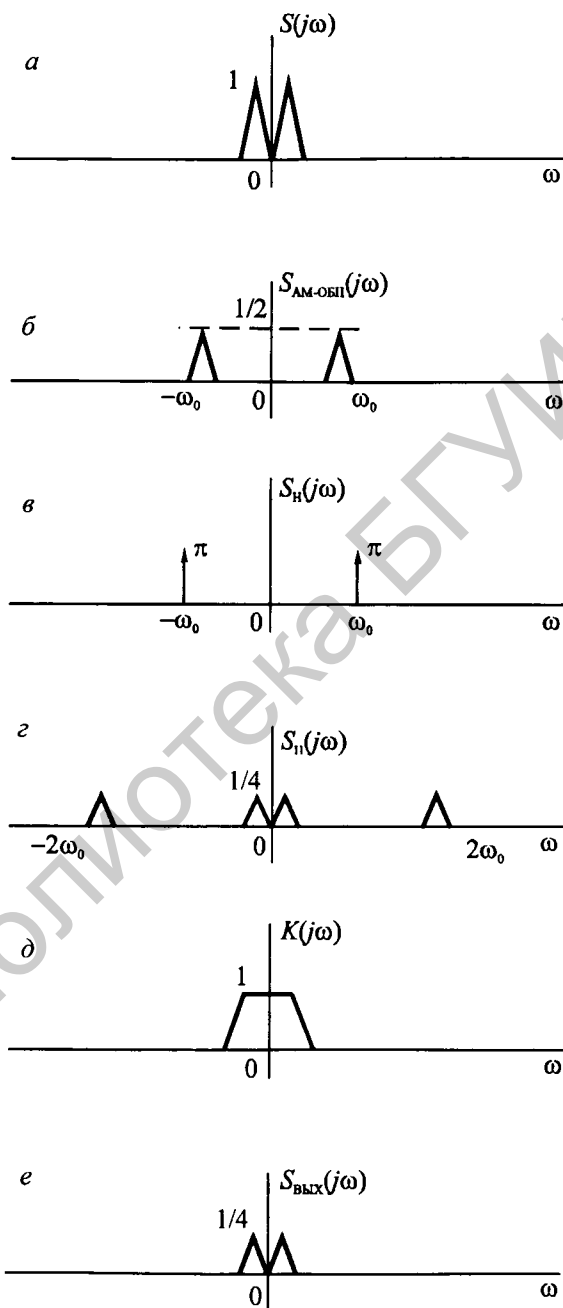


Рис. 3.73. Диаграммы, поясняющие когерентное детектирование АМ-ПН-ОБП сигнала

3.10.3. Когерентное детектирование двоичных фазо-модулированных сигналов

Пусть на входе когерентного детектора напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = Aq(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

где φ_1 – начальная фаза двоичного ФМ сигнала, случайность которой обусловлена помехами; $q(t)$ – принимаемая видеопоследовательность, определяемая информационным двоичным словом над алфавитом $-1, 1$; A – амплитуда сигнала; ω_0 – несущая частота.

Напряжение опорного колебания

$$u_{\text{оп}}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_2),$$

где φ_2 – начальная фаза.

Эта фаза почти повторяет фазу φ_1 входного напряжения при малых помехах, т. е. также является случайной. С ростом интенсивности помех ошибка в воспроизведении фазы опорного сигнала возрастает, а фаза может меняться на 180° .

Напряжение на выходе умножителя когерентного детектора равно

$$Aq(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2) = \frac{Aq(t)}{2}[\cos\Delta\varphi + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)],$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Выходное напряжение зависит от разности фаз $\Delta\varphi$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{Aq(t)}{2}\cos\Delta\varphi. \quad (3.77)$$

Если из-за присутствия помех разность фаз станет равной 180° , то в этом случае $\cos\Delta\varphi$ будет равен -1 , а $u_{\text{вых}}(t) = -Aq(t)/2$.

Тогда при приеме возникает явление так называемой «обратной работы», когда вместо единиц информационного слова выделяются нули и наоборот.

3.10.4. Детектирование сигналов с относительной фазовой модуляцией

Устранение явления «обратной работы» возможно при переходе от ФМ к ОФМ.

В этом случае информация о символе b_i информационного слова содержится в разности фаз i -го и $(i-1)$ -го радиоимпульсов принимаемого ОФМ сигнала. Символ b_i определяется в приемнике суммированием по модулю два соседних символов относительного кода по уравнению (3.55):

$$b_i = c_i + c_{i-1}.$$

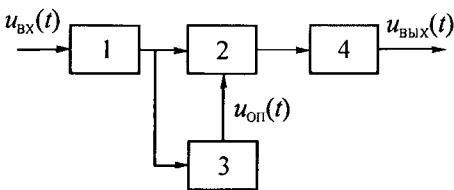


Рис. 3.74. Структурная схема когерентного детектора при приеме ОФМ сигнала методом сравнения фаз: 1 – полосовой фильтр; 2 – умножитель; 3 – линия задержки; 4 – фильтр нижних частот

Поэтому когерентность сигнала достаточно сохранить в течение двух тактовых интервалов.

На рис. 3.74 приведена одна из наиболее часто используемых схем детектора ОФМ сигнала. В качестве опорного используется входной сигнал, который задерживается на время, равное длительности тактового (единичного) интервала τ_n .

Входной и опорный сигналы умножаются и результат фильтруется.

Напряжение на входе детектора в k -м единичном интервале

$$Av[t - (k-1)\tau_n] \cos(\omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} c_k) = A \cos(\pi c_k) v[t - (k-1)\tau_n] \cos \omega_0 t,$$

где $2\pi k_{\text{ФМ}} = \pi$, $c_k \in 0, 1$, а форма сигнала $v(t)$ в k -м единичном интервале имеет прямоугольный вид.

Напряжение на выходе умножителя в k -м единичном интервале равно

$$A^2 \cos(\pi \cdot c_k) \cos(\pi \cdot c_{k-1}) v[t - (k-1)\tau_n] v[t - (k-2)\tau_n] \cos \omega_0 t \cos[\omega_0(t - \tau_n)].$$

Напряжение на выходе ФНЧ

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau_n \sum_{k=1}^n q_k q_{k-1} v[t - (k-1)\tau_n], \quad (3.78)$$

где $q_k = \cos \pi c_k$, причем $q_k, q_{k-1} = \mp 1$.

Последняя формула получена из условия, что огибающая радиоимпульсов в каждом единичном интервале имеет также прямоугольный вид. Желательно, чтобы напряжение на выходе ФНЧ было максимальным. Для этого выбором задержки, равной $\tau_n = k/f_0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, необходимо обеспечить равенство: $\cos \omega_0 \tau_n = 1$. Из уравнения $q_k = \cos \pi c_k$ следует, что символу $c_k = 0$ соответствует символ $q_k = 1$, а символу $c_k = 1$ – символ $q_k = -1$. С учетом этого найдем, что напряжению на выходе детектора на рис. 3.75, z соответствует двоичное слово $\{b_k\} = 11010$.

Для однозначного декодирования сигнала с двухкратной ОФМ (ДОФМ) необходимо, чтобы напряжение на выходе синхронного детектора соответствовало следующим значениям разности фаз: $0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$.

Детектор, схема которого приведена на рис. 3.74, адекватно откликается только на разность фаз, равную 0 или π . При разности, равной $\pi/2$ или $3\pi/2$, отклики одинаковы и равны нулю. В результате появляются неоднозначность декодирования слов модуляционного кода. Для исключения этой неоднозначности в схему синхронного детектора вводят второй канал. Схема синхронного детектора сигнала с ДОФМ приведена на рис. 3.76.

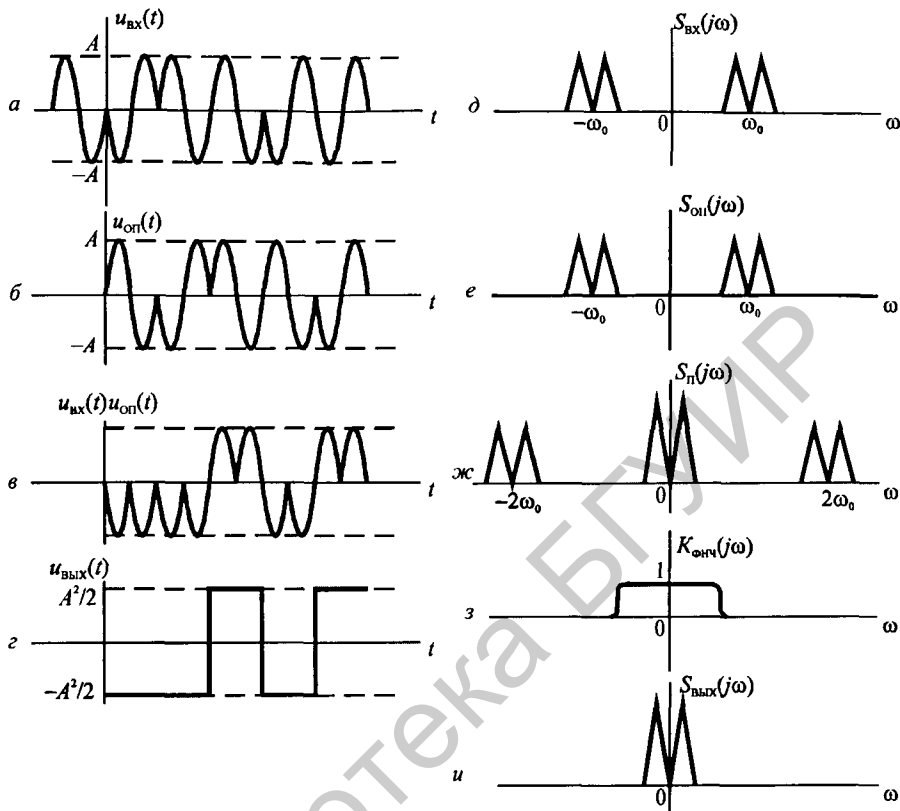


Рис. 3.75. Диаграммы, поясняющие работу когерентного детектора:

a – напряжение на входе умножителя; *б* – напряжение на выходе линии задержки; *в* – напряжение на выходе умножителя; *г* – напряжение на выходе детектора; *д* – спектральная плотность сигнала на входе детектора; *е* – спектральная плотность сигнала на выходе линии задержки; *ж* – спектральная плотность на выходе умножителя; *з* – коэффициент передачи ФНЧ; *и* – спектральная плотность сигнала на выходе детектора

Нижний канал не отличается от первого, но при подаче входного сигнала на второй вход умножителя его фаза дополнительно сдвигается на $\pi/2$.

Если входной сигнал в k -м единичном интервале равен

$$Av[t - (k - 1)2\tau_n] \cos(\omega_0 t + \varphi_k),$$

то отфильтрованные фильтрами нижних частот напряжения соответственно равны

$$\frac{A^2}{2} v[t - (k - 1)2\tau_n] \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}), \quad \frac{A^2}{2} v[t - (k - 1)2\tau_n] \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}),$$

где τ_n – длительность единичного интервала двоичной информационной последовательности.

Декодирование ведется по правилу, приведенному ниже (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Разность фаз $\Phi_k - \Phi_{k-1}$	Напряжение на выходе ФНЧ		Двоичный код на выходе декодера
	верхнего канала	нижнего канала	
0	$A^2/2$	0	00
$\pi/2$	0	$A^2/2$	01
π	$-A^2/2$	0	10
$3\pi/2$	0	$-A^2/2$	11

3.10.5. Детектирование шумоподобных сигналов

Цель детектирования та же, что и для простых сигналов – выделение модулирующего сигнала. Основным способом детектирования ШС является когерентный способ.

Детектор АМ и ФМ шумоподобного сигнала не отличается от детектора, изображенного на рис. 3.71, и является одноканальным. Детектор шумоподобного сигнала, модулированного по форме, более сложный. Он является многоканальным (рис. 3.77).

При детектировании принимаемый модулированный ШС умножается или на одну копию ШС при АМ и ФМ, или на n копий при модуляции ШС по форме. Далее результат фильтруется одним (рис. 3.71) или несколькими фильтрами нижних частот (рис. 3.77).

Напряжение на выходе ФНЧ в схеме (рис. 3.71) определяет символ 0 или 1 передаваемого информационного слова. Напомним, что символ 0 передается при АМ ШС отсутствием, а символ 1 – наличием ШС (рис. 3.78, а). Умножение опорного ШС (рис. 3.78, б) на нулевое значение принимаемого ШС (рис. 3.78, а) и фильтрация результата (рис. 3.78, в) дает символ 0, а умножение опорного ШС на неравные нулю значения принимаемого ШС и фильтрация результата дает символ 1.

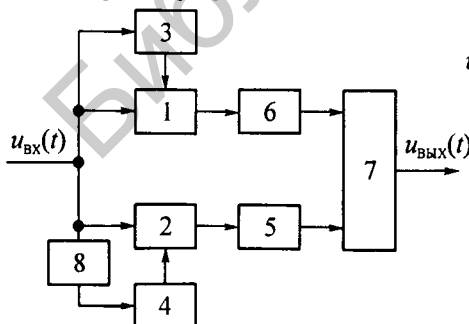


Рис. 3.76. Когерентный детектор двукратного ОФМ сигнала:

- 1, 2 – умножители; 3, 4 – линия задержки;
5, 6 – фильтры нижних частот; 7 – декодер;
8 – фазосдвигающая на $\pi/2$ цепь

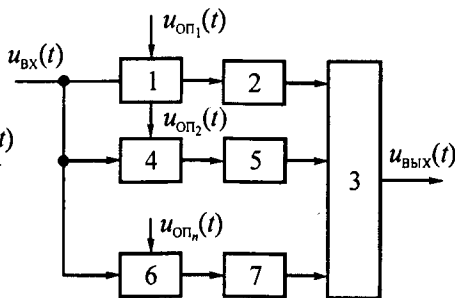


Рис. 3.77. Когерентный детектор ШС с модуляцией по форме:

- 1, 4, 6 – умножители; 2, 5, 7 – фильтры нижних частот; 3 – преобразователь номера канала в двоичный код

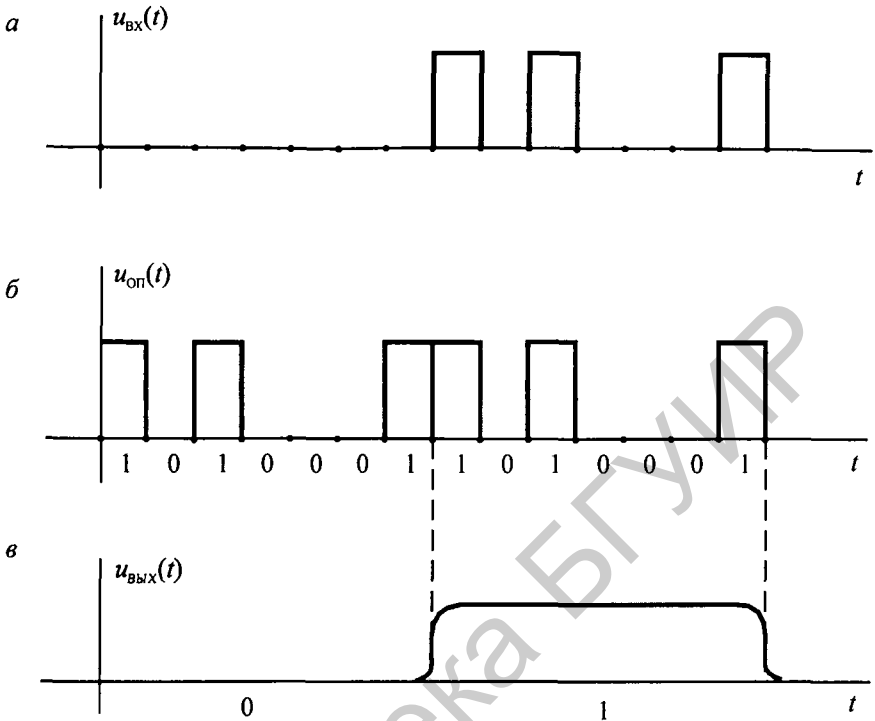


Рис. 3.78. Временные диаграммы, поясняющие детектирование АМ ШС

В детекторе (рис. 3.77) неравное нулю напряжение на выходе одного из ФНЧ (рис. 3.79, з) однозначно связано с двоичным словом передаваемого информационного блока. В передатчике от этого слова зависит форма ШС.

Поясним сказанное на конкретном примере. Пусть слово 00 связано с формой, показанной на рис. 3.79, а, слово 01 – формой, показанной на рис. 3.79, в и т. д. Остальным двум словам 10 и 11 в нашем примере будут соответствовать еще две формы ШС. Таким образом, в рассматриваемом примере длина передаваемого блока равна 2, а число форм ШС равно 4. Когерентный детектор распознает передаваемые формы. Пусть передается форма, соответствующая кодовому слову 00 (рис. 3.79, а). На первые входы умножителей всех каналов поступает принимаемый ШС. На вторые входы умножителей подаются отличающиеся друг от друга опорные ШС, причем опорный сигнал в первом умножителе совпадает по форме с принимаемым ШС. В этом случае на выходе ФНЧ первого канала будет не нулевое напряжение (рис. 3.79, з), а на выходах ФНЧ остальных каналов напряжения будут близкими к нулю.

При передаче ШС, соответствующего кодовому слову 01, на входе детектора будет присутствовать сигнал, совпадающий по форме с $u_{\text{оп}2}(t)$ (рис. 3.79, в). Тогда не равное нулю напряжение будет на выходе второго ФНЧ, а на выходах остальных ФНЧ напряжения будут близки к нулю и т. д.

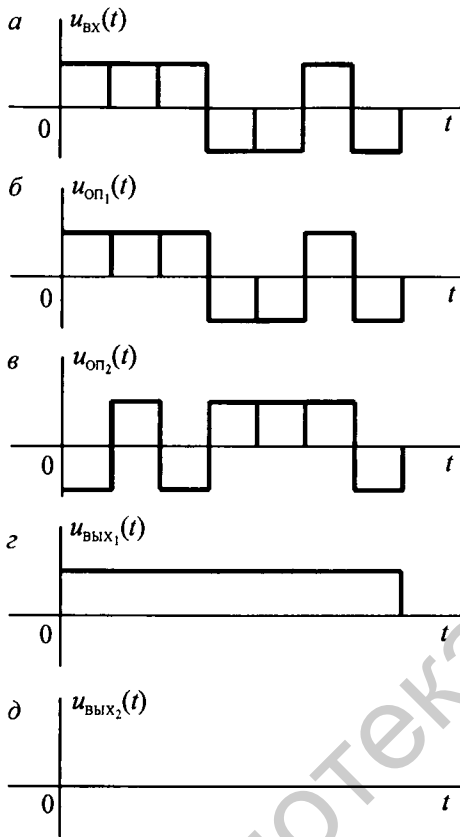


Рис. 3.79. Временные диаграммы, поясняющие детектирование модулированных по форме ШС

называются соответственно *устройствами поиска и слежения по времени задержки ШС и по несущей частоте*. Устройства тактовой синхронизации, поиска и слежения входят в состав блока формирования опорного сигнала.

3.10.6. Особенности реализации операции умножения в устройствах формирования и преобразования сигналов

Основой для построения большинства умножителей аналоговых сигналов служит нелинейный элемент, характеристика которого определяется полиномом (3.16).

Пусть число удерживаемых членов полинома не больше трех, а входной сигнал равен сумме

$$u = a + b.$$

Преобразованием номера канала, на выходе которого наблюдается не равное нулю напряжение, получают двоичное слово передаваемого информационно-го блока.

Когерентное детектирование шумоподобных радиосигналов принципиально не отличается от рассмотренного выше детектирования на видеочастоте, но его реализация становится более сложной из-за необходимости подстройки большего числа параметров опорных ШС под параметры принимаемого сигнала. Такими параметрами являются: тактовая частота, задержка опорных сигналов, несущая частота.

Устройство, с помощью которого обеспечивается совпадение тактовых частот принимаемого и опорного сигналов, называется *устройством тактовой синхронизации*.

Устройства, обеспечивающие совпадение сигналов во времени и по несущей частоте,

Тогда реакция нелинейного элемента на этот входной сигнал будет равна

$$\begin{aligned} L(a+b) &= c_0 + c_1(a+b) + c_2(a+b)^2 + \dots = \\ &= c_0 + c_1a + c_1b + c_2a^2 + 2c_2ab + c_2b^2 + \dots \end{aligned}$$

На выходе нелинейного элемента, кроме полезной составляющей $2c_2ab$, содержатся также ненужные остальные компоненты. Это создает определенные трудности при построении модуляторов и детекторов.

Устранить часть ненужных компонент можно, если применить еще один оператор:

$$L(a-b) = c_0 + c_1(a-b) + c_2(a-b)^2 = c_0 + c_1a - c_1b + c_2a^2 - 2c_2ab + c_2b^2.$$

Вычитая из выражения $L(a+b)$ выражение $L(a-b)$, получим

$$L(a+b) - L(a-b) = 2c_1b + 4c_2ab.$$

Освободиться от первого слагаемого в этой формуле можно с помощью фильтра.

Принципиальная схема модулятора, в котором реализуются приведенные выше преобразования, приведена на рис. 3.80. Эту схему используют для получения АМ-ПН и АМ-ОБП сигналов.

В качестве умножителя можно использовать и ключевой умножитель.

Его схема приведена на рис. 3.81. Когда разность потенциалов между точками ν , z положительная (действует положительная полуволна переменного напряжения), диоды проводят токи i_1 , i_2 по направлениям, которые показаны стрелками.

Сопротивление R резистора во много раз больше сопротивления открытого диода, поэтому ответвлением тока через резисторы можно пренебречь. Если сопротивления диодов выбраны одинаковыми, то потенциал в точке a схемы равен потенциалу в точке b . Это соответствует замыканию ключа в эквивалентной схеме, показанной на рис. 3.82. Источник напряжения $S(t)$ нагружается на сопротивление R , а напряжение $S_{\text{вых}}(t)$ становится равным нулю.

Когда между точками ν , z действует отрицательная полуволна переменного напряжения, токи i_1 , i_2 становятся равными нулю. Ключ в эквивалентной схеме замыкается. Напряжение на выходе схемы (см. рис. 3.82) определяется входным напряжением.

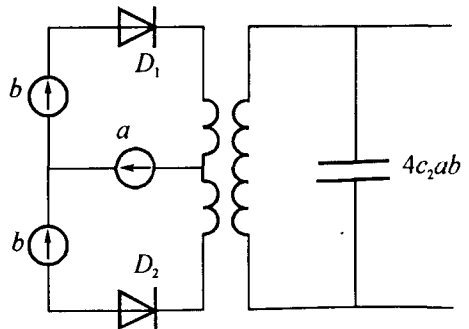


Рис. 3.80. Принципиальная схема модулятора

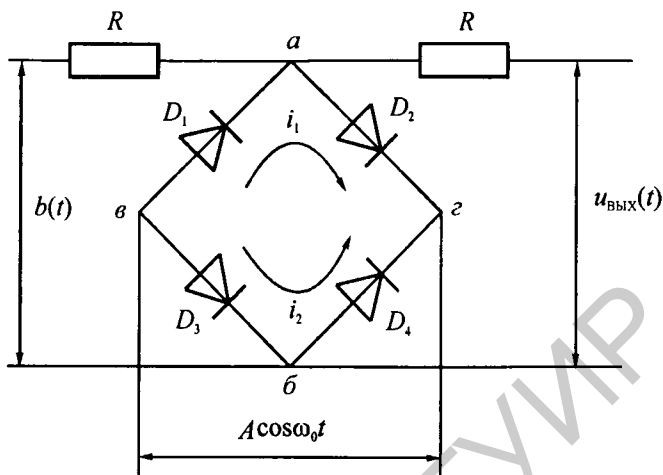


Рис. 3.81. Принципиальная схема ключевого умножителя

Работа ключевого умножителя поясняется диаграммами во временной и частотной областях (рис. 3.83).

Напряжение на выходе ключа является откликом параметрической цепи на входной сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = b(t)K(t),$$

где $K(t)$ – коэффициент передачи параметрической цепи (ключа).

Поэтому спектральную плотность на выходе $S_{\text{вых}}(j\omega)$ можно найти по формуле свертки спектральных плотностей $S(j\omega)$, $S_K(j\omega)$. Спектральная плотность на выходе ключа $S_{\text{вых}}(j\omega)$ приведена на рис. 3.83, ж. Она содержит спектральные компоненты, определяющие АМ-ПН сигнал. Эти компоненты группируются около частот $\mp\omega_0$, где ω_0 – частота управляющего сигнала.

Выделяя эти спектральные компоненты из $S_{\text{вых}}(j\omega)$ полосовым фильтром, можно получить АМ-ПН сигнал. Схема модулятора приведена

на рис. 3.84. Кроме управляемого ключа она содержит резонансный контур, настроенный на частоту ω_0 .

Если управляемый ключ соединить с фильтром нижних частот (например, RC -цепью) в соответствии со схемой на рис. 3.85, то получим схему синхронного детектора АМ-ПН сигнала.

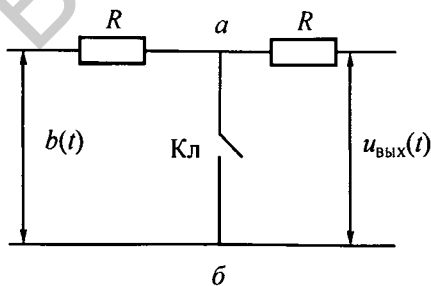


Рис. 3.82. Эквивалентная схема ключевого умножителя

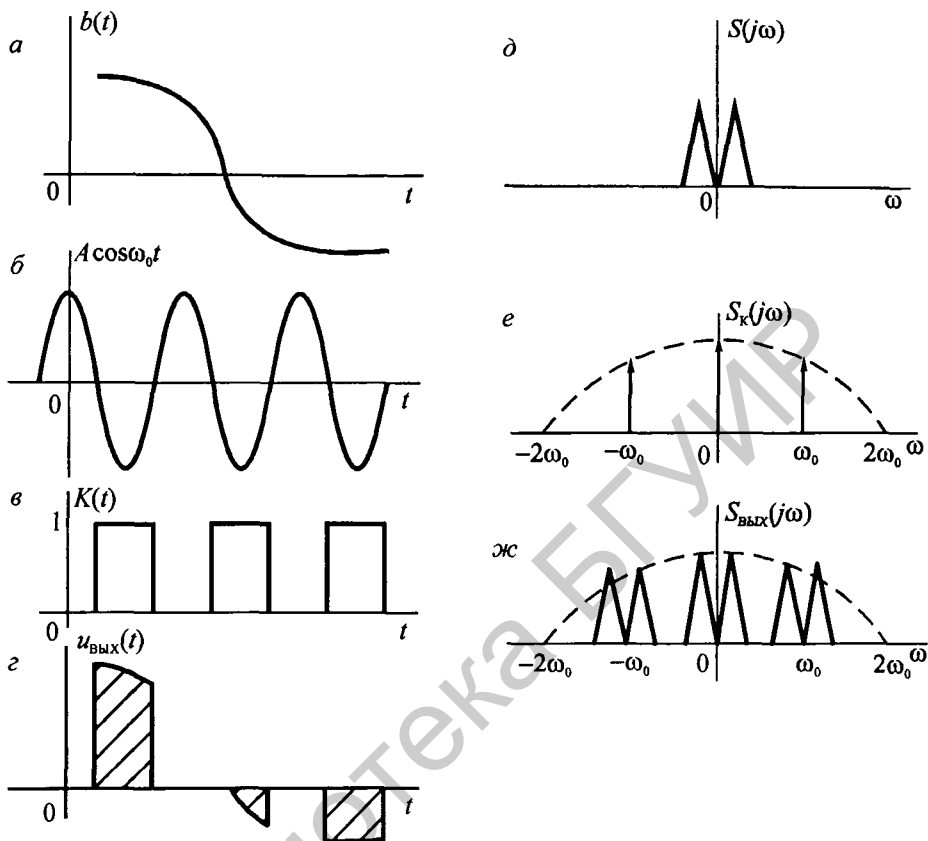


Рис. 3.83. Диаграммы, поясняющие работу ключевого умножителя

3.11. ПРИНЦИПЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

3.11.1. Цифровые и дискретные фильтры

Цифровой обработкой сигналов (ЦОС) называется процесс выполнения по заданной программе вычислительных операций (суммирования, умножения и т. д.) над числами, однозначно отображающих эти сигналы.

Преобразования ведутся комплексно, с применением аппаратных и программных средств.

При ЦОС появляется возможность выполнения операций, которые нельзя реализовать традиционными методами. Например, если требуется длительное хранение исходных или промежуточных данных или изменение алгоритмов обработки сигналов путем изменения управляющей программы и т. д.

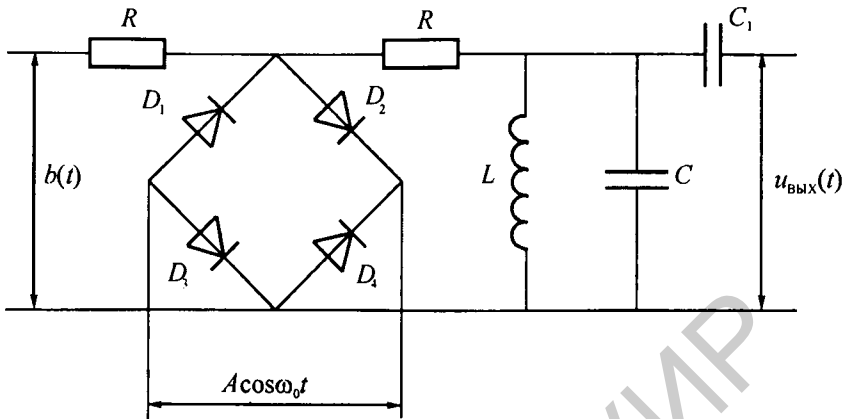


Рис. 3.84. Принципиальная схема модулятора АМ-ПН сигнала

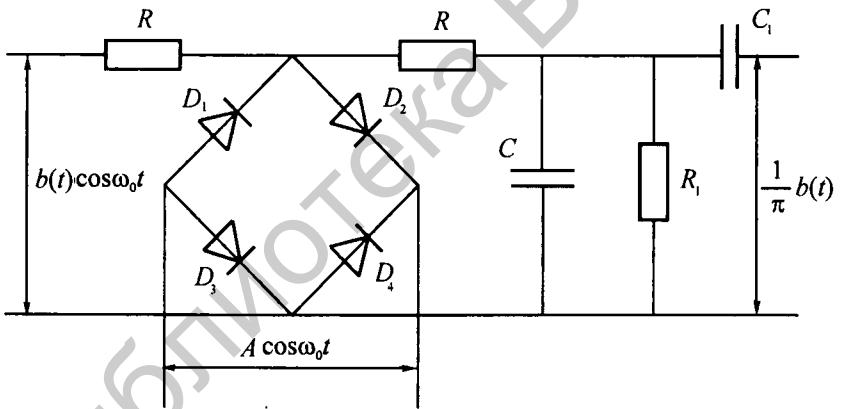


Рис. 3.85. Принципиальная схема синхронного детектора АМ-ПН сигнала

Примерами использования ЦОС в системах связи являются: обработка звуковых сигналов, включая анализ, распознавание и синтез речи; обработка изображений с целью их улучшения; сжатие информации для ее передачи и хранения; распознавание образов.

Упрощенная структурная схема ЦОС непрерывных сигналов приведена на рис. 3.86. Непрерывный входной сигнал $u_{вх}(t)$ поступает на АЦП, который преобразует этот сигнал в числа, обычно записываемые в двоичной системе счисления.

Над двоичными числами, хранящимися в устройстве памяти, и числами, поступающими с АЦП, производятся арифметические операции

(умножение, сложение, сдвиг во времени) в соответствии с управляющей программой, которая также хранится в устройстве памяти.

В процессе вычислений между арифметическим устройством и устройством памяти происходит обмен данными. В соответствующие моменты времени, которые определяются генератором импульсов синхронизации, цифровой процессор выдает на выход вычисленную последовательность двоичных чисел.

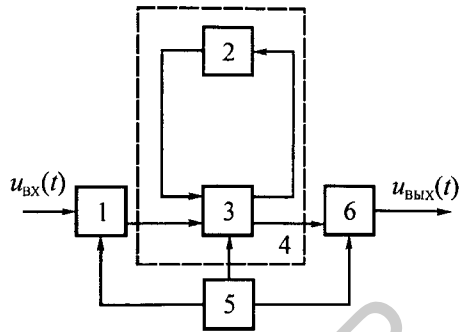


Рис. 3.86. Структурная схема ЦОС:

- 1 – АЦП; 2 – устройство памяти;
3 – арифметическое устройство; 4 – процессор;
5 – генератор импульсов синхронизации;
6 – ЦАП

При необходимости эта последовательность преобразуется в непрерывный сигнал с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП).

Цифровой сигнал на выходе АЦП является последовательностью двоичных чисел, выдаваемых через равные интервалы времени. Эти числа соответствуют коэффициентам обобщенного ряда (2.2) Фурье, которые, в свою очередь, определяются входным непрерывным сигналом и выбранным набором базисных функций (базисом).

В случае когда в качестве базисных функций используются функции вида $(\sin x)/x$, а спектр непрерывной функции ограничен верхней граничной частотой F_v , коэффициенты ряда (2.2) определяются выборочными значениями непрерывной функции.

Кроме цифровых фильтров, обрабатывающих по заданным программам чисто цифровые сигналы, существуют и дискретные фильтры, на входы которых подаются неквантованные выборки сигналов.

Преобразование этих выборок может производиться по тем же формулам, что и для цифровых сигналов (см. п. 3.11.6).

3.11.2. Основы дискретизации непрерывных сигналов

Задача дискретизации формулируется следующим образом. Для заданного оператора преобразования (коэффициента передачи) и заданных сигналов на входах устройства дискретизации требуется найти сигнал на его выходе. Целью анализа является установление влияния параметров сигналов на качество передачи информации.

Возможными вариантами устройств дискретизации могут быть управляемый ключ, схема которого приведена на рис. 2.12, а также устройство умножения двух сигналов.

Структурная схема на рис. 2.12 содержит управляемый весьма короткими видеопульсами ключ с двумя входами. На сигнальный вход поступает

преобразуемый аналоговый сигнал $u(t)$, а на управляющий вход – короткие импульсы. Ключ замкнут, если на управляющем входе присутствует импульс, и разомкнут, если импульс отсутствует. Поэтому с поступлением на управляющий вход импульсов на выходе ключа появляются значения аналогового сигнала в текущие моменты времени. Управляемый ключ является линейной параметрической цепью с коэффициентом передачи:

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - k\Delta), \quad (3.79)$$

где $v(t)$ – видеоимпульс с единичной амплитудой и заданной длительностью; Δ – интервал дискретизации.

Сигнал на выходе параметрической цепи равен произведению входного сигнала на коэффициент передачи:

$$u_{\text{вых}}(t) = u(t)\Phi(t) = u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - k\Delta).$$

На выходе ключа формируется амплитудно-модулированный сигнал первого рода (АИМ-1). Спектральная плотность этого сигнала определяется сверткой спектральных плотностей входного сигнала и коэффициента передачи ключа:

$$S_{\text{АИМ-1}}(j\omega) = \frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\omega_1\tau_{\text{и}}/2}{k\omega_1\tau_{\text{и}}/2} S[j(\omega - k\omega_1)], \quad (3.80)$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность входного сигнала.

Спектральная плотность выходного сигнала определяется периодически повторяющейся спектральной плотностью входного сигнала и значениями функции $(\sin x)/x$.

Ее значения около нулевой частоты (см. рис. 3.87, з) определяют восстановленный сигнал в приемнике. Используя обратное преобразование Фурье, по спектральной плотности на рис. 3.87, з находим восстановленный сигнал:

$$u^*(t) = \frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Из полученной формулы следует, что этот сигнал повторяет сигнал на входе ключа с коэффициентом $\tau_{\text{и}}/\Delta$.

Из АИМ-1 (сигнала на выходе управляемого ключа) можно сформировать амплитудно-модулированный сигнал второго рода (АИМ-2). Этот сигнал отличается тем, что амплитуды его импульсов равны значениям входного сигнала в отсчетные моменты времени. Длительности этих импульсов равны времени замыкания ключа.

Вычислим спектральную плотность сигнала АИМ-2.

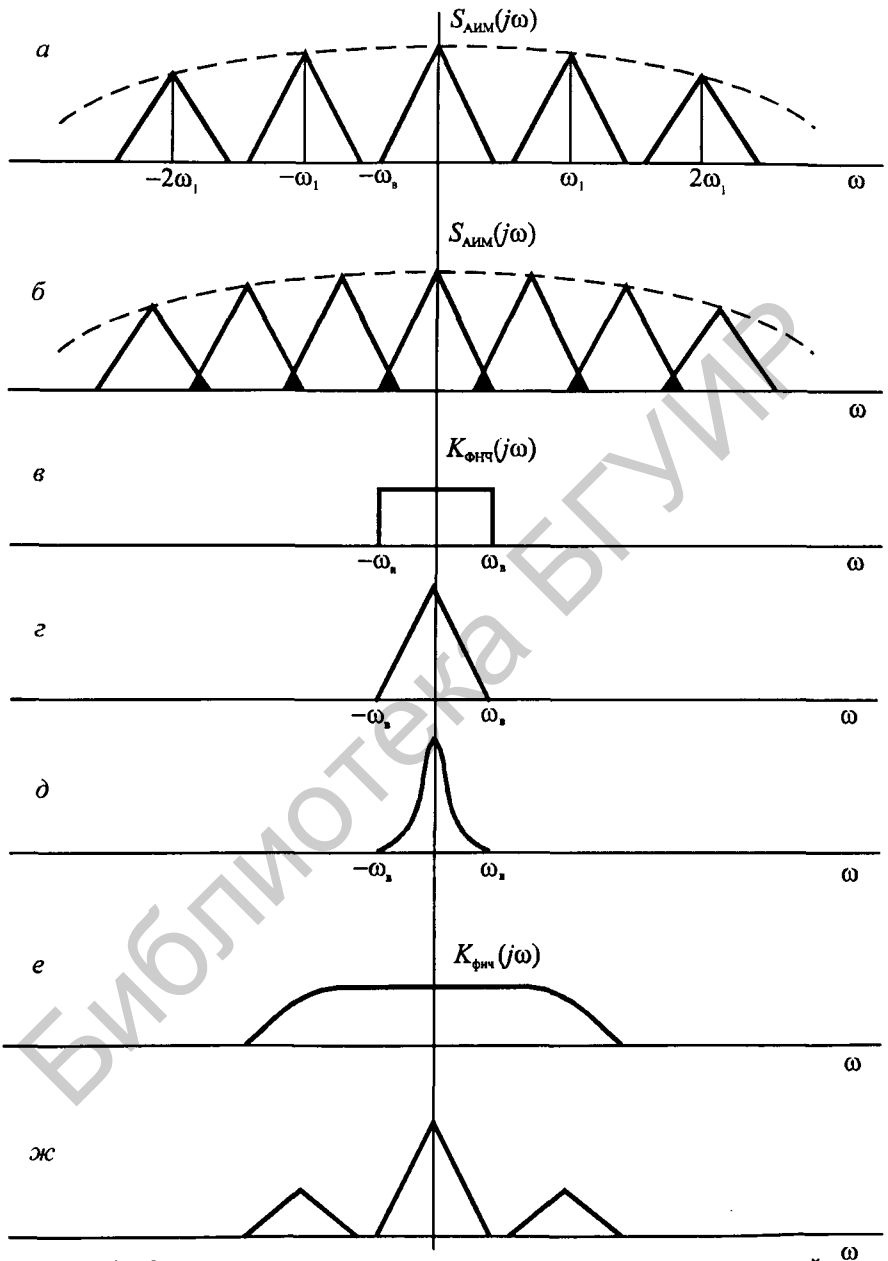


Рис. 3.87. Спектральные характеристики модулированных последовательностей: *а* – АИМ-1, интервал дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова; *б* – АИМ-1, большой интервал дискретизации; *в* – коэффициент передачи идеального ФНЧ; *г* – спектральная плотность на выходе идеального ФНЧ при АИМ-1; *д* – спектральная плотность на выходе идеального ФНЧ при АИМ-2; *е* – коэффициент передачи неидеального ФНЧ; *ж* – спектральная плотность на выходе неидеального ФНЧ

С этой целью исследуем вначале спектральные характеристики на выходе устройства дискретизации, содержащего вместо ключа умножитель. На его сигнальный вход поступает сигнал $u(t)$, а на управляющий вход – сумма дельта-импульсов. Эта сумма называется *дискретизирующей последовательностью*.

При управлении ключом дельта-импульсами сигнал на выходе устройства дискретизации равен сумме отсчетных значений сигнала на его входе, а при управлении умножителем равен сумме произведений дельта-функций на отсчетные значения сигнала на входе.

Произведение произвольной функции $u(t)$ и дельта-функции в момент времени $t = n\Delta$ равно произведению отсчетного значения (выборки) функции $u(n\Delta)$ и этой дельта-функции. Поэтому произведение произвольной функции $u(t)$ и дискретизирующей последовательности равно сумме произведений отсчетных значений функции $u(t)$ и дельта-функций:

$$\varphi_{\Delta}(t) = u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \delta(t - n\Delta). \quad (3.81)$$

Вычислим спектральную плотность функций, определяющих левую и правую части равенства.

Запишем дискретизирующую функцию в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta} e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t},$$

где

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{\Delta}, \quad \omega_1 \Delta = 2\pi.$$

Спектральная плотность левой части равенства (3.81) равна

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega - k\omega_1)t} dt = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_1)], \end{aligned}$$

где $S[j\omega]$ – спектральная плотность функции (аналогового сигнала) $u(t)$.

Спектральная плотность правой части равенства (3.81) равна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) e^{-j\omega n\Delta}.$$

Приравнявая выражения для спектральных плотностей, получим уравнение Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_1)]. \quad (3.82)$$

Это уравнение используем при вычислении спектральной плотности АИМ-2 последовательности импульсов.

Вычислим спектральную плотность n -го АИМ-2 импульса:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} u(n\Delta)v(t-n\Delta)e^{-j\omega t} dt = u(n\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} v(t-n\Delta)e^{-j\omega t} dt = \\ & = u(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} v(x)e^{-j\omega x} dx = u(n\Delta)S_0(j\omega)e^{-j\omega n\Delta}, \end{aligned}$$

где $S_0(j\omega)$ – спектральная плотность импульса $v(t)$ (с амплитудой, равной 1 и длительностью τ_n), расположенного симметрично относительно вертикальной оси.

Спектральная плотность суммы импульсов равна сумме спектральных плотностей слагаемых:

$$S_{\text{АИМ-2}}(j\omega) = S_0(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta)e^{-j\omega k\Delta}.$$

Принимая во внимание равенство Пуассона (3.82) и вычисляя спектральную плотность импульса $v(t)$, получим выражение для спектральной плотности сигнала АИМ-2.

$$S_{\text{АИМ-2}}(j\omega) = \frac{\tau_n}{\Delta} \frac{\sin \omega \tau_n / 2}{\omega \tau_n / 2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - n\omega_1)], \quad (3.83)$$

где $\omega_1 = 2\pi/\Delta$.

Спектральная плотность сигнала АИМ-2 определяется периодически повторяющейся спектральной плотностью сигнала на входе устройства дискретизации умноженной на функцию $(\sin x)/x$. Период равен $\omega_1 = 2\pi/\Delta$ и определяется интервалом дискретизации. Чем больше этот интервал, тем меньше значение периода и тем большее число повторений спектральной плотности входного сигнала в заданном частотном диапазоне. При неверном выборе интервала дискретизации (см. рис. 3.87, б) спектральные плотности около частот (например $\omega = 0$, $\omega = \mp\omega_1$) перекрываются. В этом случае при восстановлении исходного непрерывного колебания с помощью ФНЧ возникнут искажения.

Чтобы избежать их, нужно интервал дискретизации выбрать так, чтобы выполнялось равенство $2\omega_n = \omega_1$. Из равенства находим значение интервала дискретизации $\Delta = 1/2F_n$, которое определяется теоремой Котельникова.

Рассмотрим влияние множителя $(\sin x)/x$ на качество передаваемого сигнала. Значения спектральной плотности сигнала АИМ-2 последовательности

вблизи частот $\mp k\omega_1$ в отличие от АИМ-1 умножаются на текущие значения функции $(\sin x)/x$. В результате отфильтрованные ФНЧ спектральные составляющие АИМ-1 сигнала (см. рис. 3.87, *з*) и АИМ-2 сигнала (см. рис. 3.87, *д*) отличаются, что и приводит к появлению искажений восстановленного сигнала. На рис. 3.87, *д* показана искаженная спектральная плотность.

Выражение этой плотности находится из формулы (3.83) для значения $k = 0$. По этой плотности, используя обратное преобразование Фурье, находим восстановленный сигнал:

$$u^*(t) = \frac{\tau_n}{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \tau_n}{\omega \tau_n} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Из полученной формулы следует, что этот сигнал в отличие от АИМ-1 не повторяет сигнал на входе ключа. Погрешность обусловлена алгоритмом формирования, при котором амплитудные значения импульсов АИМ-2 последовательности не повторяют значений входного сигнала, а равны его отсчетным значениям в дискретные моменты времени. В этом случае восстановленный сигнал определяется произведением спектральной плотности сигнала на входе устройства дискретизации и функции $(\sin x)/x$, влияние которой на качество восстановленного сигнала тем больше, чем больше длительность управляющих импульсов τ_n . При уменьшении этой длительности до нулевого значения функция $(\sin x)/x$ стремится к единице и пунктирная линия стремится к прямой, параллельной оси частот (см. рис. 3.87, *а*). Спектральные плотности сигналов АИМ-1 и АИМ-2 становятся равными.

Искажения возникают и за счет амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) ФНЧ. Реальные АЧХ, в отличие от идеальной, имеют плавные переходы из зоны «прозрачности» в зону «непрозрачности» фильтра (см. рис. 3.87, *е*). Использование такого фильтра приводит к тому, что в полосу пропускания попадают соседние спектральные составляющие, искажающие восстановленный сигнал (см. рис. 3.87, *ж*).

Из приведенного анализа следуют определенные рекомендации по уменьшению погрешностей при дискретизации аналогового сигнала:

- интервал дискретизации должен выбираться так, чтобы выполнялось условие $\Delta = 1/2F_n$. Если интервал дискретизации выбран меньше этого значения, то и в этом случае не происходит наложения спектральных составляющих и восстановление сигнала происходит без искажений (см. рис. 3.87);
- но если интервал дискретизации выбран больше Δ , то при восстановлении сигнала возникают искажения из-за указанного выше наложения. На рис. 3.87, *б* перекрывающиеся спектральные составляющие заштрихованы;
- длительность управляющих импульсов при АИМ-2 должна быть достаточно малой (для того чтобы исключить влияние изменения функции $(\sin x)/x$ вблизи нулевой частоты);

– ФНЧ должна иметь такой коэффициент передачи, при котором влияние соседних спектральных составляющих на восстановленный сигнал исключается.

3.11.3. Дискретный ряд Фурье и дискретное преобразование Фурье

При изучении дискретных процессов рассматриваются последовательности величин $u(n\Delta)$ в дискретные моменты времени $t = n\Delta$, где Δ – интервал дискретизации. При заданном Δ дискретный момент времени определяется значением n , поэтому обозначение $u(n\Delta)$ можно заменить на $u(n)$.

Рассмотрим случай, когда на входе дискретного линейного фильтра присутствует последовательность $u(n) = e^{j\omega n}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$. Отклик этого фильтра найдем по аналогии с откликом линейного аналогового фильтра на сигнал $u(t) = e^{j\omega t}$, используя свертку:

$$u_{\text{вых}}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = K(j\omega)e^{j\omega n},$$

где $h(k)$ – импульсная характеристика; $K(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$ – коэффициент передачи дискретного линейного фильтра.

Формула, определяющая коэффициент передачи, является прямым дискретным преобразованием. Оно называется *дискретным рядом Фурье*. Коэффициентами ряда являются значения импульсной характеристики, которые выражаются через значения коэффициента передачи обратным дискретным преобразованием:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(j\omega)e^{j\omega k} d\omega.$$

Пределы интегрирования определяются периодом второго сомножителя, который равен 2π . Убедимся в этом. Для этого к аргументу второго сомножителя добавим 2π , а затем сделаем простые преобразования:

$$e^{j(\omega k + 2\pi)} = e^{j\omega k} e^{j2\pi} = e^{j\omega k} [\cos 2\pi + j \sin 2\pi] = e^{j\omega k}.$$

Наряду с дискретным рядом Фурье при анализе дискретных систем связи используют также и дискретное преобразование Фурье. Дискретное преобразование Фурье является аналогом ряда Фурье в комплексной форме [см. формулу(2.6)]. Этот ряд определяет периодическую функцию, для которой выполняется равенство:

$$u(t+T) = (1/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1(t+T)} = (1/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} e^{jk\omega_1 T} = u(t),$$

так как $e^{jk\omega_1 T} = 1$.

Найдем отсчетные значения сигнала $u(t)$: $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$, разделив период T сигнала на части, равные интервалу дискретизации Δ . Заменим в преобразовании Фурье (2.7) текущее время на дискретное так, что $t = n\Delta, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, а период $T = N\Delta$, где N – число отсчетных значений в интервале T . Приращение dt изменим на интервал дискретизации Δ . В связи с переходом к дискретным значениям интеграл заменим суммой. Обозначим выражение, входящее в ряд Фурье в комплексной форме, $(1/2)\alpha(jk\omega_1)$ буквой C_k . С учетом замен и обозначений запишем выражение для спектрального коэффициента в виде:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2} \alpha(jk\omega_1) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N\Delta} kn\Delta} \Delta = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Приведенная дискретная функция имеет период, равный N :

$$C_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n} = C_k, \text{ так как } e^{-j \frac{2\pi}{N} Nn} = 1.$$

Используя аналогичные замены, а также то, что функция C_k имеет период, равный N , получим выражение для отсчетных значений функции:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (3.85)$$

где C_k – коэффициенты этого ряда.

Формулы (3.84), (3.85) называются *прямым и обратным дискретными преобразованиями Фурье* (ДПФ) и являются важными математическими моделями периодических дискретных сигналов.

Отметим основные свойства ДПФ.

1. ДПФ есть линейное преобразование, т. е. сумме сигналов отвечает сумма ДПФ.

2. Число различных спектральных коэффициентов равно числу N отсчетов за период. При $k = N$ $C_N = C_0$.

3. Коэффициент C_0 является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n). \quad (3.86)$$

4. Если N – четное и $k = N/2$, то

$$C_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) (-1)^n.$$

5. Коэффициент C_{N-k} равен:

$$\begin{aligned} C_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = C_k^*, \end{aligned} \quad (3.87)$$

так как $e^{-j2\pi n} = 1$.

Пример 3.9. Дискретный сигнал задан шестью равноотстоящими отсчетами:

$$\{u(n)\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}.$$

Найти коэффициенты C_0, C_1 ДПФ этого сигнала.

Решение. Используя формулу (3.84), вычисляем:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{6} [u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5)] = 3/6, \\ C_1 &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 u(n) e^{-j2\pi n/6} = \\ &= \frac{1}{6} [u(0) + u(1)e^{-j2\pi/6} + u(2)e^{-j2\pi \cdot 2/6}] = \\ &= \frac{1}{6} [1 + e^{-j\pi/3} + e^{-j2\pi/3}]. \end{aligned}$$

Как видно из формул (3.84), (3.85), для вычисления ДПФ или ОДПФ требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами.

Если N велико (порядка тысячи и более), то вычисления в реальном масштабе времени становятся затруднительными из-за ограниченного быстродействия вычислительных средств. Решить возникшую проблему можно, используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), который позволяет существенно сократить число вычислительных операций.

3.11.4. Быстрое преобразование Фурье

Существует несколько различных алгоритмов БПФ. Наиболее простым из них является алгоритм, в котором используется число отсчетов N выражается степенью числа 2.

Тогда входная последовательность выборочных значений может быть разбита на две. Первая содержит отсчеты с четными, а вторая – с нечетными номерами. Эта операция называется прореживанием по времени.

Запишем некоторый коэффициент ДПФ, используя четные и нечетные номера входной последовательности:

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[u(2n)e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} + u(2n+1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2n+1)} \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} u(2n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N/2}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N} \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} u(2n+1)e^{-j\frac{2\pi kn}{N/2}} \right] = \\
 &= C_{\text{кчт}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} C_{\text{кнч}}, \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

где $u(2n)$, $u(2n + 1)$ – значения входной последовательности с четными и нечетными номерами соответственно,

$$\begin{aligned}
 C_{\text{кчт}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(2n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N/2}}, \\
 C_{\text{кнч}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(2n+1)e^{-j\frac{2\pi kn}{N/2}}, \tag{3.89}
 \end{aligned}$$

а числа k принимают значения от 0 до $N/2 - 1$.

Коэффициенты $C_{\text{кчт}}$, $C_{\text{кнч}}$ в два раза меньше коэффициентов ДПФ, а их период равен $N/2$, т. е. $C_{\text{кчт}} = C_{k+N/2\text{чт}}$, $C_{\text{кнч}} = C_{k+N/2\text{нч}}$.

Множитель $e^{-j2\pi k/N}$, входящий в (3.88) при всех $k \geq N/2$, запишем в виде:

$$e^{-j2\pi[(N/2)+k]/N} = e^{-j(2\pi/N)N/2} e^{-j2\pi k/N} = -e^{-j2\pi k/N}.$$

Следовательно, коэффициенты ДПФ при всех $k \geq N/2$

$$C_{\frac{N}{2}+k} = C_{\text{кчт}} - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} C_{\text{кнч}}. \tag{3.90}$$

Вычисления ведут по итерационному принципу по формулам (3.88) и (3.90). Последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами далее вновь разбивают на две части и т. д.

Этот процесс наглядно иллюстрируется ниже.

Пример 3.10. Для заданного числа выборочных значений сигнала $N = 8$ построить сигнальный граф, отражающий процесс вычисления коэффициентов ДПФ. Вычислить число сложений (вычитаний), а также число умножений.

Решение. Разбиваем входную последовательность выборочных значений на две: четную $\{u(0), u(2), u(4), u(6)\}$ и нечетную $\{u(1), u(3), u(5), u(7)\}$.

Применим к каждой из них ДПФ. В результате вычислим коэффициенты $C_{0чт}$, $C_{1чт}$, $C_{2чт}$, $C_{3чт}$ и $C_{0нч}$, $C_{1нч}$, $C_{2нч}$, $C_{3нч}$.

Например,

$$C_{0чт} = 1/8[u(0) + u(2) + u(4) + u(6)],$$

$$C_{0нч} = 1/8[u(1) + u(3) + u(5) + u(7)].$$

По этим коэффициентам, согласно (3.88), (3.90), вычисляем:

$$C_0 = C_{0чт} + C_{0нч} = 1/8[u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) + u(6) + u(7)].$$

$$C_4 = C_{0чт} - C_{0нч} = 1/8 [u(0) - u(1) + u(2) - u(3) + u(4) - u(5) + u(6) - u(7)].$$

Аналогично вычисляем остальные значения коэффициентов. Этот этап вычислений показан на рис. 3.88. Стрелками условно отображены операции

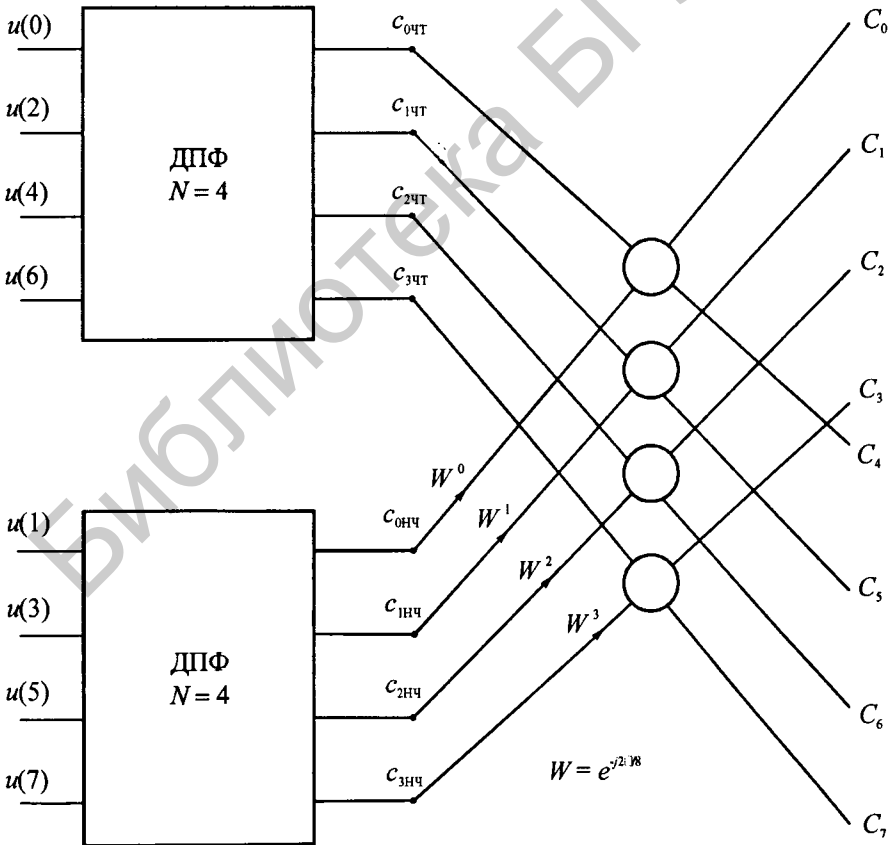


Рис. 3.88. Вычисление коэффициентов на первом этапе БПФ

умножения коэффициентов $C_{кнч}$ на W^k , где $W = e^{-j2\pi/N}$, а кругами – операции сложения (вычитания). Линия, отходящая вверх, соответствует сумме, а вниз – разности. Для вычисления значений $C_{кчт}$ и $C_{кнч}$ выполняются два ДПФ, но число исходных выборочных значений выбирается в два раза меньше. В рассматриваемом примере это число равно 4.

Процесс дальнейших вычислений показан на рис. 3.89. Четные выборки используются для вычислений по формулам (3.88), (3.90) значений $C_{кчт}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

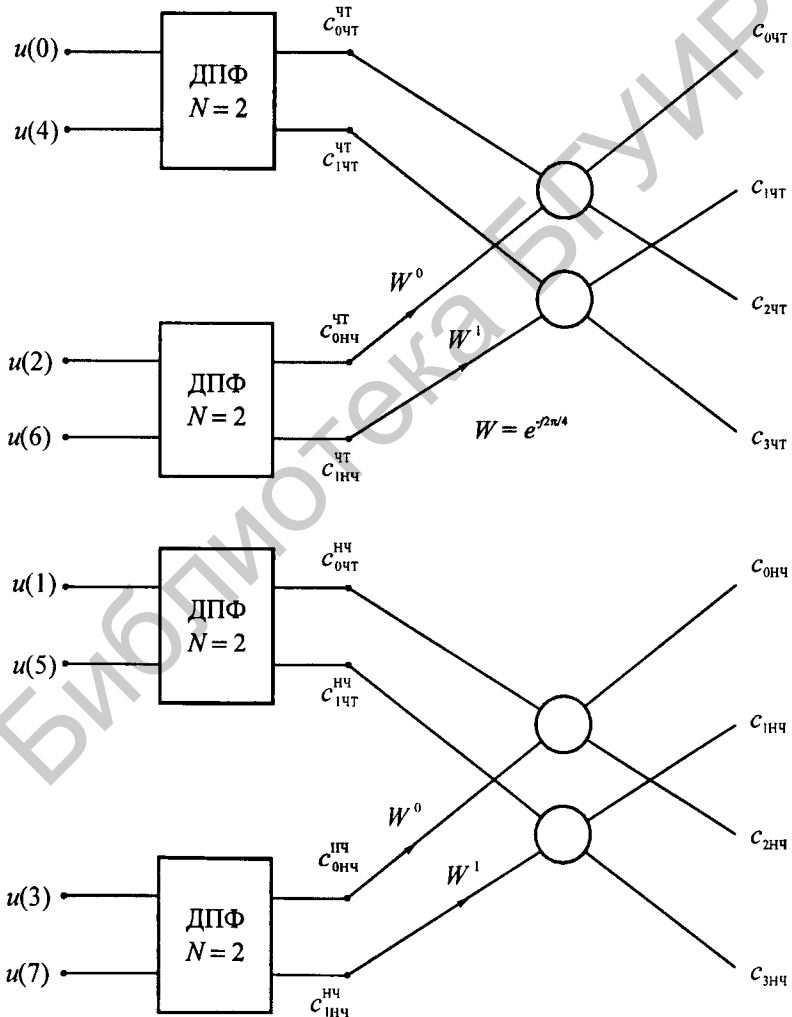


Рис. 3.89. Вычисление коэффициентов на втором этапе БПФ

Например,

$$C_{0\text{чт}} = C_{0\text{чт}}^{\text{чт}} + C_{0\text{нч}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(0) + u(4)] + \frac{1}{8}[u(2) + u(6)].$$

$$C_{2\text{чт}} = C_{0\text{чт}}^{\text{чт}} - C_{0\text{нч}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(0) + u(4)] - \frac{1}{8}[u(2) + u(6)].$$

По нечетным выборкам вычисляются значения $C_{\text{нч}^k}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Например,

$$C_{0\text{нч}} = C_{0\text{чт}}^{\text{нч}} + C_{0\text{нч}}^{\text{нч}} = \frac{1}{8}[u(1) + u(5)] + \frac{1}{8}[u(3) + u(7)].$$

$$C_{2\text{нч}} = C_{0\text{чт}}^{\text{нч}} - C_{0\text{нч}}^{\text{нч}} = \frac{1}{8}[u(1) + u(5)] - \frac{1}{8}[u(3) + u(7)].$$

Наконец, на последнем этапе прореживаются последовательности $\{u(0), u(4)\}$, $\{u(2), u(6)\}$, $\{u(1), u(3)\}$, $\{u(5), u(7)\}$ и по ним вычисляются соответствующие значения.

Например,

$$C_{0\text{чт}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(0) + u(4)], \quad C_{1\text{чт}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(0) - u(4)].$$

$$C_{0\text{нч}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(2) + u(6)], \quad C_{1\text{нч}}^{\text{чт}} = \frac{1}{8}[u(2) - u(6)].$$

Остальные вычисления отображены на рис. 3.90.

Пользуясь направленными графами, подсчитаем общее число арифметических операций (сложение, вычитание). На рис. 3.88 это число равно удвоенному числу кругов, т. е. 8, на рис. 3.89 и рис. 3.90 это число также равно 8. Общее число равно $8 \times 3 = 24$. Для N отсчетов общее число сложений и вычитаний на всех этих этапах равно $\text{Mlog}_2 N$.

Число умножений определяется числом стрелок на линиях графов и равно $\frac{N}{2} \log_2 N$, т. е. для $N = 8$ это число равно $4 \times 3 = 12$.

Существенное сокращение числа вычислительных операций достигается при большом числе отсчетных значений N . Например, для $N = 1024$ БПФ позволяет сократить число сложений (вычитаний) примерно в 100 раз.

3.11.5. Дискретное преобразование Уолша

Формула дискретного преобразования следует из формулы усеченного ряда Уолша (см. раздел 2.8), если непрерывные функции Уолша заменить дискретными, а текущее непрерывное время – дискретным временем:

$$\theta = t/T = i\Delta/N\Delta = i/N.$$

Дискретный ряд

$$u(i) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{Wal}(n, i/N),$$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(i) \text{Wal}(n, i/N),$$

где i – значение дискретного времени, $u(i)$ – выборка сигнала $u(t)$ в i -й момент времени; $\text{Wal}(n, i/N)$ – i -я выборка функции Уолша с номером n .

Дискретные функции Уолша получают из непрерывных функций Уолша дискретизацией последних.

Количество отсчетов равно 2^m , $m = 1, 2, 3, \dots$, а интервал дискретизации равен $\Delta = 1/2^m$.

Значения дискретных функций записывают в виде квадратной матрицы. Каждая строка этой матрицы содержит выборки функции Уолша, номер которой совпадает с номером строки. Например, матрица дискретных функций Уолша для $m = 3$ равна:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

Матрица получена дискретизацией соответствующих непрерывных функций Уолша с интервалом дискретизации, который равен $1/8$.

Для ускорения вычислений используют быстрое преобразование Уолша, аналогичное быстрому преобразованию Фурье.

3.11.6. Прямое и обратное z -преобразование

Линейная цифровая фильтрация заимствует основные положения теории линейных систем.

Линейный цифровой фильтр (ЦФ) преобразует последовательность числовых отсчетов входного сигнала $\{a(n)\}$ в последовательность числовых отсчетов $\{b(n)\}$ выходного сигнала

$$\begin{aligned} a(0), a(1), \dots, a(n), \dots &\rightarrow b(0), b(1), \dots, b(n), \dots; \\ b(m) &= \sum_{n=0}^m a(n)h(m-n), \end{aligned} \quad (3.91)$$

где $\{h(n)\}$ – дискретный сигнал, являющийся реакцией фильтра на единичный импульс $(1, 0, 0, \dots)$.

Смысл формулы прост и нагляден: значение $b(m)$ выходного сигнала равно взвешенной сумме $a(m)$ и всех предыдущих значений входного сигнала, причем роль весовых коэффициентов выполняют отсчеты импульсной характеристики $h(n)$ цифрового фильтра, т. е. этот фильтр обладает памятью по отношению к прошлым воздействиям.

Для физически реализуемых систем реакция ЦФ равна нулю до подачи входного импульса, поэтому коэффициенты $h(-1)$, $h(-2)$, ... импульсной характеристики равны нулю и суммирование в (3.91) можно распространить на все положительные значения индекса n .

$$b(m) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)h(m-n). \quad (3.92)$$

Отсчетом на входе и выходе фильтра $\{a(n)\}$, $\{b(m)\}$, а также отсчетом импульсной характеристики $\{h(m-n)\}$ поставим в соответствие сигналы вида (3.81). По этим сигналам найдем спектральные плотности. Отношение спектральной плотности на выходе фильтра к спектральной плотности на входе определяет коэффициент передачи ЦФ:

$$K(j\omega) = \frac{S_{\text{фвых}}(j\omega)}{S_{\text{фвх}}(j\omega)}.$$

Этот коэффициент можно найти и через импульсную характеристику ЦФ:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\delta(t-n\Delta)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n\Delta} h(n), \end{aligned} \quad (3.93)$$

где $h(n) = h(n\Delta)$, а импульсная характеристика равна:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta)\delta(t-n\Delta).$$

Спектральная плотность функции $\varphi_{\Delta}(t)$ является периодической с периодом $k\omega_1$ (см. п. 3.11.2). Периодической функцией является также и коэффициент передачи ЦФ. Убедимся в этом. Заменим в (3.93) аргумент ω на $\omega + k\omega_1$, где $\omega_1 = 2\pi/\Delta$. Тогда

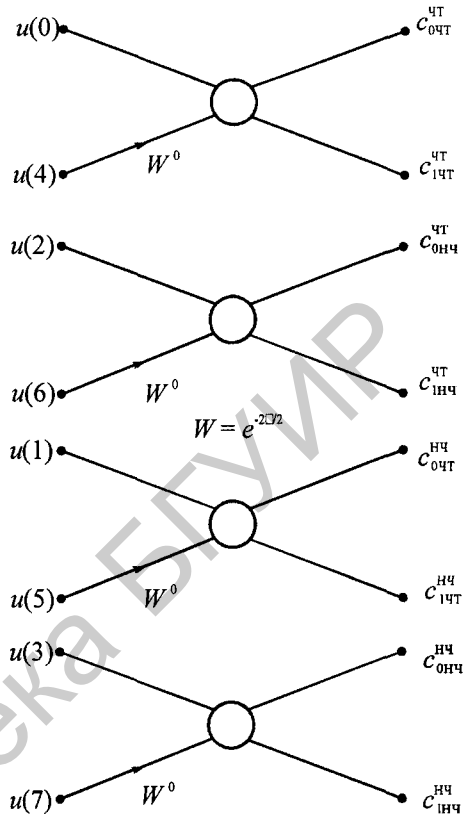


Рис. 3.90. Вычисление коэффициентов на третьем этапе БПФ

$$K[j(\omega + k\omega_1)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega+k\omega_1)n\Delta} h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n\Delta} h(n) \cdot e^{-jkn\omega_1\Delta} = K(j\omega),$$

так как $e^{-jkn\omega_1\Delta} = e^{-jkn2\pi} = 1$.

Расчет коэффициента передачи ЦФ ведут также с использованием z -преобразования.

Каждой числовой последовательности $\{u(n)\} = \{u(0), u(1), \dots, u(m)\}$, соответствующей выборочным значениям сигнала, можно поставить в однозначное соответствие сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной:

$$u(z) = u(0) + u(1)/z + u(2)/z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n}. \quad (3.94)$$

Сумма (3.94) называется z -преобразованием числовой последовательности $\{u(k)\}$.

Умножим левую и правую части уравнения (3.94) на множитель z^{m-1} :

$$z^{m-1}u(z) = u(0)z^{m-1} + u(1)z^{m-2} + \dots + u(m)z^{-1} + \dots$$

Полученный результат проинтегрируем по замкнутой кривой, которая лежит в области аналитической функции $u(z)$ и охватывает все ее полюсы. Примем во внимание известное из математики выражение

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если } n = -1, \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

В результате получим

$$u(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} u(z) dz. \quad (3.95)$$

Выражение (3.95) является *обратным z -преобразованием*.

Выясним связь z -преобразования с дискретным преобразованием Фурье. С этой целью произведем замену

$$z = re^{j\omega\Delta}.$$

В результате получим

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) e^{-j\omega n\Delta} r^{-n}.$$

Перепишем выражение с учетом того, что круговая частота $\omega = n2\pi/N\Delta$:

$$u(z) = n \sum_{n=0}^{\infty} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N\Delta}kn\Delta} r^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} r^{-n}.$$

Учитывая, что этот ряд периодичен, верхний предел суммы изменяем на N . Если $|r| = 1$, полученное выражение в N раз больше выражения, которое определяется формулой (3.84). Это дает основание считать дискретное преобразование Фурье частным случаем z -преобразования.

Для числовой последовательности $\{v(n)\}$ на выходе ЦФ аналогично находится z -преобразование $v(z)$, причем

$$v(z) = u(z)H(z),$$

где $H(z)$ – системная функция.

Системная функция равна отношению z -преобразования выходного сигнала к z -преобразованию входного:

$$H(z) = v(z)/u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}, \quad (3.96)$$

где $h(n)$ – числовая последовательность, соответствующая импульсной характеристике.

Формула (3.96) определяет системную функцию как z -преобразование от числовой последовательности $\{h(n)\}$. Сравнивая (3.93) и (3.96), определим правило нахождения коэффициента передачи $K(j\omega)$ по системной функции $H(z)$. Для этого в формуле (3.96) нужно сделать подстановку $z = e^{j\omega\Delta}$.

Пример 3.11. Импульсная характеристика ЦФ определяется последовательностью, содержащей два ненулевых отсчета: $\{h(n)\} = (1, -1, 0, \dots)$.

Вычислить коэффициент передачи $K(j\omega)$ ЦФ по системной функции.

Решение. Системная функция

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Подставляя в полученную формулу $z = e^{j\omega\Delta}$, получим

$$K(j\omega) = 1 - e^{-j\omega\Delta} = 1 - \cos\omega\Delta + j\sin\omega\Delta.$$

3.11.7. Дискретное преобразование Лапласа

Дискретное преобразование Лапласа определяется выражением

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n\Delta)e^{-pn\Delta}, \quad (3.97)$$

где $u(n\Delta)$ – выборки сигнала, Δ – интервал дискретизации.

Формула (3.97) получается в результате вычисления преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} \varphi_{\Delta}(t)e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \int_0^{\infty} \delta(t - n\Delta)e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)e^{-pn\Delta},$$

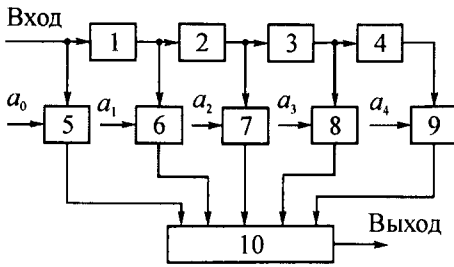


Рис. 3.91. Схема трансверсального фильтра: 1, 2, 3, 4 – устройства задержки на один такт; 5, 6, 7, 8, 9 – умножители; 10 – сумматор

где

$$\varphi_{\Delta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\delta(t - n\Delta).$$

Интеграл вычислен с применением фильтрующего свойства дельта-функции. Если произвести замену $e^{p\Delta} = z$, то формула (3.97) переходит в формулу (3.94).

Следовательно, дискретное преобразование Лапласа является аналогом z -преобразования.

3.11.8. Трансверсальный цифровой фильтр

Под *трансверсальным* фильтром понимают такой ЦФ, который работает в соответствии с алгоритмом:

$$v_i = a_0 u(i) + a_1 u(i-1) + a_2 u(i-2) + a_3 u(i-3) + \dots + a_m u(i-m),$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – последовательность постоянных коэффициентов; m – число, определяющее порядок фильтра.

Трансверсальный фильтр производит взвешенное суммирование предшествующих отсчетов входного сигнала.

Применив z -преобразование к обеим частям приведенного выше уравнения, получим

$$v(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m})u(z). \quad (3.98)$$

Последнее уравнение получено с учетом теоремы о запаздывании, из которой следует, что запаздывание дискретного сигнала на один элемент соответствует умножению z -преобразования на z^{-1} .

Убедимся в этом, вычисляя z -преобразование от $u(i-1)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u(i-1)z^{-i} = \sum_{m=-1}^{\infty} u(m)z^{-(m+1)} = z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} u(m)z^{-m} = z^{-1}u(z),$$

где $u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)z^{-i}$.

При вычислении произведена замена $i-1$ на m и принято во внимание, что $u(-1) = 0$. Из уравнения (3.98) с учетом равенства (3.96) найдем выражение для системной функции

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} = \\ &= \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Частотную характеристику фильтра получаем по уравнению (3.99) заменой $z = e^{j\omega\Delta}$:

$$K(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-j2\omega\Delta} + \dots + a_m e^{-jm\omega\Delta}. \quad (3.100)$$

Вычислим импульсную характеристику этого фильтра:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= a_0 \delta(t) + a_1 \delta(t - \Delta) + a_2 \delta(t - 2\Delta) + \dots + a_m \delta(t - m\Delta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta(t - n\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \delta(t - n\Delta). \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m входящие в выражения (3.98), (3.100), определяют значения импульсной характеристики.

Схема, реализующая это уравнение для $m = 4$, приведена на рис. 3.91. Она содержит идеальные линии задержки (ячейки памяти) на время, равное интервалу дискретизации Δ , умножители и сумматор. При возбуждении трансверсального фильтра единичным импульсом

$$\{u(n)\} = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

на его выходе формируются выборочные значения импульсной характеристики ЦФ. При подаче на вход фильтра совокупности выборок $\{u(n)\}$, $n = 0, \dots, m$ на его выходе реализуются отсчеты выходного сигнала, определяемые формулой свертки (3.91).

3.11.9. Рекурсивный цифровой фильтр

Этот фильтр работает по следующему алгоритму:

$$v(i) = a_0 u(i) + a_1 u(i-1) + \dots + a_m u(i-m) + b_1 v(i-1) + b_2 v(i-2) \dots + b_n v(i-n), \quad (3.101)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ – постоянные коэффициенты, не равные нулю.

В уравнении (3.101) участвуют выборки как входного, так и выходного сигналов.

Системная функция рекурсивного фильтра определяется выражением:

$$H(z) = \frac{v(z)}{u(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} + \dots - b_n}.$$

Схема рекурсивного ЦФ приведена для $m = 4$ и $n = 4$ на рис. 3.92. Она содержит элементы задержки (памяти), умножители и сумматор, обеспечивающий необходимые математические операции.

При подаче на его вход совокупности выборок на его выходе формируются выборки выходного сигнала в соответствии с формулой (3.101).

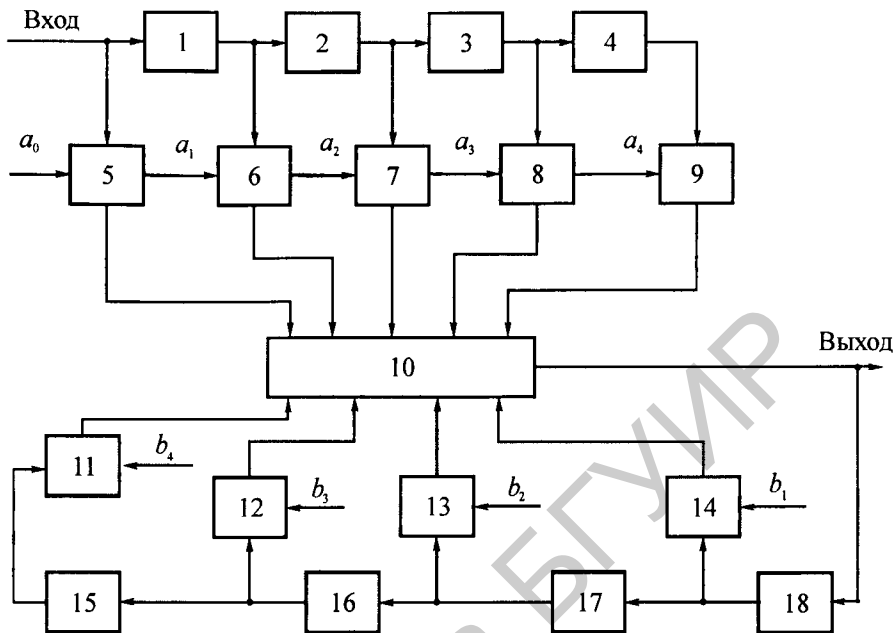


Рис. 3.92. Схема рекурсивного фильтра:
 1, 2, 3, 4, 15, 16, 17, 18 – устройства задержки на один такт;
 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 – умножители; 10 – сумматор

3.11.10. Пример синтеза линейного цифрового фильтра

Под *синтезом* ЦФ понимают совокупность математических преобразований для определения структуры ЦФ. В результате синтеза получают математическое выражение, из которого следует структура требуемого ЦФ.

В общем случае синтез структуры ЦФ осуществляется путем применения z -преобразования к совокупности выборочных значений импульсной характеристики

$$\{h(n)\} = h(0), h(1), \dots, h(m).$$

Предполагается, что импульсная характеристика обращается в нуль при $t < 0$, что означает, что ЦФ является физически реализуемым фильтром. Если число выборочных значений конечно, то синтезируемый ЦФ будет трансверсальным. При неограниченно протяженной импульсной характеристике получают рекурсивный фильтр.

В результате преобразований находят системную функцию $H(z)$. Затем заменой z на $e^{j\omega\Delta}$ находят коэффициент передачи ЦФ. Коэффициент передачи является искомым математическим выражением, которое определяет структуру ЦФ.

Пример 3.12. Синтезировать трансверсальный ЦФ, подобный интегрирующей RC-цепи, с импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-t/\tau), & t > 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть импульсная характеристика трансверсального ЦФ содержит три равноотстоящих отсчета:

$$\{h(n)\} = 1, e^{-\Delta\tau}, e^{-2\Delta\tau}.$$

Применим z-преобразование к приведенной совокупности отсчетов. Получим системную функцию ЦФ

$$H(z) = 1 + e^{-\Delta\tau}z^{-1} + e^{-2\Delta\tau}z^{-2}.$$

Коэффициент передачи, определяющий структуру трансверсального ЦФ:

$$K(j\omega) = 1 + e^{-\Delta\tau}e^{-j\omega\Delta} + e^{-2\Delta\tau}e^{-j2\omega\Delta}.$$

Контрольные вопросы

1. Что Вы понимаете под математической моделью блока или системы?
2. Каким условиям удовлетворяют операторы: линейной, параметрической и нелинейной систем?
3. Дайте определение линейной, параметрической и нелинейной систем.
4. Как формулируется и решается задача преобразования дискретного спектра линейной, параметрической и нелинейной системой?
5. Как формулируется и решается задача преобразования спектральной плотности сигнала линейной, параметрической и нелинейной системой?
6. Что Вы понимаете под преобразованием частоты сигнала?
7. Какие виды амплитудной непрерывной модуляции Вы знаете?
8. Что Вы понимаете под индексом амплитудной модуляции?
9. Чем отличаются спектры АМ-БУН, АМ-ПН, АМ-ПН-ОБП сигналов?
10. В чём заключается сходство и различие между аналоговыми ФМ и ЧМ сигналами?
11. Как связаны между собой частота модуляции, девиация частоты и индекс модуляции?
12. В чём сходство и различие спектров аналогового ЧМ сигнала с малым индексом модуляции и аналогового АМ сигнала?
13. Какие методы формирования ЧМ сигналов Вы знаете?
14. Перечислите виды модуляций импульсного переносчика. В чём сходство и отличие спектров этих сигналов?
15. Какие виды дискретной модуляции непрерывного гармонического сигнала Вы знаете?
16. Какие преимущества имеет сигнал с многократной фазовой модуляцией по сравнению с сигналом двоичной ФМ?

17. В чем сходство и отличие между сигналом многократной ФМ и КАМ сигналом?
18. Какие виды модуляций шумоподобного сигнала Вы знаете?
19. Какие методы детектирования непрерывных АМ сигналов Вам известны?
20. В чем сходство и отличие некогерентного и когерентного детектирования?
21. В каких системах связи используется некогерентный детектор?
22. Поясните работу некогерентного детектора.
23. Поясните работу когерентного детектора.
24. Какие сигналы детектируются когерентными детекторами?

4. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ, СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайной называется такая функция, которая может принять тот или иной конкретный вид, но неизвестно заранее, какой именно. Этот вид называется *реализацией*. Случайные функции зависят от времени и других параметров. Пример реализаций случайных функций, зависящих от времени, приведен на рис. 4.1. Совокупность реализаций называется *ансамблем*.

Проведем сечение ансамбля при некотором значении времени. В результате получим несколько случайных выборочных значений. Их число равно числу реализаций.

Для математического описания случайного процесса, как правило, одного сечения недостаточно. Поэтому проводят несколько сечений в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . Временной интервал между сечениями удобно выбрать одинаковым и равным $1/2F_B$, где F_B – верхняя граничная частота спектра случайного процесса. Случайная функция $\xi(t)$ считается заданной, если для последовательных моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n и заранее выбранных значений неслучайных аргументов x_1, x_2, \dots, x_n можно вычислить вероятность того, что случайные выборочные значения $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ соответственно равны или меньше x_1, x_2, \dots, x_n .

Эта вероятность является *n-мерной интегральной функцией распределения*:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2; \dots; \xi(t_n) \leq x_n]. \quad (4.1)$$

Вычисление функции (4.1) предполагает переход от непрерывных во времени реализаций к их выборочным значениям, взятых в моменты

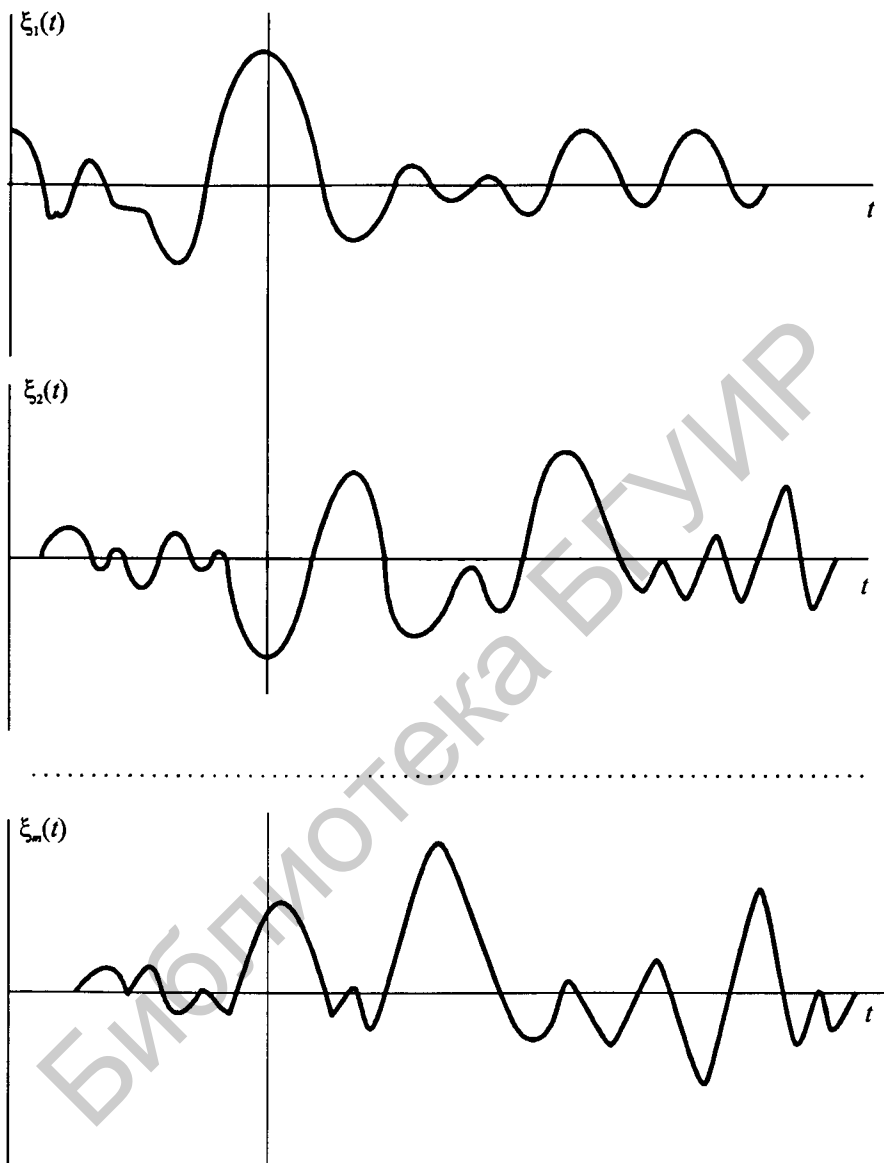


Рис. 4.1. Ансамбль реализаций случайного процесса и сечение

времени t_1, t_2, \dots, t_n . Очевидно, что чем большее число реализаций и сечений задано, тем более точно в статистическом смысле описывается этот случайный процесс.

Случайная величина определяется одномерной функцией

$$F(x, t) = P[\xi(t) \leq x],$$

где $P[\xi(t) \leq x]$ – вероятность того, что случайная величина $\xi(t)$ или меньше, или равна заранее выбранному значению x .

Одномерная функция является самой простой в ряду других функций распределения и наиболее наглядной.

Пример 4.1. Построить график одномерной функции распределения по следующим исходным данным. Случайная величина измерялась 42 раза. Из этого числа измерений значение, равное -5 , встретилось один раз, равное -4 , встретилось дважды и т. д., см. табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значение случайной величины ξ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Число случаев этой величины	1	2	3	4	5	12	5	4	3	2	1

Для построения графика рассчитаем частоты появления следующих событий: события, заключающегося в том, что случайная величина меньше или равна -5 , что случайная величина меньше или равна -4 и т. д., полагая, что значения неслучайного аргумента соответственно равны -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 . Событие, заключающееся в том, что случайная величина меньше или равна -5 , определяется частотой, равной $1/42$; событие, заключающееся в том, что случайная величина меньше или равна -4 , определяется частотой, равной $3/42$, и т. д.

График функции распределения, построенный по исходным данным, приведен на рис 4.2. При стремлении числа измерений к бесконечности, а интервала дискретизации случайной величины к нулю, ступенчатая функция $F^*(x)$ стремится к непрерывной $F(x)$. Значения последней функции лежит в диапазоне $[0, 1]$ и не содержит скачков и разрывов.

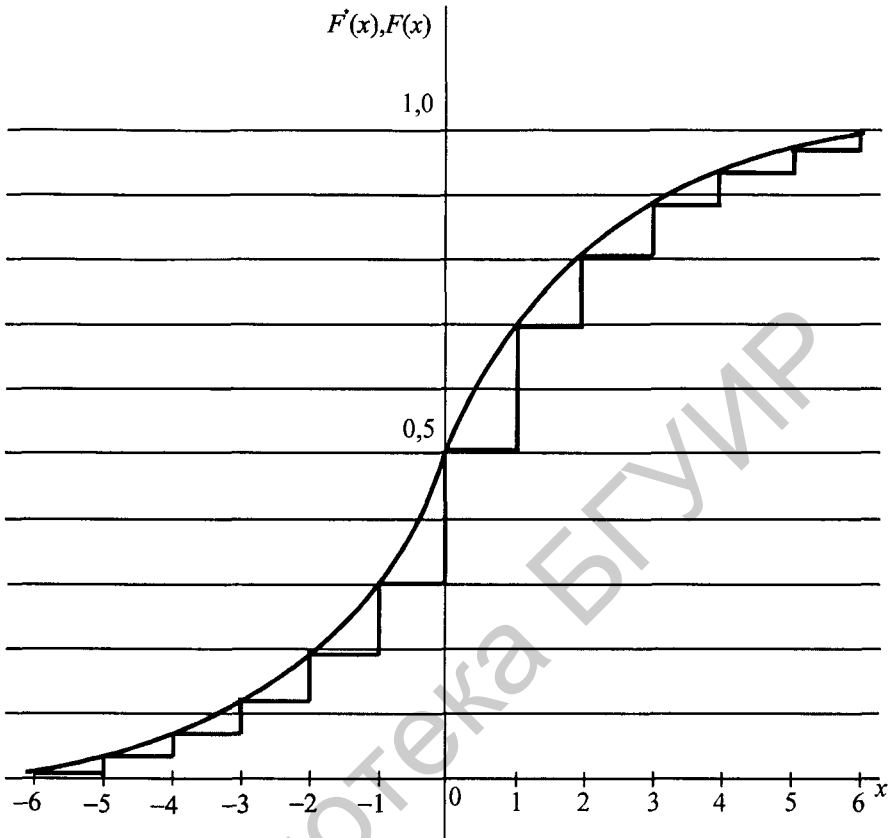
Если существуют частные производные функции распределения по всем переменным, то можно найти n -мерную плотность распределения вероятности:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \partial^n F \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (4.2)$$

Зная эту плотность, всегда можно получить плотность для меньшего числа переменных ($m < n$) интегрированием исходной плотности по остальным $(n - m)$ переменным. Например, двумерная плотность находится по n -мерной интегрированием по $n - 2$ переменным:

$$w(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_3 \dots dx_n. \quad (4.3)$$

Одномерная плотность $w(x, t) = dF(x, t)/dx$. Следовательно,

Рис. 4.2. Графики зависимостей $F'(x)$ и $F(x)$

$$\int_a^b w(x, t) dx = \int_a^b dF(x, t) = F(b, t) - F(a, t),$$

где a, b – заданные значения случайной величины.

Когда разность $b - a$ выбрана достаточно малой, последнее интегральное соотношение определяет важную характеристику случайной величины, которая называется вероятностью реализации случайной величины.

Если случайная величина лежит в интервале $-\infty, \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = F(\infty, t) - F(-\infty, t) = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что площадь под кривой распределения $w(x, t)$ равна 1.

Аналогичным свойством обладают и другие плотности: двумерные, трехмерные и т. д.

Важным понятием является *условная плотность распределения вероятности*.

Примером условной плотности, выраженной через двумерную и одномерную плотности вероятности, является:

$$w(x_1, t_1 / x_2, t_2) = \frac{w(x_1, x_2; t_1, t_2)}{w(x_2, t_2)}. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) может быть обобщена на большее число переменных и означает, что знание о случайной величине $\xi(t_2)$ дает и информацию о величине $\xi(t_1)$. Из формулы (4.4) также следует, что двумерная плотность распределения вероятности

$$w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_2, t_2)w(x_1, t_1 / x_2, t_2) = w(x_1, t_1)w(x_2, t_2 / x_1, t_1). \quad (4.5)$$

Если выборочные значения случайной функции независимы, то n -мерная плотность распределения вероятности равна произведению одномерных плотностей:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w(x_1, t_1)w(x_2, t_2) \dots w(x_n, t_n). \quad (4.6)$$

В этом случае исчерпывающей характеристикой случайной функции является ее *одномерная плотность*.

В ряде задач достаточно ограничиться такими числовыми характеристиками, как *моменты распределения*.

По одномерной плотности распределения вероятности можно вычислить начальные моменты распределения, в том числе *моменты 1-го и 2-го порядка*.

Момент 1-го порядка является средним значением случайной выборки в некоторый момент времени:

$$M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t)dx = a(t). \quad (4.7)$$

Момент 2-го порядка равен среднему от квадрата случайной выборки:

$$M\{\xi^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x, t)dx. \quad (4.8)$$

Разность между случайным процессом и его математическим ожиданием называется *центрированным процессом* и обозначается

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - a(t).$$

Математическое ожидание квадрата центрированной случайной выборки называется *дисперсией*:

$$D\{\xi(t)\} = M\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 w(x, t)dx = \sigma^2(t). \quad (4.9)$$

Дисперсия является мерой разброса случайной величины около ее среднего значения.

Ряд задач решается с использованием двумерной плотности распределения. Например, *смешанный второй начальный момент* или *функция корреляции* определяется через двумерную плотность следующим интегральным выражением:

$$B(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (4.10)$$

Для центрированного случайного процесса функция корреляции

$$B(t_1, t_2) = M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\xi}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] \times \\ \times w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (4.11)$$

Статистическая связь между двумя случайными процессами $\xi(t)$, $\gamma(t)$ в моменты времени t_1 , t_2 определяется *функцией взаимной корреляции*:

$$B_{x,y}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \gamma(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (4.12)$$

Если случайные величины статистически независимы, то двумерную плотность можно записать в виде произведения одномерных плотностей:

$$w(x, y; t_1, t_2) = w(x, t_1)w(y, t_2).$$

При этом формула (4.12) упрощается:

$$B_{x,y}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \gamma(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t_1) dx \int_{-\infty}^{\infty} yw(y, t_2) dy. \quad (4.13)$$

Для центрированных случайных процессов функция взаимной корреляции

$$M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\gamma}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t_1)][y - a(t_2)]w(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (4.14)$$

Для центрированных статистически независимых случайных процессов функция взаимной корреляции

$$M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\gamma}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t_1)]w(x, t_1) dx \int_{-\infty}^{\infty} [y - a(t_2)]w(y, t_2) dy = 0. \quad (4.15)$$

Под *стационарным* процессом понимают такой случайный процесс, n -мерная плотность вероятности которого не меняется при любом сдвиге всей группы точек t_1, t_1, \dots, t_n вдоль оси времени. Это условие записывается в виде:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad (4.16)$$

где τ – временной сдвиг.

Случайные процессы, удовлетворяющие этому условию, называются *стационарными* в узком смысле. Случайный процесс, у которого математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, называется *стационарным* в широком смысле. Случайные процессы, не удовлетворяющие сформулированным условиям, называются *нестационарными*. Реализация нестационарного процесса приведена на рис. 4.3.

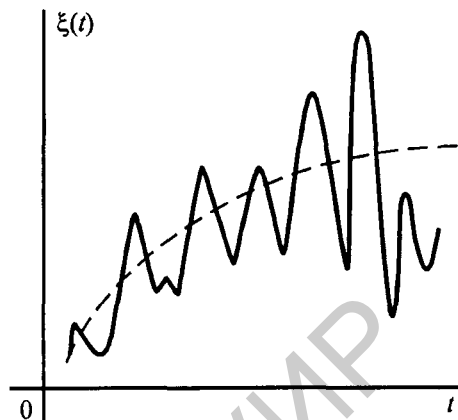


Рис. 4.3. Реализация нестационарного, случайного процесса

У этой реализации меняется не только среднее значение, но и дисперсия. Стационарный процесс называется *эргодическим*, если любая его реализация имеет одни и те же статистические свойства. Поэтому для эргодических процессов любая статистическая характеристика, полученная усреднением по множеству реализаций, может быть получена также усреднением за достаточно большой промежуток времени по одной реализации случайного процесса.

Основные статистические характеристики эргодического случайного процесса приведены ниже:

$$M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)dt = \overline{\xi(t)}; \quad (4.17)$$

$$M\{\xi^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2w(x,t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t)dt = \overline{\xi^2(t)};$$

$$\begin{aligned} M\{[\xi(t) - a(t)]^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 w(x,t)dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)]^2 dt = D\{\xi(t)\}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \xi(t)\xi(t + \tau)dt = B(\tau), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ — разность моментов времени;

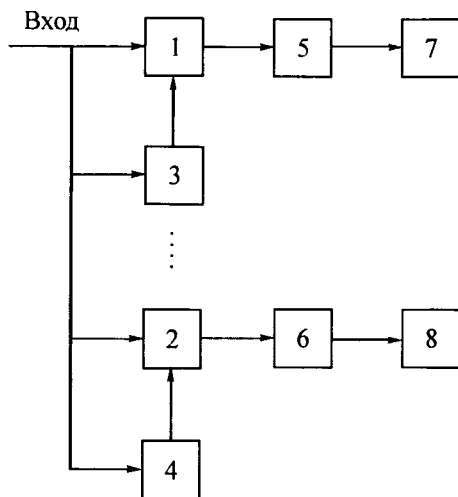


Рис. 4.4. Структурная схема коррелометра:
1, 2 – умножители; 3, 4 – линии задержки;
5, 6 – интеграторы; 7, 8 – вольтметры

корреляции шума на выходе усилителя достаточно подать его на многоканальный коррелометр (рис. 4.4) и измерить напряжения на выходах каналов. Каждый канал содержит умножитель, линию задержки, интегратор и вольтметр. Линии задержки задерживают входную реализацию шума на заданные величины, в умножителях входная реализация умножается на задержанные реализации, а интеграторы интегрируют результаты умножений. Вольтметрами измеряются значения автокорреляционной функции.

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ, СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайные процессы включают в себя, кроме рассмотренных выше непрерывных процессов, также и дискретные процессы. Примерами дискретных процессов являются:

- а) дискретные процессы непрерывного времени (рис. 4.5, а);
- б) дискретные процессы дискретного времени (рис. 4.5, б).

Математическими моделями этих процессов являются случайные последовательности. Рассмотрим математическую модель дискретного процесса дискретного времени. Процесс математически задан, если для счетного числа моментов времени $t_i, i = 1, 2, \dots, N$ и счетного числа дискретных значений $a_{ri}, r = -m, -m + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, m$ процесса задана совместная вероятность

$$\begin{aligned}
 B_{x,y}(t_1, t_2) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y; t_1, t_2) dx dy = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \gamma(t + \tau) dt = \\
 &= B_{xy}(\tau). \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Эргодические процессы чаще других используются в качестве математических моделей сообщений, сигналов и помех. Это объясняется тем, что свойство эргодичности позволяет рассматривать не множество, а всего одну реализацию. Например, для вычисления функции авто-

$$\begin{aligned}
 P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) &= \\
 &= P(\xi_1 = a_{r1})P(\xi_2 = a_{r2} / \xi_1 = a_{r1}) \dots \\
 \dots P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}, \xi_{N-2} = a_{rN-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1}), & \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

где a_n – значение дискретного процесса в дискретный момент времени t_n ; $P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}, \xi_{N-2} = a_{rN-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1})$ – вероятность появления в момент времени t_N дискретного значения a_{rN} при условии, что в предыдущие моменты времени $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_1$ дискретные значения были $a_{rN-1}, a_{rN-2}, \dots, a_{r1}$.

Случайный процесс, определяемый вероятностью (4.21), иногда называют дискретным процессом с памятью. У этого процесса в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n между его значениями имеется статистическая связь.

Дискретный процесс называется *простым марковским* процессом, если условная вероятность зависит только от соседних моментов времени:

$$\begin{aligned}
 P(\xi_k = a_{rk} / \xi_{k-1} = a_{rk-1}, \xi_{k-2} = a_{rk-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1}) &= \\
 &= P(\xi_k = a_{rk} / \xi_{k-1} = a_{rk-1}). & \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Для простого марковского процесса совместная вероятность определяется произведением безусловной вероятности реализации значения процесса в момент времени t_1 на условные вероятности, которые называются вероятностями перехода:

$$\begin{aligned}
 P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) &= \\
 &= P(\xi_1 = a_{r1})P(\xi_2 = a_{r2} / \xi_1 = a_{r1}) \dots \\
 \dots P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}). &
 \end{aligned}$$

Простой марковский процесс является случайным процессом с памятью, но статистическая зависимость имеется только между значениями процесса в соседние моменты времени.

Более простой по сравнению с марковской моделью является *дискретная случайная последовательность* с независимыми дискретными значениями (*последовательность Бернулли*).

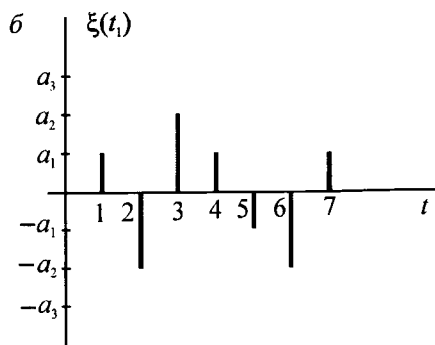
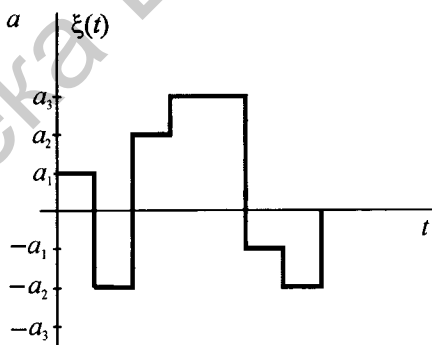


Рис. 4.5. Примеры случайных дискретных процессов

Она определяется совместной вероятностью, равной произведению вероятностей:

$$P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) = \prod_{i=1}^N P(\xi_i = a_{ri}). \quad (4.23)$$

Эта математическая модель определяет *дискретный источник без памяти*.

Дискретный источник называется *стационарным*, если его статистическое описание не зависит от начала отсчета времени.

Значения дискретного случайного процесса дискретного времени являются дискретными, случайными величинами (см. рис. 4.5, б).

Дискретная, случайная величина определяется интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n), \quad \xi_n \leq x,$$

где N – число значений случайной величины; $p(x = \xi_n)$ – вероятность дискретной случайной величины.

Интегральная функция распределения является непрерывной функцией аргумента. Она возрастает скачками при тех значениях x , которые являются возможными значениями дискретной случайной величины.

Значения функции определяются всеми значениями дискретной случайной величины, которые меньше или равны x . Примером интегральной функции может быть ступенчатая функция, приведенная на рис. 4.2. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины не дифференцируема. Поэтому дифференцированием этой функции нельзя найти плотность распределения вероятности дискретной случайной величины. Но она просто выражается через вероятности случайных величин и дельта-функции:

$$w_1(x) = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \delta(x - \xi_n).$$

Интегрируя плотность распределения вероятности, находим интегральную функцию:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \delta(x - \xi_n) dx = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n),$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi_n) dx = 1.$

При вычислении интегральной плотности использовано фильтрующее свойство дельта-функции.

Вычисление моментов первого, второго и т. д. порядков дискретной случайной величины обычно ведут по известным формулам теории вероятностей. В дополнение к этим формулам можно использовать и формулы

для непрерывной случайной величины, если воспользоваться приведенным выше выражением для плотности распределения вероятности дискретной случайной величины. Например, момент первого порядка дискретной случайной величины (среднее значение) вычисляется следующим образом:

$$m = M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{\xi}(x) dx = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - \xi_n) dx = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n P(x = \xi_n).$$

Что касается вычисления таких характеристик, как автокорреляционная функция, функция взаимной корреляции и т. д., то и эти характеристики для дискретных процессов также вычисляются по известным формулам.

Например, автокорреляционная функция эргодического дискретного случайного процесса равна:

$$M\{\xi_n, \xi_{n+q}\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t_n) \xi(t_{n+q}).$$

4.3. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ

Функция корреляции отражает степень статистической связи между значениями случайного процесса. При усреднении по ансамблю функция корреляции нецентрированного случайного процесса определяется формулой (4.10), причем значения случайных реализаций берут в соседние моменты времени t_1, t_2 .

Если процесс эргодический, то усреднение по ансамблю заменяется усреднением во времени и функция корреляции определяется формулой (4.19). Для центрированных случайных процессов функция корреляции определяется формулой (4.11), а если процесс эргодический, то формулой

$$B_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)][\xi(t + \tau) - a(t + \tau)] dt. \quad (4.24)$$

Таким образом, функция корреляции эргодического случайного процесса определяет степень статистической связи между реализацией случайного процесса и сдвинутой на некоторое время копией этой реализации.

Функции (4.19), (4.24) принято называть автокорреляционными функциями. Функция (4.20) называется *взаимной корреляционной функцией*. Если $\xi(t) = \gamma(t)$, функция взаимной корреляции переходит в функцию автокорреляции.

Рассмотрим основные свойства автокорреляционной функции.

1. Автокорреляционная функция является убывающей функцией. Значение ее при нулевом сдвиге максимально и равно средней мощности случайного процесса:

$$B(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = P_{\text{ср.}}$$

Значение автокорреляционной функции центрированного случайного процесса при нулевом сдвиге равно дисперсии случайного процесса:

$$B_0(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)]^2 dt = P_{0\text{ср}} = D\{\xi(t)\}.$$

Если среднее значение случайного процесса является постоянной величиной, то значение автокорреляционной функции при аргументе $\tau = \infty$ равно квадрату значения этой величины.

$$B(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) + a][\xi(\infty) + a] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2 dt = a^2,$$

так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(\infty) dt = 0.$$

Последняя формула означает, что чем дальше отстоят друг от друга значения случайного процесса, тем слабее статистическая зависимость между ними.

2. Автокорреляционная функция является четной функцией:

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t - \tau) dt = B(-\tau).$$

3. В теории вероятности доказывается, что значение автокорреляционной функции максимально при нулевом сдвиге, т. е.

$$|B(0)| \geq B(\tau).$$

При описании случайных процессов используют понятия: *нормированная автокорреляционная функция и интервал корреляции*. Нормированная автокорреляционная функция случайного процесса:

$$b(t_1, t_2) = B(t_1, t_2) / \sqrt{D\{\xi(t_1)\} D\{\xi(t_2)\}}.$$

Для стационарного процесса

$$b(\tau) = B(\tau) / D\{\xi(t)\}.$$

Интервал корреляции равен интервалу времени между соседними значениями случайного центрированного процесса, при котором статистическая связь между этими значениями еще достаточно большая. Его значение

равно длине основания прямоугольника с высотой, равной $B_0(0)$, если площадь этого прямоугольника равна площади, ограниченной кривой $B_0(\tau)$ и осями координат:

$$\tau_k = \int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau / B_0(0). \quad (4.25)$$

Понятием «автокорреляционная функция сигнала» пользуются не только применительно к случайным, но и к детерминированным функциям. Автокорреляционная функция детерминированного сигнала рассмотрена в разделе 2.4.

Во второй главе введено понятие спектральной плотности детерминированного сигнала, найдено выражение (2.20) для спектральной плотности мощности, а также получена формула (2.25), которая определяет спектральную плотность мощности через автокорреляционную функцию $B(\tau)$. Указанные формулы справедливы и для стационарного, случайного процесса. Для оценки ширины спектральной плотности мощности принято использовать величину

$$\Delta f_3 = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) df. \quad (4.26)$$

Принимая во внимание уравнение (2.25), найдем, что

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau = \frac{1}{2} G(0). \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.25), получим

$$\tau_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{G(0)}{B_0(0)}. \quad (4.28)$$

Используя обратное преобразование Фурье от спектральной плотности мощности и уравнение (4.26), найдем, что

$$B_0(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) df = 2G(0)\Delta f_3.$$

Подставляя последнее равенство в (4.28), получим

$$\tau_k \Delta f_3 = 1/4.$$

Время корреляции тем меньше, чем больше ширина спектральной плотности и наоборот.

4.4. НОРМАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Нормальный случайный процесс занимает особое место при анализе систем связи. Он чаще, чем другие законы, встречается на практике, а его использование существенно упрощает расчеты. Плотность распределения вероятности (n -мерная) нормального случайного процесса определяется формулой:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = K_n \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \left[\frac{(x_i - a_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - a_j)}{\sigma_j} \right] \right\}, \quad (4.29)$$

где

$$K_n = 1 / \sigma_1 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \dots r_{1n} \\ r_{21} & 1 \dots r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} \dots 1 \end{vmatrix},$$

D_{ij} – алгебраическое дополнение элемента r_{ij} в определителе D , $r_{ij} = M\{\xi_i \xi_j\} / \sigma_i \sigma_j$ – нормированная функция корреляции.

При $n = 1$ из (4.29) получаем выражение для одномерной плотности распределения вероятности:

$$w(x, t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp[-(x - a)^2 / 2\sigma^2], \quad (4.30)$$

где a – среднее значение, а σ^2 – дисперсия нормальной случайной величины.

Совместная плотность распределения вероятности множества независимых случайных величин определяется формулой (4.6).

Если при этом одномерные плотности распределения вероятности для каждого момента времени одинаковы и распределены по нормальному закону, то

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2}. \quad (4.31)$$

Используя формулу (4.31), вычислим n -мерную плотность нормального стационарного эргодического центрированного процесса, который имеет равномерную спектральную плотность в полосе частот от 0 до F_B .

Пусть некоторая реализация задана непрерывной функцией $x(t)$ в интервале времени $[0, T]$, а ее спектр ограничен верхней граничной частотой F_B . Эту функцию с некоторой погрешностью можно представить рядом (2.57), а энергию реализации – формулой (2.56).

Полагая, что переменные, входящие в выражение (4.31), являются выборочными значениями функции $x(t)$, а среднее значение случайного процесса равно нулю, перепишем выражение (4.31) с учетом формулы (2.56) в виде:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \vec{w}(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{F_B}{\sigma^2} \int_0^T x^2(t) dt} =$$

$$= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad (4.32)$$

где $N_0 = \sigma^2/F_B$ – односторонняя спектральная плотность эргодического нормального случайного процесса, равная отношению мощности этого процесса к верхней граничной частоте.

Формула (4.32) позволяет найти:

а) вероятность реализации стационарного эргодического нормально-го случайного процесса:

$$P[x_1 < \xi_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 < \xi_2 \leq x_2 + dx_2, \dots, x_n < \xi_n \leq x_n + dx_n] = w(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (4.33)$$

где ξ_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ – выборки этой реализации, $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ – бесконечная малая область n -мерного пространства;

б) значение плотности распределения вероятности по заданной реализации:

$$\vec{w}(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt}; \quad (4.34)$$

в) значение вероятности реализации $\xi(t)$:

$$w(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt} d\vec{\xi}.$$

Вероятность реализации тем больше, чем меньше энергия этой реализации.

Найдем корреляционную функцию нормального стационарного эргодического центрированного процесса, полагая, что спектральная плотность мощности в полосе $[-\omega_B, \omega_B]$ постоянна и равна $N_0/2$:

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega\tau} d\omega = N_0 F_B \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau}. \quad (4.35)$$

При значении $\omega_B \tau = \pi$ функция корреляции равна нулю. Это соответствует разности времени между двумя соседними выборками, равной $1/2F_B$. Следовательно, сечения процесса, разделенные этим интервалом, не коррелированы между собой.

Найдем предел, приняв во внимание формулу (П.1.1):

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_B \rightarrow \infty} B(\tau) &= \lim_{\omega_B \rightarrow \infty} \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (4.36)$$

При стремлении граничной частоты к бесконечности корреляционная функция определяется дельта-функцией, для которой любые два несовпадающих во времени сечения не коррелированы между собой.

Спектральная плотность такого процесса является постоянной величиной, равной

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{N_0}{2}. \quad (4.37)$$

Эргодический центрированный стационарный нормальный процесс, корреляционная функция которого равна дельта-функции, а спектральная плотность постоянна при всех частотах, называется *белым шумом*.

Белый шум является математической моделью реального нормально-го процесса, применимой в тех случаях, когда его время корреляции много меньше постоянной времени четырехполосника, на который действует этот процесс, или когда в пределах амплитудно-частотной характеристики четырехполосника спектральную плотность процесса можно приближенно считать постоянной.

Дисперсия белого шума $B(0) = 0,5N_0\delta(0) = \infty$.

4.5. УЗКОПОЛОСНЫЕ, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс называется *узкополосным*, если ширина его спектра относительно мала по сравнению со средней частотой этого спектра. Подобные процессы возникают, например, на выходах линейных частотно-избирательных многокаскадных усилителей при действии на их входах теплового шума.

Аналитически узкополосный процесс можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \mathfrak{G}(t) \cos[\omega_0(t) + \psi(t)] = \mathfrak{G}(t) \cos \psi(t) \cos \omega_0 t - \mathfrak{G}(t) \sin \psi(t) \sin \omega_0 t = \\ &= A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t = a(t) + b(t), \end{aligned}$$

где $a(t)$, $b(t)$ – квадратурные составляющие узкополосного процесса; $\mathfrak{G}(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда (огibaющая); $\psi(t)$ – медленно меняющаяся фаза; ω_0 – средняя частота спектра; $A(t) = \mathfrak{G}(t) \cos \psi(t)$, $B(t) = \mathfrak{G}(t) \sin \psi(t)$ – случайные медленно меняющиеся функции времени.

Огибающая и фаза

$$\vartheta(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)},$$

$$\psi(t) = -\arctg[B(t)/A(t)].$$

Квадратурные составляющие имеют одинаковые мощности, их средние значения равны нулю, а функция взаимной корреляции равна:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t)b(t)dt = 0.$$

Т. к. узкополосный процесс подчиняется нормальному закону, то и квадратурные составляющие подчиняются нормальному закону и поэтому будут статистически независимыми.

Найдем плотности распределения вероятностей огибающей $w(\alpha)$ и фазы $w(\varphi)$ узкополосного процесса. В прямоугольных координатах вероятность того, что аналитический сигнал $\xi(t)$ будет находиться в пределах прямоугольника, ограниченного сторонами $(x, x + dx)$ и $(y, y + dy)$, равна $w(x, y)dx dy$.

Вероятность этого же события с использованием полярных координат α, φ

$$\begin{aligned} w(x, y)dx dy &= \\ &= w(\alpha, \varphi)d\alpha d\varphi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $w(\alpha, \varphi)d\alpha d\varphi$ – вероятность того, что значение процесса $\xi(t)$ будет находиться в пределах площади, равной $\alpha d\alpha d\varphi$ (рис. 4.6).

Учитывая, что квадратурные составляющие независимы, найдем, что

$$\begin{aligned} w(x, y)dx dy &= \\ &= w(x)dx w(y)dy. \end{aligned} \quad (4.39)$$

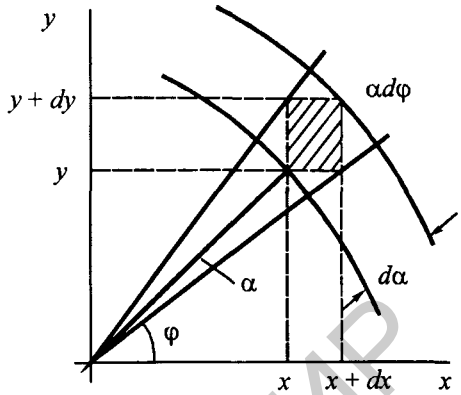


Рис. 4.6. К определению плотности вероятности огибающей и фазы узкополосного процесса

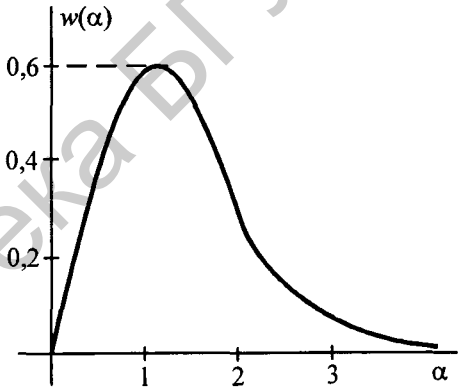


Рис. 4.7. Плотность вероятности огибающей узкополосного, случайного процесса

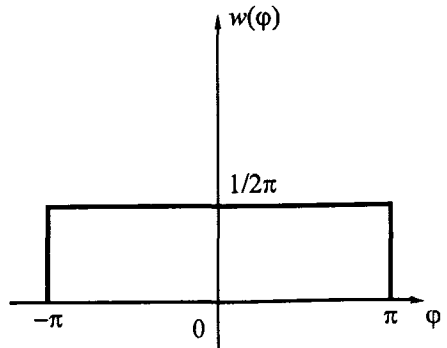


Рис. 4.8. Плотность распределения вероятности фазы узкополосного, случайного процесса

Кроме того, случайные величины $A(t)$, $B(t)$ распределены по нормальному закону с нулевым средним значением и одинаковой дисперсией, т. е.

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \\ w(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

где σ^2 – дисперсия узкополосного процесса.

Покажем, что дисперсии случайных величин $a(t)$ и $b(t)$ одинаковы и равны половине дисперсии узкополосного процесса.

Вычислим дисперсию узкополосного процесса $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{\xi^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t]^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) \cos^2 \omega_0 t dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T A(t) B(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) \sin^2 \omega_0 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2(t)}{2} dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{B^2(t)}{2} dt = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2. \end{aligned}$$

При вычислении принято во внимание, что

$$\int_0^T \cos 2\omega_0 t dt \cong 0, \quad \int_0^T \sin 2\omega_0 t dt \cong 0.$$

Подставляя выражение (4.40) в (4.39), получим

$$w(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\alpha d\varphi, \quad (4.41)$$

так как $\alpha^2 = x^2 + y^2$, а площади $dx dy$, $\alpha d\alpha d\varphi$ равны.

С учетом (4.38) и (4.41) находим совместную плотность распределения случайных величин:

$$w(\alpha, \varphi) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2}. \quad (4.42)$$

Плотность вероятности огибающей найдем, интегрируя (4.42) по переменной φ :

$$w(\alpha) = \int_0^{2\pi} w(\alpha, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.43)$$

Эта плотность называется распределением Рэлея. График плотности показан на рис. 4.7.

Плотность вероятности фазы найдем, интегрируя (4.42) по переменной α :

$$w(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} w(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi},$$

так как $w(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2}$, а $\int_0^{\infty} w(\alpha) d\alpha = 1$.

График функций $w(\varphi)$ приведен на рис. 4.8.

Аналогично вычисляются плотности распределения вероятностей для огибающей и фазы смеси сигнала и узкополосного шума:

$$Z(t) = u(t) + \xi(t) = \eta \cos \omega_0 t + \vartheta(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)],$$

где η – амплитуда сигнала.

Плотность распределения вероятности огибающей суммы сигнала и шума:

$$w(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2 + \eta^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\eta}{\sigma^2}\right), \quad (4.44)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

При малых отношениях сигнал/шум плотность распределения стремится к рэлеевскому закону, а при больших отношениях – к нормальному (рис. 4.9). Выражение для плотности вероятности фазы

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2} \frac{\eta \cos \varphi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta \cos \varphi}{\sigma}\right) \right] e^{-\frac{\eta^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}}, \quad (4.45)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ – функция Крампа.

4.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

Геометрические представления детерминированных сигналов, приведенные в главе 2, используются и при анализе случайных сигналов и помех. Так, совокупность выборочных значений реализации случайного процесса может быть представлена n -мерным вектором, а ансамблю поставлено в однозначное соответствие множество таких векторов в некоторой области векторного пространства.

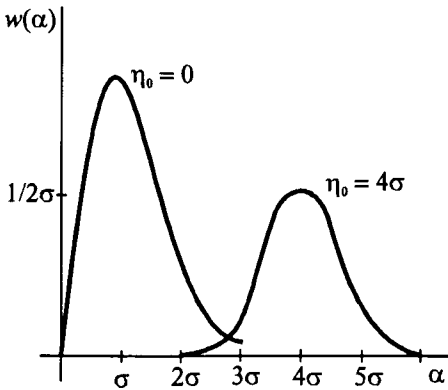


Рис. 4.9. Плотность распределения вероятности огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного шума

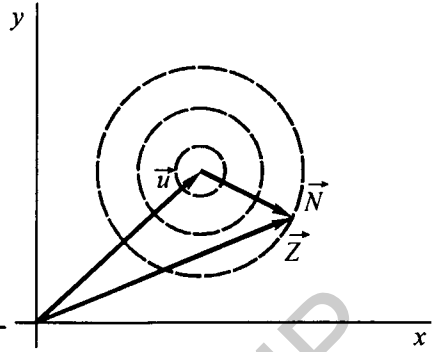


Рис. 4.10. Векторная диаграмма суммы сигнала и помехи

Если задана n -мерная плотность распределения вероятности, то вероятность того, что множество n -мерных векторов находится в области V векторного пространства,

$$P = \int \dots \int_V w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где интегрирование ведется по этой области.

Можно найти также вероятность того, что вектор, определяющий заданную реализацию, попадет в бесконечно малую часть области dV :

$$dP = w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n. \tag{4.46}$$

Эта вероятность называется вероятностью реализации некоторого n -мерного вектора.

Аддитивной смеси сигнала и помехи $Z(t) = u(t) + N(t)$, не содержащей спектральных компонент с частотой, большей F_B , можно сопоставить сумму n -мерных векторов сигнала и помехи. При переходе от одной реализации смеси к другой вектор помехи занимает новое положение относительно вектора сигнала. При этом около конца вектора сигнала можно указать область, за пределами которой вероятность нахождения вектора помехи будет весьма малой. Для этой области радиус

$$d = \sqrt{2TF_B P_{ш, \max}},$$

где $P_{ш, \max}$ – значение максимальной мощности реализации помехи.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие случайного и детерминированного процессов?
2. Какие характеристики случайных процессов Вам известны? Как связаны между собой функция распределения и плотность распределения вероятности? Перечислите свойства плотности распределения вероятности.
3. При каком условии исчерпывающей характеристикой случайной функции является ее одномерная плотность вероятности?
4. Какие числовые характеристики плотности распределения вероятности Вам известны?
5. Что такое центрированный случайный процесс?
6. Как определяются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция?
7. Какие случайные процессы называются стационарными, нестационарными, эргодическими?
8. Как определяется математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция эргодического случайного процесса?
9. Какие модели дискретных случайных процессов Вам известны?
10. Какой случайный процесс называется марковским?
11. Какими основными свойствами обладает корреляционная функция эргодического случайного процесса?
12. Какая связь существует между шириной спектральной плотности мощности и интервалом корреляции случайного процесса?
13. Какой случайный процесс называется нормальным?
14. Как аналитически выражается n -мерная плотность распределения вероятности нормального белого шума?
15. Каким законам распределения подчиняются огибающая и фаза узкополосного нормального случайного процесса?

5. КАНАЛЫ СВЯЗИ

5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КАНАЛАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

5.1.1. Классификация каналов

Каналы связи определяются:

- назначением (*телеграфные, телефонные, телевизионные*);
- физической средой распространения сигналов (*проводные, волноводные, радио*);
- диапазоном используемых частот (*высокочастотные, низкочастотные*);
- способом распространения электромагнитных колебаний (*с открытым или закрытым распространением*);
- характером информационных параметров сигналов на входе и выходе (*непрерывные, дискретные, дискретно-непрерывные*).

В каналах с закрытым распространением электромагнитная волна распространяется по направляющим линиям: *кабельным, волноводным, оптоволоконным*.

В каналах с открытым распространением электромагнитная волна распространяется в *космическом, околоземном или водном пространстве*.

К радиодиапазону относят частоты в пределах от 30 до $3 \cdot 10^{12}$ Гц. Данные о радиодиапазонах приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Диапазон частот	Диапазон волн	Название частот	Название волн
30...300 Гц	1000...10000км	Сверхнизкие (СНЧ)	Мириаметровые Километровые Гектометровые
300...3000 Гц	100...1000км	Инфранизкие (ИНЧ)	
3...30 кГц	10...100км	Очень низкие (ОНЧ)	
30...300 кГц	1...10км	Низкие (НЧ)	
300...3000 кГц	100...1000м	Средние (СЧ)	

Диапазон частот	Диапазон волн	Название частот	Название волн
3...30 МГц	10...100м	Высокие (ВЧ)	Декаметровые
30...300 МГц	1...10м	Очень высокие (ОВЧ)	Метровые
300...3000 МГц	10...100см	Ультравысокие (УВЧ)	Дециметровые
3...30 ГГц	1...10см	Сверхвысокие (СВЧ)	Сантиметровые
30...300 ГГц	1...10мм	Крайне высокие (КВЧ)	Миллиметровые
300...3000 ГГц	0,1...1мм	Гипервысокие (ГВЧ)	Децимиллиметровые

К оптическому относят диапазон частот от 10^{13} до 10^{15} Гц.

5.1.2. Краткие сведения о причинах искажений сигналов

При передаче сигналов по каналу связи их параметры изменяются. Различают *детерминированные* и *случайные* изменения этих параметров. Первые сводятся к изменению масштаба сигнала (усилению или ослаблению) и к задержке его во времени. Изменение масштаба можно скомпенсировать усилением (ослаблением) сигнала. Задержку скомпенсировать нельзя, что сказывается на своевременности доставки сообщения (особенно сильно в протяженных каналах).

При передаче сигнала изменяется и его форма. Искажения формы могут быть детерминированными и случайными, линейными и нелинейными. Они связаны с нарушением соотношений между амплитудами, а также фазами гармонических составляющих сигнала при его передаче. Для того чтобы детерминированные линейные искажения отсутствовали, нужно, чтобы модуль коэффициента передачи линейного четырехполюсника (АЧХ) равнялся постоянной величине K , а время запаздывания было бы постоянным для всех гармонических составляющих сигнала.

Неравномерность АЧХ, ФЧХ и ограниченность ширины полосы канала приводят к искажению формы передаваемых сигналов. Например, прямоугольные импульсы двоичной информационной последовательности «расплываются» во времени. При этом на выходе канала могут одновременно присутствовать отклики от нескольких импульсов: принимаемого в данном тактовом интервале и от принятых в предыдущие интервалы откликов. Подобное наложение может существенно ограничить скорость передачи дискретной информации.

Случайные линейные искажения сигнала возникают при случайном изменении параметров среды распространения: свободного пространства, электрического или оптического кабеля. Рассмотрим искажения, которые возникают в системах радиосвязи. Они во многом определяются характером распространения радиоволн. В околоземном пространстве излученный антенной передатчика радиосигнал, отражаясь от ионизированных слоев, приходит к антенне приемника разными путями. Каждому пути

соответствует свой сигнал с определенной амплитудой и задержкой. Если бы высота ионизированных слоев и концентрация заряженных частиц этих слоев оставались постоянными, то и параметры сигналов были бы постоянными. Однако из-за изменения высоты ионизированных слоев в течение суток и случайного изменения концентрации заряженных частиц параметры сигналов флуктуируют.

Пусть излучаемый передающей антенной сигнал $u(t) = \text{Re} e^{j\omega t}$. На выходе радиоканала суммарный сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \text{Re} \sum_{i=1}^L K_i e^{j\omega(t-\tau_i)} = \text{Re} \dot{K} e^{j\omega t}, \quad (5.1)$$

где L – число путей; K_i – коэффициент ослабления амплитуды сигнала; τ_i – задержка сигнала для i -го пути распространения;

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^L K_i e^{-j\omega\tau_i}. \quad (5.2)$$

Передаточная функция канала, равная отношению выходного сигнала к входному, является случайной величиной из-за случайного изменения параметров. Кроме того, она зависит от частоты.

Перепишем (5.2) в виде

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^L K_i e^{-j\omega\tau_i} = \sum_{i=1}^L K_i \cos \omega\tau_i - j \sum_{i=1}^L K_i \sin \omega\tau_i = X(\omega) + jY(\omega), \quad (5.3)$$

где

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^L K_i \cos \omega\tau_i, \quad Y(\omega) = -\sum_{i=1}^L K_i \sin \omega\tau_i.$$

Для большого числа путей L действительная и мнимая части коэффициента передачи являются нормально распределенными случайными величинами. Они имеют одинаковые дисперсии, а их математические ожидания равны нулю. Можно показать, что одномерное распределение модуля коэффициента передачи подчинено *рэлеевскому* закону:

$$\left. \begin{aligned} w(k) &= \frac{k}{\sigma^2} e^{-k^2/2\sigma^2}, & k \geq 0, \\ w(k) &= 0, & k < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Фаза результирующего сигнала (5.1) распределена в интервале $(0, 2\pi)$ по равномерному закону.

Изменение амплитуды сигнала на входе приемника (на выходе линии связи), определяемое условиями распространения радиоволн, называется *замиранием сигнала*. Замирание, подчиняющееся закону (5.4), называется *рэлеевским*.

Если в месте приема присутствуют случайные (диффузионно-отраженные) сигналы и регулярный (не замирающий) сигнал (луч), который значительно больше первых, то коэффициент передачи канала определяется *обобщенным рэлеевским законом*:

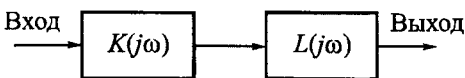


Рис. 5.1. Корректор линейных искажений

$$w(k) = \frac{k}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2} - q^2\right) I_0\left(\frac{k\sqrt{2q}}{\sigma}\right), \quad k \geq 0, \quad (5.5)$$

где q^2 – отношение мощностей регулярной и случайной (флуктуирующей) составляющих; $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Пусть по каналу с замираниями сигнала передается сигнал, причем среднеквадратичное отклонение запаздывания в каждом отдельном луче удовлетворяет условию

$$\Delta\tau \ll 1/F,$$

где F – ширина спектра сигнала.

Если изменения начальных фаз спектральных компонент сигнала на различных частотах почти одинаковы, то все составляющие спектра замирают «дружно», что свидетельствует об одинаковом изменении их амплитуд и фаз. Такие замирания называются *общими* или *гладкими*.

Если условие $\Delta\tau \ll 1/F$ не выполняется, то замирания разных спектральных компонент не одинаковы. Они называются *селективными*.

Детерминированные линейные искажения можно скомпенсировать. Одним из способов компенсации является включение в канал корректирующего четырехполюсника (рис. 5.1). Он подбирается так, чтобы выполнить равенство

$$K(j\omega)L(j\omega) = Ke^{-j\omega t_s}, \quad (5.6)$$

где K – постоянное число; t_s – задержка сигнала; $L(j\omega)$ – коэффициент передачи корректирующего четырехполюсника.

На практике полностью выполнить условие (5.6) не удастся. Поэтому коррекцию делают так, чтобы искажения не выходили за установленные пределы. Случайные линейные искажения с помощью корректирующих четырехполюсников скомпенсировать нельзя.

Нелинейные искажения возникают в выходных цепях передатчиков, входных цепях приемников, усилителях промежуточной частоты и других устройствах, входящих в аппаратуру канала связи, из-за нелинейности их характеристик.

Анализ нелинейных искажений ведут, используя представление нелинейного четырехполюсника в виде безынерционной и инерционной частей. При нелинейном преобразовании выходной спектр сигнала обогащается новыми спектральными составляющими. Часть из них вместе с полезными спектральными составляющими попадает в полосу пропускания линейной части нелинейного четырехполюсника и появляется на его выходе.

Для оценки нелинейных искажений используется коэффициент нелинейных искажений, определяемый как отношение корня квадратного из суммы квадратов амплитуд всех паразитных продуктов преобразования на выходе нелинейного четырехполюсника к амплитуде полезной составляющей. Частным случаем коэффициента нелинейных искажений является *коэффициент гармоник*. Он равен отношению корня квадратного из суммы квадратов амплитуд всех гармоник сигнала, за исключением полезной гармоники, к амплитуде полезной составляющей. Если полезной является первая гармоника, коэффициент

$$K_{\Gamma} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{A_1}. \quad (5.7)$$

5.1.3. Помехи в каналах связи

Помехи, как указывалось выше, разрушают форму сигнала. Это приводит к необратимым потерям передаваемой информации. В зависимости от места нахождения источника различают внутренние и внешние помехи.

К внутренним помехам, возникающим в самом канале, относятся: *флуктуационные* шумы входных каскадов приемника, линий передачи сигналов от передатчика к приемнику и т. д.; электрические сигналы, попадающие в приемник из-за плохой экранировки между каскадами и блоками аппаратуры. Флуктуационные шумы содержат тепловую и дробовую составляющие. *Тепловой шум* возникает из-за теплового движения носителей заряда. *Дробовой шум* обусловлен дискретной природой носителей заряда и возникает на выходах электровакуумных и полупроводниковых приборов. Тепловые и дробовые шумы распределяются по нормальному закону с нулевым средним значением.

В диапазоне оптических частот к тепловым и дробовым шумам добавляется *квантовый шум*. Он возникает в результате преобразования оптического сигнала в электрический ток и обусловлен дискретной природой этого преобразования.

Внешние помехи возникают вне канала связи. К ним относятся: *атмосферные, космические, промышленные, помехи от других систем связи*. Атмосферные помехи возникают в результате физических процессов, протекающих в земной атмосфере. Мощным источником этих помех яв-

ляются грозовые разряды, излучение которых сказывается практически во всем радиодиапазоне.

Космические помехи оказывают влияние на системы радиосвязи, работающие на частотах более 30 МГц. Источниками этих помех являются Солнце, радиозвезды, межзвездные газы.

Промышленные помехи создаются различными промышленными установками, работой электрического транспорта, линиями электропередач. Помехи от других систем связи, радиолокационных и навигационных систем могут превышать другие помехи. Увеличению их уровня способствует нарушение регламента распределения рабочих частот, невысокая стабильность генераторов, плохая фильтрация побочных гармоник излучаемых сигналов. Различают *аддитивные* и *мультипликативные* помехи. Искаженный помехами сигнал можно представить в виде:

$$z(t) = u(t) \cdot \xi_M(t) + \xi_A(t),$$

где $u(t)$ – неискаженный помехами сигнал; $\xi_M(t)$ – мультипликативная помеха; $\xi_A(t)$ – аддитивная помеха.

Причиной возникновения мультипликативной помехи является непрерывное или дискретное изменение параметров тракта передачи.

В зависимости от спектральных и временных характеристик к аддитивной помехе относят сосредоточенную по спектру, импульсную и флуктуационную. К сосредоточенной по спектру помехе относят сигнал другой радиостанции, а также излучение генератора высокой частоты, используемого в промышленности, на транспорте, в медицинском учреждении. Ширина спектральной плотности этой помехи, как правило, намного меньше ширины полосы пропускания системы связи, но интенсивность может быть весьма большой. В диапазоне коротких волн сосредоточенные помехи являются основными. К импульсной помехе относят одиночные импульсы или пакеты из импульсов, следующие с большим периодом повторения. Источниками импульсных помех являются: грозовые разряды, электротранспорт, электрические промышленные установки.

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КАНАЛОВ СВЯЗИ

5.2.1. Модель непрерывного канала без шума

Математическая модель канала связи, необходимая для проведения исследований, считается заданной, если известны оператор преобразования, а также условия и ограничения, накладываемые как на канал, так и на входные и выходные сигналы. Математическая модель реального канала связи является достаточно сложной. Это объясняется следующими причинами:

- 1) оператор L наряду с линейными содержит также нелинейные и параметрические преобразования;
- 2) в канале присутствуют помехи;
- 3) входной сигнал может быть случайным.

Часто сложная математическая модель не позволяет найти решение поставленной задачи. Поэтому пользуются упрощенными моделями. В них используют представление канала в виде последовательно соединенных четырехполюсников (линейных, нелинейных, параметрических). Упрощение задачи дает также выделение из канала его дискретной, непрерывной и дискретно-непрерывных частей. Результаты анализа во многом зависят от условий и ограничений, которые накладываются на сигналы и помехи. Это касается законов их распределения и физических характеристик сигналов, таких, как длительность, ширина спектра, мощность.

Например, при анализе кабельных каналов используют линейный четырехполюсник с постоянным коэффициентом передачи (рис. 5.2). Сигналы на его входе и выходе являются непрерывными по уровню и времени, а входной сигнал лежит в заданной полосе частот. Мощность сигнала ограничена. Помеха на входе канала отсутствует. Модель имеет существенный недостаток, так как не учитывает присутствия помех, которые всегда имеются в реальных каналах.

5.2.2. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом

Математическая модель, более точно описывающая реальные кабельные каналы, учитывает присутствие помех. Она включает: представление канала в виде линейного четырехполюсника с постоянными параметрами и заданной шириной полосы; описание сигналов на входе и выходе канала; описание помех.

Если входной сигнал является случайным, то задают не только его физические характеристики, но и n -мерную плотность распределения вероятности $w(\vec{x})$. То же относится и к помехе на выходе канала. Для нее задают физические характеристики (например, среднюю мощность) и n -мерную плотность распределения вероятности $w(\vec{r})$. Наиболее часто применяемой математической моделью помехи является эргодический нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и n -мерной плотностью вида (4.34). Как правило, эта помеха является аддитивной. Поэтому смесь сигнала и помехи (шума) записывают в виде

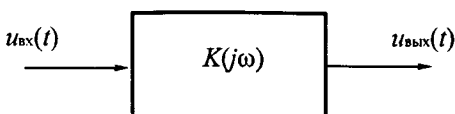


Рис. 5.2. Простая модель непрерывного канала

$$Z(t) = ku(t - \tau) + \xi(t),$$

где k – постоянный коэффициент, определяющий масштаб (усиление или ослабление) сигнала; τ – постоянная задержка сигнала.

В случае присутствия в смеси одного из возможного множества сигналов используют условную плотность распределения вероятности:

$$w(\vec{y}/\vec{u}) = w(y_1, y_2, \dots, y_n / u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n F(\vec{y}/\vec{u})}{\partial \vec{y}},$$

где функция распределения определяется вероятностью того, что для заданного сигнального вектора выборочные значения смеси меньше или равны значениям неслучайных аргументов:

$$F(\vec{y}/\vec{u}) = P[z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_2, \dots, z_n \leq y_n / u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Учитывая, что эти аргументы $y_k = x_k + r_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и полагая, что $u_k = x_k$, найдем эту вероятность:

$$\begin{aligned} P[z_1 \leq x_1 + r_1, z_2 \leq x_2 + r_2, \dots, z_n \leq x_n + r_n] &= \\ = P[z_1 - u_1 \leq r_1, z_2 - u_2 \leq r_2, \dots, z_n - u_n \leq r_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, условная плотность равна плотности распределения шума $w(\vec{y}/\vec{u}) = w(\vec{r})$, причем эту условную плотность можно найти по формуле (4.34) с помощью подстановки:

$$\xi(t) = Z(t) - ku(t - \tau).$$

Условная плотность

$$w(\vec{y}/\vec{u}) = \frac{1}{(\sigma \cdot \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - ku(t - \tau)]^2 dt}, \quad (5.8)$$

где N_0 – мощность шума, приходящаяся на единицу полосы, равная отношению этой мощности σ^2 и верхней граничной частоты F_B .

Полученное выражение называется *функцией правдоподобия*. Она позволяет определить вероятность реализации смеси сигнала и шума на выходе канала при условии присутствия на входе заданной реализации сигнала.

5.2.3. Канал с неопределенной фазой сигнала

Данная математическая модель используется для описания каналов связи с флуктуациями сред, по которым распространяются сигналы. Это радиоканалы в КВ и УКВ диапазонах, некоторые проводные каналы и др. Флуктуации среды случайным образом изменяют задержку сигнала, что приводит к случайному изменению его фазы.

Структура канала определяется линейным четырехполосником (рис. 5.3).

Входной сигнал

$$u_{\text{вх}}(t) = \eta \cos \omega_0 t. \quad (5.9)$$

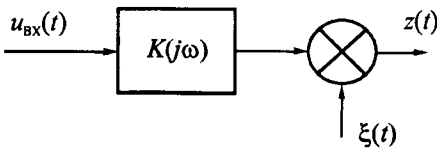


Рис. 5.3. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом

Сигнал на выходе канала

$$u_{\text{вых}}(t) = K\eta \cos[\omega_0(t - \tau)] = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.10)$$

где амплитуда A сигнала равна ослабленной (усиленной) в K раз амплитуде входного сигнала; φ – начальная фаза сигнала, равная $-\omega_0 \tau_0$.

При прохождении по каналу связи сигнал приобретает случайный набег фазы из-за флуктуации длины пути распространения и нестабильности частот опорных генераторов, которые входят в состав аппаратуры канала связи.

Смесь сигнала и шума на выходе канала

$$Z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \xi(t), \quad (5.11)$$

где амплитуда повторяет изменения амплитуды входного сигнала; фаза случайна и имеет равномерный закон распределения в интервале $(0, 2\pi)$ (см. рис. 4.8); шум является нормальным белым шумом с равномерной спектральной плотностью N_0 и нулевым средним значением.

Функция правдоподобия (условная плотность распределения вероятности) определяется выражением:

$$w(\bar{y} / A, \varphi) = \frac{1}{(\sigma \cdot \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - A \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 dt} \quad (5.12)$$

Выражение (5.12), в отличие от (5.8), зависит от случайных параметров: фазы и амплитуды сигнала. Поскольку фаза в данном случае не модулирована передаваемым сообщением, ее относят к паразитным параметрам.

Математическая модель канала с общими замираниями описывается аналогично, но множитель K , входящий в (5.10), как и фаза, считается паразитным параметром.

Если распределение огибающей подчиняется уравнению (5.4), то в этом случае канал связи называется *каналом с рэлеевскими замираниями*.

Его амплитуда меняется случайным образом в соответствии с сообщением.

Для дискретного источника значения амплитуды характеризуются заданными вероятностями, а для непрерывного – плотностью распределения вероятности.

5.2.4. Канал с межсимвольной интерференцией и аддитивным шумом

Межсимвольная интерференция возникает при передаче двоичных сигналов, если скорость передачи больше ширины полосы пропускания канала.

В радиоканалах причиной межсимвольной интерференции является многолучевое распространение радиоволн. В этом случае к аддитивному шуму добавляется специфическая помеха, равная сумме откликов канала на импульсы двоичного сигнала, которые были переданы ранее. Математическая модель канала описывает входной сигнал, структуру канала, которая определяется коэффициентом передачи, также описывает выходной сигнал, специфическую помеху и флуктуационный шум.

Более простой является модель, для которой параметры коэффициента передачи не меняются во времени, а сигналы на входе и выходе связаны детерминированными соотношениями.

5.2.5. Математические модели дискретных каналов связи

Сигналы на входе и выходе дискретного канала являются дискретными.

Математическая модель этого канала определяется:

а) алфавитом кодовых символов на входе $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ и на выходе $\{b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$;

б) априорными вероятностями появления символов на входе канала;

в) вероятностями перехода $P(b_j/a_i)$, которые определяют вероятность того, что при передаче символа a_i на выходе канала появится символ b_j .

Если вероятность $P(b_j/a_i)$ не зависит от времени и от ранее принятых символов, то такой канал называется *однородным и без памяти*.

В симметричном однородном канале без памяти алфавит кодовых символов на входе совпадает с алфавитом на выходе, а вероятности перехода определяются равенствами

$$P(b_j/a_i) = \begin{cases} p/(m-1) & \text{при } i \neq j, \\ 1-p & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (5.13)$$

Любой символ a_i может перейти в другой символ b_j с равной вероятностью $p/(m-1)$. Эти переходы определяют вероятность ошибки, равную p . Кроме того, любой входной символ с вероятностью $(1-p)$, воспроизводится на выходе канала правильно.

В двоичном, симметричном канале без памяти $m = 2$ и

$$P(b_j/a_i) = \begin{cases} p & \text{при } i \neq j, \\ 1-p & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (5.14)$$

Вероятности перехода (5.14) схематично показаны на рис. 5.4. Вероятность перехода нуля в нуль равна $1-p$ а нуля в единицу равна p .

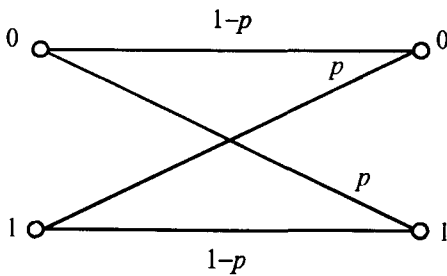


Рис. 5.4. Переходные вероятности в двоичном, симметричном канале

Соответственно, вероятность перехода единицы в единицу равна $1 - p$, а вероятность перехода единицы в нуль равна p .

Ошибка называется одно-, двух- и т. д., q -кратной, если из n передаваемых символов q переданы с ошибкой. Вектором ошибки в двоичном канале $\{e_i\}$ является последовательность нулей и единиц, каждый элемент

которой определен суммой по модулю два элементов входной и выходной последовательностей, находящихся на одних и тех же позициях, т. е.

$$\{e_i\} = \{a_i + b_i\}, i = 1, 2, \dots, n.$$

где $+$ – знак суммирования по модулю два.

Очевидно, что q -кратной ошибке в двоичном симметричном канале будет соответствовать такой вектор ошибки, у которого на любых позициях число единиц равно q . На остальных $n - q$ позициях этого вектора элементы равны нулю. В симметричном канале без памяти статистическая зависимость между передаваемыми символами отсутствует. Поэтому вероятность того, что произойдет q ошибок, расположенных как угодно на протяжении последовательности длиной n , равна:

$$P(q) = C_n^q \left(\frac{p}{m-1} \right)^q (1-p)^{n-q} = \frac{n!}{q!(n-q)!} \left(\frac{p}{m-1} \right)^q (1-p)^{n-q}, \quad (5.15)$$

где C_n^q – биномиальный коэффициент, равный числу различных сочетаний q ошибок в последовательности длиной n .

Несимметричный однородный двоичный канал без памяти отличается от рассмотренного тем, что вероятности перехода зависят от того, какой символ передается. Поэтому $P(1/0) \neq P(0/1)$ (рис. 5.5).

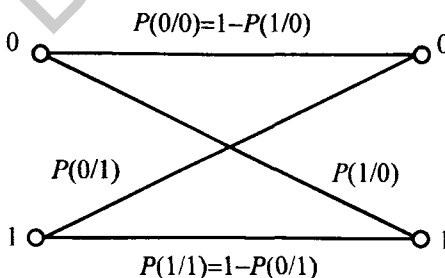


Рис. 5.5. Переходные вероятности в двоичном несимметричном канале

Симметричный однородный двоичный канал без памяти со стиранием содержит дополнительный выходной символ, обозначенный на рис. 5.6 знаком «?». Вероятность правильной передачи нуля и единицы в двоичном симметричном канале определяется не только условными вероятностями перехода,

но и вероятностью стирания. Состояние стирания символа в канале связи возникает всякий раз, когда решающая схема демодулятора, принимающая решение о том, какой из символов 0 или 1 передается, не может надежно опознать этот символ.

Расчет вероятностей ошибок в двоичных каналах связи приведен в главе 7.

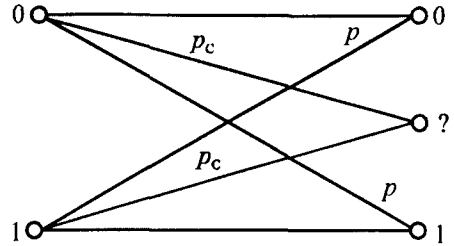


Рис. 5.6. Переходные вероятности в симметричном однородном канале без памяти и со стиранием

5.2.6. Математическая модель дискретно-непрерывного канала связи

В этом канале входные сигналы дискретны, а выходные – непрерывны.

Математические модели дискретно-непрерывного канала с аддитивным гауссовым белым шумом почти совпадает с моделями непрерывного канала, за исключением того, что на входе вместо непрерывного задают дискретный сигнал, который определяется количеством дискретных значений (букв алфавита) и соответствующими априорными вероятностями. Функция правдоподобия

$$w(\vec{y} / a_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_i(t)]^2 dt} \quad (5.16)$$

где a_i – i -я буква; $u_i(t)$ – форма сигнала, соответствующая этой букве.

Функция (5.16) задается при условии, что все параметры сигнала (за исключением информационного параметра) являются известными точно. Но если сигнал содержит случайные параметры, функция правдоподобия становится случайной.

Если плотность распределения вероятности (5.16) не зависит от времени и от того, какие символы передавались ранее, дискретно-непрерывный канал называется *однородным (стационарным) и без памяти*. Если эта плотность зависит от времени, канал называется *нестационарным*. Канал имеет память, если плотность распределения вероятности зависит от предыдущих символов.

5.2.7. Особенности оптических каналов связи

Оптические каналы связи могут быть *ненаправленными и направленными*.

В ненаправленном оптическом канале электромагнитное поле распространяется в области пространства, которое определяется диаграммой

направленности передающей антенны. Средой распространения в этом случае является свободное космическое, воздушное или водное пространство.

В направленных каналах для распространения электромагнитного поля используются специальные волноводы – оптические кабели.

В простейшем типе ненаправленного канала – космическом пространстве искажения сигнала часто отсутствуют. Изменяется только его амплитуда и задержка.

Если в среде распространения появляются физические неоднородности и посторонние частицы, то характер принимаемого сигнала будет определяться также и эффектами, связанными с рассеянием электромагнитного поля этими частицами и неоднородностями. При рассеивании, как правило, возникает многолучевое распространение, что приводит при флуктуациях физических неоднородностей и положений посторонних частиц к замираниям сигнала.

В направленном канале оптический луч распространяется в оптическом кабеле, основным элементом которого является оптический волновод – круглый стержень из оптически прозрачного диэлектрика. Оптические волноводы называют также *волоконными световодами*.

Основными параметрами оптических волноводов являются: *затухание сигнала, дисперсия и полоса пропускания*.

Затухание обусловлено в основном поглощением энергии в диэлектрике и ее рассеянием из-за неоднородностей, которые возникают при изготовлении оптического волновода. Дисперсия обусловлена множеством типов колебаний (модами) распространяющегося поля. Эти колебания в направленном канале накладываются друг на друга, причем каждая мода имеет свой путь и свою скорость распространения. Поэтому при наложении множества задержанных во времени колебаний возникает эффект, напоминающий многолучевое распространение радиоволн.

При передаче импульсов вследствие этого эффекта возникает искажение их формы – импульсы удлинняются. Это ведет к ограничению скорости передаваемой информации.

Особенностью оптических систем связи является случайный характер сигнала на выходе преобразователя (фотодетектора) принятого света (поля) в электрическое напряжение или ток, вне зависимости от того, является оптическое поле стохастическим из-за его рассеяния или детерминированным. Процесс выделения поля фотодетектором сопровождается помехами различных типов. В ненаправленном канале наиболее мощной помехой является фоновое излучение. Его можно существенно уменьшить, применяя оптические волноводы. Среди других помех наибольшее влияние оказывают флуктуационные шумы, возникающие в фотодетекторе, во входной цепи усилителя оптического приемника, а также в других усилителях.

5.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ НА ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВЕНЬЯ КАНАЛОВ СВЯЗИ

5.3.1. Постановка задачи

При прохождении сигналов и помех через каналы связи происходит изменение их реализаций.

Для оценки качества передачи информации необходимо знать эти изменения, уметь вести соответствующие расчеты.

Расчеты законов распределения случайных процессов и их статистических характеристик для большинства реальных каналов связи являются достаточно сложными.

Упрощение расчетов может быть достигнуто: а) разбиением канала связи на отдельные функционально определенные блоки; б) представлением каждого отдельного блока в виде последовательно соединенных линейных и нелинейных четырехполюсников; в) разбиением нелинейных четырехполюсников на две части: линейную (инерционную) и нелинейную (безынерционную).

Применение подобной идеализации позволяет свести сложную задачу расчета к двум частным: а) расчету закона распределения на выходе линейного четырехполюсника; б) расчету закона распределения на выходе нелинейного четырехполюсника.

Каждая из этих задач формулируется следующим образом. Для заданной плотности распределения вероятности входного случайного процесса $\xi_1(t)$ найти плотность распределения вероятностей выходного случайного процесса $\xi_2(t)$.

Наиболее сложной является задача определения плотности на выходе линейного (инерционного) четырехполюсника, которая легко решается только для одного частного случая, когда на входе действует нормальный шум. Менее сложной (но трудно решаемой задачей) является задача определения плотности вероятности случайного процесса на выходе безынерционного, нелинейного звена.

Как показано в четвертой главе, по известной плотности вероятности можно вычислить моменты распределения, в том числе среднее значение и корреляционную функцию. В ряде случаев однако можно вычислить эти характеристики без определения соответствующих плотностей распределения вероятностей.

5.3.2. Прохождение случайных сигналов и помех через линейные системы

Пусть четырехполюсник является линейным и на его вход подан стационарный случайный процесс с нулевым средним значением. Спектральная

плотность этого процесса $G_1(\omega)$, а корреляционная функция – $B_1(\tau)$. Коэффициент передачи четырехполосника равен $K(j\omega)$.

Требуется найти среднее значение, корреляционную функцию и соответствующую ей спектральную плотность мощности случайного процесса на выходе четырехполосника.

Если на входе присутствует стационарный случайный процесс с нулевым средним значением, то на выходе установившийся процесс также будет стационарным.

Можно показать, что спектральная плотность мощности входного стационарного случайного процесса находится по формуле спектральной плотности мощности детерминированного сигнала:

$$G_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_1(j\omega)|^2}{T}, \quad (5.17)$$

где $S_1(j\omega)$ – спектральная плотность отрезка входного стационарного случайного процесса $\xi_1(t)$ в интервале T .

Спектральная плотность мощности выходного случайного стационарного процесса

$$G_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_1(j\omega)K(j\omega)|^2}{T} = G_1(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2, \quad (5.18)$$

так как спектральная плотность

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega)K(j\omega).$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе линейного четырехполосника

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (5.19)$$

Если линейный четырехполосник задан импульсной характеристикой $h(t)$, то его реакция на входной случайный процесс $\xi_1(t)$ может быть вычислена с помощью интеграла Дюамеля

$$\xi_2(t) = \int_0^t h(\tau) \xi_1(t - \tau) d\tau. \quad (5.20)$$

Если входной случайный процесс является стационарным, то в этом случае при вычислении среднего значения и корреляционной функции можно пользоваться формулами (4.17), (4.19). Среднее значение

$$\begin{aligned} M\{\xi_2(t)\} &= M\left\{\int_0^t h(\tau) \xi_1(t - \tau) d\tau\right\} = \\ &= M\left\{\xi_1(t - \tau)\right\} \int_0^t h(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Корреляционная функция

$$\begin{aligned}
 B_2(t_1, t_2) &= M\{\xi_2(t_1)\xi_2(t_2)\} = \int_0^{t_1} h(\tau_1) \int_0^{t_2} h(\tau_2) M[\xi_1(t_1 - \tau_1)\xi_1(t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &= \int_0^{t_1} h(\tau_1) \left[\int_0^{t_2} h(\tau_2) B_1(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2 \right] d\tau_1. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Как следует из (5.21), (5.22), при преобразовании линейным четырехполосником случайного стационарного процесса он становится нестационарным.

Признаками нестационарного случайного процесса являются: а) зависимость среднего значения от времени; б) зависимость корреляционной функции не от разности $t_2 - t_1$, а от моментов времени t_2 и t_1 .

Отметим следующие особенности, связанные с прохождением случайных сигналов и помех через линейные системы.

1. Если входной случайный процесс $\xi_1(t)$ подчиняется нормальному закону, то и выходной случайный процесс $\xi_2(t)$ также подчиняется нормальному закону.

2. Случайный процесс $\xi_1(t)$, подчиняющийся любому закону распределения, при прохождении через линейный четырехполосник нормализуется, причем закон распределения случайного процесса $\xi_2(t)$ тем ближе к нормальному закону, чем меньше ширина полосы пропускания этого четырехполосника.

Пример 5.1. На входе линейной цепи (рис. 5.7) действует нормальный белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью $0,5N_0$. Найти спектральную плотность мощности, корреляционную функцию $B_2(\tau)$ и дисперсию σ_2 на выходе линейной цепи.

Решение. Коэффициент передачи линейной цепи

$$K(j\omega) = \frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Спектральную плотность на выходе найдем по формуле (5.18):

$$G_2(\omega) = 0,5N_0 |K(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе линейной цепи определяется формулой (5.19):

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Дисперсия $\sigma_2^2 = B_2(0) = N_0 / 4RC$.

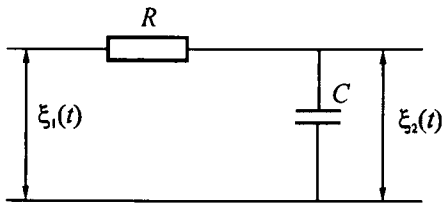


Рис. 5.7. Линейная цепь

операторе нелинейного преобразования найти многомерную плотность распределения вероятности случайной величины на выходе нелинейной системы.

Если многомерная плотность будет найдена, то по ней нетрудно найти статистические характеристики (моменты n -го порядка).

Задача более наглядна и понятна для одномерного случая, когда нелинейный оператор представлен только одним уравнением $y = f(x)$, а плотность распределения вероятности входного случайного процесса $\xi_1(t)$ равна $w(x)$.

Пусть существует обратная функция $x = \varphi(y)$. Тогда, если случайная величина ξ_1 находится в пределах $x_0 < \xi_1 \leq x_0 + dx$, то случайная величина ξ_2 на выходе будет находиться в пределах $y_0 < \xi_2 \leq y_0 + dy$ (рис. 5.8). Вероятности этих событий равны. Поэтому будут равны и заштрихованные площади:

$$w(x)dx = w(y)dy.$$

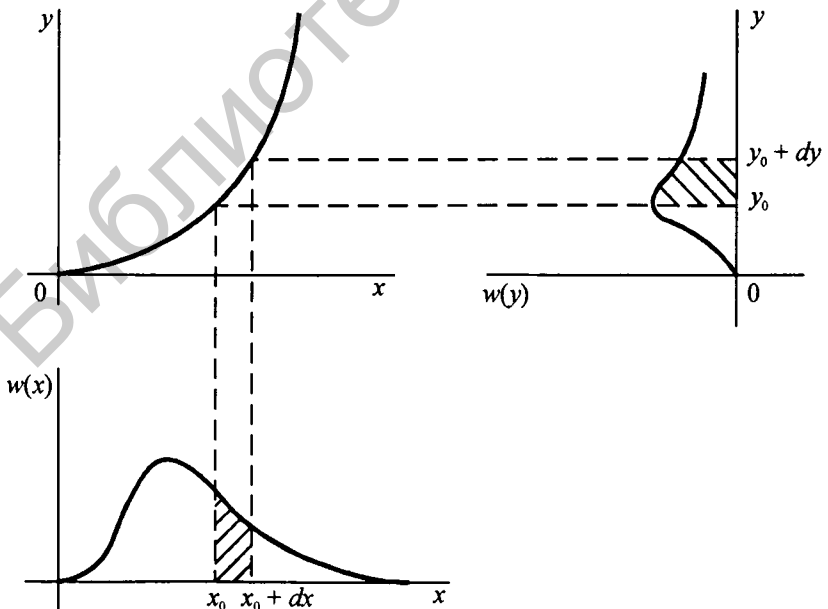


Рис. 5.8. Преобразование плотности распределения вероятности безынерционной нелинейной цепью

Из полученного равенства находим

$$w(y) = w(x) \frac{1}{|dy/dx|} = w[\varphi(y)] \frac{1}{|dy/dx|}. \quad (5.23)$$

Если известны оператор преобразования и двумерная плотность распределения вероятности входного случайного процесса, то статистические характеристики случайного процесса (среднее значение и корреляционная функция) на выходе нелинейного (безынерционного) узла или блока определяются по формулам, которые приведены ниже.

Среднее значение

$$M\{\xi_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) w(x_1, t) dx_1. \quad (5.24)$$

Корреляционная функция

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.25)$$

Пример 5.2. Оператор нелинейного преобразования задан уравнениями (рис. 5.9)

$$\begin{aligned} y &= x, & x > 0; \\ y &= 0, & x \leq 0. \end{aligned}$$

Плотность распределения случайной величины $\xi(t)$ на входе

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Требуется найти $w(y)$ плотность распределения случайной величины на выходе нелинейной цепи (рис. 5.10).

Решение. Задача связана с прохождением случайного сигнала через диод с линейной характеристикой. Следует обратить внимание на то, что, какие бы ни были по величине отрицательные значения случайного процесса $\xi_1(t)$, значения случайного процесса $\xi_2(t)$ равны нулю (рис. 5.11). Следовательно, вероятность того, что случайная

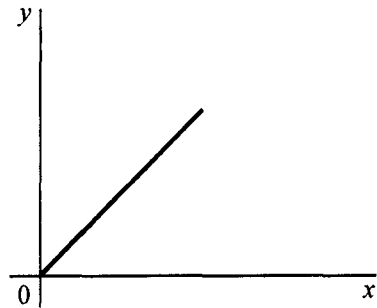


Рис. 5.9. Оператор нелинейного преобразования

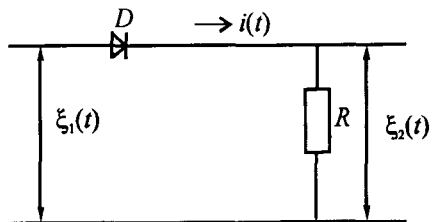


Рис. 5.10. Нелинейная цепь

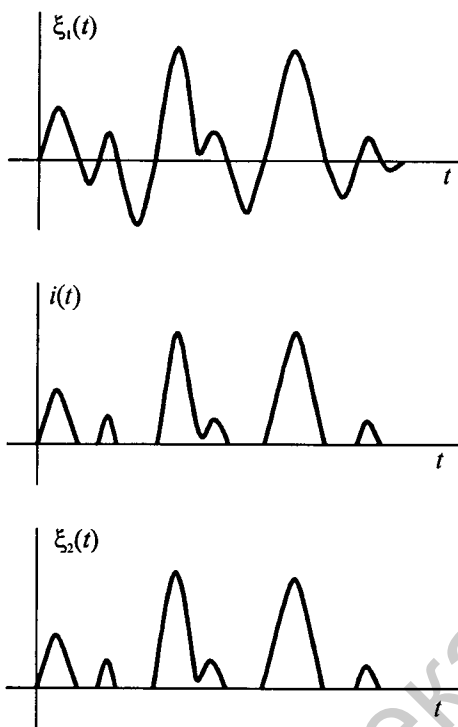


Рис. 5.11. Временные диаграммы на входе и выходе нелинейной цепи

величина на выходе цепи в некоторый момент времени t равна нулю, определяется выражением:

$$P[\xi_2(t) = 0] = \int_{-\infty}^0 \omega(x) dx = \\ = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0,5.$$

Для положительных значений случайной величины

$$w(y) = w(x) \frac{1}{|dy/dx|} = \\ = w[\varphi(y)] \frac{1}{|dy/dx|} = w[\varphi(y)],$$

так как производная $dy/dx = 1$, а $w[\varphi(y)] = w(y)$.

Окончательное выражение для спектральной плотности

$$w(y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}, y > 0 \\ w(y) = 0,5, y = 0.$$

5.3.4. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через когерентный детектор

Когерентное синхронное детектирование и вопросы, связанные с реализацией детекторов, рассмотрены в главе 3.

При когерентном детектировании сигнала, его спектр из области высоких переносится в область низких частот с сохранением соотношений между спектральными составляющими. Это позволяет на выходе детектора получить неискаженный низкочастотный модулирующий сигнал.

При подаче на вход когерентного детектора суммы гармонического сигнала и узкополосного шума, наряду со спектральными составляющими полезного сигнала, в область нижних частот будут перенесены и спектральные составляющие шума. В результате выделенный сигнал будет сопровождаться низкочастотной шумовой компонентой, разрушающей форму этого сигнала.

Проанализируем прохождение смеси сигнала и шума через когерентный детектор, полагая, что полезный сигнал является гармоническим сигналом

с постоянной амплитудой, постоянной несущей частотой и постоянной начальной фазой, а помеха является узкополосным случайным процессом, квадратурные составляющие которого подчинены нормальному закону с нулевыми средними значениями и с одинаковыми дисперсиями [см. формулу (4.40)].

При прохождении через детектор смесь полезного сигнала и шума подвергается двум операциям: вначале умножению на опорное напряжение $u_{\text{оп}}(t) = V \cos \omega_0 t$, а затем – линейной фильтрации фильтром нижних частот.

При фильтрации случайный процесс нормализуется. Определим параметры нормального закона распределения: среднее значение и дисперсию.

Напряжение на входе детектора определяется гармоническим сигналом и узкополосным случайным процессом, анализ которого приведен в разделе 4.5.

$$u_{\text{вх}}(t) = \eta \cos(\omega_0 t + \varphi) + A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на выходе умножителя:

$$u_{\text{п}}(t) = u_{\text{вх}}(t) u_{\text{оп}}(t) = 0,5 B \eta \cos \varphi + 0,5 B \eta \cos(2\omega_0 t + \varphi) + 0,5 B A(t) + 0,5 B A(t) \cos 2\omega_0 t - 0,5 B B(t) \sin 2\omega_0 t.$$

Считая, что в полосе прозрачности ФНЧ попадают только низкочастотные компоненты напряжения, находим

$$u_{\text{вых}}(t) = 0,5 B \eta \cos \varphi + 0,5 B A(t).$$

Первая (сигнальная) составляющая выходного напряжения определяет среднее значение одномерной плотности (см. рис. 5.12).

Вторая (шумовая) составляющая этого напряжения определяет дисперсию одномерной плотности:

$$M\{[u_{\text{вых}}(t) - \overline{u_{\text{вых}}(t)}]^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [0,5 B A(t)]^2 dt = \frac{1}{4} B^2 \overline{A^2(t)}.$$

Среднее значение сигнальной составляющей определяется амплитудой полезного сигнала на входе, амплитудой опорного напряжения и фазой φ (разностью начальных фаз сигнала и опорного напряжения).

Дисперсия шумовой компоненты определяется произведением квадрата амплитуды опорного сигнала и дисперсии соответствующей компоненты узкополосного шума.

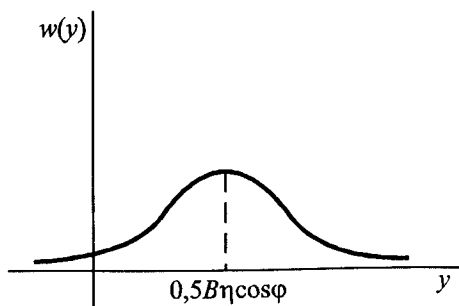


Рис. 5.12. Одномерная плотность распределения вероятности случайной величины на выходе детектора

Отношение сигнал/шум на выходе часто используют в качестве меры помехоустойчивости когерентного детектора:

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{0,25B^2\eta^2 \cos^2 \varphi}{0,25B^2 \overline{A^2(t)}} = \frac{\eta^2}{\overline{A^2(t)}} \cos^2 \varphi.$$

Это отношение в $2\cos^2\varphi$ раз больше отношения сигнал/шум на входе когерентного детектора.

Действительно, мощность сигнала на входе:

$$P_{\text{свх}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = 0,5 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2 dt = 0,5\eta^2.$$

Мощность шума на входе когерентного детектора:

$$P_{\text{швх}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t]^2 dt = \frac{1}{2} \overline{A^2(t)} + \frac{1}{2} \overline{B^2(t)} = \overline{A^2(t)},$$

где

$$\overline{A^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) dt = \overline{B^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt.$$

Отношение сигнал/шум на входе когерентного детектора:

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{0,5\eta_0^2}{\overline{A^2(t)}}.$$

5.3.5. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через некогерентный детектор

Некогерентный детектор предназначен для выделения огибающей амплитудно-модулированного сигнала с большим уровнем несущей, а также огибающей двоичного АМ сигнала.

Если детектирование не сопровождается помехой, то напряжение на выходе детектора повторяет форму модулирующего сигнала (см. п. 3.9.1, 3.9.2).

При наличии помехи это напряжение пропорционально огибающей смеси сигнала и шума, которая не совпадает с формой модулирующего сигнала. Отличие тем больше, чем больше уровень помехи.

Для гармонического сигнала и узкополосного нормального шума одномерная плотность распределения этой огибающей определяется формулой (4.44).

При весьма малом сигнале плотность вероятности огибающей близка к рэлеевскому закону [см. формулу (4.43)], а при увеличении амплитуды сигнала эта плотность стремится к нормальному закону.

Уровень полезного сигнала оказывает влияние и на погрешность воспроизведения модулирующего сигнала.

Кроме отношения сигнал/помеха, полезным качественным показателем является выигрыш (проигрыш) в этом отношении $K = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}}$, где $\rho_{\text{вых}}$, $\rho_{\text{вх}}$ – отношения сигнал/помеха на выходе и входе соответственно.

Однако расчет выигрыша затруднен.

Часто в качестве меры помехоустойчивости некогерентного детектора используют отношение:

$$K_1 = \frac{M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\}}{M\{\eta_{\text{ш}}(t)\}},$$

где $M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\}$ – среднее значение напряжения на выходе некогерентного детектора, когда входное напряжение равно сумме полезного сигнала и помехи, $M\{\eta_{\text{ш}}(t)\}$ – среднее значение того же напряжения, когда входное напряжение равно напряжению только одной помехи.

Расчет коэффициента K_1 намного проще коэффициента K .

Пусть входной сигнал является гармоническим колебанием с постоянной амплитудой, а помеха – узкополосным нормальным случайным процессом с медленно меняющейся амплитудой и начальной фазой.

Среднее значение напряжения на выходе детектора прямо пропорционально первому моменту плотности распределения вероятности огибающей суммы сигнала и помехи:

$$M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\} = \int_0^{\infty} \alpha w(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2 + \eta^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\eta}{\sigma^2}\right) d\alpha.$$

Вычисление этого интеграла дает следующий результат:

$$M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma e^{-\frac{\eta^2}{4\sigma^2}} \left\{ I_0\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\eta^2}{2\sigma^2} \left[I_0\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) + I_1\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) \right] \right\}, \quad (5.26)$$

где $I_0(x)$, $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

При отсутствии полезного сигнала $\eta = 0$ из формулы (5.26) следует, что

$$M\{\eta_{\text{ш}}(t)\} = \sqrt{\pi/2} \sigma. \quad (5.27)$$

Используя формулы (5.26), (5.27), вычислим отношение

$$K_1 = \frac{M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\}}{M\{\eta_{\text{ш}}(t)\}} = e^{-a^2/4} \left\{ I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{2} \left[I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right] \right\},$$

где $a = \eta/\sigma$ – безразмерная амплитуда сигнала, равная отношению амплитуды входного сигнала к среднеквадратичному значению помехи.

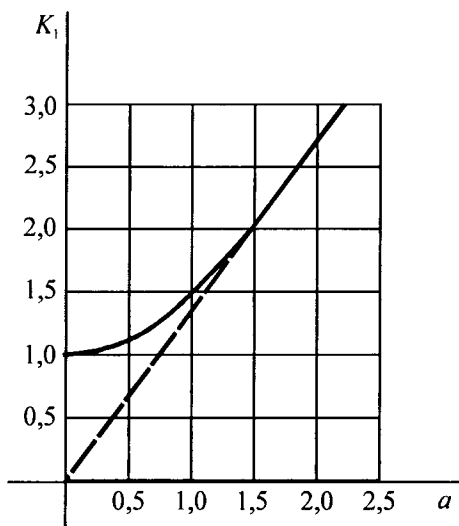


Рис. 5.13. Зависимость отношения среднего значения напряжений на выходе детектора (когда входное напряжение детектора равно сумме полезного сигнала и шума и когда входное напряжение равно напряжению одного шума) от безразмерной амплитуды входного сигнала

На рис 5.13 построена кривая зависимости $K_1 = f(a)$, которая дает наглядное представление о протекающих в некогерентном детекторе процессах.

При малых отношениях сигнал/помеха на входе существенным приращением аргумента (безразмерной амплитуды сигнала) соответствуют весьма малые приращения функции. Этот эффект называется явлением *подавления слабого сигнала помехой*. При наличии подавления отношение сигнал/помеха на выходе детектора существенно меньше отношения на его входе, а напряжение не повторяет форму модулирующего сигнала.

При больших отношениях сигнал/помеха увеличение безразмерной амплитуды сигнала приводит к увеличению коэффициента K_1 . Эффект подавления слабого сигнала помехой пропадает, а напряжение на выходе детектора с точностью до постоянной величины совпадает с модулирующим сигналом.

Контрольные вопросы

1. По каким признакам классифицируются каналы связи?
2. Что понимают под линейными и нелинейными искажениями сигналов при их передаче по каналу связи?
3. Что понимают под аддитивной помехой? В чем ее отличие от мультипликативной помехи?
4. Как математически описываются дискретный, дискретно-непрерывный и непрерывный каналы?
5. Какие основные задачи решаются при рассмотрении прохождения случайных воздействий через канал связи и его звенья?

6. ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ И КОДИРОВАНИЯ СООБЩЕНИЙ

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

6.1.1. Количество информации в дискретных сообщениях.

Понятие энтропии

При анализе систем связи используют количественную меру, позволяющую оценивать объем информации, содержащейся в сообщении, и объем передаваемой информации.

Для определения этой количественной меры обратимся к модели дискретного канала связи (см. раздел 5.2). Рассмотрим случай, когда кодовые символы на входе $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ независимы, а источник определен априорными вероятностями $P(a_i)$. При отсутствии помех принятые символы $\{b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ равны передаваемым. При наличии помех любой символ на входе может перейти в любой другой символ на выходе с вероятностью перехода $P(b_j/a_i)$. Зная априорные вероятности и вероятности перехода, можно вычислить вероятность появления символа a_i при условии, что на выходе наблюдался символ b_j . Эта условная вероятность $P(a_i/b_j)$ называется *апостериорной (послеопытной) вероятностью*.

Апостериорная вероятность находится из известного равенства, определяющего совместную вероятность появления событий a_i, b_j .

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) P(b_j/a_i) = P(b_j) P(a_i/b_j). \quad (6.1)$$

Апостериорная вероятность приема символа a_i при условии реализации символа b_j

$$P(a_i/b_j) = P(a_i) P(b_j/a_i) / P(b_j). \quad (6.2)$$

Вероятность $P(a_i)$ определяется по результатам наблюдения за работой дискретного источника в прошлом и называется *априорной вероятностью*. Вероятность $P(b_j/a_i)$ определяет степень правдоподобия приема символа a_i , если был принят символ b_j .

Эта вероятность называется функцией правдоподобия и обозначается буквой $L(a_i)$. Вероятность $P(b_j)$ является известной величиной и определяется из условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) = \sum_{i=1}^m kP(a_i)P(b_j/a_i) = 1,$$

где k – постоянная величина.

С учетом приведенных замечаний апостериорная вероятность

$$P(a_i/b_j) = kP(a_i)L(a_i). \quad (6.3)$$

Рассмотрим передачу символа a_i . Вероятность его появления на входе канала определяется априорной вероятностью $P(a_i)$. Приняв символ b_j , приемник располагает дополнительными данными относительно переданного символа a_i . Его неопределенность теперь представляется новым значением вероятности $P(a_i/b_j)$. Если это значение равно значению априорной вероятности, то в результате приема каких-либо новых сведений о передаваемом символе не поступает. Если $P(a_i/b_j) > P(a_i)$, то шанс приема символа a_i возрастает и при сравнении указанных вероятностей извлекается информация об этом символе. За меру количества извлекаемой информации принимают величину

$$I(a_i, b_j) = \log \frac{P(a_i/b_j)}{P(a_i)}. \quad (6.4)$$

Основание логарифма может быть любым. Принято использовать основание два, а количество информации измерять в двоичных единицах или битах.

Пусть $P(a_i/b_j) = P(a_i)$.

Тогда

$$I(a_i, b_j) = \log \frac{P(a_i)}{P(a_i)} = \log 1 = 0.$$

Как отмечалось ранее, информация, доставляемая символом b_j о символе a_i в этом случае равна нулю.

Рассмотрим случай приема, когда принимаемый символ b_j однозначно определяет символ a_i . В этом случае $P(a_i/b_j) = 1$ и количество информации на выходе канала о символе a_i

$$I(a_i, b_j) = I(a_i) = \log \frac{1}{P(a_i)} = -\log P(a_i). \quad (6.5)$$

Величина $I(a_i)$ называется *собственной информацией* о событии (символе) a_i . Это то количество информации, которое может быть передано по каналу связи.

Собственная информация является положительной величиной. Она тем больше, чем меньше вероятность $P(a_i)$.

Перепишем выражение (6.4):

$$\begin{aligned} I(a_i, b_j) &= \log \frac{P(a_i / b_j)}{P(a_i)} = \log \frac{P(a_i / b_j)P(b_j)}{P(a_i)P(b_j)} = \\ &= \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)} = \log \frac{P(b_j / a_i)}{P(b_j)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что информация, доставляемая символом b_j о символе a_i , равна информации доставляемой символом a_i о символе b_j . Поэтому $I(a_i, b_j)$ называется *взаимной информацией*.

На практике представляет интерес *средняя взаимная информация*, равная количеству информации о множестве передаваемых символов, которая в среднем содержится во множестве принимаемых символов.

$$\begin{aligned} I(A, B) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) I(a_i, b_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i / b_j)}{P(a_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

С учетом (6.1) выражение (6.7) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} I(A, B) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i / b_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i) = \\ &= I(A) - I(A/B) = H(A) - H(A/B), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где

$$I(A/B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i / b_j) = H(A/B), \quad (6.9)$$

$$I(A) = - \sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i) \sum_{j=1}^n P(b_j / a_i) = - \sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i) = H(A), \quad (6.10)$$

так как $\sum_{j=1}^n P(b_j / a_i) = 1$.

Учитывая формулу (6.1), выражение (6.7) можно записать также в виде:

$$I(A, B) = I(B) - I(B/A) = H(B) - H(B/A), \quad (6.11)$$

где

$$H(B) = - \sum_{j=1}^n P(b_j) \log P(b_j), \quad (6.12)$$

$$H(B/A) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(b_j/a_i). \quad (6.13)$$

Обратимся к формуле (6.10). Она определяет среднее количество информации, которое может быть на выходе источника дискретных сообщений. Формула идентична выражению для энтропии системы в статистической механике.

Поэтому величину $I(A)$ называют *энтропией* дискретного источника и обозначают $H(A)$.

Выражение $I(A/B)$, входящее в формулу (6.8), определяет среднее количество информации о символах на входе канала, полученное при приеме всевозможных символов на его выходе. Величину $I(A/B)$ называют *средней, условной энтропией* и обозначают $H(A/B)$. Ее также называют *ненадежностью дискретного канала связи*.

$$\begin{aligned} I(A/B) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(b_j) P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n P(b_j) \left[- \sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j) \right] = \sum_{j=1}^n P(b_j) H(A/b_j) = H(A/B), \end{aligned}$$

где $H(A/b_j) = - \sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j)$ – частная, условная энтропия, которая характеризует информативность сообщения на входе канала после того, как стал известным всего один символ b_j на выходе дискретного канала.

Аналогично:

$$\begin{aligned} I(B/A) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i) P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) = \\ &= \sum_{i=1}^m P(a_i) \left[- \sum_{j=1}^n P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m P(a_i) H(B/a_i) = H(B/A), \end{aligned}$$

где $H(B/a_i)$ – частная, условная энтропия, которая характеризует информативность сообщения на выходе канала после того, как стал известным передаваемый символ a_i .

Рассмотрим символы на выходах двух дискретных источников сообщений. Пусть между этими символами имеется статистическая связь, определяемая совместной вероятностью $P(a_i, b_j)$. По аналогии с (6.10) определим энтропию множества совместных событий, заключающихся в одновременном появлении символов a_i, b_j :

$$H(A, B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j). \quad (6.14)$$

Подставляя в (6.14) выражение (6.1), получим

$$H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B), \quad (6.15)$$

где $H(B/A) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(b_j / a_i)$,

$$H(A/B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i / b_j). \quad (6.16)$$

Если символы статистически независимы, то $P(b_j/a_i) = P(b_j)$, $P(a_i/b_j) = P(a_i)$ и

$$H(A, B) = H(A) + H(B). \quad (6.17)$$

Рассмотрим основные свойства энтропии.

1. Энтропия величина вещественная, ограниченная и неотрицательная. Это следует из (6.10).

2. Энтропия равна нулю, если значение символа (сообщения) известно заранее. В этом случае вероятность одного из символов равна единице, а вероятности остальных символов равны нулю.

3. Энтропия максимальна, если все состояния дискретного источника равновероятны.

Подставляя в (6.10) значение вероятности $P(a_i) = 1/m$, получим

$$H_{\max}(A) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m.$$

4. Условные энтропии

$$H(A/B) \leq H(A), \quad H(B/A) \leq H(B).$$

Равенство наблюдается тогда, когда символы a_i, b_j статистически независимы. В этом случае $P(b_j/a_i) = P(b_j)$, $P(a_i/b_j) = P(a_i)$ для всех индексов i, j .

5. Условная энтропия $H(A/B) = 0$, если между символами a_i, b_j наблюдается однозначная связь.

6. Энтропия (6.15) двух зависимых источников равна сумме безусловной и условной энтропий.

7. Энтропия двух (6.17) и более независимых источников равна сумме энтропий этих источников.

Учитывая приведенные свойства энтропии, проанализируем равенство (6.8). Средняя взаимная информация равна разности энтропий: энтропии дискретного источника $H(A)$ и условной энтропии $H(A/B)$. Поскольку $H(A) \geq 0$, $H(A/B) \geq 0$, то при передаче информации по каналу связи с помехами часть информации теряется. Количественно потери определяются условной энтропией $H(A/B)$. Потери равны нулю, если $H(A/B) = 0$. В этом случае между символами на входе и выходе наблюдается однозначная связь. Наибольшие потери в канале связи возникают, если символы на входе и выходе канала статистически независимы. В этом случае выполняется равенство $H(A/B) = H(A)$, а средняя взаимная информация равна нулю.

Аналогично анализируется равенство (6.11). Из этого равенства находим, что энтропия на выходе канала связи

$$H(B) = I(A, B) + H(B/A). \quad (6.18)$$

Следовательно, при передаче информации по каналу связи с помехами среднее количество информации на выходе канала определяется суммой средней взаимной информации и условной энтропии. Эта добавочная энтропия обусловлена только помехами. При отсутствии помех $H(B/A) = 0$, $H(B) = I(A, B)$. Кроме того, $H(A/B) = 0$ и $I(A, B) = H(A)$. Поэтому в этом случае среднее количество информации на выходе канала равно среднему количеству информации на выходе источника дискретных сообщений.

6.1.2. Производительность источника дискретных сообщений.

Скорость передачи информации

Энтропия дискретного источника, отнесенная к среднему времени передачи одного символа T , называется *производительностью источника дискретных сообщений*:

$$R_0 = \frac{H(A)}{T}. \quad (6.19)$$

Скорость передачи информации равна количеству средней взаимной информации, деленному на среднее время передачи одного символа:

$$R = I(A, B)/T = \frac{H(A) - H(A/B)}{T} = \frac{H(B) - H(B/A)}{T}. \quad (6.20)$$

Размерность скорости передачи информации [бит/с].

Вычислим скорость передачи информации по двоичному симметричному каналу связи (см. рис. 5.4). На вход канала поступают символы $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ с вероятностями $P(a_1)$, $P(a_2)$, причем $P(a_1) + P(a_2) = 1$. На выходе канала появляются двоичные символы $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Вероят-

ность ошибки при передаче любого символа равна p . Переходные вероятности: $P(b_1/a_1) = 1 - p$; $P(b_1/a_2) = p$; $P(b_2/a_1) = p$; $P(b_2/a_2) = 1 - p$.

Применим формулу (6.20). Энтропия

$$\begin{aligned} H(B) &= -\sum_{j=1}^2 P(b_j) \log P(b_j) = \\ &= -P(b_1) \log P(b_1) - P(b_2) \log P(b_2). \end{aligned}$$

Входящие в эту формулу вероятности равны:

$$\begin{aligned} P(b_1) &= P(a_1)P(b_1/a_1) + P(a_2)P(b_1/a_2) = \\ &= P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p; \\ P(b_2) &= 1 - P(b_1). \end{aligned}$$

Подставляя их в формулу для энтропии, получим:

$$\begin{aligned} H(B) &= -[P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] \log [P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] - \\ &\quad - [1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p] \log [1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p]. \end{aligned}$$

Условная энтропия

$$\begin{aligned} H(B/A) &= -\sum_{i=1}^2 P(a_i) \sum_{j=1}^2 P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) = \\ &= -P(a_1)[P(b_1/a_1) \log P(b_1/a_1) + P(b_2/a_1) \log P(b_2/a_1)] - \\ &\quad - P(a_2)[P(b_1/a_2) \log P(b_1/a_2) + P(b_2/a_2) \log P(b_2/a_2)] = \\ &= -[P(a_1) + P(a_2)][p \log p + (1 - p) \log(1 - p)] = \\ &= -[p \log p + (1 - p) \log(1 - p)]. \end{aligned}$$

Подставляя $H(B)$, $H(B/A)$ в (6.20), получим

$$\begin{aligned} R &= H(B, A)/T = \\ &= \{-[P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] \log [P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] - \\ &\quad - [1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p] \log [1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p] + \\ &\quad + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)\} / T. \end{aligned}$$

6.2. ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Как показано выше, энтропия источника дискретных сообщений определяется априорными вероятностями реализации этих сообщений, причем $H(A) \leq H_{\max}(A) = \log m$.

Количество информации, доставляемое этим источником, меньше максимального в $H_{\max}(A)/H(A)$ раз.

Относительная разность

$$\chi = \frac{H_{\max}(A) - H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - \frac{H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - \mu, \quad (6.21)$$

где $\mu = H(A)/H_{\max}(A)$, называется *избыточностью источника дискретных сообщений*.

Одной из задач кодирования является устранение избыточности.

Кодирование, обеспечивающее устранение избыточности в закодированном ранее сообщении, называется *эффективным*.

Возможность реализации эффективного кодирования была доказана К. Шенноном. Теорема о кодировании сообщения при отсутствии помех утверждает, что *минимальное среднее число элементов кодовой последовательности на выходе кодирующего устройства, соответствующее одному символу дискретного источника, можно сделать сколь угодно близким к $H(A)$* .

Эффективное кодирование реализуется применением *неравномерного* кода, в котором используется обратная зависимость между числом элементов кодовой последовательности на выходе кодирующего устройства и вероятностью реализации символа на его входе.

Часто неравномерный код является двоичным. Примером такого кода является *код Шеннона – Фано*.

Задача построения эффективного кода формулируется следующим образом. Для сообщения, записанного с помощью букв алфавита $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, содержащего m букв, требуется указать правило кодирования, которое устанавливает однозначное соответствие между буквами алфавита и двоичными словами, состоящими из символов 0 и 1.

Эффективный код должен обеспечивать однозначное декодирование, т. е. по принятой двоичной кодовой последовательности восстанавливать передаваемый символ (букву алфавита). Кроме того, на передачу одной буквы в среднем должно тратиться минимальное число нулей и единиц двоичного слова.

Для обеспечения однозначности декодирования эффективный код должен удовлетворять следующему требованию: никакое более короткое слово (последовательность) эффективного кода не должно являться началом другого более длинного слова.

Построение кода Шеннона – Фано поясняется табл. 6.1. Сообщения располагают в таблице по мере убывания их вероятностей. Далее буквы алфавита разбивают на группы и подгруппы, обеспечивая их равновероятность. Верхней группе присваивается символ 0, а нижней – 1. Каждую из полученных групп в свою очередь разбивают на две подгруппы с оди-

наковыми суммарными вероятностями и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одному символу.

Таблица 6.1

Сообщение	Вероятность сообщения $P(a_i)$	Группы и подгруппы на этапах разбиения				Код	Число символов в кодовой комбинации	
		1-й	2-й	3-й	4-й			
a_1	0,25	} 0	0			00	2	
a_2	0,25		1			01	2	
a_3	0,125	}	} 0	0		100	3	
a_4	0,125			1		101	3	
a_5	0,0625	} 1	} 1	} 0	0	1100	4	
a_6	0,0625				1	1101	4	
a_7	0,0625			} 1	1	0	1110	4
a_8	0,0625				1	1111	4	

Вычислим энтропию, используя данные табл. 6.1:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^8 P(a_i) \log P(a_i) = 2,75 \text{ бит.}$$

Средняя длина двоичной кодовой комбинации

$$n_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^8 P(a_i) n_i = 2,75.$$

Энтропия, приходящаяся на один элемент двоичной кодовой последовательности:

$$H(A)/n_{\text{ср}} = 2,75/2,75 = 1.$$

Это значение совпадает с максимальной энтропией на выходе двоичного дискретного источника сообщений, которое равно

$$H_{\text{max}}(A) = \log 2 = 1.$$

6.3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСТОЧНИКОВ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

6.3.1. Дифференциальная энтропия

Понятия теории информации, относящиеся к дискретным сообщениям, можно распространить и на непрерывные сообщения.

Пусть ξ – случайная величина с плотностью вероятности $w(x)$ (см. рис. 6.1). Она является отсчетом в некоторый момент времени случайной реализации непрерывного во времени и ограниченного по динамическому диапазону случайного процесса. Разобьем диапазон изменения случайной величины на конечное число N малых интервалов шириной Δx . Поскольку Δx мало, вероятность того, что случайная величина x находится в пределах Δx (интервала с номером i),

$$p_i \left\{ x_i - \frac{\Delta x}{2} < \xi \leq x_i + \frac{\Delta x}{2} \right\} \cong w(x_i) \Delta x.$$

Формула написана при условии, что заштрихованная на рис. 6.1 площадь равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $w(x_i)$.

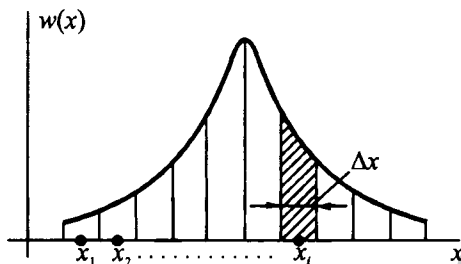


Рис. 6.1. Плотность распределения вероятности случайной величины

Аналогично можно найти вероятность того, что случайная величина ξ будет находиться в пределах любого другого интервала Δx .

Располагая рядом дискретных значений вероятностей, вычислим энтропию:

$$H_0(\xi) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i =$$

$$= - \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log [w(x_i) \Delta x].$$

Уменьшая Δx , в пределе получим выражение для энтропии случайной величины:

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} H_0(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[- \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log w(x_i) \right] - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log \Delta x = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \frac{1}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Первое слагаемое полученного выражения имеет конечное значение. Обозначим его $h(\xi)$ и запишем:

$$h(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx. \quad (6.23)$$

Это выражение получило название *дифференциальной энтропии*.

Второе слагаемое при стремлении шага квантования Δx к нулю стремится к бесконечности.

По этой причине $H_1(\xi)$ не может быть количественной мерой, с помощью которой можно было бы оценить объем информации, содержащейся в одном отсчете аналогового сообщения.

Определим оценку дифференциальной энтропии, считая, что шаг квантования Δx достаточно мал:

$$h^*(\xi) = -\sum_{i=1}^N w(x_i) \log w(x_i) \Delta x.$$

Запишем выражение для энтропии через эту оценку, которая будет конечной величиной и мерой информации одного квантованного отсчета.

$$H(\xi) = H_1^*(\xi) = -\sum_{i=1}^N w(x_i) \log w(x_i) \Delta x - \log \Delta x = h^*(\xi) - \log \Delta x. \quad (6.24)$$

Рассмотрим основные свойства дифференциальной энтропии.

1. В отличие от энтропии дифференциальная энтропия имеет другую размерность и обладает рядом других свойств. В частности, она может быть как положительной, так и отрицательной.

2. Дифференциальная энтропия величина вещественная и ограниченная для ограниченного по мощности случайного процесса.

3. Дифференциальная энтропия максимальна, если ограниченный по мощности случайный процесс подчиняется нормальному закону.

4. Дифференциальная энтропия суммы независимых случайных величин равна сумме дифференциальных энтропий этих величин [см. вывод формулы (6.30)].

5. Значение дифференциальной энтропии зависит от масштаба случайной величины.

Изменим масштаб случайной величины в k раз. Если $x_1 = kx$, то в соответствии с формулой (5.23) $w(x_1) = w(x)/k$. Тогда

$$h(\xi_1) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{k} \log \frac{w(x)}{k} k dx = h(\xi) + \log k.$$

6. Оценка дифференциальной энтропии выражается логарифмической функцией.

Перепишем выражение (6.24) для энтропии:

$$H(\xi) = h^*(\xi) - \log \Delta x.$$

Размерности левой и правой частей равенства должны быть равны. Учитывая, что размерность левой части [бит], а размерность составляющих правой части [В], если случайный процесс является напряжением, находим, что равенство размерностей возможно, если оценка дифференциальной энтропии определяется логарифмической функцией

$$h^*(\xi) = \log f(z),$$

где z – аргумент этой функции.

Подставляя последнее выражение в формулу для энтропии, убеждаемся в справедливости свойства б):

$$H(\xi) = \log f(z) - \log \Delta x = \log[f(z)/\Delta x].$$

Из последнего равенства получаем

$$f(z) = 2^{H(\xi)} \Delta x.$$

Логарифмируя левую и правую части полученного уравнения, получим зависимость оценки дифференциальной энтропии от энтропии $H(\xi)$, которую назовем *энтропией квантованной выборки*:

$$h^*(\xi) = \log(2^{H(\xi)} \Delta x). \quad (6.25)$$

Если интервал квантования равен $\Delta x = \Delta b$, то с учетом формулы (7.105) выражение (6.25) можно записать в виде:

$$h^*(\xi) = \log(2^{H(\xi)} 2b_{\max} / L),$$

где b_{\max} – максимальное значение выборки первичного сигнала, L – число уровней квантования.

7. При стремлении интервала квантования к нулю энтропия квантованной выборки стремится к бесконечности, а оценка дифференциальной энтропии – к дифференциальной энтропии.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} H(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} h^*(\xi) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log(1/\Delta x) = h(\xi) + \infty.$$

Поэтому для малых, не равных нулю интервалов квантования, оценку дифференциальной энтропии можно определять через энтропию квантованной выборки.

Для непрерывного канала, на входе и выходе которого действуют соответственно случайные величины ξ и γ с заданной двумерной плотностью распределения вероятности $w(x, y)$, можно по аналогии с формулой (6.20) найти скорость передачи информации:

$$R = I(\xi, \gamma) / T, \quad (6.26)$$

где $I(\xi, \gamma)$ – средняя взаимная информация в непрерывном канале, T – время передачи.

Среднюю взаимную информацию найдем по аналогии с формулой (6.11):

$$I(\xi, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) I(x, y) dx dy,$$

где

$$I(x, y) = \log \frac{w(y/x)}{w(y)} = \log \frac{w(x/y)}{w(x)} = \log \frac{w(x, y)}{w(x)w(y)}.$$

Взаимную информацию можно выразить через дифференциальные энтропии:

$$I(\xi, \gamma) = h(\xi) - h(\xi/\gamma),$$

$$I(\gamma, \xi) = h(\gamma) - h(\gamma/\xi), \quad (6.27)$$

где $h(\xi/\gamma) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \log w(x/y) dx dy$ – условная дифференциальная энтропия случайной величины ξ при известной величине γ ; $h(\gamma/\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \log w(y/x) dx dy$ – условная дифференциальная энтропия случайной величины γ при известной величине ξ .

Среднее количество информации, передаваемой по непрерывному каналу, является конечной величиной и определяется формулами (6.27). Эта информация выражается в битах, а скорость передачи информации – в битах в секунду [см. формулу (6.26)].

Выразив формулу (6.26) через энтропии квантованных выборок, получим формулу для оценки скорости передачи в непрерывном канале:

$$\begin{aligned} R^* &= [\log(2^{H(\xi)} \Delta x) - \log(2^{H(\xi/\gamma)} \Delta x)]/T = \\ &= [\log(2^{H(\gamma)} \Delta y) - \log(2^{H(\gamma/\xi)} \Delta y)]/T, \end{aligned}$$

где $H(\xi)$, $H(\xi/\gamma)$, $H(\gamma)$, $H(\gamma/\xi)$ – энтропии квантованных выборок, вычисленные с помощью соответствующих плотностей распределения вероятностей; Δx , Δy – интервалы квантования на входе и выходе канала.

Если интервалы квантования равны, формулу для оценки скорости передачи в непрерывном канале можно переписать в окончательном виде:

$$R^* = [H(\xi) - H(\xi/\gamma)]/T = [H(\gamma) - H(\gamma/\xi)]/T.$$

Последняя формула может оказаться предпочтительней формулы (6.26), если вычисление дифференциальных энтропий затруднено или невозможно. При вычислении энтропий квантованных выборок можно пользоваться ЭВМ и алгоритмом, который приведен выше [см. вывод формулы (6.22)]. Очевидно, что дифференциальные плотности распределения вероятностей должны быть заданы или получены экспериментально.

Пример 6.1. Для нормальной случайной величины ξ с известным средним значением и известной дисперсией найти дифференциальную энтропию, а также среднее количество информации, содержащееся в одной квантованной выборке. Одномерная плотность распределения вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a, σ^2 – среднее значение и дисперсия случайной величины.

Решение. Дифференциальная энтропия

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left[\log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\log e}{2\sigma^2} (x-a)^2 \right] dx = \\ &= \log \sqrt{2\pi\sigma^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx + \frac{\log e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 w(x) dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен единице, а второй – дисперсии. Поэтому

$$h(\xi) = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} \log e = \log \sqrt{2\pi e\sigma^2}. \quad (6.28)$$

Дифференциальная энтропия нормальной случайной величины не зависит от ее среднего значения и возрастает с ростом дисперсии. Как следует из полученного выражения для дифференциальной энтропии, ее размерность совпадает с размерностью непрерывной, случайной величины. Если, например, этой величиной является значение напряжения, выражаемое в вольтах, то и размерность дифференциальной энтропии также будет выражаться в вольтах. Несмотря на то что дифференциальная энтропия выражается в вольтах, взаимная информация, определяемая формулой (6.27), выражается в битах, т. е. является безразмерной величиной.

Найдем среднее количество информации, содержащееся в одной квантованной выборке. Полагая, что интервал квантования является сравнительно малой величиной, формулу (6.28) запишем в виде:

$$\log \sqrt{2\pi e\sigma^2} \approx \log(2^{H(\xi)} \Delta x).$$

Следовательно,

$$\sqrt{2\pi e\sigma^2} \approx 2^{H(\xi)} \Delta x.$$

Отсюда энтропия квантованной выборки

$$H(\xi) \approx \log[(\sigma / \Delta x) \sqrt{2\pi e}].$$

Количество информации, содержащееся в квантованной выборке нормальной случайной величины, прямо пропорционально двоичному логарифму отношения среднеквадратичного значения этой величины к интервалу квантования. Другими словами, при одной и той же мощности первичного сигнала информативность передачи увеличивается с уменьшением интервала квантования (увеличением числа уровней квантования).

6.3.2. Эпсилон-энтропия

Для передачи непрерывного сообщения или сигнала с абсолютной точностью требуется бесконечно большое количество информации. Этот вывод следует из результата, полученного выше: энтропия, определяемая формулой (6.22), равна бесконечности. Однако передача бесконечного количества информации по реальному каналу связи с ограниченной шириной полосы и за ограниченное время оказывается не только невозможной, но и ненужной. Это объясняется тем, что для восприятия точного воспроизведения информации не требуется.

Пусть на выходе канала сигнал $b^*(t)$ отличается от сигнала на входе $b(t)$ на величину разности $\epsilon(t) = b^*(t) - b(t)$. Средний квадрат этой разности

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt,$$

где $(0, T)$ – интервал времени, в течение которого передается сигнал.

Если средний квадрат разности не превышает некоторого заданного числа ϵ_0 , то сигналы $b^*(t)$ и $b(t)$ считаются эквивалентными.

Это значит, что если послан один сигнал, а принят другой, эквивалентный ему, то по данному критерию переданный сигнал считается принятым верно.

Минимальное количество информации, содержащееся в принятом сигнале $b^*(t)$ относительно $b(t)$, при котором они еще эквивалентны, называется *эпсилон-энтропией*. Эпсилон-энтропия определяется минимальной взаимной информацией:

$$\begin{aligned} h_\epsilon(b) &= \min I[b(t), b^*(t)] = \\ &= h[b(t)] - \max h[b(t)/b^*(t)], \end{aligned} \quad (6.29)$$

где $h[b(t)]$ – дифференциальная энтропия сигнала, передаваемого по каналу связи в течение времени T ; $h[b(t)/b^*(t)]$ – условная дифференциальная энтропия этого сигнала.

Достижение максимума условной энтропии означает, что из всех возможных условных распределений, для которых $\overline{\epsilon^2(t)} < \epsilon_0$, выбирается такое распределение, которое обеспечивает максимум условной энтропии.

Вычисление эпсилон-энтропии несложно при следующих допущениях.

1. Известны плотности распределения вероятности, определяющие случайные сигналы $b(t)$, $b^*(t)$.

Таковыми плотностями являются:

Безусловная многомерная плотность распределения вероятности сигнала $b(t)$:

$$w(\vec{x}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Условная многомерная плотность распределения вероятности сигнала $b(t)$:

$$w(\bar{x} / \bar{y}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n / y_1, y_2, \dots, y_n).$$

2. Выборочные значения входного сигнала являются статистически независимыми случайными величинами.

3. Выборочные значения выходного сигнала являются оценками выборочных значений входного сигнала и статистически независимы.

4. Спектры сигналов $b(t)$, $b^*(t)$ ограничены верхней граничной частотой F_c . Поэтому, согласно теореме Котельникова, интервал дискретизации $\Delta t = 1/2F_c$. Число выборочных значений в интервале $[0, T]$ равно $n = T/\Delta t = 2F_c T$.

5. Случайный процесс на входе непрерывного канала подчиняется нормальному закону.

6. Мощность (дисперсия) разности сигналов является ограниченной величиной.

Определим дифференциальные энтропии. С учетом приведенных ограничений дифференциальная энтропия сигнала запишется по аналогии с формулой (6.23):

$$\begin{aligned} h[b(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int w(\bar{x}) \log w(\bar{x}) d\bar{x} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \prod_{i=1}^n w(x_i) \log \prod_{i=1}^n w(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= -2F_c T \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = 2F_c T \log \sqrt{2\pi e \sigma_b^2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $w(x)$ – плотность распределения случайной величины, равной одному из выборочных значений входного сигнала; σ_b^2 – дисперсия случайной величины, равная мощности этого сигнала.

При вычислениях использованы следующие преобразования: логарифм произведения одномерных плотностей записан в виде суммы логарифмов; многомерный интеграл разбит на ряд интегралов, каждый из которых содержит два сомножителя. Первый сомножитель равен дифференциальной энтропии. Эта величина по условию определяется нормальным законом распределения и может быть найдена по формуле (6.28). Второй сомножитель равен единице. Убедимся в этом.

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1) \log w(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n w(x_i) dx_2 \dots dx_n - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} w(x_2) \log w(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1, i \neq 2}^n w(x_i) dx_1 dx_3 \dots dx_n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots - \int_{-\infty}^{\infty} w(x_n) \log w(x_n) dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} w(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \\ = -2F_c T \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = 2F_c T \log \sqrt{2\pi\sigma_b^2}. \end{aligned}$$

Условная дифференциальная энтропия

$$\begin{aligned} h[b(t)/b^*(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{x}, \bar{y}) \log w(\bar{x} / \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) w(\bar{x} / \bar{y}) \log w(\bar{x} / \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}. \end{aligned}$$

Из равенства $b(t_i) - b^*(t_i) = \varepsilon(t_i)$ следует, что неслучайные аргументы условной плотности вероятности $w(\bar{x} / \bar{y})$ определяются уравнениями $x_i - y_i = r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, $y_i = b^*(t_i)$,

$$w(\bar{x} / \bar{y}) = \partial F(\bar{x} / \bar{y}) / \partial \bar{x},$$

$$\begin{aligned} F(\bar{x} / \bar{y}) &= P[b(t_1) \leq x_1, b(t_2) \leq x_2, \dots, b(t_n) \leq x_n / b^*(t_1), b^*(t_2), \dots, b^*(t_n)] = \\ &= P[b(t_1) - y_1 \leq r_1, b(t_2) - y_2 \leq r_2, \dots, b(t_n) - y_n \leq r_n] = \\ &= P[b(t_1) - b^*(t_1) \leq r_1, b(t_2) - b^*(t_2) \leq r_2, \dots, b(t_n) - b^*(t_n) \leq r_n] = \\ &= P[\varepsilon(t_1) \leq r_1, \varepsilon(t_2) \leq r_2, \dots, \varepsilon(t_n) \leq r_n] = F(\bar{r}). \end{aligned}$$

Учитывая это, выражение для условной дифференциальной энтропии можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} h[b(t)/b^*(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) w(\bar{r}) \log w(\bar{r}) d\bar{r} d\bar{y} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{r}) \log w(\bar{r}) d\bar{r} = h[\varepsilon(t)]. \end{aligned}$$

Известно, что при ограниченной дисперсии случайной величины ее энтропия максимальна, если она подчиняется нормальному закону. Поэтому

$$\begin{aligned} \max h[b(t)/b^*(t)] &= \max h[\varepsilon(t)] = \\ &= \max \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n w(r_i) \log \prod_{i=1}^n w(r_i) dr_1 dr_2 \dots dr_n \right\} = 2F_c T \log \sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2}, \quad (6.31) \end{aligned}$$

где σ_ϵ^2 – дисперсия, равная мощности разности сигналов $\epsilon(t) = b^*(t) - b(t)$, $h[\epsilon(t)]$ – дифференциальная энтропия этой разности.

Подставляя (6.30), (6.31) в (6.29), получим:

$$\begin{aligned} h_\epsilon(b) &= 2F_c T [\log \sqrt{2\pi e \sigma_b^2} - \log \sqrt{2\pi e \sigma_\epsilon^2}] = \\ &= F_c T \log \frac{\sigma_b^2}{\sigma_\epsilon^2} = F_c T \log \rho. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Эпсилон-энтропия определяется произведением $F_c T$ и отношением сигнал/шум $\rho = \sigma_b^2 / \sigma_\epsilon^2$.

Аналогично выражается объем сигнала через произведение $F_c T_c$ и динамический диапазон D_c (см. п. 1.1).

Эпсилон-энтропия определяет *производительность источника аналоговых сообщений*. Для источника, на выходе которого сигнал подчиняется нормальному закону, производительность

$$r_0 = h_\epsilon(b) / T = F_c \log \rho, \text{ [бит/с]}. \quad (6.33)$$

Такую производительность имеет дискретный источник с числом ρ равновероятных состояний и временем передачи одного символа $1/F_c$.

Пример 6.2. Определить производительность источника непрерывных сообщений для следующих исходных данных.

Плотность распределения вероятности $w(x)$ задана функцией, выражение которой не позволяет вычислить дифференциальную энтропию (6.23) с использованием табличных интегралов. Спектры сигналов ограничены верхней частотой F_c . Время передачи информации равно T . Выборки сигналов статистически независимы.

Решение. Поскольку по условию вычисление дифференциальной энтропии затруднено, применим формулу для ее оценки. Вычислим оценку эпсилон-энтропии:

$$h_\epsilon^*(b) = 2F_c T [h^*(b) - \max h^*(b/b^*)].$$

Из возможных распределений вероятностей только распределение, подчиняющееся нормальному закону, дает максимум условной дифференциальной энтропии. Ее оценка определяется энтропией квантованной выборки [см. пример 6.1]. Поэтому оценка эпсилон-энтропии

$$\begin{aligned} h_\epsilon^*(b) &= 2F_c T [\log(2^{H(b)} \Delta x) - \max \log(2^{H(b/b^*)} \Delta x)] = \\ &= 2F_c T [H(b) + \log \Delta x - H(b/b^*) - \log \Delta x] = \\ &= 2F_c T \{H(b) - \log[(\sigma_\epsilon / \Delta x) \sqrt{2\pi e}]\}. \end{aligned}$$

Если интервал квантования – достаточно малая величина, то производительность источника можно вычислить по следующей формуле:

$$h_{\epsilon}(b)/T \approx h_{\epsilon}^*(b)/T = 2F_c \{H(b) - \log[(\sigma_{\epsilon}/\Delta x)\sqrt{2\pi\epsilon}]\},$$

где $H(b) = -\sum_{i=1}^N w(x_i)\Delta x \log[w(x_i)\Delta x]$ – энтропия квантованной выборки, найденная по заданной плотности распределения вероятности $w(x)$.

Убедимся в том, что полученная формула верна. Для этого рассмотрим частный случай, когда $w(x)$ подчиняется нормальному закону. Энтропия квантованной выборки сообщения на выходе источника в этом случае

$$H(b) = \log \sqrt{2\pi e P_b / \Delta x^2}.$$

Подставляя формулу для энтропии квантованной выборки в формулу для производительности, получим формулу (6.33).

6.4. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАНАЛА СВЯЗИ

6.4.1. Пропускная способность дискретного канала связи

Максимальное количество передаваемой информации в единицу времени определяет пропускную способность дискретного канала связи.

При этом из всего множества дискретных источников пропускную способность определяет только такой источник, распределение вероятностей $P(A)$ которого обеспечивает максимальное значение передаваемой информации.

Пропускная способность

$$C = \max_{P(A)} I(A, B)/T = \max_{P(A)} \frac{H(A) - H(A/B)}{T} = \max_{P(A)} \frac{H(B) - H(B/A)}{T}, \quad (6.34)$$

где T – средняя длительность передачи одного символа (сообщения).

Максимум скорости передачи согласно (6.34) достигается изменением вероятностей состояния источников, т. е. их перебором до тех пор, пока не будет найден источник, распределение вероятностей которого обеспечит этот максимум.

Пропускная способность канала выражается в битах в секунду [бит/с]. Она зависит от энтропии дискретного источника, т. е. от свойств передаваемого сообщения.

Пропускная способность зависит также от условных энтропий $H(A/B)$, $H(B/A)$, которые определяются характеристиками дискретного канала связи.

Пропускная способность всегда больше скорости передачи информации по каналу связи.

Пример 6.3. Требуется найти пропускную способность m -го симметричного канала без памяти. Переходные вероятности заданы уравнениями (5.13).

Решение. Применим формулу (6.34). В этой формуле энтропия на выходе канала $H(B)$ зависит от распределения вероятности $P(A)$. Поэтому максимум выражения (6.34) найдем по максимуму этой энтропии. Вычислим энтропию

$$H(B) = - \sum_{j=1}^m P(b_j) \log P(b_j),$$

где $P(b_j) = \sum_{i=1}^m P(a_i) P(b_j / a_i)$.

Энтропия на выходе дискретного канала максимальна, если вероятности реализации символов на выходе канала одинаковы и равны $1/m$.

В этом случае вероятность появления любой буквы на выходе канала

$$P(b_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P(b_j / a_i) = \frac{1}{m} \left[1 - p + (m-1) \frac{p}{m-1} \right] = \frac{1}{m},$$

а максимальная энтропия

$$H_{\max}(B) = - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \frac{1}{m} = \log m. \quad (6.35)$$

Вычисляя условную энтропию, убеждаемся, что она не зависит от распределения вероятности $P(A)$.

$$\begin{aligned} H(B/A) &= - \sum_{i=1}^m P(a_i) \sum_{j=1}^m P(b_j / a_i) \log p(b_j / a_i) = \\ &= - \left[\frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} + \dots + \frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right] = \\ &= - \left[p \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные значения для энтропии в (6.34), получим

$$C = [\log m + p \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p)]/T. \quad (6.36)$$

В двоичном симметричном канале $m = 2$, поэтому

$$C = [1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)]/T. \quad (6.37)$$

6.4.2. Пропускная способность непрерывного канала связи

Пусть сигнал на выходе канала равен сумме входного сигнала и присутствующего в канале нормального шума:

$$Z(t) = v(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.38)$$

а статистические свойства сигнала и смеси сигнала и шума описываются n -мерными плотностями вероятности:

$$w(\vec{x}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$w(\vec{y}) = w(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Если канал имеет ограниченную ширину полосы пропускания F , то смесь сигнала и шума и шум можно в соответствии с теоремой Котельникова представить их выборочными значениями. Число этих значений

$$n = T/\Delta t = 2FT.$$

Пропускная способность непрерывного канала

$$C = \frac{1}{T} \max_{\vec{z}} I(\vec{v}, \vec{z}), \quad (6.39)$$

где $I(\vec{v}, \vec{z})$ – средняя взаимная информация в непрерывном канале.

Максимум информации ищут по всевозможным плотностям распределения входного непрерывного сигнала $v(t)$.

Выражение (6.39) можно записать через дифференциальные энтропии:

$$C = \frac{1}{T} \max_{\vec{x}} [h(\vec{z}) - h(\vec{z}/\vec{v})], \quad (6.40)$$

где

$$h(\vec{z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}) \log w(\vec{y}) d\vec{y},$$

$$h(\vec{z}/\vec{v}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}, \vec{x}) \log w(\vec{y}/\vec{x}) d\vec{y} d\vec{x}.$$

Условная плотность вероятности равна плотности вероятности одно-го шума (см. раздел 5.2). Следовательно,

$$C = \frac{1}{T} \max_{\vec{x}} [h(\vec{z}) - h(\vec{N})].$$

Если выборочные значения смеси сигнала и шума статистически независимы, то энтропию смеси сигнала и шума можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(\vec{z}) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}) \log w(\vec{y}) d\vec{y} = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n w(y_i) \log \prod_{i=1}^n w(y_i) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \\ &= -2FT \int_{-\infty}^{\infty} w(y) \log w(y) dy = 2FT h(z), \end{aligned} \quad (6.41)$$

где $h(z)$ – энтропия выборки смеси сигнала и шума. Если выборочные значения реализаций шума также статически независимы, то дифференциальную энтропию этого шума можно записать аналогично:

$$h(\bar{z} / \bar{v}) = h(\bar{N}) = 2FTh(N), \quad (6.42)$$

где $h(N)$ – энтропия выборки шума.

С учетом формул (6.41), (6.42) выражение для пропускной способности канала записывается в виде:

$$C = 2F \max_{w(x)} [h(z) - h(N)]. \quad (6.43)$$

Максимум стоящего в скобках выражения определяется максимальным значением энтропии $h(z)$.

Найдем максимальное значение среднего количества информации, варьируя плотностью распределения вероятности $w(x)$ выборки сигнала.

Если мощности (дисперсии) сигнала P_c и шума $P_{ш}$ ограничены, то для статистически независимых случайных величин мощность смеси сигнала и шума также будет ограниченной величиной:

$$D\{z\} = D\{v\} + D\{N\} = P_c + P_{ш}.$$

Известно, что из множества возможных плотностей распределения вероятности случайной величины с ограниченной дисперсией наибольшую энтропию имеет плотность, подчиняющаяся нормальному закону.

Известно также, что если отдельные (две и более) случайные величины распределены по нормальному закону, то их сумма также распределена по нормальному закону.

По этой причине, если выборка шума подчиняется нормальному закону, а выборка сигнала этому закону не подчиняется, то выборка смеси не будет подчиняться нормальному закону, а выражение (6.43) не достигает максимума. Только тогда, когда плотность $w(x)$ подчиняется нормальному закону, плотность смеси сигнала и шума $w(y)$ также подчиняется нормальному закону, а энтропия $h(z)$ достигает максимума:

$$\max h(z) = \log \sqrt{2\pi e(P_c + P_{ш})}. \quad (6.44)$$

Для присутствующего в канале нормального шума дифференциальная энтропия выборки этого шума

$$h(N) = \log \sqrt{2\pi e P_{ш}}. \quad (6.45)$$

Подставляя формулы (6.44), (6.45) в (6.43), получим:

$$C = F \log \frac{P_c + P_{ш}}{P_{ш}} = F \log \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right). \quad (6.46)$$

Формулу (6.46) называют *формулой Шеннона*.

Пропускная способность непрерывного канала связи растет с ростом ширины полосы канала F и *отношения сигнал/шум* $P_c/P_{ш}$.

При малом отношении сигнал/шум формулу Шеннона можно представить в виде:

$$C \cong F \frac{P_c}{P_{ш}} \log_2 e.$$

Из формулы следует, что высокая пропускная способность даже при весьма малом отношении сигнал/шум в канале может обеспечиваться увеличением ширины полосы этого канала. Эта возможность реализуется в цифровых системах связи, включая цифровые системы с шумоподобными сигналами.

Учитывая, что отношение мощности шума к ширине полосы канала определяет спектральную плотность мощности шума, пропускную способность канала можно записать также в виде:

$$C \cong 1,443 \frac{P_c}{N_0}, \quad (6.47)$$

где N_0 – мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Из полученной формулы следует, что пропускная способность непрерывного канала при малом отношении сигнал/шум определяется также отношением мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума.

6.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

6.5.1. Теорема кодирования для канала с помехами

Теорема, известная в технической литературе как основная теорема кодирования К. Шеннона, применительно к дискретному источнику формулируется следующим образом:

если производительность источника сообщений R_0 меньше пропускной способности канала C , то существует по крайней мере одна процедура кодирования и декодирования, при которой вероятность ошибочного декодирования и ненадежность $H(A/B)$ могут быть сколь угодно малы.

Если $R_0 > C$, то такой процедуры не существует.

Доказательство теоремы достаточно сложно. Его можно найти, например, в [2]. Ограничимся обсуждением результатов теоремы.

Положения, доказанные Шенноном, оказались неожиданными и расходились с признанными представлениями. В частности, считалось, что для повышения верности нужно уменьшать скорость передачи

сообщения. Это подтверждалось практическими результатами анализа многократной повторной передачи символов по каналу связи, из которых следовало, что весьма малую вероятность ошибки можно обеспечить только при стремлении скорости передачи к нулю.

Однако теорема Шеннона указывает на принципиальную возможность передачи информации со скоростью, сколь угодно близкой к пропускной способности канала и при сколь угодно малой вероятности ошибки. Это очень важный для теории и практики результат.

К сожалению, теорема Шеннона не конструктивна в том смысле, что она не дает конкретного способа кодирования, существование которого доказывает. Однако, обосновав принципиальную возможность такого кодирования, она мобилизует усилия ученых на его поиск.

6.5.2. Принципы построения помехоустойчивых кодов

Целью помехоустойчивого кодирования является *повышение верности передачи сообщения*, которая достигается введением избыточности в передаваемую информационную кодовую комбинацию. В дальнейшем будем рассматривать в основном коды с основанием два, как наиболее просто реализуемые на практике. Такие коды называются *двоичными*. Рассмотрим передачу двоичной информации по каналу связи (рис. 6.2). На вход кодирующего устройства поступают информационные кодовые комбинации \vec{a}_i длиной в k символов. Их количество равно 2^k . В кодирующем устройстве производится формирование помехоустойчивого кода добавлением к информационным символам проверочных. В результате длина помехоустойчивого кода становится равной n . Отсюда число проверочных символов равно $(n - k)$. Количество кодовых комбинаций на выходе кодирующего устройства при этом остается равным количеству кодовых комбинаций на входе, т. е. 2^k . Эти кодовые комбинации называются *разрешенными*. Разрешенные кодовые комбинации преобразуются модулятором в сигнал $u(t)$, который передается по линии связи. В демодуляторе происходит восстановление этих комбинаций. Восстановленные комбинации отличаются от переданных комбинаций, так как в линии связи присутствует помеха $N(t)$. Возможны следующие случаи передачи (рис. 6.3).

1. Кодовая комбинация на выходе линии связи \vec{b}_j равна кодовой комбинации на ее входе \vec{a}_i . Количество возможных случаев приема равно 2^k . Эти случаи имеют место, когда помеха в линии связи отсутствует.

2. Кодовая комбинация на выходе линии связи \vec{b}_j не равна кодовой комбинации на ее входе \vec{a}_i , но совпадает с одной из других разрешенных комбинаций. Число этих возможных случаев равно $2^k(2^k - 1)$.

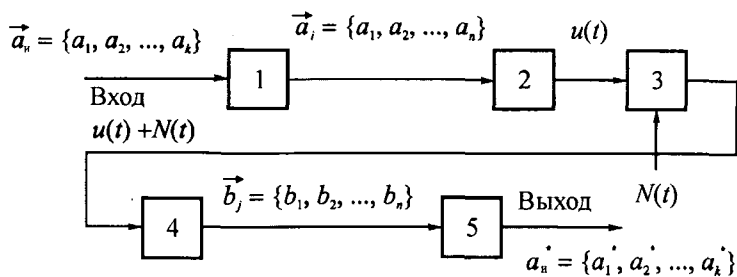


Рис. 6.2. Передача помехоустойчивого кода по каналу связи:
1 – кодирующее устройство; 2 – модулятор; 3 – линия связи; 4 – демодулятор;
5 – декодирующее устройство

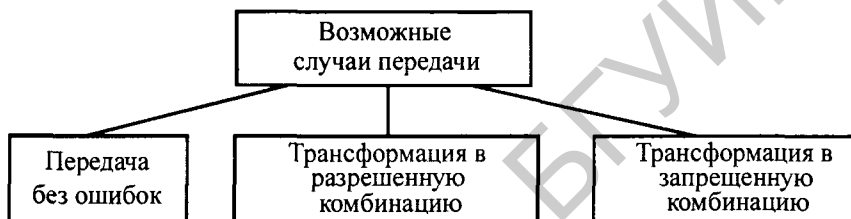


Рис. 6.3. Случаи передачи помехоустойчивого кода по каналу связи

3. Кодовая комбинация на выходе линии связи не совпадает ни с одной разрешенной кодовой комбинацией на ее входе. Число этих возможных случаев равно $2^k(2^n - 2^k)$.

Случаи 2, 3 имеют место, когда в линии связи действует помеха и некоторые символы входной разрешенной кодовой комбинации принимаются с ошибками. Вместо единиц формируются нули и наоборот. Входная разрешенная кодовая комбинация в результате этого переходит или в другую разрешенную комбинацию (случай 2) или в запрещенную (случай 3).

На приемном конце известны все разрешенные кодовые комбинации, с которыми можно сравнить принимаемую комбинацию и на основании этого определить, принадлежит ли эта комбинация к разрешенным комбинациям или к запрещенным. Так решается задача обнаружения ошибок. В системах с обратной связью эта задача является одной из главных. При ее решении принятая с ошибкой комбинация для дальнейшей обработки не передается, а передатчику посылается сигнал запроса на повторение ранее переданной комбинации.

Напомним, что q -кратной ошибке при передаче кодовой комбинации длиной в n двоичных символов соответствует принятая кодовая комбинация, у которой на любых позициях число ошибочно принятых символов равно q . На остальных $n - q$ позициях символы принимаются верно.

Степень отличия переданной и принятой кодовых комбинаций характеризуется вектором ошибки (см. раздел 5.2) и *кодovým расстоянием* между ними (*расстоянием Хэмминга*). Чтобы получить кодовое расстояние между двумя двоичными комбинациями, нужно подсчитать число единиц в поразрядной сумме этих комбинаций по модулю два.

Например:

$$\begin{array}{r} 10110111 \\ + 01001011 \\ \hline 11111100 \end{array}$$

Число единиц равно 6. Кодовое расстояние равно 6.

Кодовое расстояние определяет кратность ошибки. Число единиц вектора ошибки определяет и его вес. Минимальное кодовое расстояние, взятое по всем парам разрешенных кодовых комбинаций, называется *минимальным кодовым расстоянием*. Обозначим его буквой d .

Обнаруживающая способность кода характеризуется следующей теоремой.

Если код имеет $d > 1$ и используется декодирование по методу обнаружения ошибок, то все ошибки кратностью $q < d$ обнаруживаются. Что же касается ошибок кратности $q > d$, то одни из них обнаруживаются, а другие нет.

Доказательство теоремы проведем от противного. Допустим, что ошибки кратностью $q < d$ не обнаруживаются. В этом случае принимаемые кодовые комбинации не выходят за пределы множества разрешенных комбинаций, что возможно при кратности ошибки $q > d$. Но это противоречит исходному неравенству и свидетельствует о справедливости теоремы. Следовательно, если $q < d$, принятая комбинация не будет разрешенной, а будет принадлежать к запрещенным комбинациям. Ошибка будет обнаружена. При $q \geq d$ принятая комбинация может оказаться разрешенной и ошибка окажется необнаруженной.

Условие обнаружения ошибок кратности q можно записать в виде

$$d \geq q + 1. \quad (6.48)$$

Используя формулы (5.15), (6.48), а также формулировку приведенной теоремы, найдем вероятность необнаруженной ошибки для двоичного симметричного канала без памяти, считая, что ошибки при приеме символов являются независимыми:

$$P_{\text{НО}} \leq \sum_{q=d}^n c_n^q p^q (1-p)^{n-q}, \quad (6.49)$$

где p – вероятность ошибочного приема одного символа.

Из (6.48) следует, что ошибка обнаруживается при $q \leq d - 1$ и не обнаруживается при $q \geq d$. Это позволяет определить нижний предел суммы в выражении (6.49).

Рассмотрим процесс исправления ошибок в симметричном канале без памяти. При построении кода все множество принимаемых последовательностей длиной в n символов разбивается на $m \leq 2^k$ непересекающихся подмножеств M_1, M_2, \dots, M_m , где 2^k – число разрешенных кодовых комбинаций. При приеме комбинации ее сравнивают с комбинациями указанных подмножеств и таким образом определяют, к какому из них M_1, M_2, \dots, M_m она принадлежит.

Очевидно, что при таком правиле декодирования будут исправляться все ошибки, если принимаемые кодовые комбинации не выводятся помехами за пределы указанных подмножеств.

При наличии помех в разделении множества принятых кодовых комбинаций возникают затруднения. Их можно снять, применяя *правило декодирования по методу максимального правдоподобия*.

Сущность метода заключается в следующем. Из рассмотрения алгоритма функционирования дискретного симметричного канала без памяти следует, что разрешенная кодовая комбинация \vec{a}_i может перейти в кодовую комбинацию \vec{b}_j с вероятностью

$$P[\vec{b}_j / \vec{a}_i] = [p / (m - 1)]^{d(i,j)} (1 - p)^{n - d(i,j)}. \quad (6.50)$$

В принятой кодовой комбинации количество $[n - d(i, j)]$ символов являются верными, а остальные $d(i, j)$ символы – ошибочными. Буквой $d(i, j)$ обозначено кодовое расстояние между комбинациями. Вероятность $P[\vec{b}_j / \vec{a}_i]$ зависит от кодового расстояния $d(i, j)$.

Если требуется принять решение о том, какая кодовая комбинация \vec{a}_i передавалась при приеме комбинации \vec{b}_j , то для этого нужно вычислить вероятности $P[\vec{a}_i / \vec{b}_j]$ и сравнить их между собой. Та кодовая комбинация \vec{a}_i , для которой эта вероятность максимальна, будет считаться *переданной*.

Правило принятия решения по *максимуму вероятности* записывается в виде:

$$\max_i P[\vec{a}_i / \vec{b}_j]. \quad (6.51)$$

Его можно записать также через функцию правдоподобия $L(a)$

$$\max_i P[\vec{a}_i / \vec{b}_j] = \max_i L[\vec{a}_i] P[\vec{a}_i] / P[\vec{b}_j] = c \cdot \max_i L(\vec{a}_i), \quad (6.52)$$

где $L[\vec{a}_i] = P[\vec{b}_j / \vec{a}_i]$; c – постоянное число.

Как правило, полагают, что все принимаемые разрешенные кодовые комбинации равновероятны, т. е. их вероятности равны $1/m$, а постоянное число находят из условия

$$\sum_{i=1}^m cL[\bar{a}_i] = 1.$$

Приведенный анализ позволяет сформулировать правило разбиения множества принятых кодовых комбинаций на ряд подмножеств.

В подмножество M_i следует включать все те комбинации \bar{b}_j , кодовое расстояние которых по отношению к кодовой комбинации \bar{a}_i минимально. Декодирование по наименьшему кодовому расстоянию оптимально для симметричного дискретного канала. Для других каналов оно может оказаться не оптимальным.

Для двоичного симметричного канала без памяти справедлива следующая теорема, определяющая исправляющую способность кода.

Если код имеет $d > 2$ и используется декодирование с исправлением ошибок по наименьшему расстоянию, то все ошибки кратностью $q < d/2$ исправляются. Что же касается ошибок большей кратности, то одни из них исправляются, а другие нет.

Для доказательства покажем, что переданная комбинация \bar{a}_i ближе к принятой \bar{b}_j , чем любая другая разрешенная комбинация. Предположим обратное – что существует разрешенная комбинация \bar{a}_k , для которой $d(k, j) < d(i, j)$. Отсюда следует, что

$$d(k, i) < d(k, j) + d(i, j) < 2d(i, j). \quad (6.53)$$

Последнее неравенство написано на основе известного соотношения (рис. 6.4):

$$d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y). \quad (6.54)$$

Сумма двух сторон треугольника больше или равна третьей стороне. Но по условию теоремы $d(i, j) = q < d/2$. Отсюда $d(k, i) < d$, что противоречит определению минимального кодового расстояния. Это свидетельствует о справедливости теоремы.

Условие исправления ошибок записывается в виде:

$$d > 2q + 1. \quad (6.55)$$

Вероятность ошибочного декодирования с коррекцией ошибок записывается по аналогии с формулой (6.49) в виде:

$$P_{\text{Од}} \leq \sum_{q=d/2}^n c_n^q p^q (1-p)^{n-q}, \quad (6.56)$$

Поясним процесс разбиения множества кодовых комбинаций. Пусть длина двоичных кодовых комбинаций равна трем, а минимальное кодовое расстояние равно 1.

Разрешенные кодовые комбинации образуют следующее множество: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Любая одиночная ошибка при приеме одной из этих кодовых комбинаций трансформирует ее в другую разрешенную комбинацию.

Это случай безызбыточного кода, не обладающего обнаруживающей и корректирующей способностью.

Если $d = 2$, то ни одна из разрешенных комбинаций при одиночной ошибке не переходит в другую.

Например, разрешенные комбинации 000, 011, 101, 110, а запрещенные 001, 010, 100, 111. Этот код обнаруживает одиночные ошибки.

Для их исправления нужно обеспечить непересекаемость подмножеств из запрещенных комбинаций. Для этого нужно обеспечить $d = 3$.

Разрешенные комбинации 000, 111. Запрещенные комбинации 001, 010, 100 образуют первое подмножество M_1 . Эти комбинации получаются в результате искажений символов разрешенной комбинации 000. Запрещенные комбинации 011, 101, 110 образуют второе подмножество M_2 . Они получаются при искажениях символов разрешенной кодовой комбинации 111.

Отметим одно важное свойство, с которым мы столкнулись при рассмотрении данного примера. Оно заключается в следующем. С уменьшением числа разрешенных кодовых комбинаций кодовое расстояние между ними может увеличиваться, что позволяет сначала решить задачу обнаружения при $d = 2$, а затем и задачу исправления ошибок при $d = 3$.

Отмеченное свойство справедливо для любой длины кода n . Поэтому, если длина задана, то можно обеспечить любое минимальное кодовое расстояние d , не превышающее n , уменьшением числа разрешенных кодовых комбинаций m .

Из всевозможных задач помехоустойчивого кодирования главной является задача поиска наилучшего (оптимального) кода. Она формулируется следующим образом: при заданном числе разрешенных кодовых комбинаций m и заданной длине кода n найти код, имеющий наибольшее минимальное кодовое расстояние d .

Общее решение этой задачи не найдено.

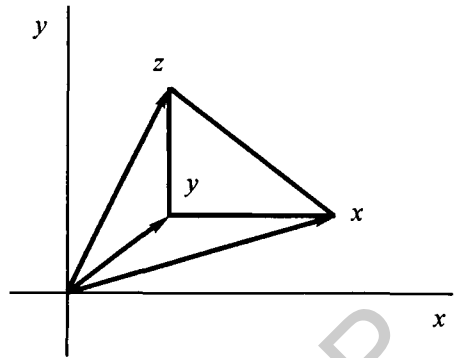


Рис. 6.4. К определению расстояния между тремя векторами x , y , z

Рассмотренные принципы помехоустойчивого кодирования позволяют определить структурные схемы кодирующего и декодирующего устройств, решающих задачу исправления ошибок. В кодирующем устройстве имеется запоминающее устройство, в памяти которого хранятся разрешенные кодовые комбинации. Декодирующее устройство содержит запоминающее, а также сравнивающее и решающее устройства. В декодирующем устройстве принятая комбинация сравнивается со всеми разрешенными и далее выбирается такая разрешенная комбинация, кодовое расстояние до которой меньше. Несмотря на сравнительную простоту алгоритма функционирования, подобные устройства не нашли применения из-за их сложности, особенно при большой длине кодов.

Ниже рассматриваются такие классы кодов, у которых кодирование и декодирование осуществляется относительно простыми техническими средствами даже при больших длинах кодов. Это достигается использованием регулярных правил, определяемых структурой кодов.

6.5.3. Классификация помехоустойчивых кодов

Помехоустойчивые коды делятся на два больших класса: *блочные* и *непрерывные*. В блочных кодах процедура кодирования заключается в сопоставлении с любой буквой алфавита дискретного источника (или последовательности из k символов, соответствующей этой букве), блока из n символов. Длина блока может быть как постоянной, так и переменной. При постоянной длине коды называются *равномерными*. Коды с переменной длиной называются *неравномерными*. Если символы кодовой последовательности разделяются на информационные и проверочные, то такие блочные коды называются *разделимыми*. Разделимые коды длиной в n символов, из которых k символов являются информационными, обозначаются как (n, k) . У неразделимых кодов их символы не делятся на информационные и проверочные.

Различают *линейные* и *нелинейные* разделимые коды. Линейными называются такие коды, у которых поразрядная сумма по модулю 2 любых двух кодовых комбинаций (кодовых слов) также является комбинацией этого же кода.

Если первые k символов любой кодовой комбинации являются информационными, а остальные $(n - k)$ – проверочными, то такой линейный код называется *систематическим*. Примером простого линейного систематического кода является код $(n, n - 1)$, который содержит один проверочный символ. Этот код является кодом с проверкой на четность и обнаруживает ошибки нечетной кратности.

К линейным кодам относятся *циклические* коды, используемые для обнаружения и исправления ошибок. Разновидностями циклических кодов являются: коды Хэмминга, Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-коды) и др.

К нелинейным кодам относится код Бергера, проверочные символы которого представляют двоичную запись числа единиц в информационной кодовой комбинации.

В непрерывных кодах по сравнению с блочными кодами разбиение на блоки не производится. Примером таких кодов являются *сверточные коды*. Наконец, коды делятся на *исправляющие независимые ошибки* и *исправляющие пакеты ошибок*.

6.5.4. Линейные двоичные блочные коды

Основными характеристиками этих кодов являются: длина кода n , число информационных символов k , число проверочных символов $n - k$, вес кодовой комбинации (число единиц в ней), число разрешенных кодовых комбинаций, равное 2^k , полное число кодовых комбинаций 2^n , кодовое расстояние, избыточность кода. Под избыточностью кода понимают величину $\chi = 1 - k/n$, где отношение k/n определяет скорость передачи информации при отсутствии помех.

Величину k/n называют *относительной скоростью кода*.

Рассматриваемые блочные двоичные коды являются линейными, делимыми и систематическими.

Проверочные символы кодовых комбинаций этого (k, n) -кода формируются по правилу:

$$a_{\text{пр}} = \sum_{l=1}^k \gamma_{l,i} a_l, \quad (6.57)$$

где a_p , $l = 1, 2, \dots, k$ – информационные символы; $i = k + 1, \dots, n$; $\gamma_{l,i}$ – коэффициенты, равные 0 или 1. Любой из этих коэффициентов равен 1, если информационный символ участвует в образовании проверочного символа. В противном случае он равен 0.

Суммирование в (6.57) осуществляется по модулю два.

Выражение (6.57) можно записать также в матричном виде

$$\vec{a}_{\text{пр}} = \vec{a}_{\text{и}} \cdot \gamma^T = \left\| a_1, a_2, \dots, a_k \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \gamma_{1,k+1} & \gamma_{1,k+2} & \dots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,k+1} & \gamma_{2,k+2} & \dots & \gamma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{k,k+1} & \gamma_{k,k+2} & \dots & \gamma_{k,n} \end{array} \right\|, \quad (6.58)$$

где $\vec{a}_{\text{пр}} = a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ – матрица-строка из проверочных символов;

$\vec{a}_{\text{и}}$ – матрица-строка заданной информационной кодовой комбинации длиной в k символов; γ^T – транспонированная матрица коэффициентов $\gamma_{l,i}$

Совокупность коэффициентов $\gamma_{l,i}$ можно также записать в виде матрицы размерности $(n - k)k$:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k+1} & \gamma_{2,k+1}, \dots, \gamma_{k,k+1} \\ \gamma_{1,k+2} & \gamma_{2,k+2}, \dots, \gamma_{k,k+2} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{1,n} & \gamma_{2,n}, \dots, \gamma_{k,n} \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Разрешенные кодовые комбинации линейных двоичных блочных кодов длиной в n символов строятся добавлением к каждой входной информационной кодовой комбинации длиной в k символов проверочных элементов длиной $n - k$ символов. Все разрешенные кодовые комбинации можно записать в виде таблицы, содержащей 2^k строк. Для хранения этой таблицы потребуется память, равная $n2^k$ бит. С ростом длины кода объем памяти возрастает. Для линейного блочного кода этот объем можно уменьшить, так как его можно получить линейным суммированием по модулю два любых k линейно независимых кодовых комбинаций. Матрица, содержащая эти комбинации, называется *порождающей*. Размерность порождающей матрицы, равная kn , определит необходимый объем памяти запоминающего устройства. Порождающая матрица записывается в виде

$$G = \begin{pmatrix} 100\dots 0\gamma_{1,k+1}, \dots, \gamma_{1,n} \\ 010\dots 0\gamma_{2,k+1}, \dots, \gamma_{2,n} \\ \dots \\ 000\dots 1\gamma_{k,k+1}, \dots, \gamma_{k,n} \end{pmatrix} = \|1_k, \gamma^T\|, \quad (6.60)$$

где 1_k – единичная матрица порядка k ; γ – матрица из коэффициентов $\gamma_{i,r}$.

Каждая строка порождающей матрицы является кодовой комбинацией линейного блочного кода, причем в качестве входных информационных кодовых комбинаций использованы только такие комбинации, которые содержат лишь один не нулевой символ.

Линейный двоичный блочный код можно задать также с помощью проверочной матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k+1} & \gamma_{2,k+1}, \dots, \gamma_{k,k+1} & 10\dots 0 \\ \gamma_{1,k+2} & \gamma_{2,k+2}, \dots, \gamma_{k,k+2} & 01\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{1,n} & \gamma_{2,n}, \dots, \gamma_{k,n} & 00\dots 1 \end{pmatrix} = \|\gamma 1_{n-k}\|, \quad (6.61)$$

где 1_{n-k} – единичная матрица порядка $n - k$.

Единицы в любой i -й строке подматрицы γ , входящей в проверочную матрицу, указывают, какие информационные символы участвуют в формировании i -го проверочного символа ($i = k + 1, \dots, n$).

Для каждой кодовой комбинации \bar{a} (n, k) – кода произведение

$$\bar{a}H^T = 0, \quad (6.62)$$

где H^T – транспонированная проверочная матрица.

Процесс декодирования сводится к выполнению операции:

$$\vec{S} = \vec{b}H^T, \quad (6.63)$$

где \vec{S} – вектор размерностью $(n - k)$, называемый *синдромом*, \vec{b} – матрица-строка из принятых кодовых символов длины n .

Если принятая кодовая комбинация, \vec{b} совпадает с одной из разрешенных \vec{a} , то $\vec{S} = 0$. В противном случае $\vec{S} \neq 0$, причем вид синдрома зависит от вектора ошибки. Это позволяет указать разряд, где эта ошибка имеется. Действительно,

$$\vec{S} = \vec{b}H^T = (\vec{a} + \vec{e})H^T = \vec{e}H^T, \quad (6.64)$$

где \vec{e} – вектор ошибки.

Число различных синдромов, соответствующих различным ошибкам, равно $2^{n-k} - 1$.

Пример 6.4. Матрица, определяющая проверочные символы (7, 4)-кода равна

$$\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{15} = 0 & \gamma_{25} = 1 & \gamma_{35} = 1 & \gamma_{45} = 1 \\ \gamma_{16} = 1 & \gamma_{26} = 0 & \gamma_{36} = 1 & \gamma_{46} = 1 \\ \gamma_{17} = 1 & \gamma_{27} = 1 & \gamma_{37} = 0 & \gamma_{47} = 1 \end{vmatrix}$$

Найти: а) уравнения, определяющие проверочные символы $\vec{a}_{\text{пр}}$; б) уравнения, определяющие символы синдрома \vec{S} ; в) значения символов синдрома, когда имеется одиночная ошибка в информационных разрядах; г) структурные схемы кодера и декодера.

Решение. Проверочные символы находятся по формуле

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{пр}} = \vec{a}_n \gamma^T &= \begin{vmatrix} \gamma_{15} = 0 & \gamma_{16} = 1 & \gamma_{17} = 1 \\ \gamma_{25} = 1 & \gamma_{26} = 0 & \gamma_{27} = 1 \\ \gamma_{35} = 1 & \gamma_{36} = 1 & \gamma_{37} = 0 \\ \gamma_{45} = 1 & \gamma_{46} = 1 & \gamma_{47} = 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a_5 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1; \quad a_6 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1; \\ &\quad a_7 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1) = \\ &= (a_5 = a_2 + a_3 + a_4; \quad a_6 = a_1 + a_3 + a_4; \quad a_7 = a_1 + a_2 + a_4). \quad (6.65) \end{aligned}$$

Проверочная матрица H находится добавлением к матрице γ дополнительных элементов из 0 и 1.

$$H = \begin{vmatrix} \gamma_{15} & \gamma_{25} & \gamma_{35} & \gamma_{45} & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{16} & \gamma_{26} & \gamma_{36} & \gamma_{46} & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_{17} & \gamma_{27} & \gamma_{37} & \gamma_{47} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Условия, определяющие символы синдрома, найдем из (6.63):

$$\vec{S} = \vec{b} H^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (b_2 + b_3 + b_4 + b_5; b_1 + b_3 + b_4 + b_6; b_1 + b_2 + b_4 + b_7). \quad (6.66)$$

Если ошибочно принят первый символ кодовой комбинации, то

$$b_1 = \bar{a}_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3, b_4 = a_4, b_5 = a_5, b_6 = a_6, b_7 = a_7.$$

Подставляя эти значения в формулу (6.66), получим

$$S = (a_2 + a_3 + a_4 + a_5; \bar{a}_1 + a_3 + a_4 + a_6; \bar{a}_1 + a_2 + a_4 + a_7) = 011.$$

При вычислении символов синдрома приняты во внимание уравнения (6.65) для проверочных символов, а также то, что первый символ принят ошибочно, причем $\bar{a}_1 + a_1 = 1$.

Аналогично вычисляются остальные синдромы. Значения синдромов приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Разряды кодовой комбинации						
1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
011	101	110	111	100	010	001

Реализация блочных кодов возможна с применением ЭВМ или специализированных вычислительных устройств (кодеров и декодеров).

В первом случае вычисление проверочных символов в передатчике ведут по формуле (6.58), а синдрома в приемнике – по формуле (6.63). Для вычислений в памяти ЭВМ должны храниться строки соответствующих матриц, например порождающей матрицы (6.60). В этом случае требуемый объем памяти равен kn бит.

В случае применения специализированных вычислительных устройств (кодеров и декодеров) необходимость в хранении матриц отпадает.

Например, при реализации (7, 4)-кода с помощью ЭВМ для хранения матрицы, определяющей проверочные символы, требуемый объем памяти равен $3 \times 4 = 12$ бит, а для хранения проверочной матрицы объем памяти равен $3 \times 7 = 21$ бит (см. пример 6.4).

При реализации кодера (7, 4)-кода проверочные символы находят суммированием по модулю два соответствующих элементов (символов) информационного слова. Например, пятый проверочный символ

находится суммированием второго, третьего и четвертого элементов информационного слова [см. формулу (6.65)].

При реализации декодера (7, 4)-кода символы синдрома также находятся суммированием по модулю два соответствующих элементов принятого кодового слова в соответствии с выражением (6.66).

В кодере каждый проверочный символ определяется только теми символами соответствующей строки матрицы (6.59), которые равны 1. Аналогично в декодере каждый элемент синдрома определяется только теми символами соответствующей строки транспонированной матрицы (6.61), которые равны 1. Поэтому соединения входов сумматоров по модулю два с соответствующими разрядами кодовых слов адекватно отражают состояния ячеек памяти, отведенных в запоминающем устройстве ЭВМ для хранения матриц γ и H .

Структурные схемы кодера и декодера приведены на рис. 6.5 и рис. 6.6.

Кодирующее устройство работает следующим образом. При поступлении импульса синхронизации подлежащая кодированию четырехразрядная кодовая комбинация с выхода аналого-цифрового преобразователя перезаписывается в первые четыре ячейки буферной памяти, выполненной на семиразрядном регистре.

На выходе сумматора C_1 формируется проверочный элемент a_5 , на выходе сумматора C_2 – проверочный элемент a_6 и на выходе сумматора C_3 – проверочный элемент a_7 . Эти элементы записываются соответственно в пятую, шестую и седьмую ячеек памяти. Сформированная таким образом кодовая комбинация считывается в канал связи в параллельном или последовательном коде.

Декодирующее устройство работает следующим образом. Принятая кодовая комбинация поступает на семиразрядный буферный регистр $T_1 - T_7$. Если эта комбинация не содержит ошибок, на всех четырех выходах дешифратора ошибок ДС сигналы коррекции отсутствуют. Если принятая кодовая комбинация содержит ошибку в первом информационном символе, на первом выходе дешифратора вырабатывается сигнал коррекции, который воздействует на первый триггер T_1 буферного регистра. Последний изменяет свое состояние на противоположное и ошибка таким образом исправляется. На остальных выходах дешифратора сигналы коррекции отсутствуют. Если ошибка имеется при приеме второго символа, то сигнал коррекции присутствует на втором выходе дешифратора. На остальных выходах сигналы коррекции равны нулю. Сигнал коррекции с выхода второго выхода дешифратора, воздействуя на T_2 , изменяет его состояние на противоположное. При ошибочном приеме третьего и четвертого символов схема на рис. 6.6 работает аналогично. После коррекции состояния буферного регистра, его содержимое считывается с $T_1 - T_4$ для дальнейшей обработки.

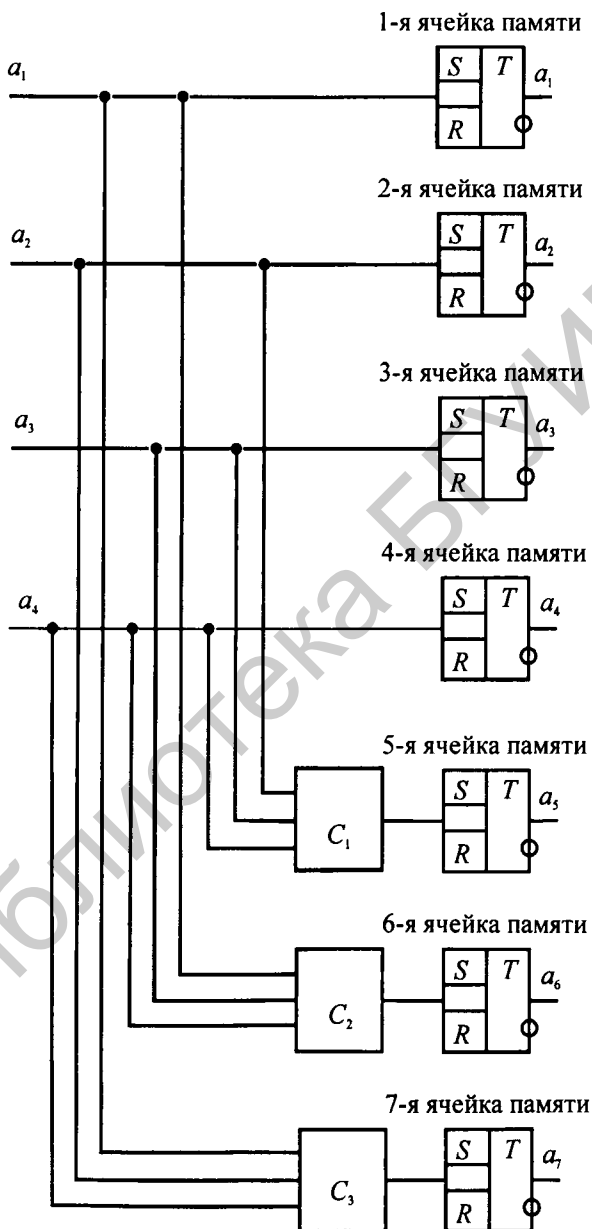


Рис. 6.5. Структурная схема кодирующего устройства:
 T – ячейка памяти; C – сумматор по модулю два

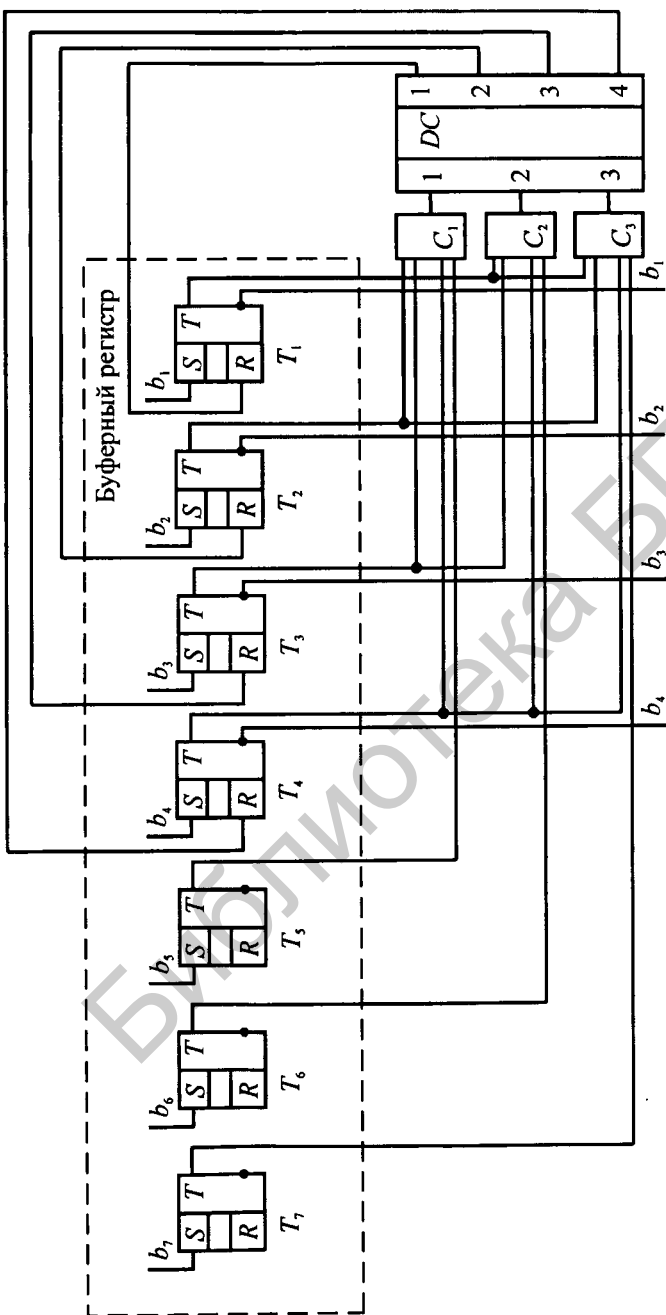


Рис. 6.6. Структурная схема декодирующего устройства:

T – триггерная ячейка буферного регистра; C – сумматор по модулю два; DC – дешифратор

6.5.5. Циклические, сверточные и каскадные коды

Циклические коды относятся к подклассу линейных двоичных блочных систематических кодов. Они являются разделимыми и обозначаются как (n, k) -коды. Название этих кодов происходит от их основного свойства: если исходная кодовая комбинация принадлежит циклическому коду, то все другие кодовые комбинации, полученные циклической перестановкой элементов исходной комбинации, также принадлежат этому коду.

При исследовании свойств циклических двоичных кодов каждая кодовая комбинация может быть записана в виде многочлена (полинома) степени $n - 1$:

$$b(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0,$$

где b_0, b_1, \dots, b_{n-1} – кодовая комбинация.

Например, кодовой комбинации 11011 соответствует полином

$$1x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 1x + 1 = x^4 + x^3 + x + 1.$$

Операции над полиномами ведут с использованием следующих правил.

1. Сложение двух полиномов производится сложением по модулю два коэффициентов при одинаковых степенях этих полиномов:

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})x^{n-2} + \dots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0 = \\ &= c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

2. Умножение полиномов производится по модулю некоторого полинома $p(x)$. Это означает, что в качестве результата умножения принимается остаток от деления обычного произведения полиномов на полином $p(x)$. Остаток от деления называется *вычетом по многочлену $p(x)$* . Указанные операции над полиномами не приводят к кодовым комбинациям, длина которых больше длины исходного кода, т. е. являются замкнутыми.

Полином $p(x)$ называется *порождающим*. Он удовлетворяет следующим условиям.

1. Полином не делится на любой другой полином. Поэтому он называется также *неприводимым*.

2. Двучлен вида $x^n + 1$ делится на $p(x)$ без остатка.

Кодовые комбинации имеют следующие свойства:

а) полиномы, соответствующие разрешенным кодовым комбинациям циклического кода, имеют нулевой вычет по модулю $p(x)$, т. е. делятся на этот полином без остатка;

б) если разрешенные кодовые комбинации принадлежат циклическому коду, то их линейная комбинация будет также принадлежать этому коду, т. е. делиться без остатка на порождающий полином $p(x)$.

Свойство а) позволяет относительно простыми средствами решить задачу обнаружения и исправления ошибок.

Обнаружение ошибок в циклическом коде производится делением полинома принятой кодовой комбинации на полином $p(x)$. Остаток от деления является синдромом. Если синдром равен нулю, принятая комбинация не содержит ошибок и подвергается дальнейшей обработке. Если синдром не равен нулю, то некоторые символы принимаются неверно и принятая кодовая комбинация стирается.

Возможность исправления ошибок в циклических кодах обусловлена тем, что вид синдрома зависит от номера искаженного символа принимаемой кодовой комбинации. Среди множества порождающих полиномов существуют так называемые примитивные полиномы, степень которых $r = n - k$ связана с длиной n кодовой комбинации зависимостью $n = 2^r - 1$. Такие примитивные полиномы обеспечивают число синдромов, равное n .

Формирование разрешенных кодовых комбинаций циклического кода осуществляется по следующему алгоритму.

1. Полином $a(x)$, представляющий информативную часть кодовой комбинации, умножается на полином x^{n-k} . После этой операции образуется n -элементная кодовая комбинация, у которой $(n - k)$ младшие разряды равны нулю. Полином, определяющий эту комбинацию, равен $a(x)x^{n-k}$.

2. Полином $a(x)x^{n-k}$ делится на примитивный полином $p(x)$. В результате определяется остаток от деления так, что $a(x)x^{n-k} = m(x)p(x) + c(x)$, где $m(x)$ – частное; $c(x)$ – остаток, являющийся вычетом.

3. Полином $a(x)x^{n-k}$ складывается с остатком. В результате получается полином $b(x)$, соответствующий передаваемой n -элементной кодовой комбинации. У этой кодовой комбинации первые k элементы информационные, остальные $(n - k)$ – проверочные:

$$b(x) = a(x)x^{n-k} + c(x).$$

Проверочные элементы определяются остатком $c(x)$.

На рис. 6.7 приведена схема кодера циклического (7, 4)-кода. У этого кода четыре символа информационные и три – проверочные. Порождающий полином равен

$$p(x) = x^3 + x^2 + 1.$$

Полином, определяющий информационную часть $a(x) = x^3 + 1$. Ему соответствует кодовая комбинация 1001.

Умножим полином $a(x)$ на полином x^3 . Получим

$$a(x)x^3 = x^6 + x^3.$$

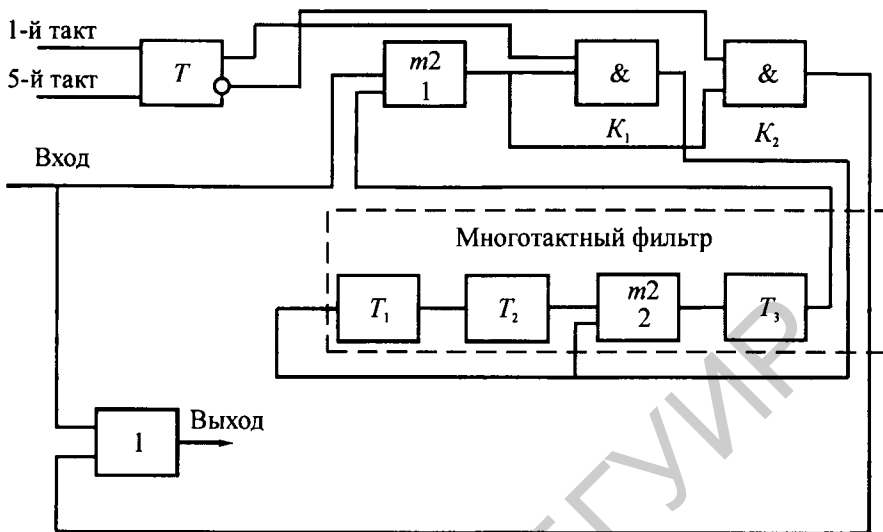


Рис. 6.7. Схема кодера циклического (7, 4) – кода:

T – триггер; $m2$ – сумматор по модулю два; $\&$ – схема И (ключ); 1 – схема ИЛИ

Этому полиному соответствует кодовая комбинация длиной в 7 символов, у которой первые четыре символа информационные, а остальные символы нулевые: 1001000.

На последних трех позициях будут расположены проверочные элементы.

Кодирующее устройство (рис. 6.7) содержит многотактный фильтр, состоящий из трех триггерных ячеек. Число ячеек равно степени порождающего полинома $p(x)$. В фильтре содержатся также сумматоры по модулю два. Их число равно числу ненулевых членов порождающего полинома минус один, т. е. $3 - 1 = 2$ в нашем примере. Сумматоры устанавливаются после ячеек, соответствующих ненулевым членам (после x^2). После члена x^3 сумматор не ставится. Соответствующий члену $x^0 = 1$ сумматор ставится перед первой ячейкой.

Цикл работы кодера состоит из двух этапов и составляет семь единичных тактовых интервалов. Первый этап длится четыре единичных интервала.

От первого тактового импульса триггер T занимает положение, при котором на его прямом выходе появится сигнал 1, а на инверсном – 0. Ключ K_1 откроется, а ключ K_2 закроется. В этом состоянии триггер и ключи находятся в течение времени, равном четырем единичным интервалам. За это время на выход кодера поступает четыре символа информационной группы. Одновременно через первый сумматор по модулю два и ключ K_1 информационные элементы поступают на устройство деления многочлена $a(x)$ на $p(x)$. Деление осуществляется многотактным фильтром. Процесс формирования кодовой комбинации шаг за шагом представлен в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Номер такта	Вход	Состояния ячеек регистра			Выход
		1	2	3	
1	1	1	0	1	1
2	0	1	1	1	01
3	0	1	1	0	001
4	1	1	1	0	1001
5	0	–	1	1	01001
6	0	–	–	1	101001
7	0	–	–	–	1101001

При поступлении пятого тактового импульса триггер T изменит свое состояние: на инверсном выходе появится 1, а на прямом – 0. Ключ K_1 закроется, а ключ K_2 откроется. За остальные три такта проверочные символы (остаток от деления) через сумматор поступают на выход кодера.

Декодирующее устройство (рис. 6.8) для кодов, обнаруживающих ошибки, по существу ничем не отличается от кодирующего устройства (см. рис. 6.7). Отличие только в буферном регистре для хранения информационных символов принимаемой кодовой комбинации. Она хранится в течение времени, пока идет деление на полином $p(x)$. Если остаток обнаружен, то информация в буферном регистре уничтожается. Состояния ячеек декодирующего регистра приведено в табл. 6.4 при отсутствии ошибок и в табл. 6.5 – при ошибочном приеме первого символа кодовой последовательности.

Таблица 6.4

Номер такта	Вход	Состояния ячеек многотактного фильтра			Вход буферного регистра
		1	2	3	
1	1	1	0	1	1
2	0	1	1	1	0
3	0	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1
5	0	0	1	1	0
6	1	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0

Таблица 6.5

Номер такта	Вход	Состояния ячеек многотактного фильтра			Вход буферного регистра
		1	2	3	
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1
5	0	1	1	1	0
6	1	0	1	1	0
7	1	0	0	1	0

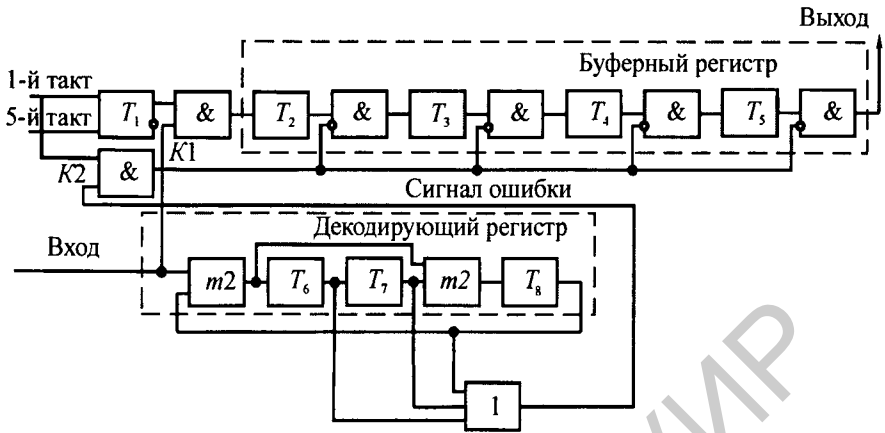


Рис. 6.8. Схема декодера циклического (7, 4) – кода:

T – триггер; $m2$ – сумматор по модулю два; $\&$ – схема И (ключ); 1 – схема ИЛИ

В декодирующих устройствах, исправляющих ошибки, определяется номер искаженного символа принятой кодовой комбинации.

Известен метод определения номера символа, основанный на следующем свойстве: остаток от деления принятого полинома $h(x)$ на полином $p(x)$ равен остатку от деления полинома ошибок $e(x)$ на полином $p(x)$. Полином ошибок

$$e(x) = b(x) + h(x).$$

Остатки не зависят от передаваемой информации, а определяются только номерами тех символов, где имеются ошибки. Ошибки зависят от полинома $p(x)$ и номера символа.

Анализируя синдром, можно определить место ошибки.

Делением полинома $h(x)$ на полином $p(x)$ определяется остаток, соответствующий ошибке в старшем разряде принятой кодовой комбинации. Он сравнивается с остатком от деления полинома ошибки старшего разряда $e_1(x)$ на полином $p(x)$. Если остатки равны, то ошибка в старшем разряде, а если нет, то проверке подвергается соседний младший разряд. Для этого принятый полином $h(x)$ умножается на полином x , затем находится остаток от деления $xh(x)$ на полином $p(x)$. Полученный остаток сравнивается с остатком, который получается делением многочлена ошибки $e_1(x)$ на полином $p(x)$. Если остатки равны, процесс определения номера разряда (символа) заканчивается, а если нет, то проверке подвергается следующий младший разряд. Для этого принятый полином $h(x)$ умножается на x^2 , затем находится остаток от деления $x^2h(x)$ на полином $p(x)$ и т. д. Алгоритм вычисления продолжается до тех пор, пока вычисляемый остаток не будет равен $e_1(x)$.

Пример 6.5. Принятая комбинация кода (7,4) равна 1101011. Примитивный полином $p(x) = x^3 + x^2 + 1$. Требуется определить ошибочно принятый элемент.

Решение. 1. Определяем остаток, соответствующий ошибке в старшем разряде. Для этого полином $e_1(x) = x^6$ делим на полином $p(x)$:

$$\begin{array}{r} x^6 \\ x^6 + x^5 + x^3 \\ \hline x^5 + x^3 \\ x^5 + x^4 + x^2 \\ \hline x^4 + x^3 + x \\ x^4 + x^3 + x \\ \hline x^2 + x \end{array}$$

Остаток $e_1(x) = x^2 + x$ в записи двоичного числа равен 110. Полином принятой комбинации находим по двоичному числу 1101011:

$$h(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x + 1.$$

Делим полином $h(x)$ на полином $p(x)$:

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 \\ x^6 + x^5 + x^3 \\ \hline x + 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ x^3 \\ \hline + 1 \end{array} \right.$$

Остаток равен 011. Он не равен $e_1(x)$. Умножаем полином $h(x)$ на x :

$$h(x)x = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x.$$

Слагаемое x^7 заменяем единицей. Получим

$$x^6 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

Умножение кодовой комбинации на x и замена x^7 на 1 эквивалентно циклическому сдвигу исходной кодовой комбинации на один разряд влево.

Действительно, полиному $h(x)$ соответствует кодовая комбинация 1101011. Умножение $h(x)$ на x дает полином

$$h(x)x = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x.$$

Ему соответствует кодовая комбинация 11010110.

Замена x^7 на 1 дает

$$x^6 + x^4 + x^2 + x + 1,$$

т. е. циклический сдвиг числа на один разряд влево 1010111. Делим полученный полином на полином $p(x)$:

$$\begin{array}{r} x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 \\ x^6 + x^5 + x^3 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^5 + x^4 + \quad x^2 \\ \hline \quad x^3 + x + 1 \\ \quad x^3 + x^2 + 1 \\ \quad \hline \quad \quad x^2 + x \end{array}$$

Полученный остаток $x^2 + x$ совпадает с выражением $e_1(x)$. Следовательно, ошибка – во втором разряде. Принятая кодовая комбинация после исправления ошибки равна 1001011.

Среди других алгоритмов декодирования циклических кодов получили распространение методы, основанные на анализе веса остатка. Обоснование этих алгоритмов можно найти в [20].

Подклассом циклических кодов являются коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ). Они отличаются относительно простой реализацией алгоритма декодирования. Эти коды с $n = 2^s - 1$ и $k > n - sq$ способны исправлять ошибки с кратностью меньшей или равной q для любой пары натуральных чисел s и $q < 2^{s-2}$. Относительно простая реализация декодирующих устройств получается и при *мажоритарном* декодировании некоторых циклических кодов. Мажоритарное декодирование основано на том, что в этих кодах каждый информационный символ определяется несколькими линейными выражениями через другие символы кодовой последовательности.

При отсутствии помех все линейные соотношения дают одинаковые выражения. При наличии помех получаются разные результаты (одни линейные соотношения дают результат 0, а другие – 1). В этом случае решение о том, какое значение имеет информационный символ, принимается по принципу большинства. Если число линейных соотношений, которые дают результат 0, больше числа соотношений, которые дают результат 1, то принимается решение, что принимаемый информационный символ равен 0. В противном случае принимается решение, что принятый информационный символ равен 1. Такой принцип принятия решения называется мажоритарным.

Проиллюстрируем принцип мажоритарного декодирования на примере кода (7,3) с порождающим полиномом

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

и проверочной матрицей

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Используя $\bar{a}H^T = 0$, найдем следующие выражения для символов:

$$a_1 = a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_5 = a_2 + a_6,$$

$$a_2 = a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_6 = a_3 + a_7,$$

$$a_3 = a_1 + a_4 = a_1 + a_2 + a_5 = a_2 + a_7.$$

В декодере имеется возможность разными способами вычислить эти символы. Например, первый информационный символ определяется следующими уравнениями:

$$b^*_1 = b_1; \quad b^*_1 = b_3 + b_4; \quad b^*_1 = b_2 + b_3 + b_5; \quad b^*_1 = b_2 + b_6. \quad (6.67)$$

Они получены из равенства

$$\bar{b}H^T = 0,$$

где $\bar{b} = b_1, b_2, \dots, b_7$ — принятая кодовая комбинация.

Аналогично находятся уравнения для других информационных символов.

При отсутствии ошибок уравнения (6.67) дают одинаковые значения для первого информационного символа.

Если ошибка происходит в первом разряде, то $b^*_1 = \bar{a}_1$ и уравнения записываются в виде:

$$b^*_1 = \bar{a}_1; \quad b^*_1 = a_3 + a_4; \quad b^*_1 = a_2 + a_3 + a_5; \quad b^*_1 = a_2 + a_6.$$

Оценки символа, полученные из второго, третьего и четвертого уравнения совпадают и отличаются от оценки, полученной на основе первого уравнения. По большинству принимается решение $b^*_1 = a_1$. Аналогично принимаются решения о принятых символах во втором и третьем информационных разрядах.

Схема декодера (рис. 6.9) довольно проста. Она содержит сдвигающий регистр, схему ИЛИ, три сумматора по модулю два и мажоритарный элемент.

После заполнения регистра ключ K размыкается и вычисляется первый символ принятой информационной последовательности. Далее, путем циклических сдвигов вычисляются второй и третий символы.

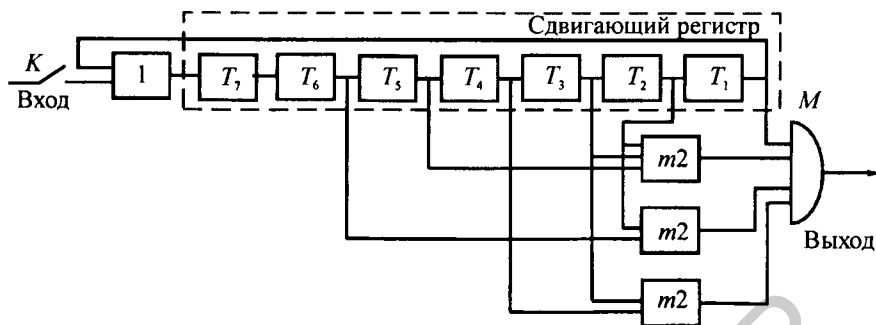


Рис. 6.9. Структурная схема декодера циклического мажоритарного (7, 3)-кода: T – триггерная ячейка; $m2$ – сумматор по модулю два; M – мажоритарный элемент

Кроме блочных кодов в системах связи применяются *рекуррентные* или *цепные* коды. Информационные символы этих кодов чередуются с проверочными символами:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} a_{17} a_{18} a_{19} a_{20} a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} a_{27} a_{28} a_{29} a_{30} a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36} a_{37} a_{38} a_{39} a_{40} a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} a_{46} a_{47} a_{48} a_{49} a_{50},$$

где a_i – i -й информационный символ, равный 0 или 1, а a_{i+1} – проверочный символ, определяемый уравнением

$$a_{i+1} = a_i + a_{i+1}.$$

Рекуррентный код обозначают (k/n) , где k – число информационных, а n – общее число символов.

К рекуррентным кодам относится относительный код, используемый при ОФМ. Другим примером является *сверточный* код.

Сверточный код – это линейный, рекуррентный код. Он формируется следующим образом. Символы на выходе кодирующего устройства определяются (в соответствии с рекуррентным соотношением) блоком из k символов передаваемого сообщения, которые присутствуют на входе этого устройства в данном интервале и в предшествующих тактовых интервалах времени.

Рассмотрим формирование сверточного кода на конкретном примере. Кодирующее устройство содержит сдвигающий регистр и сумматоры по модулю два. В схеме (рис. 6.10) на каждые три символа входного сообщения вырабатываются два символа выходной последовательности, которые через ключ последовательно во времени подаются в канал. Выходные символы являются линейными функциями кодового слова, записанного в регистре.

Для сверточных кодов разработаны специальные алгоритмы так называемого последовательного декодирования, позволяющие исправлять ошибки относительно небольшой кратности. Используется также алгоритм Витерби.

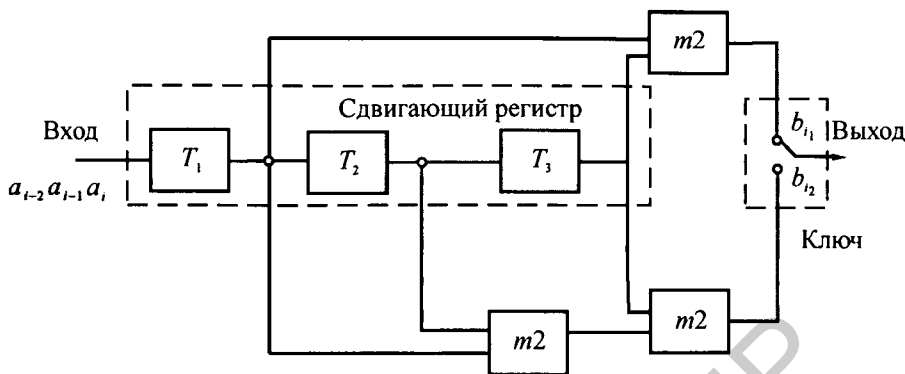


Рис. 6.10. Структурная схема кодера сверточного кода:
 T – триггер сдвигового регистра; $m2$ – сумматор по модулю два

Коды с длинными блоками и большим кодовым расстоянием получают объединением коротких кодов. К их числу относятся *итеративные* и *каскадные*.

Итеративный код строится следующим образом. Вначале сообщение кодируется (n_1, k_1) -кодом первой ступени. При этом любая кодовая комбинация строится по известному правилу: к информационным символам, число которых равно k_1 , добавляются $(n_1 - k_1)$ проверочные символы.

Полученные таким образом комбинации записываются в виде матрицы из k_2 строк. Далее сообщение кодируется (n_2, k_2) -кодом второй ступени. Каждая комбинация этого кода содержит k_2 информационных символов, совпадающих с символами столбцов матрицы, и $(n_2 - k_2)$ проверочных символов, которые приписываются к этим информационным символам.

Результирующая матрица, приведенная в табл. 6.6, содержит $n_1 n_2$ символов, из которых $k_1 k_2$ являются информационными.

Таблица 6.6

Символы	Информационные 1-й ступени	Проверочные 1-й ступени
Информационные 2-й ступени	$\begin{cases} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \dots & a_{k_2 k_1} \end{cases}$	$\begin{cases} a_{1, k_1+1}, \dots, a_{1n_1} \\ a_{2, k_1+1}, \dots, a_{2n_1} \\ \dots \\ a_{k_2, k_1+1}, \dots, a_{k_2 n_1} \end{cases}$
Проверочные 2-й ступени	$\begin{cases} a_{k_2+1, 1} a_{k_2+1, 2} \dots a_{k_2+1, k_1} \\ \dots \\ a_{n_2, 1} a_{n_2, 2} \dots a_{n_2, k_1} \end{cases}$	$\begin{cases} a_{k_2+1, k_1+1}, \dots, a_{k_2+1, n_1} \\ \dots \\ a_{n_2, k_1+1}, \dots, a_{n_2, n_1} \end{cases}$

Декодирование производится в два этапа. На первом обнаруживают и исправляют ошибки принятых (n_1, k_1) -кодových комбинаций. На втором этапе вновь обнаруживают и исправляют ошибки, которые остаются неисправленными после первого этапа. В этом случае декодируются (n_2, k_2) -кодových комбинации. На первом этапе обнаружение и исправление ошибок ведут по строкам табл. 6.6, а на втором этапе – по столбцам. Код (n_1, k_1) называется внутренним, а код (n_2, k_2) – внешним.

Минимальное кодовое расстояние итеративного кода $d = d_1 d_2$, где d_1, d_2 – минимальные кодовые расстояния для кодов первой и второй ступеней.

В каскадном коде (также как и итеративном) двоичная информационная кодовая комбинация (сообщение) вначале кодируется (n_1, k_1) -кодом первой ступени (внутренним кодом). При этом к информационным символам, число которых равно k_1 , добавляются проверочные символы, число которых равно $(n_1 - k_1)$. В результате формируется разрешенная двоичная кодовая комбинация.

Разрешенные кодовые комбинации, число которых равно k_2 , записываются в виде матрицы из k_2 строк и k_1 столбцов. Далее, на второй ступени кодирования внешним кодом (в отличие от итеративного кода), каждая информационная последовательность из k_1 двоичных символов заменяется одним символом недвоичного кода. Основание этого кода $m = 2^{k_1}$. В результате матрица из информационных двоичных символов размерности $k_1 k_2$ преобразуется в матрицу из информационных m -ичных символов. Полученный таким образом информационный блок кодируется n_2, k_2 -кодом.

К блоку из k_2 m -ичных символов приписываются проверочные m -ичные символы, число которых равно $(n_2 - k_2)$. Из приведенного описания следует, что полученному таким образом m -ичному слову длиной n_2 соответствует матрица из двоичных информационных и проверочных символов размерности $k_1 n_2$. Далее к проверочным m -ичным символам приписываются двоичные проверочные символы по правилу формирования (n_1, k_1) -кода. В результате размерность результирующей матрицы становится равной $n_1 n_2$ (как и у итеративного кода).

При приеме вначале декодируются кодовые комбинации внутреннего (n_1, k_1) -кода, а затем кодовые комбинации внешнего (n_2, k_2) -кода. При этом все ошибки, оставшиеся после декодирования комбинаций на первом этапе, обнаруживаются и исправляются на втором этапе.

В качестве m -ичного кода используют код Рида – Соломона, который обеспечивает наибольшее кодовое расстояние при заданных n_2 и k_2 , если $n_2 < m$.

Контрольные вопросы

1. Какой количественной мерой можно оценить количество информации, содержащееся в дискретном сообщении?

2. Как энтропия выражается через собственную информацию?
3. Какие свойства энтропии Вам известны?
4. Какая связь между энтропией дискретного источника и производительностью этого источника?
5. Чем определяется скорость передачи информации по каналу связи?
6. В чем суть основной теоремы кодирования К.Шеннона при отсутствии помех?
7. Что такое дифференциальная энтропия? Сравните ее с энтропией дискретного источника.
8. Дайте определение эpsilon-энтропии. Как связаны между собой эpsilon-энтропия и производительность источника непрерывных сообщений?
9. Чему равны пропускные способности дискретного и непрерывного каналов связи?
10. Сформулируйте теоремы, определяющие обнаруживающую и исправляющую способность помехоустойчивых кодов. Как записывается условие обнаружения (исправления) ошибок?
11. Какие коды называются линейными двоичными блочными кодами? Перечислите их основные свойства. Приведите схемы кодера и декодера.
12. Какие коды называются циклическими? Как происходит исправление ошибок в случае циклического кода? Приведите схемы кодирующего и декодирующего устройств.
13. На каком свойстве циклических кодов основано мажоритарное декодирование?
14. Перечислите основные свойства итеративных кодов. В чем их достоинство? В чем сущность сверточных кодов?

7. ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ

7.1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА

Целью оптимального приема (так же, как и помехоустойчивого кодирования) является *повышение верности принимаемых сообщений*. Если при помехоустойчивом кодировании эта задача решается выбором кода, который определяет структуры кодера и декодера, то при оптимальном приеме задача решается выбором структуры приемника (демодулятора). Структура приемника, удовлетворяющая заданному критерию оптимальности, называется оптимальной, а приемник – *оптимальным*. Приемник анализирует смесь сигнала и помехи (шума)

$$Z(t) = u_i(t) + N(t), i = 1, 2, \dots, m$$

в течение заданного времени и принимает решение о том, какой из возможных сигналов присутствует в этой смеси. С приходом следующего сигнала анализ повторяется. В п. 1.4 указано на два способа обработки смеси сигнала и шума: посимвольный прием и прием в целом.

При посимвольном приеме решаются следующие задачи:

- 1) задача *обнаружения сигнала*;
- 2) задача *различения (распознавания) одного из двух сигналов*.

Первая задача возникает при приеме двоичного АМ сигнала (см. п. 3.4.4). При передаче информационного символа 0 сигнал на входе канала отсутствует, а при передаче 1 – присутствует. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение единичного интервала $\tau_{\text{д}}$, дает ответ: есть на входе канала сигнал или его нет, т. е. определяет переданный символ.

Вторая задача возникает при приеме ФМ сигнала (см. п. 3.6.2). При передаче информационного символа 0 сигнал на входе канала равен $u(t)$, а при передаче символа 1 равен $-u(t)$. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение единичного интервала τ_n , дает ответ, какой из двух символов передан по каналу связи.

Прием в целом связан с решением задачи распознавания одного из множества $m > 2$ сигналов. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение времени $T > \tau_n$, дает ответ, какой из m сигналов присутствует в смеси и в соответствии с кодовой таблицей определяет переданное по каналу двоичное слово блока (см. п. 3.5.4, 3.6.3, 3.7.3).

Впервые задача оптимального приема была поставлена и решена в 1946 г. выдающимся русским ученым В. А. Котельниковым [1].

Рассмотрим задачу посимвольного приема двоичных (бинарных) сигналов на фоне нормального белого шума. Форма сигналов известна точно, т. е. задана детерминированными функциями времени $u_i(t)$, $i = 1, 2$. Сигналы имеют одинаковую длительность τ_n , равную длительности единичного интервала, причем границы этого интервала известны точно. Выполнение последнего условия обеспечивается с помощью устройств тактовой синхронизации.

Информационные символы изменяются в соответствии с передаваемой информацией и поэтому до обработки на приемном конце неизвестны.

Для исследования оптимального приема воспользуемся моделью дискретно-непрерывного канала. На его входе присутствуют двоичные символы 0, 1 (буквы a_1, a_2), которым соответствуют известные формы сигналов с априорными вероятностями, соответственно равными $P[u_1(t)]$, $P[u_2(t)]$, причем их сумма равна 1.

На выходе канала смесь сигнала и шума является непрерывной реализацией случайного процесса. Полагая, что спектр смеси ограничен верхней граничной частотой F_B , представим эту реализацию выборочными значениями $Z(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые следуют через равные интервалы времени $\Delta t = 1/2F_B$. Число выборок в интервале наблюдения смеси равно $n = \tau_n / \Delta t = 2F_B \tau_n$.

Случайный процесс $Z(t)$ считается заданным, если задана его n -мерная плотность вероятности:

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{d^n F(y_1, y_2, \dots, y_n)}{dy_1 dy_2 \dots dy_n}, \quad (7.1)$$

где $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P[Z(t_1) \leq y_1, Z(t_2) \leq y_2, \dots, Z(t_n) \leq y_n]$.

Здесь $F(y_1, y_1, \dots, y_n)$ – интегральная функция распределения, P – соответствующая вероятность.

Зная n -мерную плотность, можно вычислить вероятность реализации смеси сигнала и шума:

$$\begin{aligned} P(b_j) &= \int \dots \int_{\vec{d}\bar{y}} \omega(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n \cong \\ &\cong \omega(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \omega(\vec{y}) d\vec{y}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – n -мерный неслучайный вектор, определенный совокупностью значений неслучайных аргументов; $d\vec{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_n$ – бесконечно малая область n -мерного пространства.

Интегрирование производится по этой бесконечно малой области.

Выделим некоторую ограниченную область n -мерного пространства, полагая, что исследуемые случайные векторы не выходят за ее границы.

Кроме того, появление конкретного вектора свяжем с появлением на выходе дискретно-непрерывного канала некоторой буквы b_j из бесконечного множества подобных букв. Это событие зависимо и совместно с другим событием, которое заключается в присутствии на входе канала одной из двух букв [сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2$]. Математическое описание событий a_i и b_j исчерпывается совместной вероятностью:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j / a_i) = P(b_j)P(a_i / b_j), \quad (7.3)$$

где $P(b_j)$ – вероятность реализации смеси $Z(t)$ в интервале $(0, \tau_n)$; $P(a_i)$ – априорная вероятность сигнала; $P(a_i / b_j)$ условная вероятность, равная апостериорной вероятности сигнала; $P(b_j / a_i)$ – функция правдоподобия.

Из (7.3) находим выражение для апостериорной вероятности:

$$P(a_i / b_j) = \frac{P(a_i)P(b_j / a_i)}{P(b_j)}. \quad (7.4)$$

Вероятность $P(b_j / a_i)$ может быть найдена по n -мерой условной плотности вероятности:

$$P(b_j / a_i) = \int \dots \int_{\vec{d}\bar{y}} w[y_1, y_2, \dots, y_n / u_i(t)] dy_1 dy_2 \dots dy_n \approx w[\vec{y} / u_i(t)] d\vec{y}. \quad (7.5)$$

Эта плотность

$$w[y_1, y_2, \dots, y_n / u_i(t)] = \frac{d^n F[y_1, y_2, \dots, y_n / u_i(t)]}{dy_1 dy_2 \dots dy_n}, \quad (7.6)$$

где $F(y_1, y_2, \dots, y_n / u_i(t)) = P[Z(t_1) \leq y_1, Z(t_2) \leq y_2, \dots, Z(t_n) \leq y_n / u_i(t)]$.

В п. 5. 2. 2. показано, что функция правдоподобия (7.6) равна n -мерной плотности распределения вероятности шума. Там же приведено и выражение для функции правдоподобия. Безусловная (7.1) и условная (7.6) n -мерная плотности распределения вероятностей существенно отличаются.

Отличие в том, что если ансамбль реализаций $Z(t)$, определяющих первую плотность, включает реализации, связанные как с первым, так и со вторым сигналами, то ансамбль второй плотности включает только реализации, связанные или с первым, или со вторым сигналом.

В п. 6.1.1 рассмотрена передача символов по дискретному каналу связи с помехами и определена мера количества извлекаемой информации. Эта мера определяется равенством (6.4).

По аналогии можно определить количество информации, передаваемой по дискретно-непрерывному каналу:

$$\log \frac{P(a_1/b_j)}{P(a_1)},$$

если на его входе присутствует символ a_1 , и равно

$$\log \frac{P(a_2/b_j)}{P(a_2)},$$

если на входе присутствует символ a_2 .

Разность этого количества информации:

$$\Delta I = \log \frac{P(a_1/b_j)}{P(a_1)} - \log \frac{P(a_2/b_j)}{P(a_2)} = \log \frac{P(a_1/b_j)P(a_2)}{P(a_2/b_j)P(a_1)}. \quad (7.7)$$

Подставляя в (7.7) формулу (7.4), получим:

$$\Delta I = \log \frac{P(b_j/a_1)}{P(b_j/a_2)}. \quad (7.8)$$

Выразим значение вероятностей через условные плотности распределения вероятности по формуле (7.5). В результате получим:

$$\Delta I = \log \frac{w[\bar{y}/u_1(t)]}{w[\bar{y}/u_2(t)]} = \log \Lambda, \quad (7.9)$$

где $\Lambda = w[\bar{y}/u_1(t)]/w[\bar{y}/u_2(t)]$ — отношение апостериорных (послеопытных), условных плотностей вероятности. Оно определяет правдоподобие гипотез о передаче сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2$.

Если выполняется неравенство

$$\log \Lambda > 0, \quad (7.10)$$

то наиболее вероятно, что был передан сигнал $u_1(t)$, а если не выполняется, то наиболее вероятно, что был передан сигнал $u_2(t)$.

Правило (7.10) принятия решения называется *информационным критерием оптимальности приемника*.

Другим критерием оптимальности является следующее неравенство:

$$P(a_1 / b_j) = P[u_1(t)] \frac{w[\bar{y} / u_1(t)] d\bar{y}}{w(\bar{y}) d\bar{y}} > P(a_2 / b_j) = P[u_2(t)] \frac{w[\bar{y} / u_2(t)] d\bar{y}}{w(\bar{y}) d\bar{y}}. \quad (7.11)$$

Оно получено вычислением апостериорных вероятностей по формулам (7.2), (7.4) и (7.5), и сравнением их между собой. Критерий (7.11) называется *критерием максимальной обратной вероятности*. Если неравенство выполняется, то принимается решение, что принят сигнал $u_1(t)$. В противном случае принимается решение, что принят сигнал $u_2(t)$.

Выражение (7.11) можно записать также в виде:

$$\Lambda = \frac{w[\bar{y} / u_1(t)]}{w[\bar{y} / u_2(t)]} > \frac{P[u_2(t)]}{P[u_1(t)]}. \quad (7.12)$$

Полученный критерий называется *критерием максимума отношения правдоподобия*. Если априорные вероятности равны, то $\Lambda > 1$. Логарифмируя это неравенство, получим: $\log \Lambda > 0$, т. е. информационный критерий. Из этого следует, что принятие решения о возможных принимаемых сигналах на основе информационного критерия основано на сравнении количества информации, извлекаемой из смеси сигнала и шума об этих сигналах. Если при приеме учитываются и априорные вероятности сигналов, то этот прием реализуется на основе критерия максимума отношения правдоподобия, а если нет, то на основе информационного критерия.

При приеме одного из множества m сигналов ($m > 2$) оптимальный приемник вычисляет апостериорные вероятности, а затем принимает решение. Правило принятия решения записывается в виде:

$$P[u_i(t)] \frac{w[\bar{y} / u_i(t)]}{w(\bar{y})} > P[u_j(t)] \frac{w[\bar{y} / u_j(t)]}{w(\bar{y})}, \quad (7.13)$$

где $P[u_i(t)]$, $P[u_j(t)]$ – априорные вероятности i -го и j -го сигналов; $w[\bar{y} / u_i(t)]$, $w[\bar{y} / u_j(t)]$ – функции правдоподобия i -го и j -го сигналов, причем сумма всех априорных вероятностей сигналов равна 1.

Вычисленные апостериорные вероятности попарно сравниваются между собой и после этой операции те вероятности, которые оказались больше, вновь сравниваются между собой и т. д. Найденная по этому правилу наибольшая апостериорная вероятность определяет принимаемый сигнал.

Правило (7.13) можно записать иначе через отношение правдоподобия двух гипотез о передаче сигналов:

$$\Lambda_{i,j} = \frac{w[\bar{y} / u_i(t)]}{w[\bar{y} / u_j(t)]} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}; i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (7.14)$$

Все приведенные выше критерии оптимальности записаны в виде неравенств, которые позволяют определить в смеси сигнала и шума наиболее вероятный сигнал из заданного множества сигналов.

Другими используемыми критериями являются: критерий минимума среднего риска, весовой критерий, критерий Неймана – Пирсона. Поскольку в теории связи преимущественно применяют критерий максимума отношения правдоподобия, мы в дальнейшем будем использовать этот критерий.

Алгоритм работы приемника, работающего в соответствии с этим критерием, заключается в вычислении отношения правдоподобия на основе анализа смеси сигнала и шума и принятия решения о том, какой сигнал присутствует на входе. По этому сигналу определяется или оценка блока информационной последовательности, или оценка символа этой последовательности.

Оценка в тексте и на рисунках книги обозначена звездочкой.

7.2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИЕМНИКОВ ПРИ ПРИЕМЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ, ИЗВЕСТНЫХ ТОЧНО

7.2.1. Реализация оптимального приема на базе коррелятора

Под *синтезом* оптимального приемника понимают отыскание его структуры. Задача синтеза формуруется следующим образом. Требуется найти структуру приемника, которая удовлетворяет исходным условиям и ограничениям и при этом обеспечивает совокупность показателей качества, наилучших в смысле заданного критерия оптимальности.

Синтез обычно проводят, сочетая эвристический метод, основанный на использовании накопленного инженерного опыта и знаний по проектированию приемников, и математический анализ.

Математический синтез заключается в математической формулировке совокупности исходных данных и критерия оптимальности, а также в отыскании чисто математическим путем такой структуры приемника, которая удовлетворяет исходным данным, критерию оптимальности и требуемой совокупности показателей качества.

Рассмотрим задачу математического синтеза оптимального приемника для приема сигнала, известного точно.

Исходными данными являются:

а) вид зависимости сигнала $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, от его параметров и времени;

б) вид смеси сигнала и помехи;

в) вид канала связи;

г) время анализа смеси сигнала и помехи.

Сигнал является детерминированной функцией времени и его параметров (например, амплитуды, частоты и начальной фазы). Начало и окончание сигнала заранее известны и совпадают с началом и окончанием анализа смеси сигнала и шума.

Выполнение последнего условия обеспечивается устройствами синхронизации.

Помеха является нормальным белым шумом со спектральной плотностью N_0 . Канал связи является дискретно-непрерывным. Время анализа смеси сигнала и шума или равно времени передачи одного информационного символа (длительности единичного интервала τ_u), или равно времени передачи T множества символов.

В качестве критерия оптимальности выберем критерий максимума отношения правдоподобия, записанный в виде неравенств (7.14).

Используя результаты, приведенные в разделе 4.4 и связанные с описанием n -мерной плотности распределения вероятности нормального шума, а также сведения из п.п. 5.2.2, 5.2.6, касающиеся математического описания непрерывного и дискретно-непрерывного каналов связи, перепишем неравенства (7.14) в виде:

$$\Lambda_{i,j} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - u_i(t)]^2 dt\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - u_j(t)]^2 dt\right\}} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}; i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (7.15)$$

При написании неравенств (7.15) использована формула (5.16). Логарифмируя по основанию e левую и правую части неравенства, получим следующее выражение:

$$\int_0^T [z(t) - u_j(t)]^2 dt - N_0 \ln p[u_j(t)] > \int_0^T [z(t) - u_i(t)]^2 dt - N_0 \ln p[u_i(t)].$$

Раскрывая скобки и сокращая в обеих частях неравенства одинаковые слагаемые, получим следующий алгоритм приема:

$$\begin{aligned} & \int_0^T z(t)u_i(t)dt - 0,5E_i + 0,5N_0 \ln p[u_i(t)] > \\ & > \int_0^T z(t)u_j(t)dt - 0,5E_j + 0,5N_0 \ln p[u_j(t)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

где E – энергия принимаемого сигнала.

Преобразование неравенств (7.15) изменяет размерность его составляющих с безразмерных величин на величины, которые имеют размерность [В²/Гц]. Последняя определена синтезируемой структурой оптимального

приемника и является более удобной для использования. В дальнейшем анализ будем вести с использованием в основном этой размерности.

Если все сигналы равновероятны и имеют одинаковые энергии, то равенство (7.16) упрощается:

$$\int_0^T z(t)u_i(t)dt > \int_0^T z(t)u_j(t)dt, \quad j \neq i$$

или

$$\max \left[\int_0^T z(t)u_i(t)dt \right], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.17)$$

Структура оптимального приемника, которая определяется выражениями (7.17), является многоканальной. Каждый канал оптимального приемника содержит умножитель и интегратор. Устройство, содержащее умножитель и интегратор, называется *коррелятором*. Приемник, построенный на корреляторах, называется *корреляционным приемником*. Напряжения, полученные на выходах каналов, сравниваются между собой в решающем устройстве в конце интервала приема смеси сигнала и шума. По каналу с наибольшим откликом определяется сигнал, присутствующий на входе в смеси с шумом и совпадающий с опорным сигналом этого коррелятора. По найденному сигналу находится соответствующая ему оценка двоичного слова блока длиной k символов передаваемой информационной последовательности [см. дискретную ЧМ, модуляцию шумоподобного сигнала по форме (п. 3.5.4, 3.7.3)]. Структурная схема оптимального приемника, построенного на корреляторах (см. рис. 7.1), практически не отличается от схемы когерентного детектора (см. рис. 3.77).

В схеме оптимального приемника используется интегратор, а в схеме когерентного детектора – фильтр нижних частот. В приемнике вычисляется корреляционная функция при нулевом сдвиге между принимаемым и опорным сигналами. Если принимаемый и опорный сигналы совпадают по форме, то среднее значение корреляционной функции равно энергии сигнала, а если не совпадают и являются ортогональными, то среднее значение корреляционной функции равно нулю.

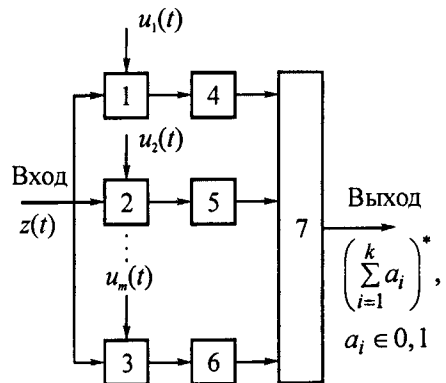


Рис. 7.1. Структурная схема оптимального приемника (демодулятора) m сигналов, известных точно:

1, 2, 3 – умножители; 4, 5, 6 – интеграторы;
7 – решающее устройство

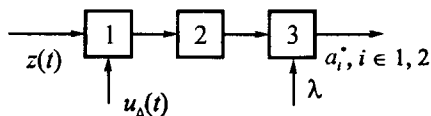


Рис. 7.2. Структурная схема оптимального приемника двоичных сигналов:
1 – умножитель; 2 – интегратор;
3 – решающее устройство

Для двоичной системы ($m = 2$) неравенство (7.16) записывается в виде:

$$\int_0^{\tau_n} z(t) u_{\Delta}(t) dt > \lambda = 0,5(E_1 - E_2) + 0,5N_0 \{ \ln p[u_2(t)] / p[u_1(t)] \}, \quad (7.18)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ – разность сигналов; λ – пороговый уровень; τ_n – время анализа смеси сигнала и шума.

Структурная схема оптимального приемника для приема двоичного сигнала показана на рис. 7.2.

7.2.2. Бинарное обнаружение сигналов

Бинарное обнаружение реализуется при приеме модулированных по амплитуде носителей сообщения: постоянного тока, гармонического сигнала, шумоподобного сигнала и т. д. Модулирующий двоичный сигнал является функцией непрерывного времени. Он равен или нулю или заданному некоторой функцией импульсу в пределах каждого единичного или тактового интервала в соответствии с передаваемыми информационными символами 0 или 1 (см. п. 3.4.1).

Рассмотрим примеры бинарного обнаружения.

При приеме двоичного видеосигнала, полученного в передатчике модуляции постоянного тока информационными посылками по амплитуде, этот сигнал равен постоянной величине [$u_1(t) = a$] или нулю [$u_2(t) = 0$] в течение тактового интервала τ_n . Энергии этих сигналов соответственно равны:

$$E_1 = \int_0^{\tau_n} u_1^2(t) dt = a^2 \tau_n, \quad E_2 = 0.$$

Неравенство (7.18), определяющее структуру обнаружителя, записывается в виде:

$$a \int_0^{\tau_n} Z(t) dt > \lambda, \quad (7.19)$$

где $\lambda = a^2 \tau_n / 2 + 0,5N_0 \{ \ln p[u_2(t)] - \ln p[u_1(t)] \}$.

Структура оптимального приемника, построенного в соответствии с неравенством (7.19), состоит из интегратора и решающего устройства, в котором вычисленное значение интеграла сравнивается с пороговым уровнем.

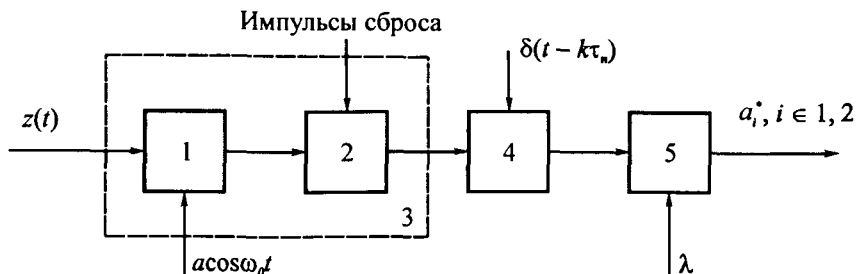


Рис. 7.3. Структурная схема оптимального когерентного приемника:

1 – умножитель; 2 – интегратор; 3 – коррелятор; 4 – дискретизатор; 5 – решающее устройство

При приеме двоичного АМ радиосигнала, полученного в передатчике модуляцией гармонического сигнала информационными посылками по амплитуде,

$$E_1 = a^2 \int_0^{\tau_n} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = a^2 \tau_n / 2, E_2 = 0,$$

а пороговый уровень

$$\lambda = a^2 \tau_n / 4 + 0,5 N_0 \{ \ln p[u_2(t)] - \ln p[u_1(t)] \}.$$

Анализ выражений для порогового уровня показывает, что этот уровень определяется энергией сигнала, спектральной плотностью мощности шума и априорными вероятностями передаваемых сигналов. Цифровые информационные потоки отличаются непостоянством этих вероятностей, что создает определенные трудности реализации оптимальных структур. В ряде систем передачи равенство априорных вероятностей обеспечивается использованием специального преобразования (скремблирования) двоичного информационного потока в передатчике. Операция скремблирования связана с посимвольным суммированием по модулю два элементов двоичного информационного потока с элементами двоичной псевдослучайной последовательности. В результате суммарный цифровой поток будет содержать равновероятные символы, а пороговый уровень в оптимальном приемнике будет определяться только энергией сигнала. В приемнике после приема и обработки суммарного цифрового потока производится восстановление исходного двоичного информационного потока с использованием операции, обратной скремблированию.

Структурная схема оптимального приемника двоичных АМ радиосигналов приведена на рис. 7.3. Временные диаграммы, поясняющие работу когерентного приемника, приведены на рис. 7.4.

В состав схемы входит коррелятор, содержащий умножитель и интегратор, а также устройство, осуществляющее отсчет значения напряжения

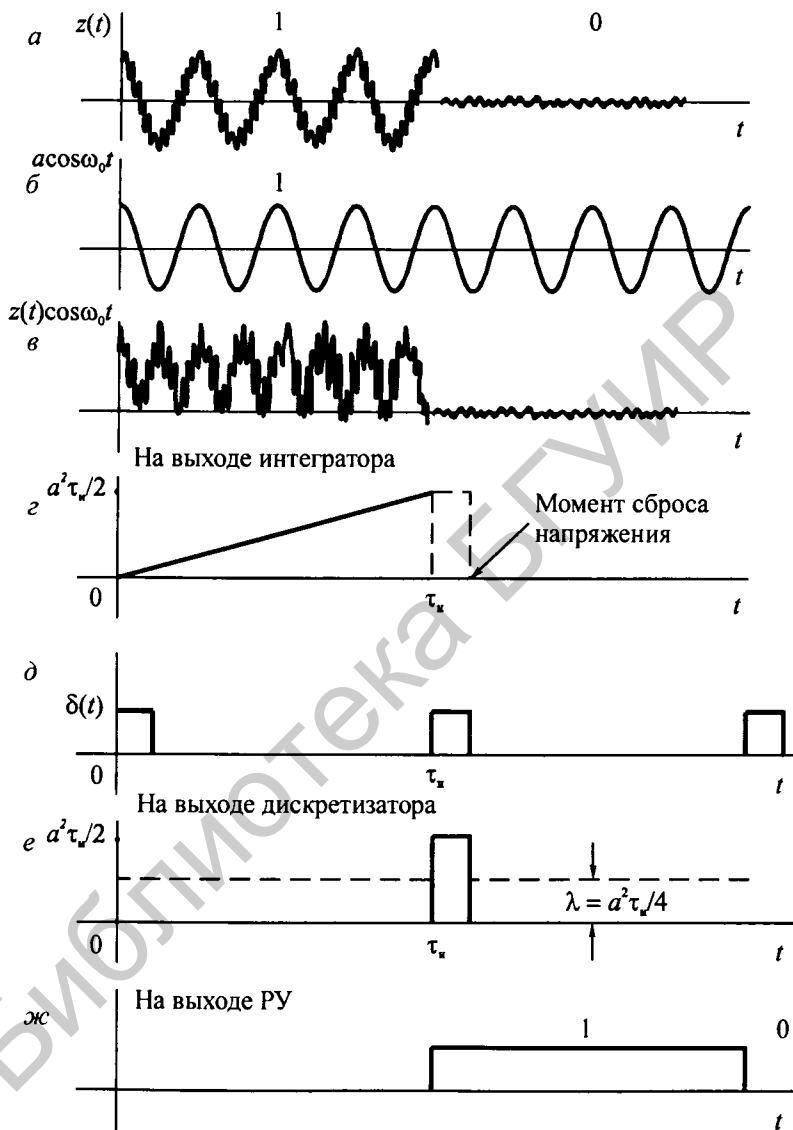


Рис. 7.4. Временные диаграммы, поясняющие работу приемника АМ сигналов

на выходе интегратора (дискретизатор) и решающее устройство. Опорный (рис. 7.4, б) и принимаемый (рис. 7.4, а) сигналы умножаются в умножителе, а результат (рис. 7.4, в) интегрируется.

Вырабатываемый в приемнике опорный гармонический сигнал является непрерывным колебанием, а его амплитуда, фаза и частота с заданной степенью точности совпадают с аналогичными параметрами принимаемого

сигнала. Напомним, что приемник, работа которого основывается на знании фазы и частоты несущей принимаемого сигнала, называется *когерентным приемником*.

Интегрирование в интеграторе ограничено значением времени, равного τ_n , причем, поскольку неравенство, определяющее обработку сигнала, известно точно, содержит определенный интеграл, то промежуточные значения выходного напряжения интегратора при дальнейшей обработке не используются. В схеме на рис. 7.3 значение выходного напряжения интегратора в момент времени τ_n реализуется на выходе дискретизатора (управляемого ключа), а затем оно сравнивается с пороговым уровнем в решающем устройстве. После этого за короткий промежуток времени производится сброс накопленного интегратором напряжения для того, чтобы устранить связь между результатами приема в соседних единичных интервалах.

Если напряжение на выходе интегратора больше порогового уровня, то решающее устройство вырабатывает единичный символ, реализуемый в виде прямоугольного видеоимпульса, а если меньше – то нулевой.

Бинарное обнаружение модулированных по амплитуде шумоподобных сигналов реализуется по аналогичному алгоритму. Структурные схемы оптимальных обнаружителей в этих случаях содержат блоки, которые приведены на рис. 7.2, 7.3 соответственно. При приеме шумоподобного видеосигнала на второй вход умножителя в схеме на рис. 7.2 поступает шумоподобный видеосигнал, а при приеме шумоподобного радиосигнала в схеме на рис. 7.3 – шумоподобный радиосигнал. Пороговые уровни в решающих устройствах соответствуют пороговым уровням, которые приведены выше.

Сигнал на выходах интеграторов в анализируемых схемах равен сумме двух составляющих. Первая (сигнальная) составляющая определяется выражением

$$\int_0^{\tau_n} u(t)u(t)dt.$$

Вторая (шумовая) составляющая определяется выражением

$$\int_0^{\tau_n} N(t)u(t)dt.$$

Значение сигнальной составляющей равно энергии сигнала, а среднее значение шумовой составляющей

$$M\left\{\int_0^{\tau_n} N(t)u(t)dt\right\} = \int_0^{\tau_n} M\{N(t)\}u(t)dt = 0,$$

так как среднее значение шума равно нулю.

Для нормального белого шума дисперсия шумовой составляющей равна $0,5N_0E_1$ (см. п. 7.8.1). Отношение значения сигнальной составляющей к среднеквадратичному значению шума равно

$$E_1 / \sqrt{0,5N_0E_1} = \sqrt{2E_1 / N_0} = \sqrt{2}h.$$

Корень квадратный от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума называется *параметром обнаружения*:

$$h = \sqrt{E_1 / N_0}.$$

Пример 7.1. Вычислить параметр обнаружения: а) при приеме двоичного видеосигнала; б) при приеме двоичного радиосигнала; в) при приеме модулированного по амплитуде шумоподобного сигнала. Мощность шума на входе обнаружителя одинакова для всех случаев приема.

Решение. Энергия двоичного видеосигнала и спектральная плотность мощности шума соответственно равны:

$$E_1 = \int_0^{\tau_n} u_1^2(t) dt = a^2 \tau_n, N_0 = P_{ш} \tau_n.$$

Параметр обнаружения

$$h = \sqrt{a^2 \tau_n / P_{ш} \tau_n} = \sqrt{a^2 / P_{ш}} = a / \sigma = \rho_{вх},$$

где a – амплитуда видеосигнала; τ_n – его длительность; σ – среднеквадратичное значение шума; $\rho_{вх}$ – отношение сигнал/шум на входе обнаружителя.

Отношение сигнальной составляющей к среднеквадратичному значению шума на выходе интегратора

$$\begin{aligned} \rho_{вых} &= E_1 / \sqrt{0,5N_0E_1} = \sqrt{2a^2 \tau_n / P_{ш} \tau_n} = \\ &= \sqrt{2} a / \sigma = \sqrt{2} \rho_{вх}. \end{aligned}$$

Отношение

$$\rho_{вых} / \rho_{вх} = \sqrt{2} = g$$

характеризует выигрыш в помехоустойчивости для этого случая приема.

При приеме двоичного радиосигнала энергия

$$E_1 = a^2 \int_0^{\tau_n} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = a^2 \tau_n / 2$$

в два раза меньше по сравнению с энергией двоичного видеосигнала. Спектральная плотность мощности шума

$$N_0 = P_{ш} \tau_n / 2.$$

Спектральная плотность мощности шума также в два раза меньше, так как ширина спектра радиосигнала в два раза больше. Поэтому параметр обнаружения радиосигнала и выигрыш в помехоустойчивости остаются теми же, что и при приеме видеосигнала.

Энергия шумоподобного видеосигнала зависит от способа формирования сигнала в передатчике. Модуляцией постоянного тока по амплитуде формируется сигнал с пассивной паузой, энергия которого

$$E_1 = \int_0^{\tau_n} u_1^2(t) dt = ma^2 \tau_0,$$

где m – число символов (единиц) в одном периоде τ_n этого сигнала, τ_0 – длительность одного символа.

Модуляцией постоянного тока по знаку (фазе) формируется сигнал с активной паузой, энергия которого

$$E_1 = \int_0^{\tau_n} u_1^2(t) dt = Na^2 \tau_0,$$

где N – число символов (единиц и нулей) в одном периоде этого сигнала.

Спектральные плотности мощности шума в этих случаях приема одинаковы и равны $N_0 = P_{\text{ш}} \tau_0$. Параметры обнаружения соответственно равны

$$h = \sqrt{ma^2 \tau_0 / P_{\text{ш}} \tau_0} = \sqrt{ma^2 / P_{\text{ш}}} = a\sqrt{m} / \sigma,$$

$$h = \sqrt{a^2 \tau_n / P_{\text{ш}} \tau_0} = a\sqrt{N} / \sigma.$$

Выигрыш в помехоустойчивости для сигнала, полученного модуляцией постоянного тока по амплитуде, и для сигнала, полученного модуляцией постоянного тока по знаку, соответственно равен $g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \sqrt{2m}$

и $g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \sqrt{2N}$. Как правило, $m \leq N$, поэтому прием сигналов с активной паузой предпочтительнее приема сигналов с пассивной паузой.

При приеме шумоподобных радиосигналов параметры обнаружения, отношения сигнальных составляющих к среднеквадратичному значению шума и выигрыш остаются такими же, что и при приеме соответствующих шумоподобных видеосигналов.

Анализ полученных расчетов показывает, что корреляционный прием приводит к улучшению отношения сигнал/шум. В случае обнаружения импульсов выигрыш равен $\sqrt{2}$, в случае обнаружения шумоподобных сигналов с пассивной паузой выигрыш равен $\sqrt{2m}$, а в случае обнаружения шумоподобных сигналов с активной паузой можно получить выигрыш, равный $\sqrt{2N}$.

7.2.3. Бинарное распознавание сигналов

Бинарное распознавание реализуется при приеме модулированных по знаку (фазе) носителей сообщения: постоянного тока, гармонического сигнала, шумоподобного сигнала и т. д. Модулирующий двоичный сигнал является функцией непрерывного времени, которая может менять знак в пределах тактового интервала в соответствии с передаваемыми информационными символами 0 или 1. Если символ равен 0, знак функции – плюс, а если символ равен 1, то знак функции – минус.

Если при обнаружении устанавливается присутствие или отсутствие сигнала в смеси сигнала и шума, то при распознавании дается ответ, какой из двух сигналов, связанных с передаваемыми информационными символами, содержится в этой смеси.

По виду сигналов бинарное распознавание делится на распознавание противоположных и на распознавание ортогональных сигналов. К противоположным сигналам относятся сигналы, удовлетворяющие условию: $u_2(t) = -u_1(t)$. К ортогональным сигналам относятся сигналы, удовлетворяющие условию:

$$\int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt = 0,$$

где τ_n – интервал существования сигналов.

Условию $u_2(t) = -u_1(t)$ удовлетворяют все известные ограниченные во времени сигналы, а условию ортогональности – достаточно широкий класс из этих сигналов.

В системах связи применяются следующие противоположные сигналы: положительный и отрицательный видеопульсы одинаковой амплитуды и длительности, радиопульсы с одинаковыми амплитудами, частотами и длительностями, но с отличающимися на 180 градусов начальными фазами, отличающиеся по знаку шумоподобные сигналы с одинаковыми кодовыми словами, формами, амплитудами и т. д. Этот перечень может быть продолжен.

К числу используемых ортогональных сигналов относятся: два радиопульса с одинаковыми амплитудами и длительностями, но с разными несущими частотами; пары последовательностей Уолша с одинаковым периодом; пары других последовательностей.

Структура оптимального приемника при решении задачи бинарного распознавания определяется следующим неравенством, которое получено преобразованием неравенства (7.16):

$$\int_0^{\tau_n} z(t)u_{\Delta}(t)dt > \lambda = 0,5(E_1 - E_2) + 0,5N_0 \{ \ln p[u_2(t)] / p[u_1(t)] \}, \quad (7.20)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ – разность сигналов; λ – пороговый уровень.

Для противоположных, равновероятных сигналов одинаковой энергии это неравенство преобразуется к виду:

$$\int_0^{\tau_n} z(t)u_{\Delta}(t)dt = 2 \int_0^{\tau_n} z(t)u_1(t)dt > \lambda = 0.$$

Если значение корреляционного интеграла положительно (больше порогового уровня), то в решающем устройстве вырабатывается оценка информационного символа, равная 0^* . Если значение отрицательно (меньше порогового уровня), то в решающем устройстве вырабатывается оценка, равная 1^* . Для различных принимаемых сигналов неравенство конкретизируется.

Например, при приеме изменяющихся по знаку видеоимпульсов с одинаковой амплитудой и длительностью τ_n неравенство записывается в виде:

$$\int_0^{\tau_n} z(t)dt > 0.$$

При бинарном распознавании противоположных двоичных ФМ и ОФМ сигналов неравенство преобразуется к виду:

$$\int_0^{\tau_n} z(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt > 0,$$

так как разностный сигнал равен $u_{\Delta}(t) = 2\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Структурная схема оптимального распознавателя противоположных сигналов содержит умножитель, где входная смесь умножается на опорный сигнал, интегратор и решающее устройство, на выходе которого формируется оценка принимаемого символа. Например, схема оптимального распознавателя (демодулятора) двоичных ФМ сигналов аналогична схеме на рис. 7.3. Так же как и при приеме двоичного АМ сигнала, известного точно, для нормальной работы оптимального приемника необходимо обеспечить подачу опорного гармонического колебания на второй вход умножителя в корреляторе и коротких импульсов на второй вход дискретизатора, а также производить сброс накопленного напряжения на интеграторе в конце интервала наблюдения. Однако в отличие от схемы оптимального обнаружителя сигнала уровень порога в схеме оптимального распознавателя сигналов равен нулю, если энергии сигналов, так же как и вероятности информационных символов 0, 1 равны.

Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального приемника двоичных ФМ сигналов, приведены на рис. 7.5.

Структурная схема оптимального демодулятора сигнала с ОФМ приведена на рис. 7.6. Она содержит оптимальный распознаватель ФМ сигнала и преобразователь относительного двоичного кодового слова в информационное кодовое слово.

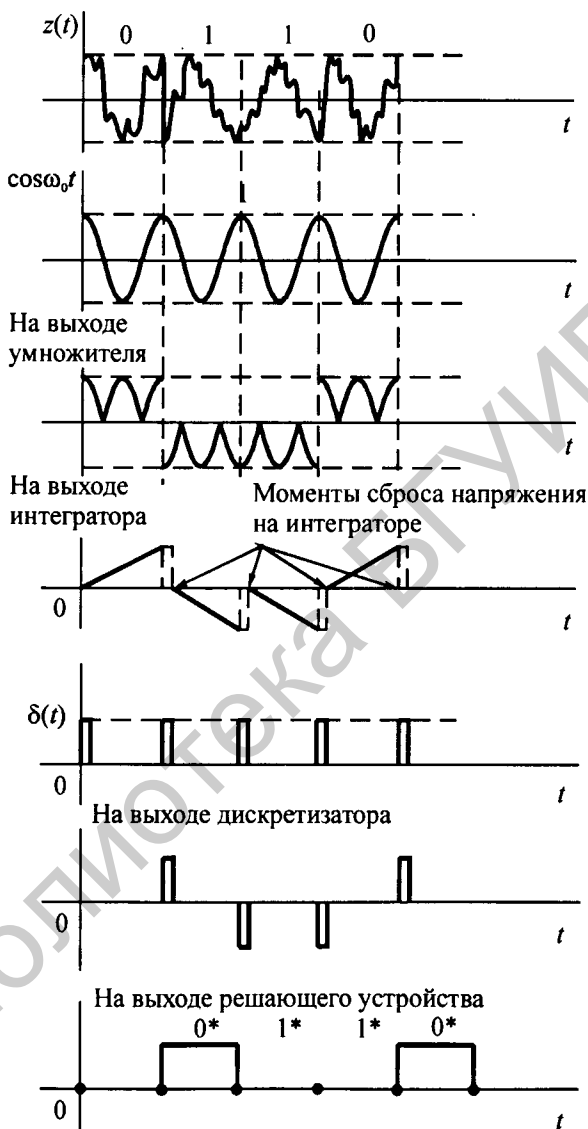


Рис. 7.5. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального приемника (демодулятора) бинарных ФМ сигналов

Работа преобразователя поясняется временными диаграммами (рис. 7.7) и основана на суммировании по модулю два принятого символа b_k^* и принятого в предыдущем тактовом интервале символа b_{k-1}^* , т. е. $a_k^* = b_k^* + b_{k-1}^*$.

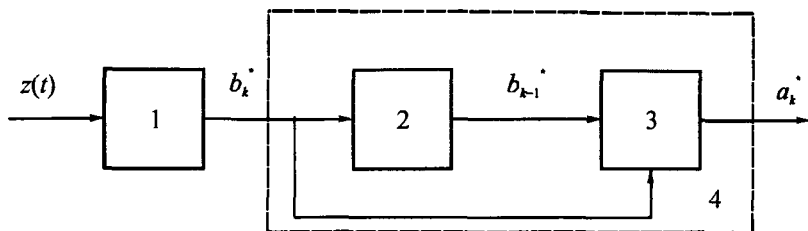


Рис. 7.6. Структурная схема оптимального демодулятора ОФМ сигнала: 1 – демодулятор; 2 – линия задержки на один единичный интервал; 3 – сумматор по модулю два; 4 – преобразователь

Для ортогональных равновероятных бинарных сигналов одинаковой энергии неравенство (7.20) преобразуется к виду:

$$\int_0^{\tau_n} z(t) u_1(t) dt > \int_0^{\tau_n} z(t) u_2(t) dt. \quad (7.21)$$

Это неравенство определяет алгоритм оптимального распознавания двух ортогональных равновероятных сигналов одинаковой энергии. Например, бинарное распознавание ЧМ сигналов определяется следующими эквивалентными неравенствами:

$$\int_0^{\tau_n} z(t) [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] dt > 0,$$

$$\int_0^{\tau_n} z(t) \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) dt > \int_0^{\tau_n} z(t) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) dt. \quad (7.22)$$

Если неравенство выполняется, то принимается решение о приеме символа, равного нулю, а при невыполнении – решение о приеме символа, равного единице.

Оптимальный демодулятор можно строить, используя один или два коррелятора. С одним коррелятором схема приведена на рис. 7.2. Уровень порога в этой схеме равен нулю.

Схема с двумя корреляторами является частным случаем схемы рис. 7.1 при $m = 2$.

7.2.4. Реализация алгоритма оптимального приема на основе согласованных фильтров

Алгоритмы оптимального бинарного обнаружения и бинарного распознавания, рассмотренные выше, определяют необходимые операции со смесью сигнала и шума. Главной из них является вычисление значений

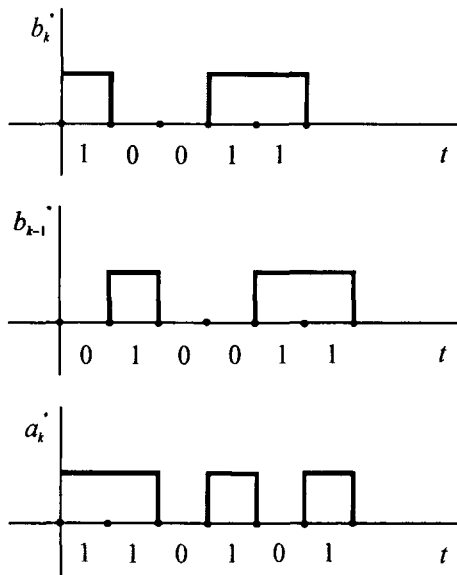


Рис. 7.7. Временные диаграммы, поясняющие работу преобразователя

взаимно корреляционных функций между принимаемой смесью и опорными сигналами. Эти вычисления реализуются с помощью корреляторов.

Алгоритм оптимального приема сигналов, известных точно, можно реализовать также на основе согласованного фильтра. Если на вход согласованного с принимаемым сигналом фильтра подать смесь этого сигнала и шума, то сигнал на выходе фильтра будет содержать значение взаимно корреляционной функции между смесью сигнала и шума и сигналом, с которым этот фильтр согласован.

Под *согласованным фильтром* понимают линейный четырехполюсник, коэффициент передачи которого согласован с сигналом:

$$K(j\omega) = cS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (7.23)$$

где c – постоянное число; $S^*(j\omega)$ – функция, комплексно сопряженная со спектральной плотностью сигнала; $e^{-j\omega t_0}$ – фазовый множитель, совпадающий с коэффициентом передачи идеальной линии задержки.

Если сигнал отвечает условию абсолютной интегрируемости и для него можно найти спектральную плотность, то для этого сигнала можно найти и согласованный фильтр с коэффициентом передачи, который определяется формулой (7.23). Сигнал и фильтр образуют пару. Число возможных пар определяется всеми сигналами, которые удовлетворяют указанному условию.

Спектральная плотность сигнала на выходе согласованного фильтра

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = cS(j\omega)K(j\omega) = cS(j\omega)S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} = c|S(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0},$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность сигнала на входе фильтра.

Отклик согласованного фильтра на входной сигнал с учетом формулы (2.23) равен

$$u_{\text{вых}}(\tau - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c|S(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega \tau} d\omega = cR(\tau - t_0).$$

Значение отклика с точностью до постоянного числа совпадает с автокорреляционной функцией входного сигнала. При $\tau = t_0$ и $c = 1$ значение отклика равно энергии сигнала.

Это значение равно также среднему значению накопленного на выходе коррелятора напряжения в конце интервала приема смеси сигнала и шума.

Линейная, согласованная фильтрация сложного, шумоподобного сигнала позволяет получить на выходе согласованного фильтра сжатый во времени сигнал. Преобразование сигнала, позволяющее уменьшить его длительность, называется *сжатием сигнала во времени*.

Например, автокорреляционная функция сигнала, кодированного кодом Баркера длиной в 3 символа (см. рис. 2.8) содержит основной лепесток положительной полярности и боковые лепестки отрицательной полярности. Длительность основного лепестка на уровне, равном половине энергии этого сигнала, условно принимают за длительность сигнала на выходе согласованного фильтра. Очевидно, что замена входного сигнала, состоящего из основного и боковых лепестков, основным лепестком допустима, если боковые лепестки во много раз меньше основного лепестка. Поиск сложных сигналов с минимальными боковыми лепестками решается в рамках теории сигналов, результаты которой используются не только в системах связи, но и в других (в первую очередь радиолокационных) системах. Отношение длительности входного сигнала к длительности основного лепестка называется *коэффициентом сжатия сигнала во времени*. Коэффициент сжатия зависит от базы сигнала.

При подаче на вход фильтра, согласованного с сигналом, другого сигнала выходной сигнал равен взаимно корреляционной функции между этими сигналами:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(j\omega)S_2(j\omega)e^{j\omega(\tau-t_0)} d\omega = cR_{1,2}(\tau-t_0). \end{aligned}$$

Если сигналы удовлетворяют условию ортогональности, то при сдвиге $\tau = t_0$ значение отклика равно нулю. Приведем другие свойства согласованного фильтра.

Импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отображением сигнала, с которым этот фильтр согласован.

Вычислим реакцию согласованного фильтра на входной сигнал, используя интеграл Дюамеля.

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика согласованного фильтра.

Если фильтр согласован с входным сигналом, то, как показано выше, $u_{\text{вых}}(t) = R(t)$.

Следовательно, с учетом (2.21) и равенства $R(t) = R(-t)$ получим:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(\tau-t)d\tau. \quad (7.24)$$

Из (7.24) находим, что

$$h(t-\tau) = u(-t+\tau).$$

Отношение мгновенной мощности сигнальной составляющей в момент времени t_0 к средней мощности шума на выходе согласованного фильтра равно $2E/N_0 = 2h^2$, где E – энергия сигнала, N_0 – мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Мгновенная мощность сигнала на выходе согласованного фильтра

$$u_{\text{вых}}^2(t_0) = \left[\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \right]^2 = c^2 E^2.$$

Средняя мощность шума на выходе согласованного фильтра

$$P_{\text{ш}} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |cS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}|^2 d\omega = \frac{c^2 N_0 E}{2}.$$

Отношение мгновенной мощности сигнала к средней мощности шума на выходе фильтра в момент времени t_0 максимально, если его коэффициент передачи удовлетворяет уравнению (7.23). Это отношение

$$\rho_{\text{пик}} = \frac{u_{\text{вых}}^2(t_0)}{P_{\text{ш}}} = \frac{c^2 E^2}{c^2 N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0} = 2h^2,$$

где $h = \sqrt{E/N_0}$ – параметр обнаружения.

Вычисляя корень квадратный от левой и правой частей, получим отношение мгновенного значения сигнала к среднеквадратичному значению шума:

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{\rho_{\text{пик}}} = \sqrt{2}h.$$

Отношение сигнал/шум, выраженное как отношение мгновенного значения сигнала в момент времени t_0 к среднеквадратичному значению шума на выходе согласованного фильтра, определяется параметром обнаружения.

Пример 7.2. Определить выигрыш в помехоустойчивости при бинарном обнаружении прямоугольного видеоимпульса, если в приемнике содержится согласованный фильтр. Амплитуда импульса равна A , а его длительность равна $\tau_{\text{и}}$. Во сколько раз увеличится выигрыш, если вместо пря-

моугольного импульса использовать шумоподобный видеосигнал той же длительности, построенный из разнополярных видеоимпульсов длительностью $\tau_0 < \tau_n$.

Решение. Применим формулу для отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра:

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{\rho_{\text{пик}}} = \sqrt{2h} = \sqrt{2E/N_0}.$$

Энергия сигнала на входе фильтра $E = P_c \tau_n$, где P_c – мощность сигнала. Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы $N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f$, где $P_{\text{ш}}$ – мощность шума на входе, Δf – ширина спектра сигнала. Для прямоугольного видеоимпульса $\Delta f = 1/\tau_n$.

Подставляя вычисленные значения в формулу для выходного отношения сигнал/шум, получим

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{2P_c \tau_n / P_{\text{ш}} \tau_n} = \sqrt{2} \rho_{\text{вх}},$$

где отношение сигнал/шум на входе согласованного фильтра

$$\rho_{\text{вх}} = \sqrt{P_c / P_{\text{ш}}}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра к отношению сигнал/шум на входе характеризует выигрыш в помехоустойчивости за счет согласованной фильтрации:

$$g_1 = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \sqrt{2}.$$

Для шумоподобного сигнала

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{2P_c \tau_n / P_{\text{ш}} \tau_0} = \sqrt{2\tau_n \Delta f} \rho_{\text{вх}},$$

где $\Delta f = 1/\tau_0$ – ширина спектра шумоподобного сигнала.

Из последней формулы определяем выигрыш в помехоустойчивости за счет согласованной фильтрации.

$$g_2 = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \sqrt{2\tau_n \Delta f}.$$

Выигрыш тем больше, чем больше база сигнала, равная $\tau_n \Delta f$.

Чтобы определить увеличение выигрыша за счет использования кодирования сигнала, нужно найти отношение

$$g_2 / g_1 = \sqrt{2\tau_n \Delta f} / \sqrt{2} = \sqrt{\tau_n \Delta f} = \sqrt{N},$$

где N – период, равный базе шумоподобного сигнала.

Приведенные оценки помехоустойчивости приема сигналов с использованием согласованного фильтра полностью совпадают с оценками помехоустойчивости корреляционных приемников, которые приведены выше (см. п. 7.2.2).

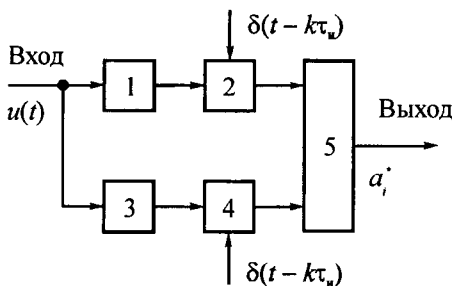


Рис. 7.8. Структурная схема демодулятора ЧМ сигнала:

1, 3 – согласованные фильтры; 2, 4 – дискретизаторы (ключи); 5 – решающее устройство

фильтры откликаются только на те сигналы, с которыми они согласованы. Например, фильтр верхнего канала согласован с сигналом, который показан в первом единичном интервале, а фильтр нижнего канала – с сигналом, который показан во втором единичном интервале (рис. 7.9, а).

Поэтому в течение первого единичного интервала на входной сигнал откликается только первый (рис. 7.9, б), а в течение второго интервала – только второй фильтр (рис. 7.9, в). Ключи, управляемые короткими импульсами (рис. 7.9, г), пропускают отклики фильтров на входы решающего устройства только в течение действия этих импульсов. Таким образом, в конце первого единичного интервала выходное напряжение первого ключа не равно нулю, а на выходе второго – равно нулю (рис. 7.9, д). В конце второго единичного интервала напряжение на выходе первого ключа равно нулю, а на выходе второго – не равно нулю (рис. 7.9, е). В зависимости от этого решающее устройство выдает символы, равные 0 или 1.

Пусть на входе присутствует АМ или ФМ сигнал. Соответствующая этим случаям приема схема оптимального демодулятора приведена на рис. 7.10. В отличие от схемы на рис. 7.8, она содержит всего один канал. При помощи ключа осуществляется дискретизация напряжения с выхода согласованного фильтра, затем полученные в конце каждого единичного интервала выборочные значения сравниваются в сравнивающем устройстве с заранее заданным пороговым уровнем. Для двоичного равновероятного АМ сигнала этот порог равен половине от его энергии. Для двоичного равновероятного ФМ сигнала уровень порога равен нулю. В зависимости от результата сравнения на выходе решающего устройства формируется символ, равный или 0, или 1. Временные диаграммы, поясняющие работу демодулятора ФМ сигналов, приведены на рис. 7.11.

Если схему оптимального демодулятора ФМ сигнала (рис. 7.10) дополнить преобразователем (см. рис. 7.6), то легко получить и схему оптимального демодулятора двоичного ОФМ сигнала.

Рассмотрим пример реализации бинарного распознавателя, реализованного на согласованных фильтрах. Пусть на входе присутствует двоичный ЧМ сигнал. Соответствующая этому случаю приема схема приведена на рис. 7.8. Она содержит два одинаковых канала (верхний и нижний) и решающее устройство. В каждом канале содержится согласованный фильтр и дискретизатор (управляемый ключ). Согласованные филь-

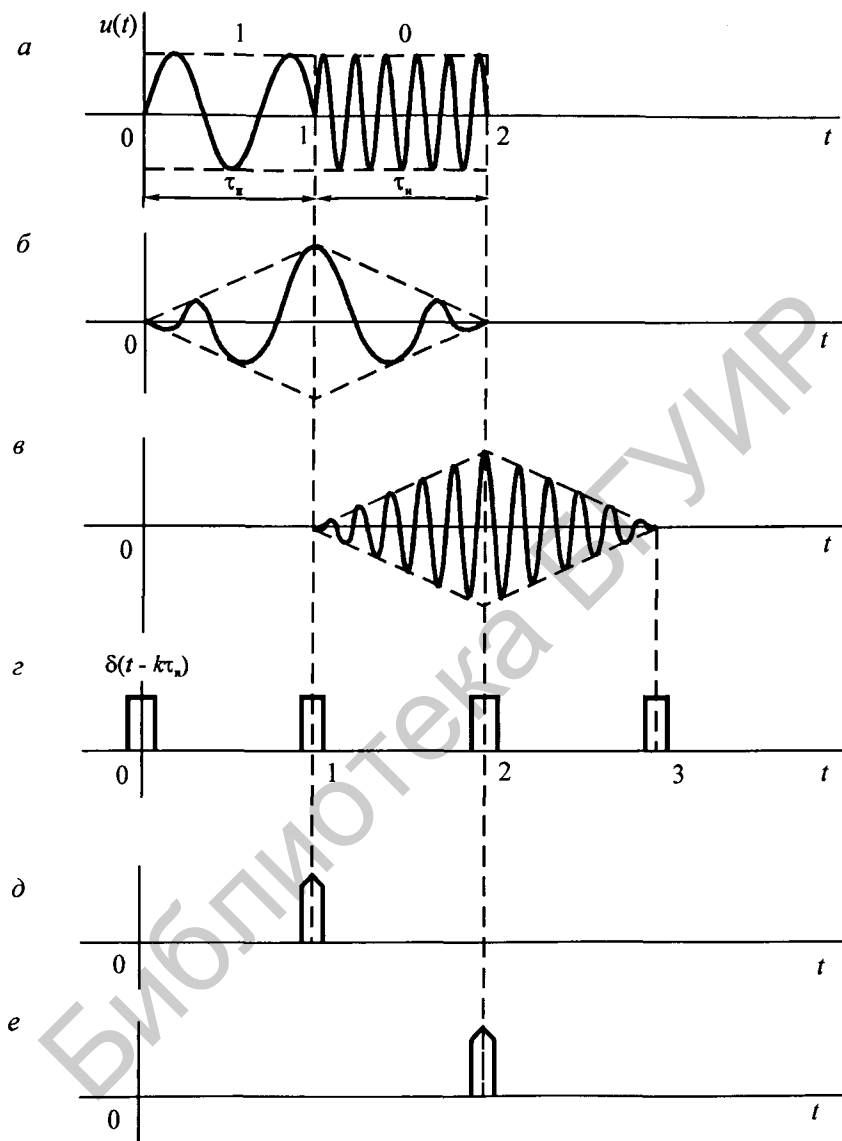


Рис. 7.9. Временные диаграммы, поясняющие работу демодулятора ЧМ сигнала

В заключение отметим следующие особенности оптимальных приемников.

1. В оптимальных корреляционных приемниках и приемниках на согласованных фильтрах вычисляются энергии принимаемых сигналов, которые затем используются при формировании оценок символов передаваемых информационных последовательностей.

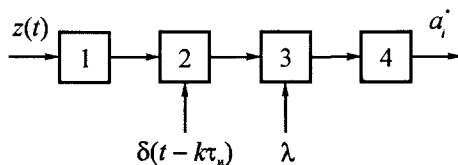


Рис. 7.10. Структурная схема оптимального демодулятора АМ сигнала:
 1 – согласованный фильтр; 2 – дискретизатор (кноп); 3 – сравнивающее устройство;
 4 – решающее устройство

2. Корреляционный приемник содержит опорный генератор, который формирует опорный сигнал, совпадающий по форме, времени и по несущей частоте с принимаемым сигналом. В опорный генератор включаются: измеритель неизвестных параметров принимаемого сигнала, устройство автоподстройки параметров опорного сигнала. По этой причине опорный генератор является относительно сложным устройством.

3. В оптимальном приемнике на согласованном фильтре опорный генератор отсутствует, а необходимая информация о форме и частоте принимаемого сигнала имеется в структуре этого фильтра.

4. Если задачи приема в приемнике на согласованном фильтре и многоканальном корреляционном приемнике решаются в течение времени наблюдения смеси сигнала и шума, равного длительности передачи одного информационного символа или длительности передачи одного информационного блока, то в одноканальном корреляционном приемнике для этого требуется гораздо большее время. Это время, в течение которого опорный сигнал совмещается с принимаемым сигналом и принимается решение о принятом символе или блоке. Совмещение опорного сигнала во времени или по несущей частоте называется *поиском сигнала*. Поиск, связанный с совмещением опорного сигнала во времени, называется *временным поиском*, а поиск, связанный с совмещением опорного сигнала по частоте, называется *частотным поиском*.

5. Форма сигнала на выходе согласованного фильтра существенно отличается от формы сигнала на его входе. Например, при прямоугольной форме радиоимпульса на входе получается ромбовидный импульс на выходе. Однако в сохранении формы нет необходимости, так как передаваемая по дискретному каналу информация определяется не формой сигналов, а совокупностью символов, связанных с этими сигналами.

6. Оптимальные приемники сигналов, известных точно, имеют существенный недостаток, связанный с необходимостью высокоточных отсчетов значений откликов в заданные моменты времени.

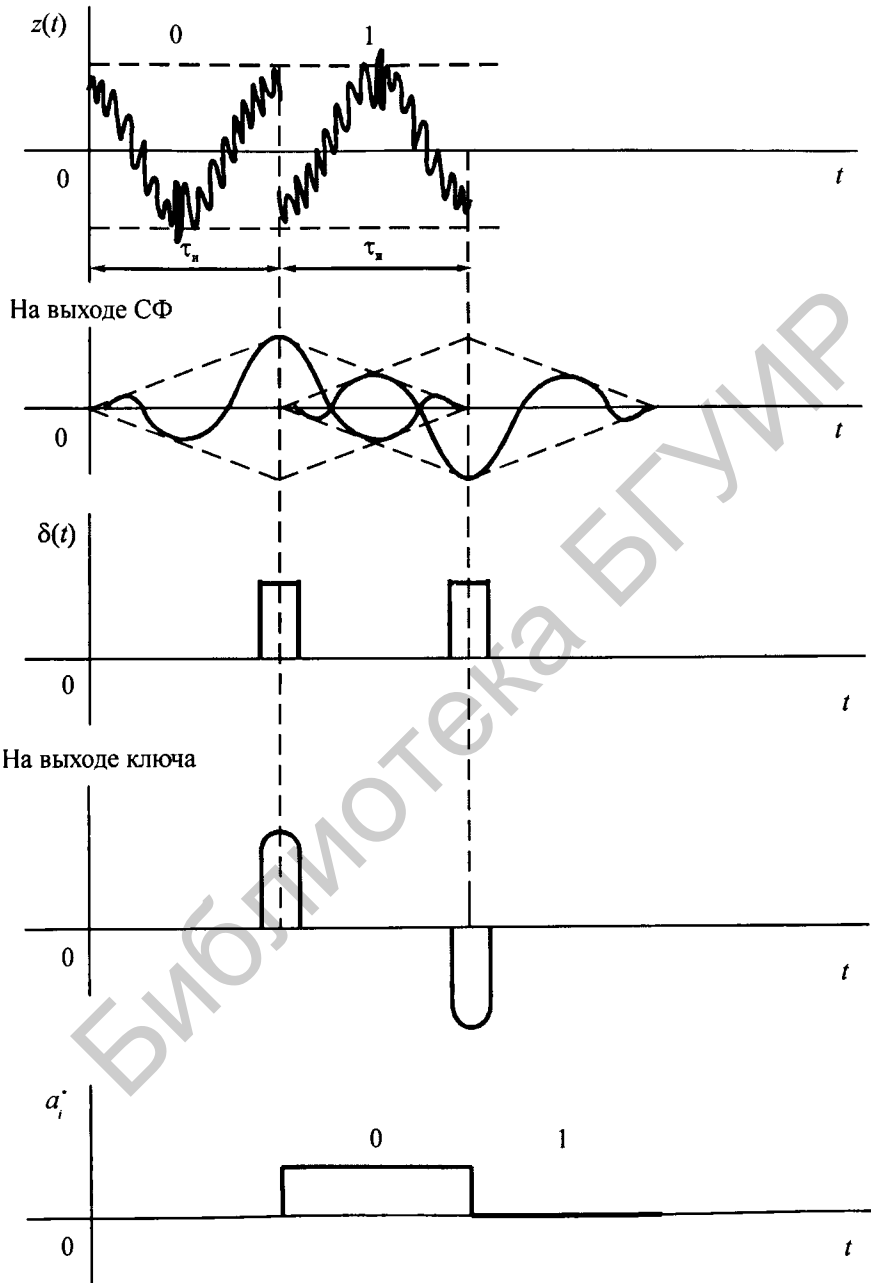


Рис. 7.11. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора ФМ сигналов

7.3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.3.1. Оптимальный прием при неопределенной фазе дискретного сигнала

Этот способ некогерентного приема применяют в случаях, если: а) реализация приема сигнала, известного точно, невозможна и экономически нецелесообразна из-за большой сложности демодулятора; б) оценку фазы и амплитуды получить достаточно трудно из-за их быстрых флуктуаций.

Пусть на входе демодулятора в смеси с нормальным белым шумом присутствует один из возможных сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ с параметрами, известными точно, за исключением начальных фаз, которые в интервале $0, 2\pi$ случайны и распределены по равномерному закону.

Определим структуру оптимального демодулятора, приняв во внимание:

- а) модель канала связи с неопределенной фазой сигнала;
- б) выражение для функции правдоподобия;
- в) правило принятия решения.

Модель канала связи рассмотрена в разделе 5.2. Используя эту модель, запишем выражение для функции правдоподобия:

$$w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - A_i q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i)]^2 dt \right\}, \quad (7.25)$$

где A_i – амплитуда радиосигнала с известной частотой ω_i и неизвестной (случайной) начальной фазой φ_i ; T – время анализа смеси сигнала и шума; $q_i(t)$ – двоичный сигнал, определяемый выражением:

$$q_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} u_0(t - k\tau_0), \quad a_{i,k} \in -1, 1;$$

$u_0(t)$ – прямоугольный импульс с единичной амплитудой, $a_{i,k}$ – символ двоичной кодовой последовательности (например последовательности Уолша) длиной N ; τ_0 – длительность символа последовательности. Анализ ФМ сигнала, который определяет выражение (7.25), приведен в п. 3.6.2.

Функция правдоподобия является случайной величиной, так как является случайной начальной фазой. Несмотря на это, модулирование носителя сообщения знакопеременной функцией $q_i(t)$ оказывается возможным, если в интервале приема $T = k\tau_0$, равного длительности одного информационного блока, сохраняется когерентность этого носителя.

Чтобы записать правило принятия решения, рассмотрим вероятность совместных событий: события a_p , которое заключается в реализации на входе канала некоторой буквы, связанной с сигналом $u_i(t)$; события b_p ,

которое заключается в том, что случайному процессу $Z(t)$ соответствует n -мерный вектор, связанный с появлением на выходе дискретно-непрерывного канала некоторой буквы; события c , которое заключается в том, что значения начальной фазы сигнала принадлежат бесконечно малому интервалу $d\varphi$. Эта вероятность

$$P(a_i, b_j, c) = P(b_j) P(a_i, c/b_j) = P(a_i, c) P(b_j/a_i, c),$$

где $P(b_j)$ – вероятность события b_j , определяемая равенством (7.2); $P(a_i, c)$ – вероятность совместной реализации не связанных причинно-следственными связями событий a_i и c . Поэтому зыита вероятность

$$P(a_i, c) = P(a_i) P(c) = P[u_i(t)] (1/2\pi)d\varphi;$$

$P(a_i, c/b_j)$ – вероятность совместной реализации событий a_i и c при условии появления на выходе канала буквы b_j ; $P(b_j/a_i, c)$ – функция правдоподобия, равная условной вероятности реализации буквы b_j , при условии, что в смеси сигнала и шума присутствует сигнал $u_i(t)$, а его фаза находится в области $d\varphi$.

Используя полученное выражение для совместной вероятности трех событий, находим:

$$P(a_i, c/b_j) = \frac{P(a_i)P(c)}{P(b_j)} P(b_j/a_i, c), \quad (7.26)$$

где $P(b_j/a_i, c) = w(\bar{y}/u_i, \varphi_i)d\bar{y}$ – условная вероятность, найденная аналогично выражению (7.5); $P(b_j) = w(\bar{y})d\bar{y}$ – вероятность, найденная аналогично выражению (7.2).

Условная вероятность

$$w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)]d\bar{y}$$

зависит от случайной начальной фазы и поэтому выражается случайным числом. Аналогично вычисляется условная вероятность

$$w[\bar{y}/(u_j, \varphi_j)]d\bar{y},$$

которая также выражается случайным числом. Поэтому сравнение этих вероятностей для решения задачи оптимального приема не имеет смысла. Задача решается, если условные вероятности усреднить соответственно по случайным начальным фазам.

Среднее значение функции $f(\varphi_i) = p(b_j/u_i, \varphi_i)$ равно

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi_i)w(\varphi_i)d\varphi_i = \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)]d\bar{y} \frac{1}{2\pi} d\varphi_i = \frac{1}{2\pi} d\bar{y} \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)]d\varphi_i.$$

Принимая во внимание полученное выражение для среднего значения функции, а также уравнение $P(a_i)P(c) = P[u_i(t)](1/2\pi)d\varphi_i$, найдем вероятность появления сигнала $u_i(t)$ при условии, что на выходе канала реализовалось событие b_j .

$$\begin{aligned} P(a_i/b_j) &= \frac{P[u_i(t)]P(c)}{w(\bar{y})d\bar{y}} d\bar{y} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i = \\ &= \frac{P[u_i(t)]P(c)}{2\pi w(\bar{y})} \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i. \end{aligned}$$

Правило принятия решения по критерию максимальной обратной вероятности записывается в виде:

$$\frac{P[u_i(t)]}{w(\bar{y})} \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i > \frac{P[u_j(t)]}{w(\bar{y})} \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_j, \varphi_j)] d\varphi_j, \quad i \neq j.$$

Сократив в левой и правой частях неравенства одинаковые выражения, получим:

$$\frac{\int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i}{\int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_j, \varphi_j)] d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (7.27)$$

Подставляя в полученные неравенства выражения для функций правдоподобия и выполняя преобразования, получим:

$$\frac{\exp\left[-\frac{E_i}{N_0}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2A_i T}{N_0} \int_0^T Z(t) q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) dt\right] d\varphi_i}{\exp\left[-\frac{E_j}{N_0}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2A_j T}{N_0} \int_0^T Z(t) q_j(t) \cos(\omega_j t + \varphi_j) dt\right] d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]},$$

$j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$ (7.28)

где энергия сигнала $u_i(t)$

$$E_i = \int_0^T A_i^2 q_i^2(t) \cos^2(\omega_i t + \varphi_i) dt,$$

N_0 – мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Преобразуем выражение

$$\int_0^T Z(t) q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) dt.$$

Приняв во внимание формулу

$$\cos(\omega_i t + \varphi_i) = \cos \omega_i t \cos \varphi_i - \sin \omega_i t \sin \varphi_i,$$

перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^T Z(t) q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) dt &= [\int_0^T Z(t) q_i(t) \cos \omega_i t dt] \cos \varphi_i - \\ &- [\int_0^T Z(t) q_i(t) \sin \omega_i t dt] \sin \varphi_i = X_i \cos \varphi_i - Y_i \sin \varphi_i, \end{aligned} \quad (7.29)$$

где $X_i = \int_0^T Z(t) q_i(t) \cos \omega_i t dt$, $Y_i = \int_0^T Z(t) q_i(t) \sin \omega_i t dt$.

Считая значения x_i , y_i проекциями вектора M_i на оси x , y , запишем

$$X_i = M_i \cos \theta_i, Y_i = M_i \sin \theta_i, \quad (7.30)$$

где

$$M_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \sqrt{\left[\int_0^T Z(t) q_i(t) \cos \omega_i t dt \right]^2 + \left[\int_0^T Z(t) q_i(t) \sin \omega_i t dt \right]^2}.$$

Подставляя (7.30) в (7.29), получим

$$\int_0^T Z(t) q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) dt = M_i \cos(\theta_i + \varphi_i). \quad (7.31)$$

Подставляя (7.31) в (7.28), получим

$$\frac{[\exp(-E_i / N_0)] I_0(2A_i M_i / N_0)}{[\exp(-E_j / N_0)] I_0(2A_j M_j / N_0)} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (7.32)$$

где модифицированные функции Бесселя нулевого порядка определяются формулой:

$$I_0(2AM / N_0) = \int_0^{2\pi} \exp[(2AM / N_0) \cos(\theta + \varphi)] d\varphi.$$

Вычисляя логарифм левой и правой частей неравенств (7.32), перепишем их в виде:

$$\begin{aligned} \ln I_0\left(\frac{2A_i}{N_0} M_i\right) + \ln P[u_i(t)] - E_i / N_0 &> \ln I_0\left(\frac{2A_j}{N_0} M_j\right) + \ln P[u_j(t)] - E_j / N_0, \\ i \neq j, \quad i, j &= 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Структурная схема, найденная на основе полученных неравенств, приведена на рис. 7.12. В схеме показаны два одинаковых канала и решающее устройство. В канал с номером i входят устройства, с помощью которых вычисляется левая часть неравенства. Аргумент $2A_i M_i / N_0$ вычисляется

с помощью устройств, которые включены до амплитудного детектора. С помощью амплитудного детектора вычисляется функция этого аргумента $\ln I_0\{2A_i M_i / N_0\}$. В сумматоре к напряжению с выхода амплитудного детектора добавляется разность $\ln p[u_i(t)] - E_i / N_0$. Аналогичные устройства входят и в канал с номером j , с помощью которых вычисляется правая часть неравенства.

Структурную схему корреляционного приемника, приведенную на рис. 7.12, можно заменить схемой приемника, построенного на согласованных фильтрах. Она содержит два канала, выходы которых подключены к входам решающего устройства. В каждом канале будет включен линейный фильтр, согласованный с соответствующей формой сигнала и всеми его параметрами, кроме случайной начальной фазы, а также амплитудный детектор и сумматор.

Определение согласованного фильтра и его свойства приведены в п. 7.24. В частности, отклик согласованного фильтра на сигнал, с которым он согласован с точностью до постоянной величины повторяет автокорреляционную функцию сигнала, а отношение сигнал/шум на его выходе совпадает с отношением сигнал/шум на входе амплитудного детектора δ (см. схему на рис. 7.12).

Варианты приемников на корреляторах и согласованных фильтрах рассматриваются ниже.

Прием дискретного ЧМ-ФМ сигнала

Для этого случая сигналы $u_i(t) = Aq_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ отличаются значениями частот, номера которых связаны со словами блоков информационной двоичной последовательности и кодовыми видеопоследовательностями $q_i(t) = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ номера которых также связаны со словами блоков. Начальные фазы радиосигналов в пределах времени анализа смеси сигнала и шума в приемнике остаются неизменными, но неизвестными, и от одного интервала к другому – случайными. Сохранение начальной фазы сигнала в течение определенного отрезка времени (этот интервал называется *интервалом когерентности*) открывает возможность кодирования сигнала двоичными кодами. Это увеличивает скрытность передачи информации, а также помехоустойчивость приемника. Неравенство частот и кодовых последовательностей обеспечивает выполнение условия ортогональности сигналов.

Неравенства, определяющие структуру приемника в этом случае при приеме равновероятных сигналов одинаковой энергии, равны:

$$\ln I_0(2AM_i / N_0) > \ln I_0(2AM_j / N_0), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$M_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \sqrt{\int_0^T [z(t)q_i(t)\cos\omega_i t dt]^2 + \int_0^T [z(t)q_i(t)\sin\omega_i t dt]^2}. \quad (7.34)$$

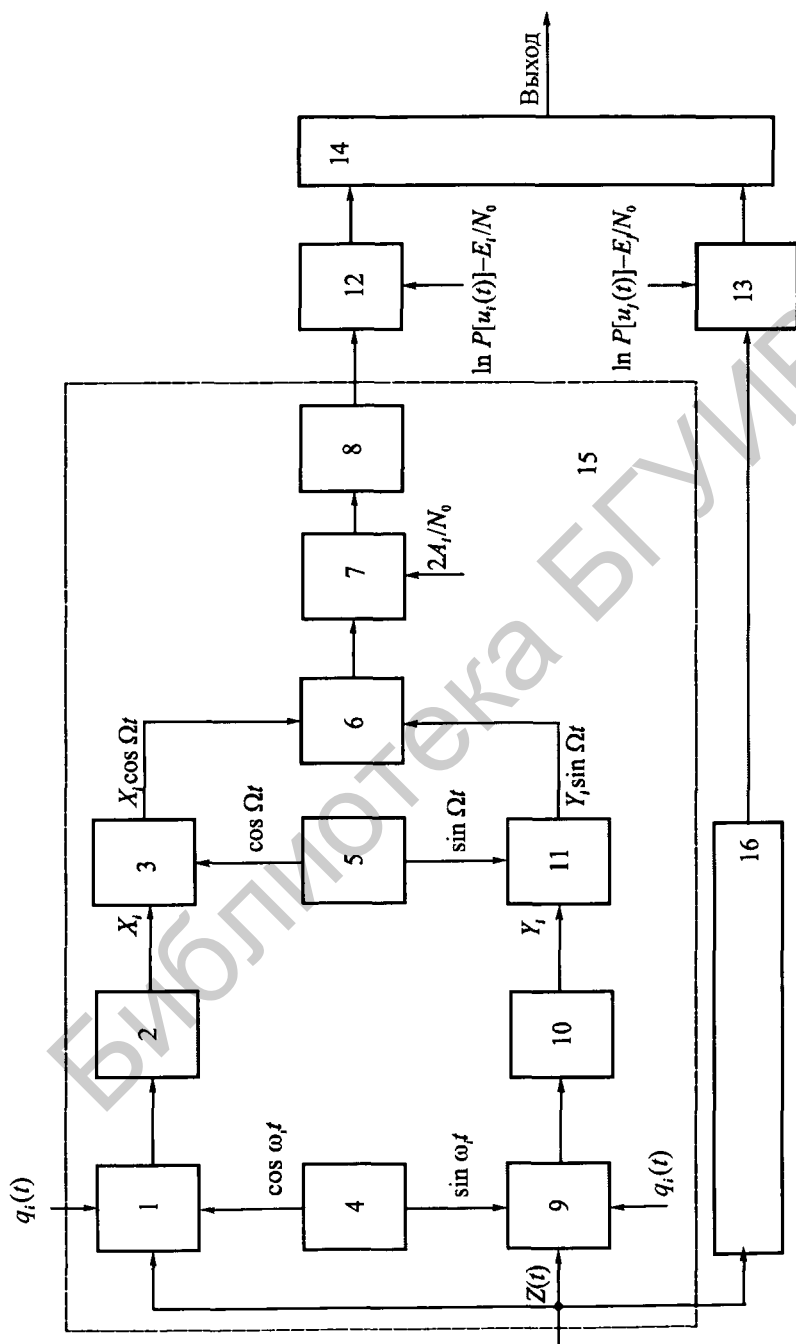


Рис. 7.12. Структурная схема оптимального демодулятора двух сигналов с неопределенной начальной фазой: 1, 3, 7, 9, 11 – умножители; 2, 10 – интеграторы; 4, 5 – генераторы частот; 6 – вычитающее устройство; 8 – амплитудный детектор; 12, 13 – суммирующие устройства; 14 – решающее устройство; 15 – i -й канал; 16 – j -й канал

Структурная схема оптимального приемника содержит m одинаковых каналов, выходы которых соединены с входами решающего устройства. Многоканальный приемник реализуется на базе коррелятора или согласованного фильтра. На выходе приемника формируются оценки двоичных слов блоков.

Целью приемника является распознавание сигнала на входе приемника, следовательно, и передаваемого двоичного слова блока. Если в смеси сигнала и шума присутствует i -й сигнал, то максимум среднего значения напряжения в момент окончания анализа этой смеси будет на выходе i -го канала, а на выходах других каналов средние значения будут равны нулю. По этому максимуму определяется номер канала и номер сигнала. По номеру сигнала определяется оценка слова блока.

Прием дискретного ЧМ сигнала

Этот случай является частным случаем приема (распознавания) ЧМ-ФМ сигналов. Для этого случая сигналы $u_i(t) = A \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ по фазе не кодируются и отличаются только значениями частот, номера которых связаны со словами блоков информационной двоичной последовательности. Их амплитуды равны, а начальные фазы случайны.

Неравенства, определяющие структуру приемника при приеме равновероятных сигналов одинаковой энергии, равны:

$$\ln I_0(2AM_i / N_0) > \ln I_0(2AM_j / N_0);$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$M_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \sqrt{\int_0^T [Z(t) \cos \omega_i t dt]^2 + \int_0^T [Z(t) \sin \omega_i t dt]^2}.$$

Структурная схема оптимального корреляционного приемника (в отличие от схемы приемника ЧМ-ФМ сигнала) не требует использования опорных последовательностей $q_i(t)$ так как необходимость в этих сигналах в этом случае отпадает.

Прием ортогональных фазомодулированных сигналов одинаковой энергии

Этот случай отличается тем, что принимаемые сигналы $u_i(t) = A q_i(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ являются двоичными фазомодулированными сигналами, номера которых связаны с номерами кодовых слов блоков информационной двоичной последовательности (см. п. 3.7.3). Несущие частоты всех принимаемых сигналов равны ω_0 , начальные фазы случайны, но в течение длительности одного блока их значения сохраняются, что позволяет применить двоичную фазовую модуляцию. Энергии сигналов также равны. Модулирующая видеопоследовательность i -го сигнала

$$q_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} u_0(t - k\tau_0),$$

где $a_{i,k} \in -1, 1$ – символы кодовой последовательности; $u_0(t)$ – прямоугольный импульс с единичной амплитудой, длительность которого равна τ_0 ; N – период кодовой последовательности.

В качестве последовательностей могут использоваться ортогональные или симплексные последовательности (Уолша, Д-последовательности, М-последовательности и др.). Пронумерованные кодовые последовательности одинаковой длины образуют коды [см. приложения 3, 4].

Неравенства, определяющие структуру приемника при приеме равновероятных сигналов, равны:

$$\ln I_0(2AM_i / N_0) > \ln I_0(2AM_j / N_0);$$

$$i \neq j, i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$M_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \sqrt{\int_0^T [Z(t)q_i(t) \cos \omega_0 t dt]^2 + \int_0^T [Z(t)q_i(t) \sin \omega_0 t dt]^2}.$$

Структурная схема оптимального приемника содержит m одинаковых каналов. При приеме одного из m ортогональных сигналов на фоне шума только на выходе одного из каналов будет наибольшее среднее напряжение, а на выходах остальных каналов средние значения напряжений будут равны нулю. Так же как и для предыдущих случаев приема, по наибольшему напряжению определяется номер канала и номер сигнала. По номеру сигнала определяется оценка слова блока.

Прием двоичных сигналов

Для двоичной системы с равновероятными сигналами ($m = 2$, $T = \tau_u$, где τ_u – время анализа смеси сигнала и шума) правило оптимального приема определяется неравенством:

$$\ln I_0(2A_1M_1 / N_0) - E_1 / N_0 > \ln I_0(2A_2M_2 / N_0) - E_2 / N_0. \quad (7.35)$$

Неравенство можно реализовать как на корреляторах, так и на согласованных фильтрах.

Структурная схема оптимального демодулятора, реализующего алгоритм (7.35) на согласованных фильтрах (СФ), приведена на рис. 7.13. Она содержит два идентичных канала. В каждом из этих каналов смесь сигнала и шума фильтруется согласованным фильтром, а затем детектируется амплитудным детектором с характеристикой $\ln I_0(x)$, где $x = 2AM/N_0$. График функции $\ln I_0(x)$ аналогичен характеристике диода. Работа амплитудного детектора рассмотрена в разделе 3.9. Кроме согласованных фильтров и амплитудных детекторов схема содержит вычитающие устройства

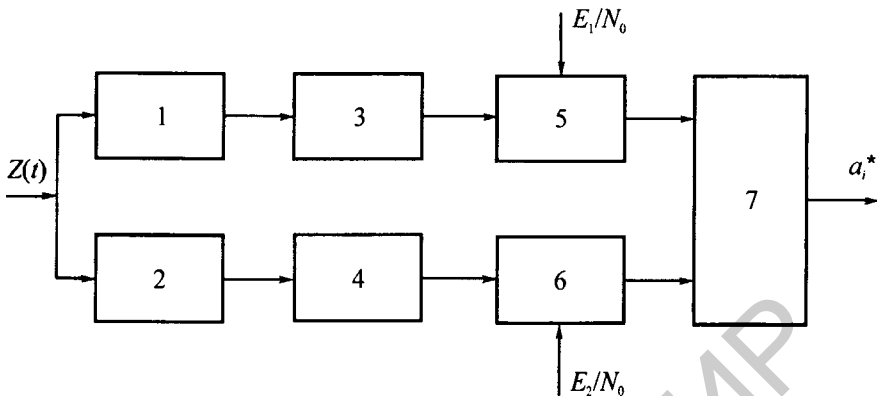


Рис. 7.13. Структурная схема оптимального демодулятора, построенного на согласованных фильтрах:

1, 2 – согласованные фильтры; 3, 4 – амплитудные детекторы; 5, 6 – вычитающие устройства; 7 – решающее устройство

и решающее устройство, на выходе которого формируется оценка передаваемого информационного символа.

Рассмотрим варианты приема двоичных сигналов на фоне шума: бинарное обнаружение и бинарное распознавание.

Бинарное обнаружение реализуется при приеме двоичных амплитудно-модулированных радиосигналов. В качестве таких сигналов могут использоваться радиоимпульсы заданной длительности со случайными начальными фазами, а также и другие, более сложные сигналы со случайными начальными фазами.

Если при передаче информационного символа 1 в канал вводится радиоимпульс, а при передаче информационного символа 0 такой радиосигнал не вводится, то в этом случае $u_2(t) = 0$, $E_2 = 0$, $M_2 = 0$ и неравенство (7.35) переписывается в виде:

$$\ln I_0(2A_1M_1/N_0) - E_1/N_0 > 0.$$

Для реализации полученного неравенства требуется всего один канал. В качестве такого канала в случае реализации приемника на согласованных фильтрах может быть верхний канал схемы рис. 7.13. В схему оптимального приемника войдут: согласованный фильтр, амплитудный детектор и решающее устройство (вместо вычитающего устройства), в котором выборка напряжения с выхода детектора сравнивается с пороговым уровнем $\lambda = E_1/N_0$. В результате на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа a_i^* .

При превышении порогового уровня принимается решение о приеме информационного символа $a_i^* = 1$, а если порог не превышает, то принимается решение о приеме информационного символа $a_i^* = 0$.

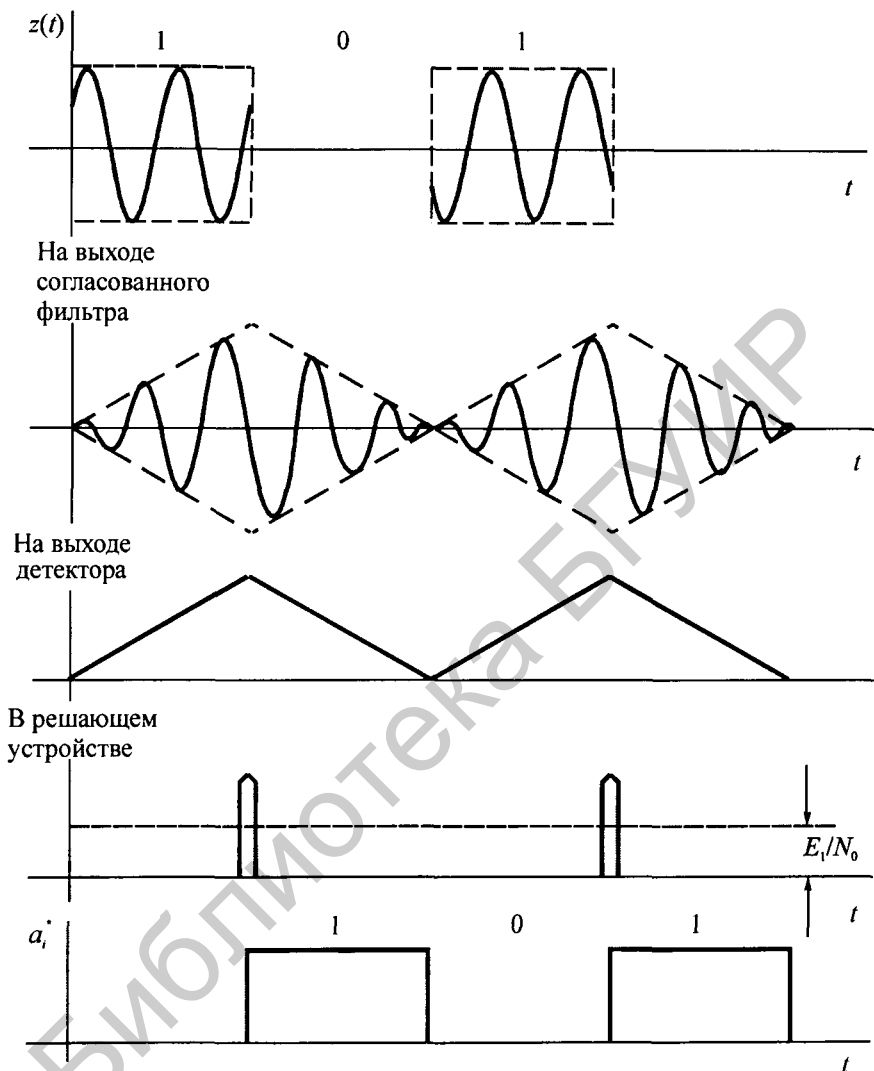


Рис. 7.14. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора АМ сигнала со случайной начальной фазой

Временные диаграммы, поясняющие работу этого оптимального демодулятора, приведены на рис. 7.14.

Бинарное распознавание реализуется при приеме двоичных частотно-модулированных радиосигналов со случайными начальными фазами, кодофазомодулированных сигналов одинаковой длительности, если в течение этой длительности начальная фаза остается постоянной, но случайной величиной. Модулирующими сигналами во втором случае могут быть двоичные M -последовательности, последовательности Уолша

и другие последовательности. Передачу информационного символа 1 связывают с радиосигналом $u_1(t)$, а передачу символа 0 с другим (ортогональным к первому) радиосигналом $u_2(t)$.

Структурная схема оптимального приемника, предназначенного для решения задачи распознавания, определяется неравенством (7.35), если вероятности реализации информационных символов равны, а $E_1 \neq E_2$. Приемник содержит два канала.

Схема на согласованных фильтрах для случая приема двоичного ЧМ сигнала приведена на рис. 7.13. Работа каналов поясняется временными диаграммами, приведенными на рис. 7.15.

Смесь сигнала и шума фильтруется согласованными фильтрами. Фильтр 1 согласован с сигналом $u_1(t)$, а фильтр 2 согласован с сигналом $u_2(t)$. На выходах амплитудных детекторов выделяются огибающие радиосигналов с выходов согласованных фильтров. Из значений этих огибающих (в конце интервала приема смеси сигнала и шума) вычитаются числа: E_1/N_0 в вычитающем устройстве 5 верхнего канала и E_2/N_0 в вычитающем устройстве 6 нижнего канала. Разности между выборками и числами сравниваются между собой в решающем устройстве.

Если разность больше в верхнем канале, то принимается решение о приеме информационного символа $a_i^* = 0$, а если в нижнем, то решение о приеме информационного символа $a_i^* = 1$.

Решение задачи бинарного распознавания ортогональных кодофазомодулированных радиоимпульсов не отличается от решения задачи бинарного распознавания частотно-модулированных сигналов. Поэтому схема оптимального приемника для этого случая содержит те же блоки, что и схема оптимального приемника частотно-модулированных сигналов, а его работа не отличается от работы оптимального приемника частотно-модулированных сигналов. Однако если оптимальный приемник строится на согласованных фильтрах, то коэффициенты передачи этих фильтров будут определяться спектральными плотностями ортогональных кодофазомодулированных сигналов. Соответственно изменятся и временные диаграммы, поясняющие работу этого приемника.

Оптимальный некогерентный прием ОФМ сигнала является частным случаем приема двух ортогональных кодофазомодулированных сигналов со случайными начальными фазами. Этот прием оказывается возможным, если радиосигналы $u_i(t) = Aq_i(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_i)$, $i = 1, 2$ являются двоичными фазомодулированными сигналами, номера которых связаны с символами двоичной информационной последовательности. Например, символу 0 соответствует номер $i = 1$ и слово 11, а символу 1 – номер $i = 2$ и слово -11 . Эти двоичные слова являются ортогональными. Правило кодирования соответствует формированию ОФМ сигнала (см. п. 3.6.2). Начальные фазы радиосигналов являются случайными, но постоянными в двух соседних тактовых интервалах.

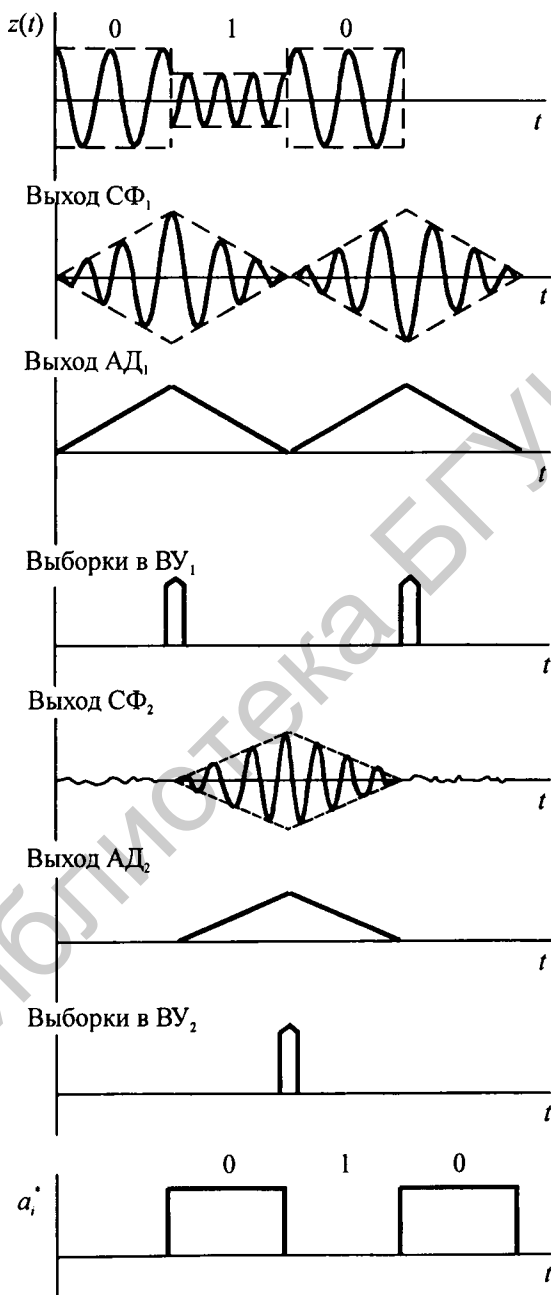


Рис. 7.15. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора ЧМ сигнала со случайной начальной фазой

Модулирующая видеопоследовательность i -го сигнала

$$q_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} u_0(t - k\tau_0),$$

где $a_{i,k} \in -1, 1$ – символы кодовой последовательности; $u_0(t)$ – прямоугольный импульс с единичной амплитудой, длительность которого равна τ_0 ; N – период кода, равный 2.

Фазомодулированные сигналы соответственно равны:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A[a_{1,0}u_0(t) + a_{1,1}u_0(t - \tau_0)]\cos(\omega_0 t + \varphi_1) = \\ &= A[u_0(t) + u_0(t - \tau_0)]\cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ u_2(t) &= A[-u_0(t) + u_0(t - \tau_0)]\cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Сигналы $u_i(t)$, $i = 1, 2$ являются радиоимпульсами с одинаковой несущей частотой, одинаковой длительностью $2\tau_0$ и случайными начальными фазами.

Оптимальный приемник ОФМ сигнала строится на основе неравенства (7.35), которое для сигналов одинаковой энергии переписывается в виде:

$$\ln I_0(2AM_1/N_0) > \ln I_0(2AM_2/N_0),$$

где

$$M_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \sqrt{\left[\int_0^{2\tau_0} Z(t)q_i(t)\cos\omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^{2\tau_0} Z(t)q_i(t)\sin\omega_0 t dt \right]^2},$$

$$i = 1, 2.$$

В оптимальном приемнике содержится два канала. Его схема, реализованная на согласованных фильтрах, отличается от схемы на рис. 7.13 тем, что не содержит вычитающих устройств. Фильтр 1 согласован с сигналом $u_1(t)$, а фильтр 2 – с сигналом $u_2(t)$. Сигналы на входах амплитудных детекторов определяются номером сигнала на входе приемника. Если в смеси сигнала и шума находится сигнал $u_1(t)$, то на входе детектора 3 присутствует автокорреляционная функция этого сигнала и шумовая компонента, а на входе другого детектора 4 – взаимно корреляционная функция между сигналами $u_1(t)$, $u_2(t)$ и шумовая компонента. Значения напряжений с выходов детекторов в момент времени, равный окончанию приема смеси сигнала и шума, сравниваются между собой в решающем устройстве 7. Если напряжение больше в верхнем канале, на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа 0. Если напряжение больше в нижнем канале, на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа 1.

Структурная схема приемника ОФМ сигнала, близкая к оптимальной схеме, приведена на рис. 7.16. Схема содержит всего один канал и отличается от схемы на рис. 7.6 тем, что в ней нет преобразователя относительной кодовой комбинации b_i^* в комбинацию a_i^* . Схема работает следующим образом. Отклик согласованного фильтра умножается на задержанный отклик, а результат фильтруется фильтром нижних частот. Напряжение с выхода фильтра нижних частот сравнивается с нулевым порогом. По результату сравнения (полярности напряжения) принимается решение о переданном информационном символе.

Пример 7.3. Рассчитать отношение сигнал/шум на входе амплитудного детектора в канале приемника. Схема канала приведена на рис. 7.12. В канале присутствует i -й сигнал и нормальный белый шум.

Решение. Находим выражение для смеси сигнала и шума:

$$Z(t) = Aq_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i) + N(t).$$

Сигнальная и шумовая составляющие на выходах умножителей 1, 9 соответственно равны:

$$(A/2)[\cos \varphi_i + \cos(2\omega_i t + \varphi_i)], \quad N(t)q_i(t)\cos \omega_i t.$$

$$(A/2)[\sin \varphi_i + \sin(2\omega_i t + \varphi_i)], \quad N(t)q_i(t)\sin \omega_i t.$$

Сигнальная и шумовая составляющие на выходах интеграторов 2, 10 соответственно равны:

$$(AT/2)\cos \varphi_i + \int_0^T N(t)q_i(t)\cos \omega_i t dt;$$

$$(AT/2)\sin \varphi_i + \int_0^T N(t)q_i(t)\sin \omega_i t dt.$$

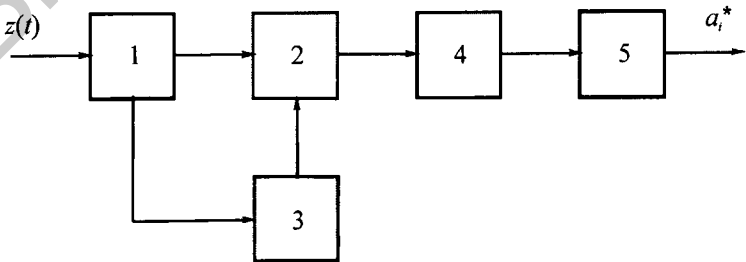


Рис. 7.16. Схема оптимального некогерентного приема сигналов с ОФМ: 1 – согласованный фильтр; 2 – умножитель; 3 – линия задержки на один единичный интервал; 4 – ФНЧ; 5 – решающее устройство

Эти напряжения в умножителях 3, 11 умножаются соответственно на $\cos\Omega t$ и $\sin\Omega t$, а затем вычитаются в вычитающем устройстве 6. Результирующее напряжение равно:

$$(AT/2)\cos(\Omega t + \varphi_i) + \varepsilon_1 \cos \Omega t - \varepsilon_2 \sin \Omega t,$$

где

$$\varepsilon_1 = \int_0^T N(t)q_i(t) \cos \omega_i t dt,$$

$$\varepsilon_2 = \int_0^T N(t)q_i(t) \sin \omega_i t dt.$$

Это напряжение умножается на $2A/N_0$ в умножителе 7. В результате на входе амплитудного детектора напряжение равно:

$$(2E/N_0)\cos(\Omega t + \varphi_i) + \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = (2A/N_0)\varepsilon_1 \cos\Omega t - (2A/N_0)\varepsilon_2 \sin\Omega t$ – шумовая составляющая; $E = 0,5A^2T$ – энергия радиосигнала на входе приемника; N_0 – мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Дисперсия шумовой составляющей равна:

$$M[\varepsilon^2(t)] = [(2A/N_0)^2 \cos^2 \Omega t + (2A/N_0)^2 \sin^2 \Omega t] M(\varepsilon_1^2) - (2A/N_0)^2 2 \cos \Omega t \sin \Omega t M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = (2A/N_0)^2 M(\varepsilon_1^2),$$

так как $M(\varepsilon_1^2) = M(\varepsilon_2^2)$, $M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0$.

Вычисляем дисперсию:

$$M(\varepsilon_1^2) = M\left[\int_0^T N(t)q_i(t) \cos \omega_i(t) dt\right]^2 = (N_0 T / 4).$$

Дисперсия шумовой составляющей равна:

$$M[\varepsilon^2(t)] = (2A/N_0)^2 M(\varepsilon_1^2) = 2E/N_0.$$

Отношение мгновенной мощности огибающей к мощности шума в момент окончания приема смеси сигнала и шума равно

$$(2E/N_0)^2 / 2E/N_0 = 2E/N_0.$$

Полученное отношение не отличается от отношения на выходе согласованного фильтра для сигнала, известного точно (см. п. 7.2.4).

7.3.2. Оптимальный прием при неопределенной фазе и амплитуде элементов сигнала

Задача синтеза оптимального демодулятора m дискретных сигналов с неопределенной (случайной) фазой и амплитудой решается аналогично задаче синтеза сигналов с неопределенной начальной фазой. Однако условия приема несколько усложняются. Флуктуации сигнала на выходе канала из-за флуктуаций как начальной фазы, так и амплитуды приводят к изменению выражения для функции правдоподобия и выражения для правила принятия решения.

Функция правдоподобия в этом случае равна

$$\omega(\bar{y}/u_i, k_i, \varphi_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi \cdot \sigma})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - k_i A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)]^2 dt},$$

где k_i – коэффициент, характеризующий изменение амплитуды A_i сигнала на выходе канала связи. Этот коэффициент является случайной величиной и определен природой замираний сигнала.

Правило принятия решения равно

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} w(k_i) \omega(\bar{y}/u_i, k_i, \varphi_i) dk_i d\varphi_i}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} w(k_j) \omega(\bar{y}/u_j, k_j, \varphi_j) dk_j d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad j \neq i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.36)$$

где $w(k_i)$ – плотность распределения коэффициента k_i .

Принимая во внимание выражение (7.33), это правило можно переписать в виде

$$\frac{\int_0^{\infty} w(k_i) \exp\left[-\frac{k_i^2}{N_0} E_i\right] I_0\left(\frac{2k_i A_i}{N_0} M_i\right) dk_i}{\int_0^{\infty} w(k_j) \exp\left[-\frac{k_j^2}{N_0} E_j\right] I_0\left(\frac{2k_j A_j}{N_0} M_j\right) dk_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]},$$

$j \neq i, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7.37)$

где $E_i = \int_0^T A_i^2 \cos^2(\omega_i t + \varphi_i) dt$, $E_j = \int_0^T A_j^2 \cos^2(\omega_j t + \varphi_j) dt$.

Вычисляя интегралы в выражении (7.37) для заданной плотности распределения вероятности $w(k)$, можно определить структуру оптимального приемника. Она совпадает со структурой оптимального приемника дискретных сигналов с неопределенной начальной фазой. Изменяются только значения напряжений на входе решающего устройства.

7.4. НЕОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИЕМА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Неоптимальные приемники обычно строятся так, чтобы при несколько меньшей помехоустойчивости получить простое техническое решение, следовательно, и меньшую стоимость аппаратуры или еще какое-то преимущество.

Рассмотрим примеры приема двоичного частотно-модулированного сигнала, известного точно, на фоне нормального белого шума. Оптимальный прием реализуется на базе коррелятора (см. рис. 7.1 для $m = 2$) или согласованного фильтра (см. рис. 7.8). Для нормальной работы оптимального корреляционного приемника необходимо подстраивать начальные фазы опорных радиоимпульсов и временное положение коротких импульсов, поступающих на дискретизаторы. В оптимальном приемнике на согласованных фильтрах необходима только подстройка положения импульсов для получения отсчетных значений напряжений с выходов согласованных фильтров.

Для осуществления указанных подстроек в источниках опорных сигналов необходимо:

- а) измерять начальные фазы радиоимпульсов принимаемого частотно-модулированного сигнала на фоне нормального белого шума;
- б) по результатам измерений подстраивать начальные фазы радиоимпульсов опорного частотно-модулированного сигнала.

Для подстройки временного положения коротких видеоимпульсов на выходе источника необходимо:

- а) непрерывно измерять временное положение единичных интервалов принимаемого частотно-модулированного сигнала на фоне нормального белого шума;
- б) по результатам измерений подстраивать временное положение коротких импульсов.

Источники указанных сигналов оказываются сложными, следовательно, дорогими.

Высокая стоимость аппаратуры во многих случаях становится решающим фактором в выборе структур приемников. Схема оптимального приемника частично или полностью заменяется неоптимальной в зависимости от дополнительных требований на проектируемую аппаратуру.

Например, схему (рис. 7.1, $m = 2$) можно полностью заменить схемой (рис. 7.12), в которой источники опорных сигналов хотя и сохраняются, но начальные фазы опорных радиосигналов на их выходах не подстраиваются. Это существенно упрощает и удешевляет приемник.

Схему на рис. 7.13 часто заменяют схемой на рис. 7.17, что позволяет снизить стоимость аппаратуры за счет:

- а) замены согласованных фильтров полосовыми фильтрами;

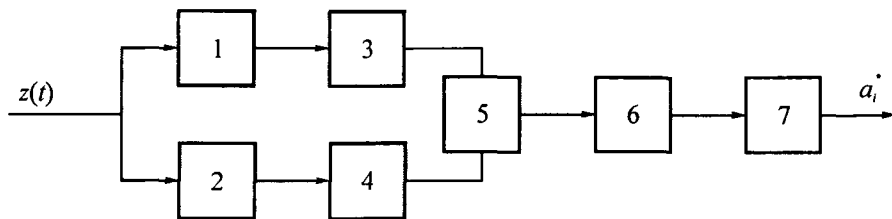


Рис. 7.17. Схема неоптимального некогерентного приема ЧМ сигнала:
 1, 2 – полосовые фильтры; 3, 4 – амплитудные детекторы; 5 – разностное устройство;
 6 – ФНЧ; 7 – решающее устройство

б) введения последетекторной обработки сигналов.

При замене согласованного фильтра более простым полосовым фильтром, коэффициент передачи последнего оказывается лишь частично согласованным со спектральной плотностью входного сигнала. За счет этого отношение сигнала/шум на выходе приемника уменьшается. Подобные фильтры называются *квазиоптимальными*.

При последетекторной обработке выборка высокочастотного заполнения радиои импульса заменяется выборкой его огибающей, что позволяет использовать более простой источник коротких видеоимпульсов с большими флуктуациями их временного положения. Можно вообще отказаться от этого источника и не использовать выборку огибающей радиосигнала, если изменить правило принятия решения. Принимаемый сигнал после его фильтрации полосовыми фильтрами разделяется на два. Огибающие этих сигналов выделяются с помощью амплитудных детекторов (рис. 7.18, *з, д*) и затем вычитаются (рис. 7.18, *е*). Далее можно было бы взять отсчетные значения полученной разности в моменты времени $t_i, i = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 7.18, *ж*) и по их знаку производить оценку символов информационного двоичного слова. За счет того, что скорость изменения огибающей около экстремумов функции (рис. 7.18, *е*) во много раз меньше скорости изменения высокочастотного заполнения, можно было бы существенно ослабить требования к стабильности временного положения видеоимпульсов, показанных на рис. 7.18, *ж*. Очевидно, что источник коротких видеоимпульсов был бы существенно упрощен.

В схеме (рис. 7.17) реализован еще более выгодный вариант (с точки зрения аппаратных затрат), в котором источник коротких видеоимпульсов отсутствует, а оценка символа двоичного слова производится по знаку напряжения на выходе разностного устройства и ФНЧ.

Вариант оценки символов иллюстрируется на рис. 7.18, *е*. Если напряжение на выходе ФНЧ пересекает заранее заданный положительный пороговый уровень, то на выходе решающего устройства формируется символ 0, а если напряжение пересекает заданный отрицательный пороговый уровень, то символ – 1.

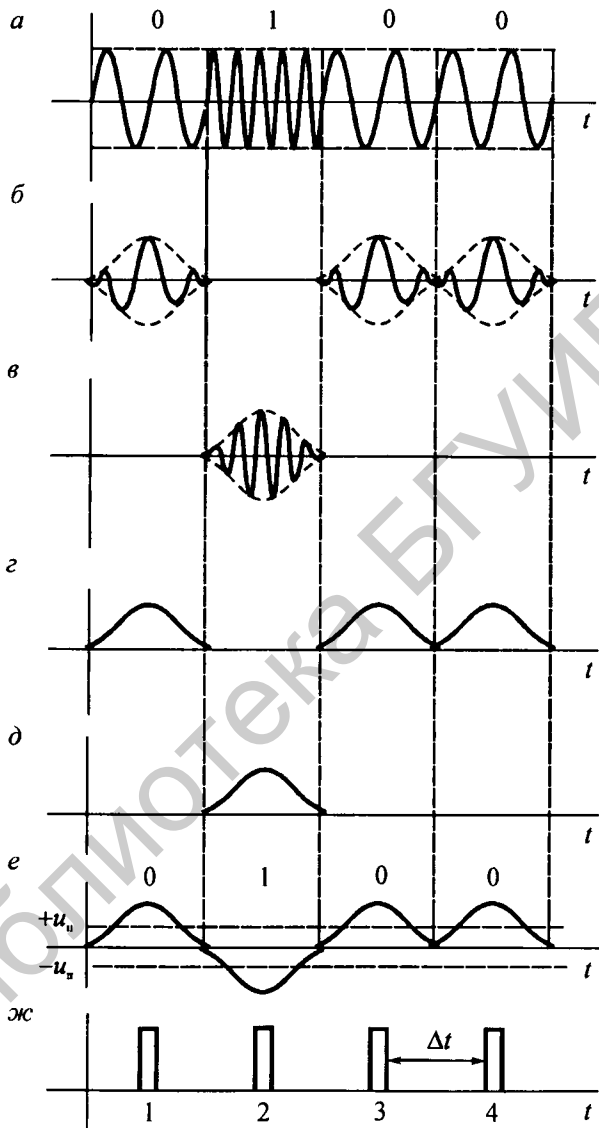


Рис. 7.18. Временные диаграммы, поясняющие работу неоптимального приемника ЧМ сигнала

Описанные выше замены приводят:

- а) к изменению алгоритма обработки сигнала;
- б) к изменению условий и ограничений, накладываемых на сигнал;
- в) к уменьшению помехоустойчивости приемника.

Потери возникают за счет не использования информации о фазе принимаемого сигнала (эта информация безвозвратно теряется при амплитудном детектировании), не использования информации о положении максимума напряжения на выходе ФНЧ, применения полосовых фильтров вместо согласованных.

7.5. ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В ПРИЕМНИКЕ

Принципы цифровой обработки сигналов, изложенные в разделе 3.11, применимы и к смеси сигнала и шума. Цифровую обработку этой смеси можно осуществить: а) используя программные и аппаратные средства персональных ЭВМ и микропроцессоров (МП); б) используя специализированные интегральные схемы, ориентированные на цифровую обработку случайных сигналов и помех.

Выбор того или иного способа реализации определяется технико-экономическими соображениями.

Ограничимся рассмотрением варианта оптимальной обработки дискретных сигналов и использованием МП. Структурная схема демодулятора приведена на рис. 7.19.

На его входе присутствует модулированный сигнал (таким сигналом может быть двоичный АМ, ФМ, ОФМ, ЧМ сигнал) на фоне шума. В устройстве вводится производится аналого-цифровое преобразование смеси сигнала и шума в двоичные числа. С выхода аналого-цифрового преобразователя (АЦП) двоичные числа через шину ввода-вывода поступают в память МП. Управляющая программа МП реализует заданный алгоритм оптимальной обработки.

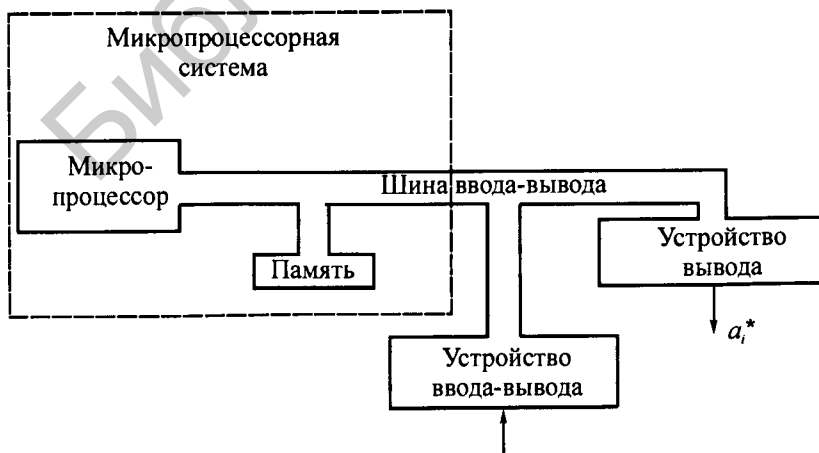


Рис. 7.19. Структурная схема демодулятора сигнала, реализованного на МП

В результате вычислений определяется оценка информационного элемента, которая через устройство ввода-вывода поступает на выход последующего блока обработки. Синхронизация, необходимая для нормальной работы демодулятора, выполняется с помощью дополнительной управляющей программы, составленной на основе алгоритма работы системы синхронизации.

Наиболее просто и с наименьшими программными и аппаратными ресурсами реализуется алгоритм приема импульсов постоянного тока. Прием радиосигналов требует как большей памяти, так и быстродействия. Реализация демодулятора на МП при приеме радиосигналов может оказаться технически и экономически оправданной, если несущая частота сравнительно невелика. Достоинством рассматриваемой схемы является возможность изменения алгоритма обработки изменением управляющей программы, что делает ее универсальной для различных используемых сигналов.

7.6. МЕТОДЫ ПРИЕМА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ В КАНАЛАХ С РАССЕЯНИЕМ

Если на вход канала с рассеянием подается радиосигнал с постоянной амплитудой и начальной фазой, то на его выходе образуется более сложный сигнал. Этот сигнал, равный сумме нескольких флуктуирующих по амплитуде и начальной фазе сигналов, также является флуктуирующим. Причиной флуктуаций является распространение радиосигнала по нескольким направлениям и нестабильность среды, по которой распространяется этот сигнал. Вероятность ошибки при приеме дискретных сообщений можно уменьшить с помощью разнесенного приема. Возможными разновидностями разнесенного приема являются: 1) прием отдельных, наиболее интенсивных по амплитуде составляющих сигнала; 2) одновременный прием наиболее интенсивных составляющих сигнала.

При приеме отдельных сигналов используют две разнесенные в пространстве приемные антенны и переключатель (рис. 7.20), с помощью которого на вход приемника отбирают наиболее мощный сигнал. В случае если принятые сигналы различаются по поляризации, они могут быть приняты двумя антеннами с разной поляризацией. Иногда одну и ту же информацию передают одновременно на разных частотах (рис. 7.21), используя два передатчика и два приемника. С помощью блока выбора определяют наиболее интенсивный сигнал, который и определяет оценку передаваемой информации.

Для повышения качества информации двоичные символы передаваемых последовательностей могут повторяться. В этом случае в приемнике реализуется метод накопления, связанный с суммированием результатов обработки нескольких принятых символов и принятием решения о переданном символе.

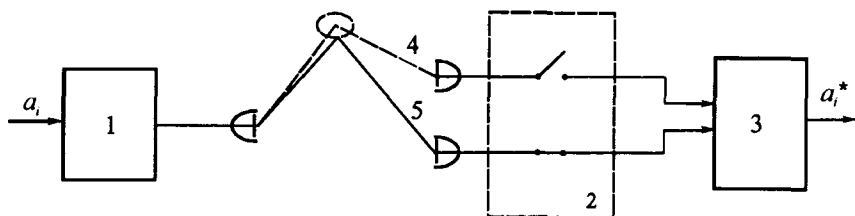


Рис. 7.20. Разнесенный в пространстве прием сигнала:

1 – передатчик; 2 – переключатель; 3 – приемник; 4, 5 – пути прохождения сигнала

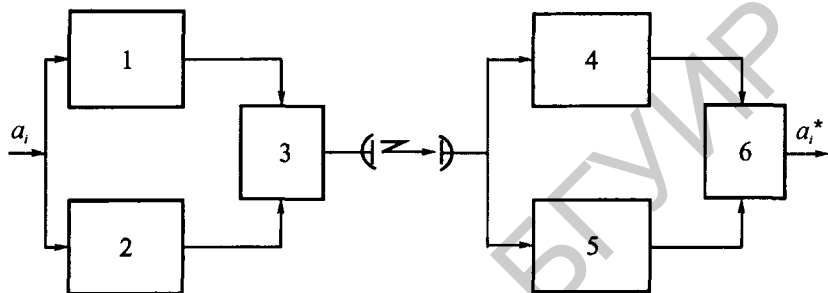


Рис. 7.21. Прием сигналов, разнесенных по частоте:

1, 2 – передатчики, работающие на разных частотах; 3 – сумматор сигналов;
4, 5 – приемники, работающие на разных частотах; 6 – блок выбора сигналов

Одновременный прием флуктуирующего сигнала, равного сумме модулированных информационными посылками шумоподобных сигналов с применением корреляторов и согласованных фильтров позволяет уменьшить влияние флуктуаций и тем самым увеличить помехоустойчивость за счет суммирования энергий наиболее интенсивных сигнальных составляющих.

Это суммирование возможно для сжимающихся во времени шумоподобных сигналов.

Принцип разделения поясняется на примере приема двух лучей (рис. 7.22). На входе согласованного фильтра присутствует сумма двух шумоподобных сигналов, одинаковых по форме, но отличающихся по амплитуде и задержке (рис. 7.22, б). Каждый из этих сигналов имеет длительность, равную τ_n , одинаковую несущую частоту и один и тот же закон модуляции фазы. Фаза равна или нулю, или π в течение длительности τ_0 одного элемента двоичной псевдослучайной последовательности $a(t)$, кодированной кодовой последовательностью 111-1-11-1 (рис. 7.22, а).

Сигнал на выходе согласованного фильтра равен сумме двух сдвинутых во времени и отличающихся масштабом автокорреляционных функций шумоподобного сигнала (рис. 7.22, в). Каждая функция состоит из основного (наибольшего) ромбовидного радиоимпульса и дополнительных ромбовидных импульсов, которые меньше основного. Максимальные

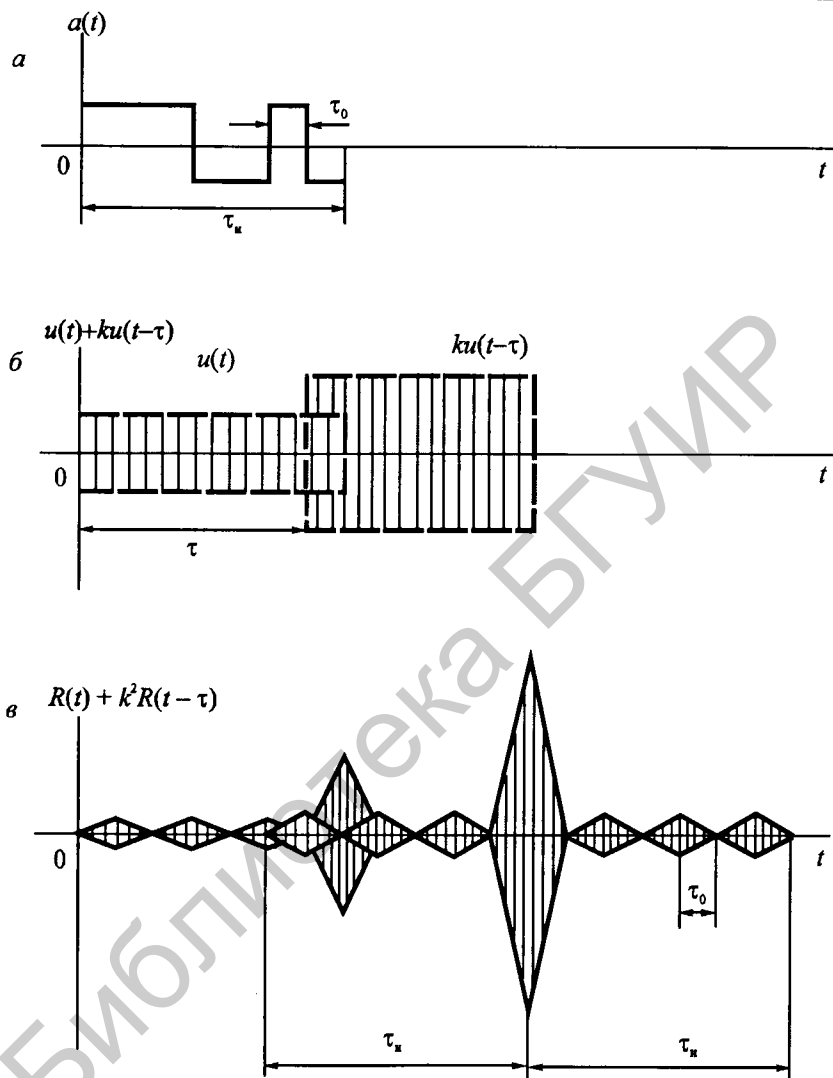


Рис. 7.22. Разделение двух лучей с помощью шумоподобных сигналов

значения амплитуд ромбовидных радиоимпульсов равны соответственно энергиям входных сигналов, а длительность каждого ромбовидного радиоимпульса на уровне, равном половине их амплитуд, равна τ_0 (длительности одного элемента двоичной псевдослучайной последовательности).

Если дополнительные ромбовидные импульсы, которые называются остатками, пренебрежимо малы, то сигналы на выходе согласованного фильтра будут определяться только основными ромбовидными радиоимпульсами. При этом длительности сигналов на входе и выходе согласованного фильтра будут неравными. Длительности сигналов на выходе будут

меньше. Этот эффект называется сжатием сигналов во времени. Сжатием обладает только часть используемых в системах связи сигналов. К числу таких сигналов, например, относятся кодофазомодулированные сигналы. В качестве кодовых последовательностей в этом случае используются коды Баркера, M -последовательности и др.

Для эффективного разделения откликов согласованного фильтра, как это видно из рис. 7.22, *в*, необходимо уменьшить длительность одного элемента τ_0 псевдослучайной последовательности. Чем меньше эта длительность, тем лучше будут различаться сигналы. Но это потребует более широкой полосы канала связи. Кроме того, из возможных кодофазомодулированных сигналов следует применять такие сигналы, у которых боковые остатки меньше. Перечисленные требования лучше удовлетворяются с ростом базы шумоподобных сигналов.

Пусть на вход демодулятора, в котором реализуется когерентный прием, поступает n одинаковых по форме шумоподобных сигналов, задержанных относительно друг друга во времени, а оптимальный алгоритм приема определяется неравенством (7.18). Если для передачи двоичной информации используется двоичная амплитудная модуляция шумоподобного сигнала, то в (7.18) $E_2 = 0$, $E_1 = \sum_{i=1}^n E_i$ а, где E_i – энергия i -го входного ШС.

Оптимальный демодулятор вычисляет корреляционный интеграл в интервале $\tau_1, \tau_n + \tau_n$ где τ_1, τ_n – задержки соответственно первого и последнего сигналов, τ_n – длительность излучаемого сигнала и сравнивает его с пороговым уровнем. Корреляционный интеграл и значение порогового уровня соответственно равны:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_n + \tau_n} z(t) [k_1 u(t - \tau_1) + k_2 u(t - \tau_2) + \dots + k_n u(t - \tau_n)] dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_n + \tau_n} z(t) k_1 u_1(t - \tau_1) dt + \int_{\tau_1}^{\tau_n + \tau_n} z(t) k_2 u_2(t - \tau_2) dt + \dots + \int_{\tau_1}^{\tau_n + \tau_n} z(t) k_n u_n(t - \tau_n) dt > 0,5 E_1$$

где $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ – коэффициент, определяющий интенсивность сигнала.

Структурная схема оптимального демодулятора, реализованная на корреляторах, приведена на рис. 7.23. Для когерентного сложения необходимо обеспечить: а) совпадение начальных фаз опорных сигналов $u_i(t - \tau_i), i = 1, 2, \dots, n$ с начальными фазами принимаемых сигналов с заданной точностью; б) совпадение задержки опорных с задержкой принимаемых сигналов.

Структурная схема оптимального демодулятора, реализованная на согласованном фильтре и сумматоре, приведена на рис. 7.24. Сумматор в схеме на рис. 7.24 выполняет ту же роль, что и в схеме на рис. 7.23, – суммирует задержанные во времени отклики согласованного фильтра.

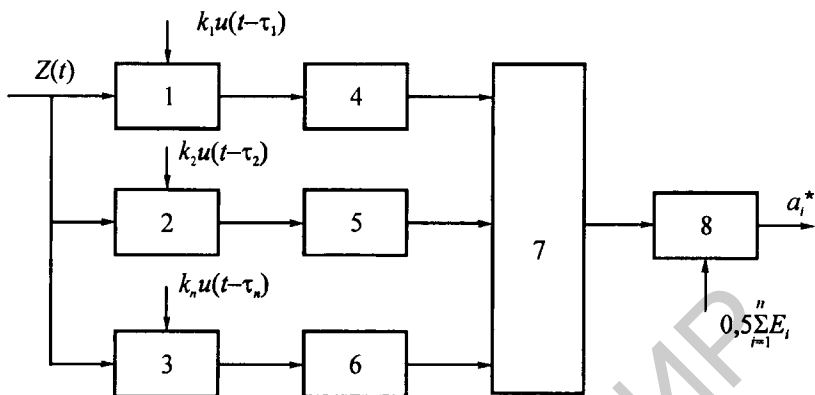


Рис. 7.23. Структурная схема оптимального демодулятора когерентного шумоподобного сигнала:

1, 2, 3 – умножители; 4, 5, 6 – интеграторы; 7 – сумматор; 8 – решающее устройство

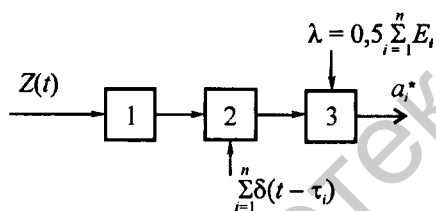


Рис. 7.24. Структурная схема оптимального демодулятора, построенного на согласованном фильтре:

1 – согласованный фильтр; 2 – сумматор; 3 – решающее устройство

Для выполнения этой операции необходимо: а) иметь в составе сумматора запоминающее устройство для хранения значений откликов согласованного фильтра; б) обеспечить когерентный отсчет откликов фильтра.

Многоканальный прием ШС реализован в системе подвижной связи с кодовым разделением каналов CDMA (Code Division Multiple Access).

7.7. СПОСОБЫ БОРЬБЫ С ИМПУЛЬСНЫМИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И МЕЖСИМВОЛЬНЫМИ ПОМЕХАМИ

Для уменьшения влияния помех на качество передачи сообщений используют мероприятия по их подавлению в местах возникновения и по защите каналов связи от их проникновения, а также решают задачу по выбору структуры системы связи и ее отдельных узлов и блоков при проектировании.

Для защиты каналов от проникновения помех совершенствуют аппаратуру связи, уменьшая как влияние внешних помех, так и взаимные помехи между соседними каналами. В радиосвязи эту задачу решают рациональ-

ным выбором несущих частот передатчиков с учетом их расположения на местности и условий распространения радиоволн. Вопросы взаимного влияния различных систем друг на друга изучаются в теории электромагнитной совместимости.

При разработке мероприятий по подавлению помех учитывают рекомендации международного союза электросвязи: МСЭ-Т (сектор стандартизации электросвязи) и МСЭ-Р (сектор радиосвязи).

Рассмотрим кратко некоторые способы подавления помех, связанные с рациональным выбором сигналов и методами их обработки.

Из известных методов защиты от импульсных помех отметим метод академика А. Н. Шукина, основанный на ограничении импульсной помехи в широкополосном тракте приемника и узкополосной фильтрации ограниченного по уровню сигнала. Система, в которой применяется этот принцип, получила название ШОУ (широкополосный фильтр, ограничитель, узкополосный фильтр).

Другой известный способ борьбы с импульсными помехами основан на отключении канала приемника на время действия помех.

Для борьбы с узкополосными помехами применяют также частотно-разнесенный прием, когда одинаковая информация передается в соседних частотных участках диапазона. При приеме к устройству обработки и решающему устройству подключаются только те частотные участки, которые не поражены сосредоточенными помехами. Межсимвольные помехи ослабляют выбором формы сигнала, структуры демодулятора и скорости передачи дискретной информации.

Достаточно эффективной мерой защиты от импульсных и сосредоточенных помех является разнесенный по времени и частоте прием сигнала. Из ветвей частотного разнесения выбирают те, которые не подвержены воздействию сосредоточенных помех, а из ветвей временного разнесения выбирают непораженные импульсными помехами ветви. Поскольку помехи появляются в заданных участках диапазона и интервалах времени случайным образом, выбор ветвей производится автоматически. При этом структура приемника адаптируется, приспосабливается к присутствующим помехам. Такой прием называется *адаптивным*.

Для борьбы с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами применяют также шумоподобные сигналы.

Применение шумоподобных сигналов в сочетании с использованием оптимальных методов их обработки позволяет успешно решать задачу борьбы с межсимвольными помехами. Принципы такой обработки рассмотрены в разделе 7.6. Использование шумоподобных сигналов и оптимальных методов их обработки на фоне помех позволяет успешно вести борьбу также с импульсными и сосредоточенными помехами. Импульсная и сосредоточенная помеха при прохождении через коррелятор или согласованный

фильтр существенно ослабляются. Отношение сигнал/помеха при этом возрастает в B раз, где B – база сигнала.

Вместе с корреляционной обработкой или согласованной фильтрацией шумоподобного сигнала для борьбы с сосредоточенными помехами в ряде случаев применяют и предварительную фильтрацию смеси сигнала шума и помехи режекторным фильтром. С помощью этого фильтра «вырезают» ту часть спектральных компонент, которые перекрываются узкополосными помехами, а по оставшейся части спектра шумоподобного сигнала восстанавливают переданную информацию.

7.8. АНАЛИЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ ПРИ ПРИЕМЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИГНАЛОВ, ИЗВЕСТНЫХ ТОЧНО

7.8.1. Потенциальная помехоустойчивость двоичной системы при приеме элементов сигналов, известных точно

При приеме равновероятных сигналов, известных точно, $u_1(t)$, $u_2(t)$ на фоне нормального белого шума алгоритм обработки определяется неравенством (7.18). Если в смеси $z(t)$ содержится первый сигнал, то оно запишется в виде

$$\int_0^{\tau_n} [u_1(t) + N(t)]u_{\Delta}(t)dt > 0,5(E_1 - E_2), \quad (7.38)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

Производя элементарные преобразования, неравенство (7.38) перепишем в виде

$$\int_0^{\tau_n} N(t)u_{\Delta}(t)dt > -0,5(E_1 + E_2) + \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt.$$

При его выполнении принимается верное решение о принятом сигнале $u_1(t)$, а при невыполнении возникает ошибка. Вероятность принятия ошибочного решения определяется вероятностью события, заключающегося в том, что значение корреляционного интеграла будет меньше некоторой заданной величины λ , т. е.

$$\xi = \int_0^{\tau_n} N(t)u_{\Delta}(t)dt < \lambda = -0,5(E_1 + E_2) + \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt.$$

Эта вероятность равна условной вероятности $P(u_2/u_1)$, поскольку предполагается, что в смеси сигнала и шума $z(t)$ присутствует сигнал $u_1(t)$. Докажем это, вычисляя вероятность ошибки.

$$p = P(u_1)P(u_2/u_1) + P(u_2)P(u_1/u_2).$$

Если $P(u_1) = P(u_2) = 0,5$, $P(u_2/u_1) = P(u_1/u_2)$, то $p = P(u_2/u_1)$.

Условные вероятности являются количественными оценками событий (переходов) в дискретном канале связи, если в этом канале присутствуют помехи (см. п. 5.2.5). В двоичном канале символ 0 может перейти в символ 1, а символ 1 – в символ 0.

Условные вероятности зависят от ряда факторов, в том числе от:

- математической модели канала;
- вида обработки смеси сигнала и шума;
- законов распределения сигнала и шума;
- пороговых уровней, которые зависят от характеристик источника и сигнала.

Вычислим значения вероятности ошибки для различных случаев приема сигналов.

По условию в канале присутствует реализация нормального белого шума с корреляционной функцией $M\{N(t)N(t')\} = \frac{N_0}{2} \delta(t - t')$. Поскольку интегральное преобразование является линейным, случайная величина ξ также подчиняется нормальному закону.

Среднее значение случайной величины ξ равно нулю, так как среднее значение белого шума равно нулю. Дисперсия случайной величины

$$D(\xi) = M \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} N(t) u_{\Delta}(t) dt \right]^2 \right\} =$$

$$= \int_0^{\tau_n} \int_0^{\tau_n} M[N(t)N(t')] u_{\Delta}(t) u_{\Delta}(t') dt dt' = \frac{N_0}{2} E_3, \quad (7.39)$$

$$E_3 = \int_0^{\tau_n} u_{\Delta}^2(t) dt.$$

При вычислении дисперсии принято во внимание фильтрующее свойство дельта-функции.

Зная закон распределения случайной величины ξ и уровень порога λ , нетрудно найти выражение для вероятности ошибки:

$$p = \int_{-\infty}^{\lambda} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

Удвоенное значение вероятности ошибки

$$2p = 1 - \int_{-\lambda}^{\lambda} w(x) dx = 1 - 2 \int_0^{\lambda} w(x) dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p &= 0,5 \left[1 - 2 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \right] = \\ &= 0,5 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda/\sigma} e^{-y^2/2} dy \right) = 0,5 \left[1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

где $\Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda/\sigma} e^{-y^2/2} dy$ — функция Крампа.

Из возможных сигналов, известных точно, рассмотрим двоичные АМ, ФМ и ЧМ сигналы с одинаковой энергией E . Для АМ сигнала $u_{\Delta}(t) = u_1(t)$, так как $u_2(t) = 0$, поэтому $\lambda = 0,5E$.

Для ЧМ сигнала

$$u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t), \quad \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt = 0, \quad \lambda = E.$$

Для ФМ сигнала $u_2(t) = -u_1(t)$, $\lambda = 2E$.

Учитывая значения для уровней порога, запишем выражения для вероятностей ошибок.

Для АМ сигнала $E_s = E$, $\sigma = \sqrt{N_0 E / 2}$, а вероятность ошибки

$$p = \frac{1}{2} [1 - \Phi(h/\sqrt{2})], \quad (7.40)$$

где $h = \sqrt{E/N_0}$.

Для ЧМ сигнала $E_s = 2E$, $\sigma = \sqrt{N_0 E}$,

$$p = \frac{1}{2} [1 - \Phi(h)]. \quad (7.41)$$

Для ФМ сигнала $E_s = 4E$, $\sigma = \sqrt{2N_0 E}$,

$$p = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\sqrt{2}h)]. \quad (7.42)$$

Анализируя выражения для вероятностей ошибок, приходим к выводу, что наилучшие результаты по критерию минимальной вероятности

ошибки обеспечиваются для ФМ сигнала. Переход от системы с ФМ сигналом к системам с ЧМ и АМ сигналами ухудшает помехоустойчивость.

Для получения одинаковых вероятностей ошибки в системе с ЧМ сигналом нужно увеличить энергию сигнала в 2 раза, а в системе с АМ сигналом – в 4 раза. Следовательно, при использовании ФМ сигнала передатчик будет излучать меньшую среднюю мощность по сравнению с ЧМ и АМ сигналами.

Выражение для вероятности ошибки при приеме ОФМ сигнала известного точно найдем на основании оценки вероятностей следующих двух несовместимых событий: первое событие реализуется, если знак данного элемента воспроизведен приемником ошибочно, а знак предыдущего – верно; второе событие реализуется, если знак данного элемента воспроизведен приемником верно, а предыдущего – ошибочно. Каждое из этих событий имеет вероятность $p_{\text{фм}}(1 - p_{\text{фм}})$. Поэтому

$$P_{\text{офм}} = 2p_{\text{фм}}(1 - p_{\text{фм}}) = 0,5[1 - \Phi^2(\sqrt{2h})]. \quad (7.43)$$

Пусть требуется воспроизводить символы с весьма малой ошибкой. В этом случае $p_{\text{фм}} \ll 1$ и

$$P_{\text{офм}} = 2p_{\text{фм}} = 1 - \Phi(\sqrt{2h}). \quad (7.44)$$

«Платой» за устранение обратной работы, как следует из последнего выражения, является удвоение вероятности ошибки по сравнению со случаем приема ФМ сигналов.

Пример 7.4. В двоичном симметричном канале без памяти (канал от выхода АЦП до входа ЦАП) включен оптимальный приемник радиосигнала.

В смеси сигнала мощностью P_c и нормального белого шума с нулевым средним значением и мощностью $P_{\text{ш}}$ присутствует модулированный информационными посылками шумоподобный сигнал, известный точно.

Вычислить вероятность ошибки, если модуляция шумоподобного сигнала осуществляется информационными посылками или по амплитуде, или по фазе (знаку). Кодовое слово, определяющее закон формирования шумоподобного сигнала, построено из элементов 0,1 при амплитудной модуляции и из элементов 1, -1 при фазовой.

Решение. Вероятность ошибки при приеме модулированного по амплитуде информационными посылками шумоподобного сигнала определяется только параметром обнаружения $h = \sqrt{E/N_0}$ [см. формулу (7.40)].

Энергия кодированного элементами 0, 1 сигнала равна $mP_c \tau_0 = m0,5A^2\tau_0$, где A – амплитуда сигнала, m – число 1 в периоде кодовой последовательности, τ_0 – длительность передачи одного символа этой последовательности. Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы $N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f_c = 0,5P_{\text{ш}}\tau_0$,

где $\Delta f_c = 2/\tau_0$ – ширина спектра шумоподобного сигнала. Подставляя значения для энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума в формулу для параметра обнаружения, получим

$$h = \sqrt{0,5mA^2\tau_0 / 0,5P_{\text{ш}}\tau_0} = \sqrt{2mP_c / P_{\text{ш}}}.$$

Вероятность ошибки при приеме модулированного по фазе информационными посылками шумоподобного сигнала также определяется только параметром обнаружения [см. формулу (7.42)].

Энергия кодированного элементами $-1, 1$ сигнала равна $NP_c\tau_0 = N0,5A^2\tau_0$, где A – амплитуда сигнала, N – период, τ_0 – длительность передачи одного символа кодовой последовательности. Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы $N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f_c = 0,5P_{\text{ш}}\tau_0$. Подставляя значения для энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума в формулу для параметра обнаружения, получим

$$h = \sqrt{0,5NA^2\tau_0 / 0,5P_{\text{ш}}\tau_0} = \sqrt{2NP_c / P_{\text{ш}}}.$$

7.8.2. Помехоустойчивость оптимального приема m сигналов, известных точно

В оптимальном демодуляторе m сигналов, известных точно, реализуется поэлементный прием сигнала с числом элементов (букв алфавита), равным m . На его выходе реализуется оценка элемента, связанная или с оценкой сигнала $u_i^*(t)$, или с оценкой двоичного слова блока, которое определяет номер i сигнала (см. рис. 7.1).

Вероятность принятия ошибочного решения оптимальным демодулятором m сигналов, известных точно:

$$P_{\text{ош}} = 1 - p_n,$$

где p_n – вероятность принятия правильного решения.

Вероятность принятия правильного решения определяется вероятностью события, заключающегося в том, что значение случайных величин ξ_j , вычисленных корреляторами с номерами $j \neq i$ в схеме, приведенной на рис. 7.1, будут меньше значения $\xi_i = z$, вычисленного коррелятором с номером i .

Пусть сигналы $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ ортогональны и имеют одинаковые энергии. Можно доказать, что при приеме ортогональных сигналов случайные величины ξ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ статистически независимы. Поэтому вероятность того, что все $(m - 1)$ случайные величины окажутся меньше z , равна

$$[P(\xi_j < z)]^{m-1}, \quad j \neq i.$$

Вероятность того, что случайная величина ξ , находится в пределах $z, z + dz$, равна $w_i(z)dz$, где $w_i(z)$ – плотность распределения вероятности случайной величины ξ_i (рис. 7.25).

Величина ξ_i независима по отношению ко всем величинам $\xi_j, j \neq i$, поэтому вероятность события, заключающегося в том, что $\xi_j < z (j \neq i)$, а ξ_i находится в интервале dz , равна

$$dP = [P(\xi_j < z)^{m-1} w_i(z) dz].$$

Так как случайная величина ξ_i может лежать в пределах любого бесконечно малого значения dz (рис. 7.25), то вероятность того, что значения случайных величин $\xi_j, j \neq i$ будут меньше значения $\xi_i = z$, определится выражением

$$p_{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} dP = \int_{-\infty}^{\infty} [P(\xi_j < z)]^{m-1} w_i(z) dz. \quad (7.45)$$

При условии приема сигнала на фоне нормального белого шума с нулевым средним значением, плотность распределения вероятности $w_i(z)$ подчиняется нормальному закону со средним значением, равным энергии сигнала E , и дисперсией, равной $N_0 E / 2 = \sigma^2$:

$$w_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(z-E)^2 / 2\sigma^2}. \quad (7.46)$$

Случайные величины $\xi_j, j \neq i$ также подчинены нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией $N_0 E / 2 = \sigma^2$.

Поэтому вероятность

$$P(\xi_j < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2 / 2\sigma^2} dx. \quad (7.47)$$

Подставляя (7.46), (7.47) в (7.45), получим

$$p_{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - V(\sqrt{2E/N_0} + y)]^{m-1} e^{-y^2 / 2} dy, \quad (7.48)$$

где

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2 / 2} dt.$$

Интеграл в формуле (7.48) можно вычислить, если использовать приближенные методы.

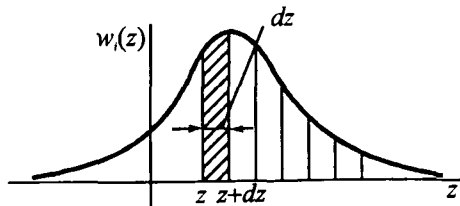


Рис. 7.25. Плотность вероятности случайной величины

Результаты расчетов приведены на рис. 7.26 в виде графиков зависимостей

$$1 - p_{\Pi} = p_{\text{ош}} = f(h_0^2),$$

где $h_0^2 = h^2 / \log_2 m$.

Обозначим аргумент h_0^2 буквой α и для $m = 2^k$ ортогональных сигналов запишем:

$$\alpha = h_0^2 = h^2 / \log_2 m = E / N_0 \log_2 m = E_0 / N_0,$$

где $E_0 = E/k$, k – длина информационного блока.

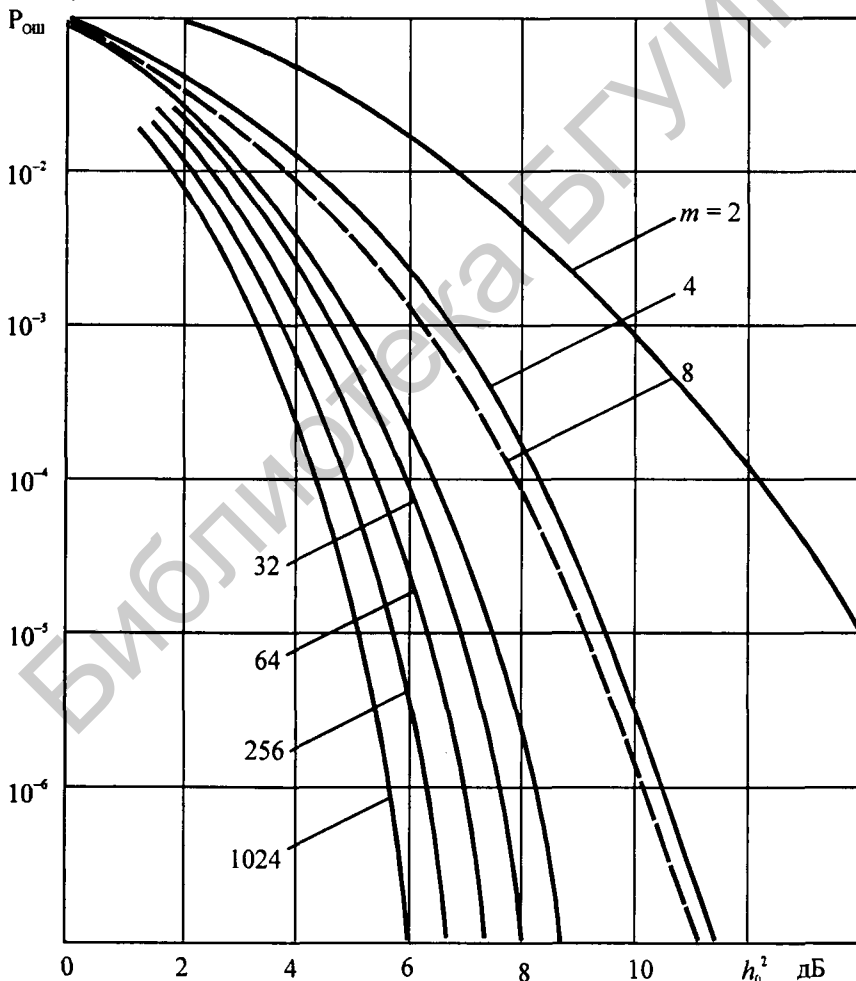


Рис. 7.26. Зависимость вероятности ошибки от отношения h_0^2 при приеме m ортогональных сигналов, известных точно

Коэффициент α равен отношению энергии, которая тратится на передачу одного бита информации, к спектральной плотности мощности шума. Очевидно, что чем меньше это отношение, тем более эффективно используется энергия сигнала в системе передачи информации. Найдем минимальное значение α .

Скорость передачи двоичной информации R связана с энергией E соотношением:

$$E_0 = E/k = P_c k \tau_n / k = P_c / R.$$

где P_c – мощность сигнала, τ_n – длительность информационного символа.

Используя формулу Шеннона, запишем неравенство:

$$R/F < \log(1 + E_0 R / N_0 F).$$

Отношение $R/F = \gamma$ характеризует эффективность использования полосы канала связи (см. п. 9.3.1.). С учетом этого перепишем неравенство в виде:

$$\gamma < \log(1 + \alpha \gamma).$$

Неравенство можно записать также в виде:

$$2^\gamma < 1 + \alpha \gamma.$$

Следовательно,

$$\alpha > (2^\gamma - 1) / \gamma.$$

Исследуя поведение полученной зависимости, находим, что с ростом γ коэффициент α неограниченно увеличивается, а с уменьшением γ этот коэффициент уменьшается. В пределе, если $\gamma \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow \ln 2 = 0,693$. Действительно,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d}{d\gamma} [(2^\gamma - 1) / \gamma] = \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2^\gamma \ln 2 = \ln 2.$$

Для ортогональных сигналов с одинаковым параметром обнаружения уменьшение γ и α возможно за счет увеличения числа этих сигналов. Для известных классов ортогональных сигналов (последовательностей Уолша, Д-последовательностей и др.), используемых для передачи информации, их число равно $m = 2^k$, где k – длина информационного блока, равная 1, 2, 3, ...

Для этих сигналов отношение

$$\alpha = E/N_0 \log_2 2^k = E/N_0 k.$$

С ростом длины блока растет число используемых сигналов, а коэффициент α падает. В пределе при стремлении числа сигналов к бесконечности имеем оптимальную в смысле К. Шеннона систему связи.

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 7.26, позволяет сделать следующий вывод.

Системы ортогональных сигналов при одинаковой вероятности ошибки отличаются удельной энергией, которая тем меньше, чем больше число этих сигналов.

Например, если $p_{\text{ош}} = 10^{-5}$, а число используемых сигналов $m = 32$, то выигрыш в удельной энергии по сравнению со случаем использования только двух сигналов ($m = 2$) равен двум. Это дает возможность упростить передатчик системы за счет уменьшения его мощности. Однако сложность приемников возрастает за счет увеличения числа корреляторов или согласованных фильтров. Усложняются при этом и каналы связи из-за необходимости увеличения ширины полосы.

При относительно больших отношениях сигнал/шум формулу (7.48) можно привести к следующему приближенному выражению:

$$p_{\text{п}} \cong 1 - \frac{m-1}{2} [1 - \Phi(h)].$$

Отсюда выражение для вероятности ошибки

$$p_{\text{ош}} \cong \frac{m-1}{2} [1 - \Phi(h)]. \quad (7.49)$$

Последняя формула переходит в формулу (7.41), если $m = 2$.

Пример 7.5. В канале используется многоканальный приемник m ортогональных, двоичных, фазомодулированных, шумоподобных сигналов, известных точно. Модуляционный код определен. Каждому двоичному слову блока информационной последовательности ставится номер шумоподобного сигнала. Такой вид модуляции называется модуляцией шумоподобного сигнала по форме.

Время передачи одного информационного символа равно $\tau_{\text{и}}$. Время передачи двоичного слова блока равно произведению числа символов k в блоке на время передачи одного информационного символа $\tau_{\text{и}}$. Это время, равное $k\tau_{\text{и}}$, равно времени передачи одного периода шумоподобного сигнала $N\tau_0$. Отношение сигнал/шум на входе приемника $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}} = 1$.

Вычислить вероятности ошибок для двух случаев, если длины информационных блоков равны 2 и 3.

Решение. Вероятности ошибки находим по формуле (7.49). Число каналов $m = 2^k$, энергия сигнала $E = P_{\text{с}}k\tau_{\text{и}}$, мощность шума, приходящаяся на единицу полосы, $N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f$. Ширина полосы, определяемая длительностью одного символа τ_0 шумоподобного сигнала, $\Delta f = 2N/\tau_{\text{и}}$.

Параметр обнаружения

$$h = \sqrt{E/N_0} = \sqrt{2NP_{\text{с}}k\tau_{\text{и}}/P_{\text{ш}}k\tau_{\text{и}}} = \sqrt{2NP_{\text{с}}/P_{\text{ш}}}.$$

Для $k = 2$ и $N = 2^k = 4$ параметр обнаружения

$$h = \sqrt{2NP_c / P_{\text{ш}}} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{8} = 2,888.$$

Вероятность ошибки равна 0,00705.

Для $k = 3$ и $N = 2^k = 8$ параметр обнаружения

$$h = \sqrt{2NP_c / P_{\text{ш}}} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 4.$$

Вероятность ошибки равна 0,0002.

Помехоустойчивость приема ортогональных сигналов, известных точно, как это следует из полученных результатов, увеличивается с увеличением числа m ортогональных сигналов.

Пример 7.6. Для исходных данных примера 7.5 найти вероятности ошибок воспроизведения двоичных символов на выходах оптимальных приемников.

Решение. Учитывая определение канала связи, приведенное в п. 1.2, а также математическую модель дискретного канала связи (см. п. 5.2.5), находим, что двоичный сигнал, реализующийся в виде оценок слов блока, является в то же время сигналом в двоичном симметричном канале без памяти.

Событие, заключающееся в появлении ошибки в этом канале, однозначно связано с появлением ошибки в воспроизведении двоичного слова блока. Вероятности этих событий равны. Вероятность первого события равна сумме вероятностей появления ошибок кратности $q = 1, 2, 3, \dots, k$:

$$\sum_{q=1}^k p(q) = \sum_{q=1}^k C_k^q p^q (1-p)^{k-q},$$

где вероятность $p(q)$ определяется формулой (5.15).

Вероятность второго события определяется вероятностью ошибки распознавания одного из $m = 2^k$ двоичных слов блока $p_{\text{ош}} = 1 - p_{\text{п}}$, где $p_{\text{п}}$ – вероятность принятия правильного решения [см. формулу (7.49)].

Приравнивая выражения для вероятностей указанных выше событий, получим уравнение, решение которого определит выражение для вероятности ошибки воспроизведения двоичного символа в двоичном симметричном канале без памяти. Решение уравнения возможно для большого отношения сигнал/шум. В этом случае можно считать маловероятным появление ошибок с кратностью $q > 1$, а при вычислении вероятности ошибки распознавания пользоваться формулой (7.49).

Вероятность того, что в блоке из k символов произойдет одна ошибка,

$$p(1) = C_k^1 p(1-p)^{k-1} = kp(1-p)^{k-1},$$

где $C_k^1 = \frac{k!}{(k-1)!} = k$.

Приравняв эту вероятность к вероятности распознавания одного из $m = 2^k$ двоичных слов, получим равенство:

$$kp(1-p)^{k-1} = \frac{2^k - 1}{2} [1 - \Phi(h)].$$

Для малых значений p разность $1 - p \cong 1$, поэтому

$$p = \frac{2^k - 1}{2k} [1 - \Phi(h)] = p_{\text{ош}} / k. \quad (7.50)$$

Подставляя численные значения вероятностей ошибок, полученные в примере 7.5, в последнюю формулу, находим вероятности ошибок воспроизведения двоичных символов на выходах оптимальных приемников:

$$p_1 = p_{\text{ош}}/2 = 0,0035, p_2 = p_{\text{ош}}/3 = 0,00007.$$

7.8.3. Помехоустойчивость оптимального приема m сигналов с неизвестными (случайными) начальными фазами

Формулу для вероятности ошибки для случая приема одного из сигналов со случайными начальными фазами на фоне помехи (нормального белого шума) можно получить, используя аналогичную (см. п. 7.8.2) методику расчета. При этом необходимо принять во внимание случайный характер начальных фаз и изменившийся алгоритм оптимальной обработки сигналов (см. раздел 7.3).

Расчеты дают следующий результат. Вероятность принятия правильного решения

$$p_{\text{п}} = 1 - \frac{(m-1)}{2} e^{-h^2/2}, \quad (7.51)$$

где h – параметр обнаружения.

Вероятность ошибки

$$p_{\text{ош}} = \frac{(m-1)}{2} e^{-h^2/2}, \quad (7.52)$$

Помехоустойчивость приема двоичного частотно-модулированного сигнала со случайной начальной фазой определяется вероятностью ошибки, выражение которой следует из (7.52), если $m = 2$.

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} e^{-h^2/2}. \quad (7.53)$$

7.8.4. Помехоустойчивость оптимального приема амплитудно-модулированного сигнала с неизвестной (случайной) начальной фазой

При оценке помехоустойчивости этого вида приема учитываются: условия и ограничения, которые накладываются на сигнал и шум, выбранная модель канала, а также алгоритм оптимальности приемника. Этот алгоритм определяется неравенством (7.35).

Для рассматриваемого случая $u_1(t) \neq 0$, $u_2(t) = 0$, $E_2 = 0$, поэтому неравенство записывается в виде:

$$\ln I_0 \left(\frac{2AM}{N_0} \right) > \frac{E}{N_0}.$$

Структура оптимального приемника, построенная по этому неравенству, содержит всего один канал. В этом приемнике вычисляется число по формуле, которая записана в левой части неравенства, а затем оно сравнивается с заранее известным числом, которое определяется правой частью этого неравенства. При превышении порога $\lambda = E/N_0$ на выходе приемника формируется символ 1, а в противном случае – 0. Таким образом, при приеме двоичного амплитудно-модулированного сигнала со случайной начальной фазой решается задача обнаружения сигнала.

Двоичный канал, связанный с решением этой задачи, является несимметричным из-за неравенства переходных вероятностей. Условная вероятность $P(u_1/0)$ вычисляется с помощью формулы (4.43), а условная вероятность $P(u_2/1)$ – с помощью формулы (4.44). Вероятность ошибки воспроизведения символов на выходе обнаружителя, зависящая от этих вероятностей, равна:

$$p = P(u_1)P(u_2/u_1) + P(u_2)P(u_1/u_2) = P(1)P(u_2/1) + P(0)P(u_1/0),$$

где

$$P(u_2/1) = 1 - e^{-\frac{E}{N_0}} \int_{\alpha}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} I_0(\sqrt{2E/N_0} y) dy,$$

$$P(u_1/0) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}};$$

$\alpha = u_0/\sigma$ – относительный уровень порога, равный отношению значения порогового напряжения к среднеквадратичному значению шума.

По формулам для условных вероятностей в работе [23] рассчитаны кривые зависимостей $P(u_2/1) = f[P(u_1/0)]$ для различных отношений сигнал/шум E/N_0 . Первая вероятность называется *вероятностью пропуска сигнала*, а вторая – *вероятностью ложной тревоги*. Кривые зависимостей вероятностей

пропуска сигнала от вероятностей ложной тревоги называются *характеристиками обнаружения сигнала*. Эти характеристики позволяют рассчитать необходимые параметры обнаружителя.

Для расчетов при больших отношениях сигнал/шум можно пользоваться также следующей формулой [23]:

$$E/N_0 = (\sqrt{\ln[1/P(u_1/0)]} + \sqrt{\ln[1/P(u_2/1)] - 1,4})^2. \quad (7.54)$$

Эта формула связывает значения переходных вероятностей в двоичном несимметричном канале без памяти с пороговым уровнем $\lambda = E/N_0$ в оптимальном приемнике.

Для расчета вероятности ошибки можно пользоваться и формулой:

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 0,5 \left[1 - \Phi \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) \right] + e^{-h^2/4} \right\},$$

где $\Phi(x)$ – функция Крампа.

При больших отношениях сигнал/шум функция Крампа равна 1 и формула для вероятности ошибки становится равной:

$$p = \frac{1}{2} e^{-h^2/4}. \quad (7.55)$$

7.8.5. Помехоустойчивость приема оптических сигналов

Прием оптических сигналов поясняется рис. 7.27 и 7.28.

В качестве линейного сигнала часто используют оптический сигнал, кодированный кодом СМІ (Coded Mark Inversion). Этот код рекомендован международным союзом электросвязи по телефонии для цифровых систем передачи четвертого уровня со скоростью цифрового потока 139,264 Мбит/с.

В коде СМІ символы 1 информационного двоичного слова передаются следующим образом. Если предыдущий символ 1 передавался отсутствием света в течение всего единичного интервала τ_0 , то следующий символ 1 будет передан световым импульсом той же длительности. И далее этот процесс передачи символов 1 будет продолжаться. Символ 0 информационного двоичного слова передается отсутствием света в первой половине единичного интервала и световым импульсом во второй половине этого же интервала (см. рис. 7.27, б).

Другими словами, символу 1 информационного двоичного слова ставится в соответствие либо двоичное слово 00 (отсутствие света), либо двоичное слово 11 (присутствие света), а символу 0 информационного двоичного слова ставится в однозначное соответствие двоичное слово 01 (см. рис. 7.27, а, б).

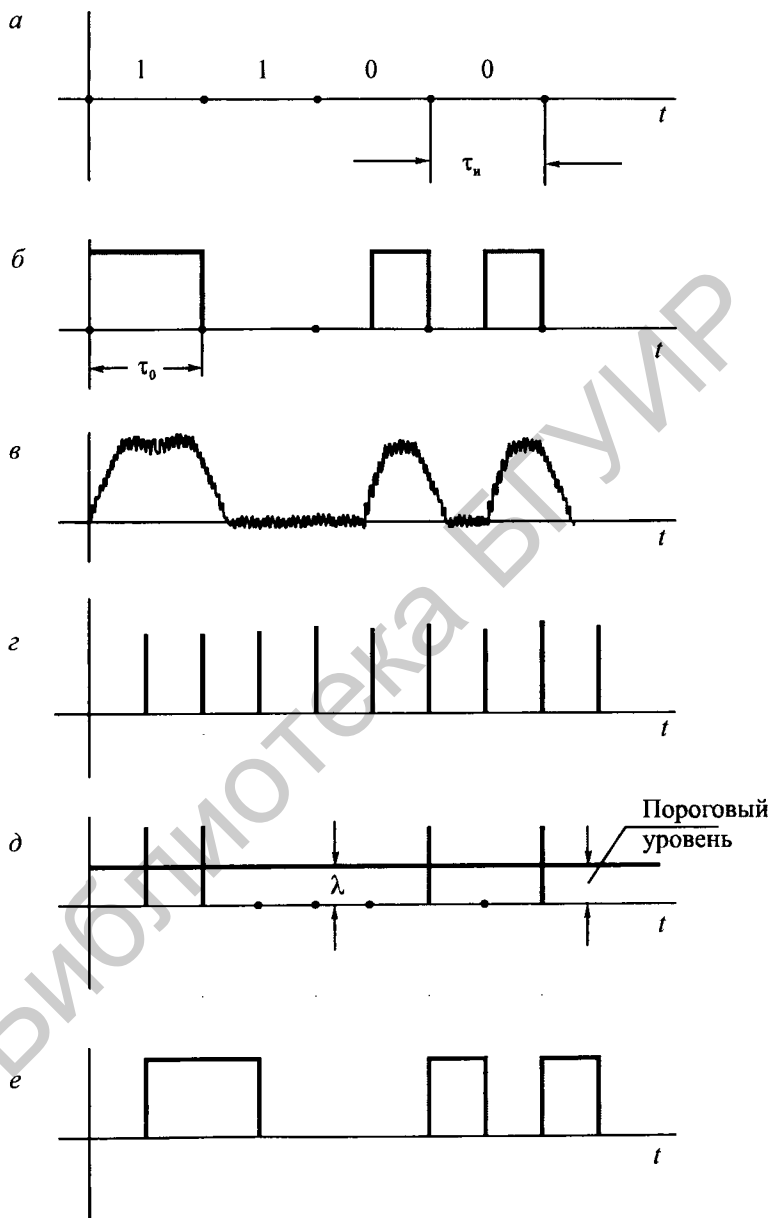


Рис. 7.27. Временные диаграммы, поясняющие прием оптических дискретных сигналов

Прием этих двоичных слов возможен на основе решения задачи распознавания. Принимаемая смесь сигнала и шума анализируется приемником в течение времени передачи одного информационного символа $\tau_{\text{и}}$ и далее принимается решение о том, какое из трех двоичных слов 00, 11 или 01 передается по каналу.

Можно упростить приемник за счет некоторого проигрыша в помехоустойчивости, если задачу приема решать на основе обнаружения символов 0, 1 этих двоичных слов.

Искаженный средой распространения и шумами сигнал на выходе приемного оптоэлектронного модуля показан на рис. 7.27, в.

За счет явления дисперсии и ограниченной полосы пропускания приемного оптоэлектронного модуля происходит расширение световых импульсов и сглаживание их передних и задних фронтов.

Преобразование оптических сигналов в электрический ток сопровождается флуктуационными шумами. Составляющими этих шумов являются квантовый шум, обусловленный вероятностным характером преобразования оптического сигнала в электрический ток, и тепловой шум усилителя в приемнике, связанный с тепловым движением молекул и электронов.

Обработка принимаемого сигнала сводится: к предварительной фильтрации сигнала в приемном оптоэлектронном модуле, стробированию отфильтрованного сигнала в заданные моменты времени и сравнению полученных выборочных значений с пороговым уровнем.

Короткие импульсы, вырабатываемые устройством тактовой синхронизации, показаны на рис. 7.27, г.

Если пороговый уровень превышает выборками отфильтрованного сигнала, то формирователь сигнала формирует импульсы тока (напряжения), показанные на рис. 7.27, е.

Как следует из описания принципа приема оптических сигналов, в приведенной на рис. 7.28 схеме решается задача обнаружения.

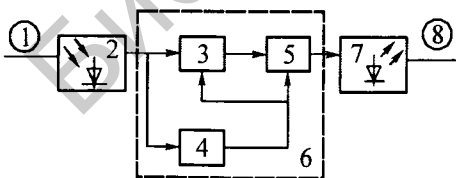


Рис. 7.28. Структурная схема регенератора системы связи:

1, 8 – оптический кабель; 2 – приемный оптоэлектронный модуль; 3 – решющее устройство; 4 – устройство тактовой синхронизации; 5 – формирователь сигнала; 6 – электронный регенератор; 7 – передающий оптоэлектронный модуль

Пусть квантовый шум пренебрежимо мал по сравнению с тепловым, а плотность распределения вероятности теплового шума подчиняется нормальному закону с нулевым средним значением:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

где σ^2 – дисперсия флуктуаций шума на выходе приемного оптоэлектронного модуля.

Эта плотность определяет случайную величину ξ с нулевым средним значением на выходе стробирующего устройства (кривая 1 на рис. 7.29), когда передается символ 0 двоичного слова.

Случайная величина на выходе стробирующего устройства с неравным нулю средним значением также определяется нормальным законом с указанной выше дисперсией и средним значением, равным амплитуде U отфильтрованного сигнала (кривая 2 на рис. 7.29), когда передается символ 1 двоичного слова.

Если уровень порога равен λ , а вероятности появления нулей и единиц $P(0)$ и $P(1)$ равны, то вероятность ошибки при приеме сигналов

$$p = 0,5P(1/0) + 0,5P(0/1) = 0,5 \left(\int_{\lambda}^{\infty} w_1(x) dx + \int_{-\infty}^{\lambda} w_2(x) dx \right), \quad (7.56)$$

где $P(1/0) = \int_{\lambda}^{\infty} w_1(x) dx$ – вероятность того, что случайная величина превысит уровень порога, равный λ , при условии приема символа 0 двоичного слова;

$P(0/1) = \int_{-\infty}^{\lambda} w_2(x) dx$ – вероятность того, что случайная величина не превысит порога при условии приема символа 1 двоичного слова.

Если $\lambda = U/2$, то

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\infty} w_1(x) dx &= \int_{-\infty}^{\lambda} w_2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda/\sigma}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right] = 0,5[1 - \Phi(\lambda/\sigma)] = 0,5[1 - \Phi(U/2\sigma)], \quad (7.57) \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ – функция Крампа.

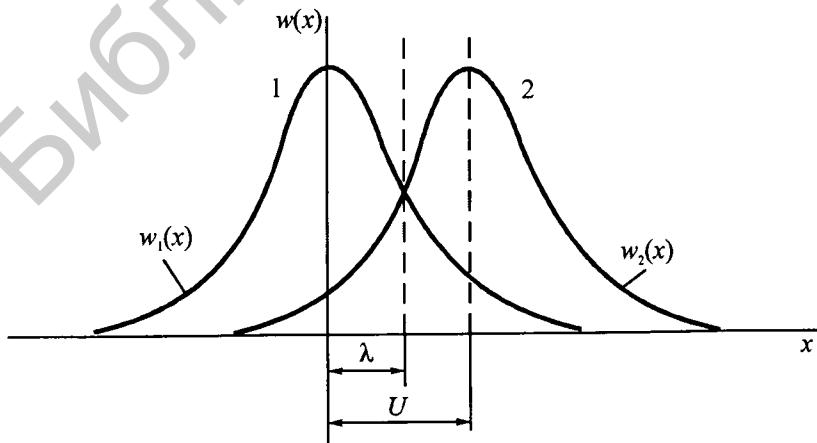


Рис. 7.29. Плотности распределения вероятности для расчета вероятности ошибки при приеме оптических сигналов

Подставляя (7.57) в (7.56), получим выражение для вероятности ошибки:

$$p = 0,5[1 - \Phi(U/2\sigma)]. \quad (7.58)$$

При оптимальной фильтрации $U = E$, где E энергия сигнала при передаче по каналу символа 0, формула (7.58) переходит в формулу (7.40).

7.9. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

7.9.1. Показатели качества передачи

Непрерывное сообщение $a(t)$ является некоторой случайной реализацией, изменяющейся во времени. Сигнал, совпадающий с точностью до постоянной величины с этим сообщением, называется *первичным сигналом*. Первичный сигнал $b(t)$ передается по каналу связи или непосредственно (передача речи в тональном канале), или преобразуется модулятором (передача речи в радиовещании, передача речи и изображения в телевидении, передача непрерывного сообщения цифровыми методами в цифровой системе передачи).

В первом случае

$$b(t) = ka(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Во втором случае первичный сигнал преобразуется в сигнал $u[t, p(t)]$, зависимый от времени и модулируемого параметра $p(t)$, причем $p(t) = cb(t)$, где c – коэффициент пропорциональности. Для простоты примем $c = 1$.

При передаче по каналу связи на сигнал накладывается помеха $N(t)$. Для аддитивной помехи сумма сигнала и шума

$$z(t) = u[t, b(t)] + N(t).$$

Задачей приемника является выделение первичного сигнала с минимальной ошибкой.

Мерой помехоустойчивости, как упоминалось в главе 1, является среднеквадратичное отклонение или средний квадрат ошибки:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt. \quad (7.59)$$

Разность $\varepsilon(t) = b^*(t) - b(t)$ между принимаемым и передаваемым первичным сигналом является помехой на выходе приемника. Поэтому величина среднеквадратичной погрешности $\varepsilon^2(t) = P_n$ является в то же время и мощностью этой помехи. Мощность первичного сигнала равна $P_b = b^2(t)$. Вместо среднеквадратичного отклонения часто используют

другой показатель – отношение мощности сигнала к мощности помехи (шума) на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = P_b / P_{\text{п}}.$$

Если отношение сигнал/шум на входе приемника равно $\rho_{\text{вх}} = P_c / P_{\text{ш}}$, то отношение

$$g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \frac{P_b / P_{\text{п}}}{P_c / P_{\text{ш}}} = \frac{P_b}{P_{\text{п}}} / \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \quad (7.60)$$

характеризует выигрыш (или проигрыш) в помехоустойчивости того или иного способа обработки сигнала.

Полезным показателем является также *обобщенный выигрыш*:

$$g' = \frac{\rho'_{\text{вых}}}{\rho'_{\text{вх}}} = \frac{g}{\alpha}, \quad (7.61)$$

где $\rho'_{\text{вых}} = \frac{P_b}{P_{\text{п}} / F_c}$, F_c – ширина спектра сообщения; $\rho'_{\text{вх}} = \frac{P_c}{P_{\text{ш}} / F}$, F – ширина спектра сигнала; $\alpha = F / F_c$.

7.9.2. Прием отдельных значений непрерывных сообщений.

Критерии оптимальности

Прием отдельных значений сообщения связан с двумя случайными событиями. Событие, заключающееся в реализации значения модулируемого параметра сигнала, которое в повторяющихся и одинаковых интервалах времени изменяется случайным образом, но в каждом интервале остается постоянным, связывают с первым событием. Эта случайная величина характеризуется плотностью распределения вероятности. Будем считать, что плотность распределения вероятности в заданном диапазоне значений случайной величины является постоянной величиной, т. е.: $w(x) = \text{const}$. Появление на выходе приемника реализации аддитивной смеси модулированного сигнала и нормального белого шума с нулевым средним значением связывают со вторым событием. Достаточно полно это событие определяется n -мерной плотностью распределения вероятности $w(\vec{y})$.

Совместное появление двух событий определяется двумерной плотностью распределения вероятности:

$$w(x, \vec{y}) = w(x)w(\vec{y} / x) = w(\vec{y})w(x / \vec{y}).$$

Из полученного уравнения можно найти апостериорную (условную) плотность распределения $w(x / \vec{y})$ вероятности и по этой плотности найти оценку значения сообщения.

Впервые задача определения оптимальной структуры приемника и его характеристик была решена В. А. Котельниковым [1] при приведенных выше исходных данных и большом отношении сигнал/шум.

Оптимальный приемник, анализируя смесь сигнала и шума в интервале $[0, T]$, вычисляет апостериорную плотность распределения вероятности и выдает то значение сообщения, при котором эта плотность максимальна. Этот критерий называется критерием максимума апостериорной плотности распределения вероятности.

Апостериорная плотность определяется формулой:

$$w(x/\bar{y}) = cw(x)w(\bar{y}/x), \quad (7.62)$$

где c – постоянная величина; $w(\bar{y}/x)$ – функция правдоподобия.

Постоянная величина находится из условия нормировки

$$\int_X w(x/\bar{y})dx = 1,$$

где X – область возможных значений сообщения.

Из последнего уравнения находим постоянную величину

$$c = \frac{1}{\int_X w(x)w(\bar{y}/x)dx}.$$

Функция правдоподобия определяется формулой

$$w(\bar{y}/x) = [1/\sqrt{2\pi}\sigma]^n \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - u_x(t)]^2 dt\right\}, \quad (7.63)$$

где $u_x(t)$ – сигнал, все параметры которого известны точно, за исключением модулируемого сообщением параметра.

Вычисление функции правдоподобия в приемнике возможно по формуле (7.63). Для этого из мгновенных значений смеси вычитаются мгновенные значения сигнала, а затем полученная разность возводится в квадрат. Полученный результат интегрируется в интервале времени $[0, T]$. Значение интеграла делится на значение спектральной плотности мощности N_0 . В результате находится число (показатель экспоненциальной функции), которое и определяет значение функции правдоподобия.

Как будет показано далее, для решения задачи оптимального приема сообщения можно ограничиться вычислением подобных чисел.

Если априорная плотность распределения является постоянной величиной, то, как видно из формулы (7.62), апостериорная плотность с точностью до постоянной величины совпадает с функцией правдоподобия. При этом как апостериорная плотность, так и функция правдоподобия являются одномерными функциями.

Поэтому эквивалентным критерием оптимальности также может быть и критерий максимума функции правдоподобия:

$$w(\bar{y}/x) = \max.$$

Оценка значения сообщения определяется из уравнения

$$dw(\bar{y}/x)/dx = \max.$$

Часто в качестве критерия оптимальности выбирают *критерий минимума среднеквадратичной ошибки*

$$M[\varepsilon^2(x)] = \int_X (x - x^*)^2 \omega(x/\bar{y}) dx = \min, \quad (7.64)$$

где X – заданная область интегрирования; x^* – значение оценки непрерывной случайной величины.

Оптимальная оценка находится из уравнения

$$dM\{\varepsilon^2(x)\}/dx^* = 0.$$

С учетом того, что

$$\int_X w(x/\bar{y}) dx = 1,$$

найдем эту оценку:

$$x^* = \int_X x w(x/\bar{y}) dx.$$

Оптимальной оценкой в этом случае является математическое ожидание апостериорного распределения.

Обобщенной оценкой является *байесовская оценка*

$$M\{L(x - x^*)\} = \int_X L(x - x^*) w(x/\bar{y}) dx,$$

где $L(x - x^*)$ – некоторая весовая функция потерь.

Критерий

$$\int_X L(x - x^*) w(x/\bar{y}) dx = \min$$

называется *критерием минимума среднего риска*.

Если функция потерь равна $(x - x^*)^2$, то байесовская оценка переходит в математическое ожидание квадрата разности (7.64), а критерий минимума среднего риска – в критерий минимума среднеквадратичной ошибки.

Если отношение сигнал/шум велико, а апостериорное распределение симметрично относительно значения x^* , все приведенные выше критерии совпадают.

Найдем значение сообщения, при котором функция правдоподобия максимальна. С этой целью вычислим производную выражения (7.63) и приравняем ее к нулю. В результате получим уравнение

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = 0,$$

где

$$\xi(x) = \frac{1}{N_0} \int_0^T [Z(t) - u_x(t)]^2 dt.$$

Наиболее вероятное значение случайной величины x_n находится из уравнения

$$\int_0^T [Z(t) - u_{x_n}(t)] \frac{du_{x_n}(t)}{dx} dt = 0. \quad (7.65)$$

Пример 7.7. Определить структуру и помехоустойчивость следящего корреляционного оптимального приемника, предназначенного для приема отдельных значений модулирующего напряжения. В передатчике этими значениями модулируется по амплитуде гармонический непрерывный сигнал. Значения модулирующего напряжения постоянны в пределах заданного интервала, но от одного интервала к другому меняются случайным образом. Плотность распределения случайной величины подчиняется равномерному закону. В результате модуляции на выходе передатчика формируется амплитудно-модулированный сигнал с большим уровнем несущей. В приемнике принимаемый сигнал сопровождается нормальным белым шумом с нулевым средним значением. Пояснить работу оптимального приемника временными диаграммами.

Решение. Структура приемника определяется уравнением (7.65) (см. рис. 7.30). Это уравнение определяет основные преобразования, которые производятся со смесью сигнала и шума. Смесь, показанная на рис. 7.31, а, умножается в блоке 1 на производную от опорного сигнала (см. рис. 7.32, б), а затем результат интегрируется интегратором 2. Временные диаграммы на выходах умножителя 1 и интегратора 2 приведены на рис. 7.32, в, г. Генерируемый приемником опорный сигнал умножается в блоке б на его производную и результат также интегрируется интегратором 7. Временная диаграмма на выходе умножителя б приведена на рис. 7.31, е. Значения накопленных в интеграторах напряжений в момент времени $t = T$ вычитаются в блоке 4. Знак и значение разности дает информацию о различии между значением сообщения в передатчике (значением модулирующего напряжения) и оценкой этого значения в приемнике. Эта информация используется в генераторе опорного сигнала 9 для подстройки информационного параметра опорного сиг-

нала. С этой целью разность подается на управляющий вход генератора опорного сигнала 9. В следующем интервале наблюдения обработка смеси повторяется, и если произойдет изменение значения передаваемого сообщения, то изменится и его оценка за счет подстройки параметра опорного сигнала. Этот процесс называется *слежением* за параметром принимаемого сигнала. Значения оценок на выходе приемника (см. рис. 7.31, ж) с некоторой погрешностью повторяют значения передаваемого сообщения.

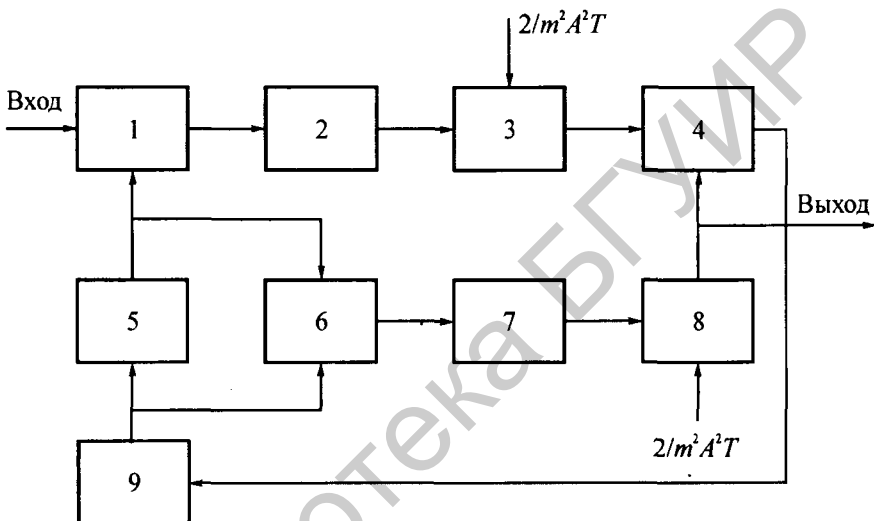


Рис. 7.30. Структурная схема слеящего корреляционного приемника: 1, 3, 6, 8 – умножители; 2, 7 – интеграторы; 4 – вычитающее устройство; 5 – вычислитель производной опорного сигнала; 9 – генератор опорного сигнала

Приемник, у которого происходит слежение за параметром принимаемого сигнала, называется *слеящим* приемником. Если в структуре приемника содержится коррелятор, то такой приемник называется *слеящим корреляционным приемником*. Слеящий корреляционный приемник, структура которого определяется из уравнения (7.65), является оптимальным приемником. Приемник, у которого вместо коррелятора используется согласованный фильтр с подстраиваемой структурой в зависимости от оценки значения сообщения, называется *приемником со слеящим согласованным фильтром*.

Приемник, приведенный на рис. 7.30, на выходе которого выделяется оценка выборок модулирующего напряжения (сообщения), в то же время является демодулятором (детектором) амплитудно-модулированного сигнала с большим уровнем несущей.

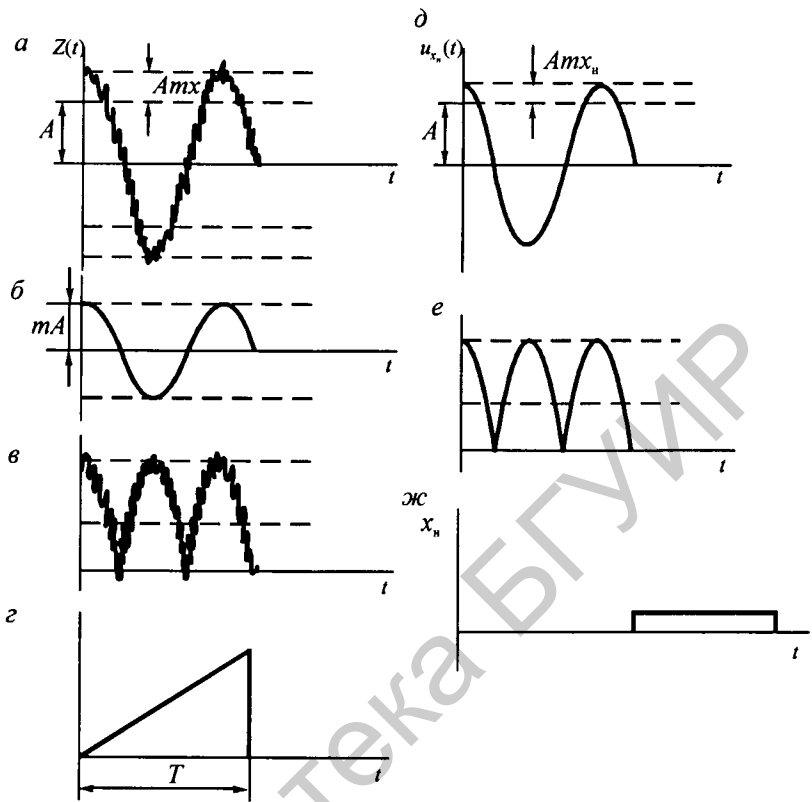


Рис. 7.31. Временные диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 7.30

Учитывая, что модулирующее напряжение в интервале $[0, T]$ постоянно, найдем выражения для смеси сигнала и шума, опорного сигнала и его производной:

$$z(t) = u_x(t) + N(t) = A(1 + mx) \cos \omega_0 t + N(t),$$

$$u_{x_n}(t) = A(1 + mx_n) \cos \omega_0 t, \quad \frac{du_{x_n}(t)}{dx_n} = mA \cos \omega_0 t.$$

Подставляя в уравнение (7.65) эти выражения, получим равенство:

$$\frac{A^2 m T}{2} (1 + mx) + \int_0^T N(t) A m \cos \omega_0 t dt - \frac{A^2 m T}{2} (1 + mx_n) = 0.$$

Умножим слагаемые равенства на выражение $2/(Am)^2 T$. В результате получим:

$$\left(\frac{1}{m} + x + \frac{2}{AmT} \int_0^T N(t) \cos \omega_0 t dt \right) - \left(\frac{1}{m} + x_n \right) = 0.$$

Выражение, стоящее в первых скобках, определяет напряжение на выходе умножителя 3 (см. рис. 7.30), а выражение, стоящее во вторых скобках, – на выходе умножителя 8. На вторых входах этих умножителей присутствуют одинаковые множители, равные $2/(Am)^2T$.

Напряжение на выходе умножителя 8 определяет оценку значения передаваемого сообщения.

Напряжение на выходе вычитающего устройства равно $x - x_n + \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{2}{AmT} \int_0^T N(t) \cos \omega_0 t dt$.

Устройство, преобразующее значение модулируемого параметра принимаемого сигнала в разностное напряжение или ток $x_n - x$, называется *дискриминатором*.

Структурная схема дискриминатора определяется производной от показателя функции правдоподобия:

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{2}{N_0} \int_0^T [Z(t) - u_{x_n}(t)] \left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x=x_n} dt.$$

Среднее значение разности

$$M(x_n - x) = M\{\varepsilon\} = \frac{2}{AmT} \int_0^T M\{N(t)\} \cos \omega_0 t dt = 0,$$

так как по условию среднее значение шума равно нулю.

Дисперсия разности, являющаяся мерой помехоустойчивости оптимального приемника,

$$\begin{aligned} \sigma^2 = M(x_n - x)^2 &= M \left[\left(\frac{2}{mAT} \right)^2 \int_0^T \int_0^T N(t) N(t') \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t' dt dt' \right] = \\ &= \frac{4}{(mAT)^2} \frac{N_0}{2} \int_0^T \cos \omega_0 t \left[\int_0^T \delta(t - t') \cos \omega_0 t' dt' \right] dt = \\ &= \frac{4}{(mAT)^2} \frac{N_0}{2} \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{N_0}{m^2 A^2 T} = \frac{N_0}{E} \frac{1}{2m^2} = \frac{1}{2h^2 m^2}, \end{aligned}$$

где $E = A^2 T / 2$ – энергия несущего колебания в интервале наблюдения смеси сигнала и шума, h – параметр обнаружения.

При вычислении дисперсии принято во внимание выражение для автокорреляционной функции нормального белого шума:

$$M[N(t)N(t')] = \frac{N_0}{2} \delta(t - t').$$

Дисперсия увеличивается с ростом параметра обнаружения и индекса амплитудной модуляции.

Анализ оптимального приемника проведен без учета времени, которое требуется для подстройки информационного параметра в генераторе сигнала 9. С учетом этого времени время анализа смеси сигнала и шума уменьшается, что приводит к уменьшению параметра обнаружения, следовательно, и к уменьшению помехоустойчивости.

Можно получить формулу, определяющую дисперсию не только для амплитудной, но и для других видов модуляции непрерывного сигнала. Перейдем к рассмотрению этой задачи.

Если значение модулируемого параметра x мало отличается от наиболее вероятного параметра x_n , то выражение для сигнала можно записать в виде двух слагаемых ряда Тейлора:

$$u_x(t) = u_{x_n}(t) + (x - x_n) \left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x_n},$$

где $\left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x_n}$ – значение производной в точке $x = x_n$.

Подставляя последнее выражение в (7.63) и учитывая условие (7.65), получим

$$\begin{aligned} w(\bar{y}/x) &= (1/\sqrt{2\pi}\sigma)^n \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_{x_n}(t) - (x - x_n) \left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x_n}]^2 dt \right\} = \\ &= [1/\sqrt{2\pi}\sigma]^n \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_{x_n}(t)]^2 dt \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2}{N_0} (x - x_n) \int_0^T [z(t) - u_{x_n}(t)] \left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x_n} dt \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} (x - x_n)^2 \int_0^T \left[\left. \frac{du_x(t)}{dx} \right|_{x_n} \right]^2 dt \right\} = c_1 c_2 e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}} = c e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c – независимые от аргумента x постоянные величины, причем последняя постоянная величина c определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}/x) dx = 1.$$

Функция правдоподобия является одномерной плотностью распределения вероятности и подчиняется нормальному закону. По этой плотности можно определить среднее значение оценки передаваемого сообщения и дисперсию этой оценки. Среднее значение равно наиболее вероятному значению

x_H , которое находится по максимуму одномерной плотности, а дисперсия определяется из равенства показателей экспоненциальных функций.

$$-\frac{1}{N_0}(x-x_H)^2 \int_0^T \left[\frac{du_x(t)}{dx} \Big|_{x_H} \right]^2 dt = -\frac{(x-x_H)^2}{2\sigma^2},$$

или

$$\sigma^2 = \frac{1}{2T} \cdot \frac{N_0}{\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{du_x(t)}{dx} \Big|_{x_H} \right]^2 dt}. \quad (7.66)$$

Первый множитель в полученном выражении определяет ширину полосы канала, а второй – спектральную плотность мощности шума, которая зависит от производной сигнала по модулируемому параметру.

В свою очередь эта производная определяет скорость изменения функции правдоподобия вблизи ее максимума. Чем меньше скорость, тем более «сплюснутой» оказывается эта плотность и, следовательно, дисперсия будет больше. Как видно из выражения (7.66), дисперсия определяется видом модуляции сигнала.

Расчеты по формуле (7.66) дают следующие результаты. Для амплитудно-модулированного сигнала с большим уровнем несущей

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{m^2 A^2 T} = \left(\frac{N_0}{E} \right) \frac{1}{2m^2}, \quad (7.67)$$

где E – энергия несущего колебания,

$$E = A^2 \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = A^2 T / 2.$$

Для частотно-модулированного сигнала с большим индексом модуляции

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{E} \cdot \frac{6}{\Omega^2 T^2}, \quad (7.68)$$

где Ω – частота модуляции; E – энергия сигнала.

Сравнивая формулы (7.68) и (7.67), находим, что при большом отношении сигнал/шум и $\Omega T \gg 1$ ЧМ сигнал обеспечивает более высокое качество воспроизведения сообщения, чем АМ сигнал. Но полоса канала связи, необходимая для передачи ЧМ сигнала, будет существенно больше.

7.9.3. Прием сигнала, модулированного сообщением

Рассмотрим более сложный случай, когда сообщение в интервале наблюдения $[0, T]$ не постоянно, а определяется реализацией некоторого случайного процесса.

Полагая, что первичный сигнал совпадает с передаваемым сообщением, представим его в виде ряда Фурье

$$b(t) = \sum_{i=m_1}^{m_2} \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \lambda_{2i-1} \sin \frac{2\pi i}{T} t + \sqrt{\frac{2}{T}} \lambda_{2i} \cos \frac{2\pi i}{T} t \right) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (7.69)$$

где λ_k – коэффициенты разложения, являющиеся случайными значениями спектральных составляющих первичного сигнала; i – целые числа ряда от числа m_1 до числа m_2 ; $\varphi_k(t)$ – базисные функции типа $\sin x$, $\cos x$.

Число спектральных составляющих равно

$$\nu = 2(m_2 - m_1 + 1) = 2F_c T,$$

где F_c – ширина спектра первичного сигнала.

Сигнал на выходе передатчика зависит от времени и модулируемого параметра, т. е. является функцией $u[t, b(t)]$. С учетом (7.69) выражение для сигнала может быть записано в виде функции времени и коэффициентов разложения, которые в интервале $[0, T]$ остаются постоянными и от интервала к интервалу меняются случайным образом:

$$\vec{u}(t, \vec{\lambda}), \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu).$$

Задача оптимального приемника в этом случае сводится к задаче совместной оценки значений этих коэффициентов. При отсутствии шума оценки совпадают с коэффициентами разложения, т. е. $\vec{\lambda}^* = \vec{\lambda}$. При приеме сигнала на фоне шума $\vec{\lambda}^* \neq \vec{\lambda}$. В результате оценка сообщения становится равной:

$$b^*(t) = \sum_{k=1}^{\nu} (\lambda_k + \Delta \lambda_k) \varphi_k(t) = b(t) + \varepsilon(t), \quad (7.70)$$

где $\varepsilon(t)$ – погрешность воспроизведения сообщения, $\Delta \lambda_k = \lambda_k^* - \lambda_k$.

Оптимальный приемник, как и в случае приема отдельного значения непрерывного сообщения, вычисляет апостериорную плотность распределения вероятности и на основе одного из критериев (например, критерия максимума) определяет наиболее вероятную реализацию. Апостериорная плотность с учетом предыдущих замечаний о принимаемом сигнале равна

$$w(\vec{x} / y) = cw(\vec{y} / \vec{x}) = c_1 e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u(t, \vec{\lambda})]^2 dt} = c_1 e^{-TR / N_0},$$

где c, c_1 – постоянные числа;

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - u(t, \vec{\lambda})]^2 dt.$$

Структура оптимального приемника и необходимые характеристики можно найти, решая систему уравнений:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_k} = \frac{2}{T} \int_0^T [z(t) - u(t, \vec{\lambda})] \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt = 0, \quad (7.71)$$

где $k = 1, 2, \dots, v$.

Если коэффициент разложения λ_k мало отличается от наиболее вероятного значения, то выражение для сигнала можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u(t, \vec{\lambda}) &= u(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_n}, \dots) + (\lambda_k - \lambda_{k_n}) \left. \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}} = \\ &= u(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_n}, \dots, \lambda_v) + \Delta \lambda_k \left. \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Подставляя (7.72) в (7.71) и полагая, что

$$\left. \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}} = \left. \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_{k_n}},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(N(t) - \Delta \lambda_k \left. \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_{k_n}} \right) \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt &= 0, \\ \Delta \lambda_k &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^T N(t) \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt}{\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right]^2 dt} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T N(t) D_k(t) dt}{\overline{D_k^2}}, \end{aligned}$$

где

$$D_k(t) = \frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k}, \quad \overline{D_k^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial u(t, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right]^2 dt.$$

Среднеквадратичное значение ошибки при воспроизведении некоторого k -го коэффициента разложения равно

$$M(\Delta \lambda_k^2) = \frac{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M\{N(t)N(t')\} D_k(t) D_k(t') dt dt'}{\overline{D_k^4}} = \frac{N_0}{2T \overline{D_k^2}},$$

где $M\{N(t)N(t')\} = \frac{N_0}{2} \delta(t-t')$ – корреляционная функция шума на выходе приемника.

Из последнего выражения определяется спектральная плотность мощности помехи на выходе оптимального приемника, с помощью которой можно определить *потенциальную верность передачи*

$$G(f) = N_0 / \overline{D}_k^2. \quad (7.73)$$

Эта формула найдена с учетом следующего. Второе слагаемое в формуле (7.70) на частоте $f_k = k/T$ равно сумме случайных квадратурных составляющих [см. формулу (7.69)]. Дисперсии этих составляющих одинаковы (см. раздел 4.5) и равны $N_0 / 2T\overline{D}_k^2$.

Следовательно, дисперсия помехи на частоте f_k равна $N_0 / T\overline{D}_k^2$. Поскольку ку соседние спектральные компоненты первичного сигнала отстоят друг от друга на величину, равную $1/T$, то спектральная плотность мощности помехи на выходе приемника определяется выражением (7.73). Оно находится делением дисперсии помехи на частотный интервал $1/T$.

7.9.4. Сравнительная оценка помехоустойчивости систем передачи непрерывных сообщений

Для сравнительной оценки систем связи с различными видами модуляции воспользуемся выражением (7.73).

Ненормированное сообщение $b(t)$ имеет среднюю мощность

$$P_b = \overline{b^2(t)} = b_{\max}^2 \overline{b_0^2(t)} = b_{\max}^2 / \Pi^2,$$

где $b_0(t) = b(t) / b_{\max}$, $\Pi = b_{\max} / \sqrt{P_b}$, $\overline{b_0^2(t)} = P_b / b_{\max}^2 = 1 / \Pi^2$.

Отношение максимального значения сообщения к корню квадратному от мощности этого сообщения называется *пик-фактором сообщения*.

Если сообщение нормировано, то $b_{\max} = 1$ и $P_b = 1 / \Pi^2$. Отношение мощностей сигнала и шума на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = P_b / P_{\text{ш}} = \frac{1}{\Pi^2 \int_0^{F_c} G(f) df}, \quad (7.74)$$

где $[0 - F_c]$ – ширина спектра непрерывного сообщения.

Сравним системы связи с различными видами модуляции. При амплитудной модуляции сигнал

$$u[t, b_0(t)] = A[1 + mb_0(t)] \cos \omega_0 t, \quad m \leq 1.$$

Найдем производную

$$D(t) = \frac{du[t, b_0(t)]}{db_0} = mA \cos \omega_0 t,$$

а также среднее значение от квадрата этой производной

$$\bar{D}^2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{du[t, b_0(t)]}{db_0} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T m^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2} m^2 A^2.$$

Спектральная плотность помехи на выходе приемника определяется с помощью формулы (7.73)

$$G(f) = 2N_0/m^2 A^2. \quad (7.75)$$

Подставляя (7.75) в (7.74), получим

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{m^2 A^2}{2\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.76)$$

Из формулы следует, что, помимо очевидного способа повышения верности передаваемого сообщения, при АМ имеется и другой способ, связанный с уменьшением пик-фактора передаваемого сообщения. Обычно это достигается сжатием динамического диапазона при передаче и обратного преобразования при приеме.

Выигрыш в помехоустойчивости определяется отношением

$$g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \frac{2m^2}{\Pi + m^2}, \quad (7.77)$$

так как мощность входного АМ сигнала равна $P_c = 0,5A^2[1 + m^2/\Pi^2]$, а мощность шума в полосе, равной $2F_c$, равна $2N_0F_c$. Обобщенный выигрыш

$$g' = g / \alpha = \frac{m^2}{m^2 + \Pi^2}, \quad (7.78)$$

так как $\alpha = 2$.

При амплитудной модуляции с подавленной несущей

$$u[t, b(t)] = Ab(t)\cos\omega_0 t,$$

а рассчитанные характеристики равны:

$$P_c = A^2 / 2\Pi^2, \quad \bar{D}^2 = 0,5A^2,$$

$$G(f) = 2N_0 / A^2.$$

Отношение сигнал/шум на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = A^2 / \Pi^2 2N_0 F_c. \quad (7.79)$$

Отношение сигнал/шум на входе приемника

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{A^2}{2\Pi^2 2N_0 F_c}. \quad (7.80)$$

Выигрыш

$$g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = 2, \quad (7.81)$$

а обобщенный выигрыш $g' = 1$.

При амплитудной модуляции с одной боковой полосой

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{вых}} &= \rho_{\text{вх}} \\ g &= g' = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

При этом полоса частот в 2 раза меньше, чем при АМ-ПН.

При фазовой модуляции сигнал

$$u[t, b(t)] = A \cos[\omega_0 t + m_\phi b_0(t)],$$

где m_ϕ – индекс фазовой модуляции.

Производная

$$\begin{aligned} \frac{du[t, b_0(t)]}{db_0} &= -A m_\phi \sin[\omega_0 t + m_\phi b_0(t)]; \\ \overline{D^2}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{du[t, b_0(t)]}{db_0} \right\}^2 dt = \frac{A^2}{2} m_\phi^2; \end{aligned}$$

спектральная плотность мощности шума на выходе

$$G(f) = \frac{2N_0}{m_\phi^2 A^2}.$$

Мощность шума на выходе приемника равна $\frac{2N_0 F_c}{m_\phi^2 A^2}$.

Мощность сигнала на выходе приемника равна $1/\Pi^2$.

Отношение сигнал/шум

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{A^2 m_\phi^2}{2\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.83)$$

Мощность сигнала на входе приемника

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T u^2[t, b(t)] dt = \frac{A^2}{2}.$$

Мощность шума на входе приемника

$$P_{\text{ш}} = N_0 F,$$

где F – ширина спектра сигнала.

Отношение сигнал/шум на входе приемника

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{A^2}{2N_0 F}. \quad (7.84)$$

Выигрыш

$$g_{\text{фм}} = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \alpha m_{\text{ф}}^2 / \Pi^2, \quad (7.85)$$

где $\alpha = F/F_c$, а обобщенный выигрыш

$$g'_{\text{фм}} = m_{\text{ф}}^2 / \Pi^2. \quad (7.86)$$

Из последних формул следует, что выигрыш увеличивается с увеличением отношения ширины полосы сигнала к ширине полосы сообщения, с увеличением индекса модуляции и уменьшением пик-фактора.

При частотной модуляции

$$u[t, b(t)] = A \cos[\omega_0 t + \Delta\omega \psi(t)], \quad (7.87)$$

где $\Delta\omega$ – девиация частоты, $\psi(t) = \int b_0(t) dt$.

Производная

$$\frac{du[t, b(t)]}{d\psi} = -A\Delta\omega \sin[\omega_0 t + \Delta\omega \psi(t)],$$

$$\overline{D}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{du[t, b(t)]}{d\psi} \right\}^2 dt = \frac{1}{2} \Delta\omega^2 A^2.$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе приемника

$$G(f) = \omega^2 G_{\psi}(f) = 2 \left(\frac{2\pi f}{\Delta\omega} \right)^2 \frac{N_0}{A^2}. \quad (7.88)$$

Последняя формула получена с учетом того, что сообщение $b_0(t)$, записанное под знаком интеграла в формуле (7.87), является стационарным случайным процессом и определяется производной от функции $\psi(t)$. Поэтому спектральная плотность $G(f)$ определяется через спектральную плотность производной этой функции.

Мощность шума на выходе приемника

$$\int_0^{F_c} G(f) df = \frac{2}{3} \frac{N_0}{A^2} \frac{F_c^3}{\Delta f^2}.$$

Выигрыш в помехоустойчивости

$$g_{\text{ЧМ}} = \frac{3}{\Pi^2} \left(\frac{\Delta f}{F_c} \right)^2 \cdot \frac{F}{F_c} = \frac{3}{\Pi^2} m_{\text{ЧМ}}^2 \cdot \alpha, \quad (7.89)$$

где $m_{\text{ЧМ}} = \Delta f / F_c$ – индекс частотной модуляции.

Обобщенный выигрыш

$$g'_{\text{ЧМ}} = \frac{3m_{\text{ЧМ}}^2}{\Pi^2}. \quad (7.90)$$

При ЧМ, так же как и при ФМ, выигрыш в помехоустойчивости увеличивается с увеличением отношения ширины спектра сигнала к ширине спектра сообщения, с увеличением индекса модуляции и с уменьшением пик-фактора сообщения. При ФМ и ЧМ индекс модуляции может быть существенно больше 1, тогда как при АМ индекс модуляции меньше 1. Поэтому при малом уровне помех ЧМ и ФМ сигналы имеют преимущество в помехоустойчивости по сравнению с АМ сигналами.

7.9.5. Порог помехоустойчивости в системах с широкополосными видами модуляции

Рассмотрим передачу сообщения по непрерывному каналу связи. Сообщение является непрерывной реализацией нормального случайного процесса с равномерным спектром в полосе частот $0 - F_c$, а в канале действует помеха в виде нормального шума с заданной спектральной плотностью. Мощности шума и сигнала в полосе $0 - F$ ограничены.

Передача сообщения по каналу связи с заданным отношением сигнал/шум P_b / P_ε возможна, согласно теореме Шеннона, в том случае, если производительность источника меньше пропускной способности канала:

$$H'_\varepsilon(b) < C,$$

где $H'_\varepsilon(b)$ – производительность источника; C – пропускная способность канала связи.

В идеальной системе связи $H'_\varepsilon(b) = C$, поэтому

$$F_c \log \frac{P_b}{P_\varepsilon} = F \log(1 + P_c / P_{\text{ш}}). \quad (7.91)$$

Принимая во внимание введенные ранее обозначения

$$F / F_c = \alpha; P_c / P_\varepsilon = \rho_{\text{ВЫХ}}; P_c / P_{\text{ш}} = \rho_{\text{ВХ}},$$

запишем формулу (7.91) в виде

$$\log \rho_{\text{ВЫХ}} = \alpha \log(1 + \rho_{\text{ВХ}}).$$

Из полученного равенства найдем

$$\rho_{\text{ВЫХ}} = (1 + \rho_{\text{ВХ}})^{\alpha}. \quad (7.92)$$

Для больших отношений сигнал/шум на входе $\rho_{\text{ВХ}} \gg 1$, следовательно

$$\rho_{\text{ВЫХ}} \cong \rho_{\text{ВХ}}^{\alpha}.$$

Выигрыш в идеальной системе связи (при условии $\rho_{\text{ВХ}} \gg 1$) равен

$$g = \frac{\rho_{\text{ВЫХ}}}{\rho_{\text{ВХ}}} = \rho_{\text{ВХ}}^{\alpha-1}, \quad (7.93)$$

а обобщенный выигрыш

$$g' = \frac{\rho_{\text{ВЫХ}}}{\rho_{\text{ВХ}}^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \rho_{\text{ВХ}}^{\alpha-1}. \quad (7.94)$$

График зависимости $\rho_{\text{ВЫХ}} = f(\rho_{\text{ВХ}})$, построенный по формуле (7.92) для заданного значения α , приведен на рис. 7.32 (кривая 1). Здесь же приведены аналогичные зависимости для оптимальных аналоговых систем связи с ФМ и ЧМ сигналами, рассчитанные по формулам (7.85) и (7.89) при том же значении α . Это прямые 3 и 2. Для системы с ФМ сигналом

$$\rho_{\text{ВЫХ}} = \rho_{\text{ВХ}} \frac{m_{\text{Ф}}^2 \alpha}{\Pi^2},$$

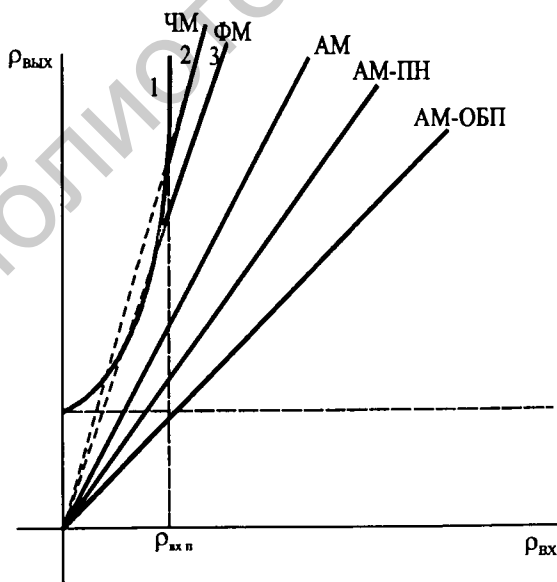


Рис. 7.32. Графики зависимостей отношения сигнал/шум на выходе от отношения сигнал/шум на входе для различных систем связи

а для системы с ЧМ сигналом

$$\rho_{\text{вых}} = \rho_{\text{вх}} \frac{3}{\Pi^2} m_{\text{ЧМ}}^2 \alpha.$$

Отметим, что непрерывный ФМ сигнал в радиовещании не используется по причине, изложенной в п. 3.6.1. Поэтому анализ помехоустойчивости аналоговых систем связи с непрерывными ФМ сигналами представляет только теоретический интерес.

Линии 2, 3 в некоторой области значений входного отношения сигнал/шум $[\rho_{\text{вхп}}, \infty]$ лежат ниже кривой 1. Это означает, что оптимальные системы связи с непрерывными ФМ и ЧМ сигналами проигрывают по помехоустойчивости идеальной по Шеннону системе связи. Например, в области $[0, \rho_{\text{вхп}}]$ линия 2 не может располагаться выше кривой 1, так как это означало бы, что система с ЧМ сигналом при малых входных отношениях сигнал/шум лучше идеальной по Шеннону системы связи, что противоречит и теории, и экспериментальным данным.

Поэтому, начиная с некоторого значения отношения $\rho_{\text{вхп}}$, которое называется *пороговым*, выходное отношение сигнал/шум резко уменьшается. Резко падает выигрыш, определяемый формулой (7.89), а система становится не пригодной для передачи информации из-за так называемых *аномальных ошибок*.

Пороговое значение является предельным и в реальных системах не достигается. Например, в системе с ЧМ сигналом он наступает при равенстве пиковых значений сигнала и помехи, что соответствует такому входному отношению, которое существенно больше порогового. Это означает, что имеется возможность совершенствования таких систем. Наиболее полно указанная возможность реализуется в системах, приемники которых строятся на основе теории оптимальной нелинейной фильтрации, основные понятия которой рассматриваются ниже. Снижение порога позволяет увеличить дальность связи при той же мощности передатчика, что актуально для спутниковых и космических систем.

На рис. 7.32 приведены также аналогичные зависимости, построенные по формулам (7.77), (7.81), (7.82), для АМ, АМ-ПН и АМ-ОБП сигналов. Эти прямые расположены ниже кривой для идеальной по Шеннону системы связи, поэтому помехоустойчивость оптимальных систем с этими видами модуляций хуже помехоустойчивости идеальной системы. В области больших отношений сигнал/шум система связи с ЧМ сигналом выигрывает по помехоустойчивости у систем с АМ сигналами, но, начиная с некоторого порогового уровня, выигрыш не реализуется. Хотя в системах связи с АМ-сигналами нет пороговых эффектов, но из-за малого отношения сигнал/шум эти системы также непригодны для передачи информации, как и системы с ЧМ сигналами.

7.10. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

7.10.1. Линейная фильтрация сигнала

Задача фильтрации сигнала из шумов ставится следующим образом. В интервале времени $[0, T]$ принимается смесь сигнала и шума $z(t) = f\{u[t, p_i(t)], N(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Сигнал является функцией времени и зависит от параметров $p_i(t)$, которые изменяются случайным образом. Один из них изменяется в соответствии с передаваемым сообщением $b(t)$. Шум может быть произвольным, сигнал и шум не обязательно образуют аддитивную смесь. Функция, определяющая сигнал, известна, так же как и некоторые статистические характеристики смеси.

В приемнике из смеси сигнала и шума нужно выделить реализацию сообщения $b(t)$ с наименьшей ошибкой. Этот процесс выделения называется *фильтрацией*. Для количественной оценки качества фильтрации используют заранее сформулированные критерии. Такими критериями могут быть: критерий минимума среднеквадратичной ошибки; критерий максимума апостериорной вероятности.

В результате решения задачи получают уравнения, определяющие структуру *оптимального фильтра*.

Эти уравнения найдены для следующих условий:

- 1) сигнал и шум являются стационарными, случайными процессами;
- 2) сигнал и шум взаимодействуют аддитивно;
- 3) сигнал, входящий в смесь, является линейной функцией сообщения, т. е. $u(t) = kb(t)$, где k – постоянный коэффициент. Фильтрация такого сигнала называется *линейной*;
- 4) сигнал, входящий в смесь, является нелинейной функцией сообщения, т. е. $u(t) = f[b(t)]$. Соответствующая этому сигналу фильтрация называется *нелинейной*.

Рассмотрим задачу оптимальной линейной фильтрации.

Пусть на вход линейного четырехполюсника с импульсной характеристикой $h(t)$ подается аддитивная смесь сигнала и помехи:

$$z(t) = u(t) + N(t).$$

Сигнал $u(t)$ и помеха $N(t)$ являются стационарными взаимно некоррелированными случайными процессами с известными спектральными плотностями. На выходе линейного четырехполюсника воспроизводится отклик $u^*(t)$ на входное колебание $z(t)$. Он является оценкой входного сигнала $u(t)$, который с точностью до постоянной величины совпадает с сообщением. Требуется найти линейный четырехполюсник

с такой импульсной характеристикой $h(t)$, которая минимизирует средний квадрат ошибки:

$$M[\varepsilon^2(t)] = M\{[u^*(t) - u(t)]^2\},$$

где среднее значение берется по ансамблю случайных реализаций.

Задача линейной фильтрации была независимо решена А. Н. Колмогоровым (1939 г.) и Н. Винером (1942 г.) и поэтому линейный фильтр, удовлетворяющий сформулированным выше условиям, называется *фильтром Колмогорова – Винера*.

Необходимым и достаточным условием оптимальной линейной фильтрации является условие

$$M[\varepsilon(t)z(t - \tau)] = 0. \quad (7.95)$$

для всех τ в заданной области интегрирования входной смеси сигнала и помехи $z(t)$.

Условие означает, что ошибка в оптимальном линейном фильтре и входной сигнал не являются коррелированными.

Докажем справедливость условия (7.95).

Пусть $h_1(t)$ – импульсная характеристика оптимального линейного фильтра, $h_2(t)$ – импульсная характеристика неоптимального фильтра, а отклики фильтров $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ определяются интегралом Дюамеля

$$u^*(t) = \int_{\gamma} z(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad (7.96)$$

где область интегрирования γ для физически реализуемого фильтра равна интервалу $[0, \infty]$. Для физически нереализуемого фильтра интервал равен $[-\infty, \infty]$.

Найдем среднеквадратичное значение разности

$$M\{[u(t) - u_2^*(t)]^2\} = M\{[u(t) - u_1^*(t) + u_1^*(t) - u_2^*(t)]^2\} = M\{[u(t) - u_1^*(t)]^2\} + M\{[u_1^*(t) - u_2^*(t)]^2\} + 2M\{[u(t) - u_1^*(t)][u_1^*(t) - u_2^*(t)]\}.$$

По условию (7.95) погрешность $\varepsilon(t)$ и смесь $Z(t)$ в оптимальном линейном фильтре статистически независимы.

Поэтому

$$M\{[u(t) - u_1^*(t)][u_1^*(t) - u_2^*(t)]\} = M\{\varepsilon(t) \int_{\gamma} z(t - \tau)[h_1(\tau) - h_2(\tau)]d\tau\} = \int_{\gamma} M\{\varepsilon(t)z(t - \tau)\}[h_1(\tau) - h_2(\tau)]d\tau = 0.$$

Следовательно,

$$M\{[u(t) - u_2^*(t)]^2\} = M[\varepsilon^2(t)] + M\left\{\int_{\gamma} z(t - \tau)[h_1(\tau) - h_2(\tau)]d\tau\right\}^2.$$

Из последнего выражения следует, что среднеквадратичная ошибка воспроизведения сообщения на выходе неоптимального фильтра больше, чем на выходе оптимального за счет неравенства их импульсных характеристик. Если эти характеристики равны, то ошибка на выходе неоптимального фильтра становится равной ошибке воспроизведения сообщения на выходе оптимального фильтра.

Условие (7.95) запишем в виде:

$$M\{[u(t) - u^*(t)]z(t - \tau)\} = 0$$

или с учетом (7.96) в виде:

$$\begin{aligned} M\{[u(t)z(t - \tau)]\} &= M\{u^*(t)z(t - \tau)\} = \int_{\gamma} M\{z(t - x)z(t - \tau)\}h(x)dx = \\ &= \int_{\gamma} B_z(\tau - x)h(x)dx = B_{uz}(\tau), \end{aligned}$$

где $B_z(\tau) = M\{z(t - x)z(t - \tau)\}$ – автокорреляционная функция смеси сигнала и помехи на входе фильтра; $B_{uz}(\tau)$ – взаимно корреляционная функция между сигналом $u(t)$ и смесью сигнала и помехи $Z(t)$.

Если сигнал $u(t)$ и помеха $N(t)$ являются не коррелированными, то последнее выражение можно записать в виде

$$B_{uz}(\tau) = \int_{\gamma} [B_u(\tau - x) + B_N(\tau - x)]h(x)dx, \quad (7.97)$$

где $B_u(\tau)$, $B_N(\tau)$ – автокорреляционные функции сигнала, шума.

Полученное уравнение называется уравнением Винера – Хопфа. Решив это уравнение, можно найти импульсную характеристику, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку. Уравнение Винера – Хопфа легко решается для нереализуемых фильтров, т. е. когда область интегрирования γ равна $[-\infty, \infty]$. В этом случае применяют преобразование Фурье к обеим частям уравнения (7.97) и получают результат в частотной области (см. преобразование свертки функций во временной области, приведенное в п. 3.2.2).

$$G_u(\omega) = [G_u(\omega) + G_N(\omega)]K(j\omega).$$

Из полученного уравнения находим выражение для коэффициента передачи оптимального линейного фильтра

$$K(j\omega) = \frac{G_u(\omega)}{G_u(\omega) + G_N(\omega)}. \quad (7.98)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Спектральная плотность мощности помехи $G_N(\omega) = 0$.

По формуле (7.98) определяем коэффициент передачи оптимального линейного фильтра

$$K(j\omega) = \frac{G_u(\omega)}{G_u(\omega)} = 1.$$

Если помеха отсутствует, то можно использовать фильтр, коэффициент передачи которого равен 1 на любой частоте в заданном частотном диапазоне.

2. Интенсивность помехи превышает сигнал так, что $G_N(\omega) \gg G_u(\omega)$.
Для этого случая

$$K(j\omega) = G_u(\omega)/G_N(\omega), \quad (7.99)$$

т. е. коэффициент передачи оптимального линейного фильтра определяется отношением спектральной плотности мощности сигнала к спектральной плотности мощности помехи. На тех частотах, где интенсивность спектральной плотности мощности помехи имеет наибольшее значение, коэффициент передачи имеет минимальное значение.

Линейные фильтры, характеристики которых приближаются к характеристикам оптимальных фильтров, находят достаточно широкое применение в системах электросвязи. К таким фильтрам относятся: фильтры нижних частот, полосовые фильтры и др., имеющие равномерный коэффициент передачи в заданной полосе частот. При малом уровне помех они передают сигнал без существенных искажений.

Результаты теории линейной фильтрации используются при построении широкополосного канала связи для защиты от сосредоточенных по спектру помех.

Например, при частотно-разнесенном приеме канал связи строится с учетом условия (7.99). Широкополосный канал в этом случае состоит из нескольких узкополосных каналов, по которым передается одна и та же информация. В случае поражения некоторых узкополосных каналов сосредоточенными помехами они отключаются от схемы выделения полезной информации. В результате коэффициент передачи широкополосного канала на пораженных помехами участках становится равным нулю, а на других (не пораженных помехами участках) сохраняется прежним. Это позволяет сохранить качество передачи информации в условиях действия интенсивных, сосредоточенных по спектру помех.

Ошибка в воспроизведении сообщения определяется видом коэффициента передачи линейного фильтра. Доказывается, что для оптимального фильтра с коэффициентом передачи (7.98)

$$M[\varepsilon^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_u(\omega)G_N(\omega)}{G_u(\omega) + G_N(\omega)} d\omega.$$

Среднеквадратичная ошибка равна нулю, если $G_N(\omega) = 0$.

Если $G_N(\omega) \gg G_u(\omega)$,

то

$$M[\varepsilon^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_u(\omega) d\omega,$$

т. е. определяется спектральной плотностью мощности сигнала.

7.10.2. Понятие о нелинейной фильтрации

Если сигнал определяется нелинейной функцией сообщения (например, является фазомодулированным или частотно-модулированным), то его фильтрация является *нелинейной*.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда сигнал зависит от времени и параметра, изменяющегося в соответствии с сообщением.

Пусть принимаемое колебание является аддитивной суммой сигнала, зависящего от времени и сообщения, и стационарного белого шума $N(t)$:

$$z(t) = u[t, b(t)] + N(t).$$

Среднее значение шума $M[N(t)] = 0$, а корреляционная функция

$$M\{N(t_1)N(t_2)\} = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1),$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности этого шума.

Задачей оптимальной нелинейной фильтрации является нахождение устройства, которое с наибольшей точностью воспроизводит бы сообщение $b(t)$ при заданных выше условиях.

Устройство, вычисляющее апостериорную плотность вероятности и принимающее решение на основании критерия максимума этой плотности, называется оптимальным.

Математическое выражение для апостериорной плотности найдено для двух случаев:

1) когда в качестве математической модели сообщения используется марковский процесс [26];

2) когда в качестве математической модели сообщения используется нормальный случайный процесс [25].

Приведем решение задачи нелинейной фильтрации с использованием математической модели сообщения в виде марковского процесса. В этой модели используется случайный процесс на выходе линейной интегрирующей RC цепи, являющийся откликом на входной стационарный, белый шум $n_1(t)$.

Полагают, что сообщение является одной из реализаций этого процесса и определяется следующим дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{db(t)}{dt} = -\alpha b(t) + n_1(t), \quad (7.100)$$

где $\alpha = 1/RC$ – постоянная времени интегрирующей цепи.

Дифференциальное уравнение определяет функцию корреляции

$$B_b(\tau) = \frac{N_1}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

и спектральную плотность мощности

$$G_b(\omega) = \frac{2\alpha P_b}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где N_1 – односторонняя спектральная плотность белого шума на входе линейной цепи; $P_b = N_1/(4\alpha)$ – мощность сообщения.

Случайный процесс на выходе интегрирующей цепи является марковским и в то же время нормальным процессом. Аппроксимация реального сообщения марковским процессом позволяет не только достаточно точно описать его, но и упростить решение поставленной задачи.

Решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации является сложным. На первом этапе находят дифференциальное уравнение в частных производных, которое определяет финальную апостериорную плотность вероятности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}(t, b)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial b^2} [K_2(b) \tilde{W}(t, b)] - \frac{\partial}{\partial b} [K_1(b) \tilde{W}(t, b)] + [F(t, b) - \\ & - \langle F(t, b) \rangle] \tilde{W}(t, b), \end{aligned} \quad (7.101)$$

где $\tilde{W}(t, b)$ – апостериорная плотность вероятности; $K_1(b)$, $K_2(b)$ – коэффициенты, которые находятся из дифференциального уравнения (7.100).

Функция

$$F(t, b) = -\frac{1}{N_0} [z(t) - u(t, b)]^2,$$

$$a \langle F(t, b) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, b) \tilde{W}(t, b) db.$$

Применительно к неэнергетическим параметрам сигнала (такими параметрами являются фаза и частота)

$$F(t, b) = \frac{2}{N_0} z(t)u(t, b).$$

Апостериорная плотность вероятности $\tilde{W}(t, b)$ изменяется во времени. Если интервал наблюдения $[0, T]$ смеси сигнала и шума $z(t)$ разбить на m сравнительно малые интервалы длиной $\Delta = T/m$ и наблюдать за изменением $\tilde{W}(t, b)$, то в конце каждого интервала апостериорная плотность будет принимать новую форму. Значение функции $\tilde{W}(t, b)$ в конце последнего интервала, полученное в результате обработки реализации смеси сигнала и шума, называется *финальной апостериорной плотностью вероятности*.

Оптимальное устройство фильтрации сообщения $b(t)$ должно сформировать $\tilde{W}(t, b)$ в соответствии с уравнением (7.101) и определить значение $b^*(t)$, соответствующее максимуму апостериорной плотности вероятности.

Решить уравнение (7.101) удастся при условии, что апостериорная плотность распределения вероятности определяется нормальным законом

$$\tilde{W}(t, b) = \frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[b(t) - b^*(t)]^2}{2\sigma_b^2} \right\},$$

где $b^*(t)$ – среднее значение, определяющее оптимальную оценку передаваемого сообщения $b(t)$; σ_b^2 – дисперсия нормального распределения.

Это позволяет свести решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b^*(t) &= K_1(t, b^*) + \sigma_b^2(t) \frac{\partial F(t, b^*)}{\partial b^*}; \\ \frac{d}{dt} \sigma_b^2(t) &= 2\sigma_b^2(t) \frac{\partial K_1(t, b^*)}{\partial b^*} + \sigma_b^4(t) \frac{\partial^2 F(t, b^*)}{\partial b^{*2}} + K_2(t, b^*). \end{aligned} \quad (7.102)$$

Для марковского нормального процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (7.100),

$$\left. \begin{aligned} K_1(t, b^*) &= -\alpha b(t), \\ K_2(t, b^*) &= \frac{1}{2} N_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.103)$$

С учетом уравнений (7.103) уравнения (7.102) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{db^*(t)}{dt} &= -\alpha b^*(t) + \sigma_b^2(t) \frac{\partial F(t, b^*)}{\partial b^*}, \\ \frac{d\sigma_b^2(t)}{dt} &= -2\alpha \sigma_b^2(t) + \frac{1}{2} N_1 + \sigma_b^4(t) \frac{\partial^2 F(t, b^*)}{\partial b^{*2}}. \end{aligned}$$

Первое уравнение определяет структуру оптимального устройства, а второе – дисперсию ошибки, которая будет иметь место при оптимальной нелинейной фильтрации.

Пример 7.8. Требуется синтезировать оптимальный демодулятор для приема ФМ сигнала:

$$u(t, b) = U_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t)], \quad \theta(t) = \beta b(t) + \varphi(t),$$

где U_0 , ω_0 – известные значения амплитуды и несущей частоты сигнала; β – индекс фазовой модуляции; $\varphi(t)$ – процесс, описывающий флуктуации начальной фазы.

Решение. Полагаем, что сообщение является марковским нормальным процессом.

Определяем функцию

$$F(t, b^*) = \frac{2}{N_0} z(t) u(t, b^*) = \frac{2U_0}{N_0} z(t) \cos[\omega_0 t + \theta^*(t)].$$

Полагая, что флуктуации начальной фазы отсутствуют, т. е. $\varphi(t) = \varphi_0$, запишем уравнение

$$\frac{db^*}{dt} = -\alpha b^*(t) - \frac{2\sigma_B^2(t)z(t)\beta U_0}{N_0} \sin[\omega_0 t + \theta^*(t)],$$

где $\theta^*(t) = \beta b^*(t) + \varphi_0$.

Обозначим

$$-\frac{2\sigma_B^2(t)\beta U_0 z(t)}{\alpha \cdot N_0} \sin[\omega_0 t + \theta^*(t)] = y(t).$$

Тогда

$$y(t) = b^*(t) + \frac{1}{\alpha} \frac{db^*}{dt}. \quad (7.104)$$

Структурная схема, моделирующая уравнение (7.104), приведена на рис. 7.33.

Устройство оптимальной оценки содержит: перестраиваемый генератор, фаза которого изменяется с помощью управляемого элемента; умножитель и фильтр, выполненный на R, C элементах.

Схема является схемой автоподстройки фазы, в которой реализуется следящий прием сигнала. С изменением сообщения (фазы принимаемого сигнала) изменяется и его оценка, а это в свою очередь приводит и к изменению фазы опорного сигнала. Оценка сообщения формируется следующим образом. Входная смесь умножается на опорный, подстраиваемый по фазе сигнал, а результат умножения интегрируется RC цепью.

Операция вычисления взаимно корреляционной функции с помощью умножителя и интегратора при следящем приеме является основной операцией над смесью сигнала и шума. Принцип следящего приема используется и при приеме ЧМ сигнала. Это позволяет снизить уровень принимаемого сигнала и повысить помехоустойчивость.

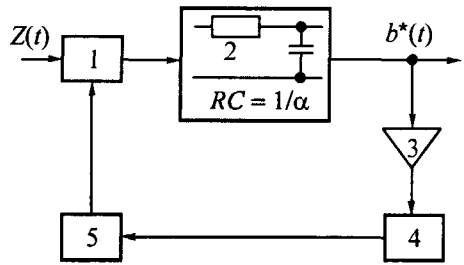


Рис. 7.33. Структурная схема оптимального демодулятора ФМ сигнала:

1 – умножитель; 2 – ФНЧ; 3 – усилитель;
4 – управляемый элемент; 5 – перестраиваемый генератор

7.11. ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

7.11.1. Общие сведения о цифровых методах передачи.

Помехоустойчивость цифровых методов передачи непрерывных сообщений

Цифровые методы передачи непрерывных сообщений включают: методы формирования и обработки сигналов на основе их отображения совокупностью чисел; методы передачи этой совокупности по каналу связи.

Теоретические основы цифровых методов формирования сигналов рассмотрены в главе 3. Важное место в этой теории занимает метод представления сигналов обобщенным рядом Фурье, который устанавливает связь между сигналом и спектральными коэффициентами. Один и тот же сигнал, представленный разными базисными функциями, может иметь разные спектральные коэффициенты. В частном случае, когда в качестве базисных функций используются функции типа $(\sin x)/x$, спектральными коэффициентами являются выборочные значения сигнала, а сигнал записывается в виде ряда Котельникова. Ранее показано, что выборочные значения первичного сигнала преобразуются в двоичные числа в результате квантования выборок и затем кодирования соответствующих номеров уровней квантования. Таким образом, первичный сигнал, непосредственно связанный с непрерывным сообщением, отображается множеством двоичных чисел, над которыми производятся дальнейшие преобразования. Примерами таких преобразований являются:

- а) преобразования, связанные главным образом с модуляцией (глава 3);
- б) преобразования с целью эффективного кодирования (глава 6);

в) преобразования с целью помехоустойчивого кодирования (глава 6).
В приемнике производятся обратные преобразования.

Формирование и обработка сигналов на основе их отображения совокупностью чисел называется соответственно *цифровой генерацией и обработкой*.

Передачу двоичных чисел по каналу связи можно вести или непосредственно, без каких-либо существенных преобразований, или посредством дискретной модуляции.

Цифровые методы передачи обладают по сравнению с аналоговыми методами передачи более высокой помехоустойчивостью. Это наиболее полно проявляется при *многократной ретрансляции сигналов*.

Принцип ретрансляции сигналов, нашедший применение в кабельных и радиорелейных линиях, поясняется рис. 7.34 (на примере радиорелейной линии).

В аналоговых линиях передачи сигналы передаются по цепи ретрансляторов, содержащих приемно-передающее оборудование. С его помощью ослабленные по мощности сигналы принимаются и усиливаются, а затем передаются к следующему ретранслятору. При передаче возникают искажения, обусловленные влиянием линии на передаваемый сигнал и присутствием в ней различных помех. Мощность помехи на входе приемника конечной станции равна сумме мощностей подобных помех на входах всех приемников, установленных на линии. Пусть число ретрансляционных участков определяемое из условия обеспечения надежной связи, равно m . В этом случае отношение сигнал/помеха на входе последнего приемника будет в m раз меньше отношения на входе первого. Сравнительно низкая помехоустойчивость, большая потребляемая мощность от источников питания, большие габариты оборудования привели к замене аналоговых линий цифровыми.

В цифровых системах (при том же числе ретрансляторов) более высокая верность передачи обеспечивается за счет *регенерации импульсов*. При этом их форма, искаженная средой распространения и аппаратурой канала

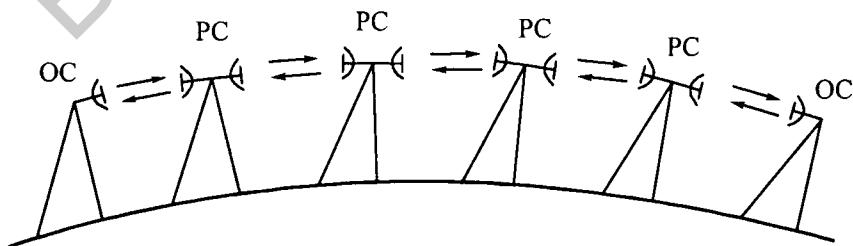


Рис. 7.34. Ретрансляция сигналов в радиорелейной линии связи:
РС – ретрансляционная станция; ОС – оконечная станция

связи, восстанавливается, а помехи накапливаются в гораздо меньшей степени. Полностью устранить влияние помех при регенерации сигналов в принципе невозможно. Это объясняется тем, что даже при весьма малом уровне помех существует не равная нулю вероятность ошибочного приема символов. При наличии ошибки вместо символа 0 на выходе регенератора будет формироваться 1, а вместо символа 1 – 0.

Для уменьшения вероятности ошибки необходимо увеличить мощность передаваемого сигнала. С ростом числа ретрансляторов требуемая мощность также увеличивается. Однако по сравнению с переприемом сигналов в аналоговой линии верность передачи в цифровой линии во много раз больше.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример 7.9. В канале с аддитивным гауссовым шумом и при некогерентном приеме ортогональных сигналов требуется обеспечить вероятность ошибки $p < 10^{-5}$:

- 1) в цифровой линии без регенерации сигналов;
- 2) в цифровой линии с регенерацией сигналов;
- 3) в аналоговой линии с регенерацией сигналов.

Все линии имеют одинаковую протяженность, а линии 2, 3 содержат $m = 1000$ ретрансляторов.

Решение. В цифровой системе без регенерации сигналов при заданной вероятности $p < 10^{-5}$ требуемое отношение h^2 определяется формулой (7.53):

$$h^2 = E/N_0 = -2\ln(2p) = 21,64.$$

В цифровой линии передачи с регенерацией сигналов и использованием $m + 1$ участков регенерации на каждом из них нужно обеспечить вероятность ошибки в $m + 1$ раз меньшую, равную 10^{-8} . Предполагается, что ошибки при первой, второй и т. д. регенерации сигнала – независимы. Поэтому общая вероятность ошибки равна сумме вероятностей ошибок, возникающих в первом, втором и т. д. регенераторах.

Вероятности ошибки $p = 10^{-8}$ соответствует отношение $h^2 \cong 35,34$. Следовательно, мощность сигнала в цифровой линии с регенерацией сигнала в $35,45/21,64 = 1,64$ раза больше той мощности, которая необходима в цифровой системе без регенерации.

В аналоговой линии передачи с ретрансляцией сигналов на выходе первого ретранслятора сумма мощностей сигнала и помехи равна $P_c + P_{ш}$. Эта суммарная мощность при прохождении смеси сигнала и помехи по линии связи между первым и вторым ретрансляторами уменьшается в несколько раз.

Для компенсации потерь сигнала его необходимо усилить в это же число раз. При усилении к имеющейся помехе будет добавляться помеха с такой же мощностью.

Поэтому сумма мощностей сигнала и помехи на выходе второго ретранслятора будет равна $P_c + 2P_{ш}$. Продолжив анализ, убеждаемся в том, что на выходе m -го ретранслятора сумма мощностей сигнала и помехи равна $P_c + mP_{ш}$. В аналоговой системе с ретрансляцией сигналов отношение сигнал-помеха ухудшается в $\rho_{вх}/\rho_{вых}$ раз, где $\rho_{вх} = P_c/(m+1)P_{ш}$, $\rho_{вых} = P_c/P_{ш}$.

Для данного примера ухудшение отношения сигнал-помеха в $m+1 \cong 1000$ раз.

7.11.2. Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом

Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом приведена на рис. 7.35.

Для согласования непрерывного источника с дискретным каналом связи на передающей стороне введен аналого-цифровой преобразователь (АЦП) сигнала, а для согласования дискретного канала связи с получателем сообщения на приемной стороне введен цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП).

Преобразование непрерывного сообщения в двоичный код называется импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ). Основы ИКМ рассмотрены в главе 3.

Сигнал с выхода АЦП поступает в передатчик. В зависимости от вида линии связи этот сигнал соответствующим образом преобразуется. Методы преобразований двоичных кодовых комбинаций в дискретные сигналы (АМ, ФМ, ОФМ, ЧМ) рассмотрены в главе 3.

В приемнике двоичные кодовые комбинации после демодуляции и регенерации поступают на ЦАП, где преобразуются в значения амплитуд импульсов, которые затем пропускаются через фильтр нижних частот для получения непрерывного сообщения. Теория дискретизации, квантования, а также восстановления первичного сигнала по его выборкам рассматривалась в главе 2 (раздел 2.7), а также в главе 3 (п.п. 3.8.3, 3.9.5).

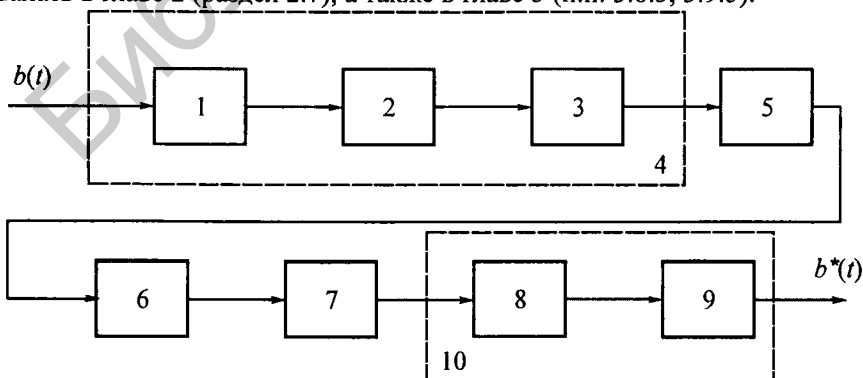


Рис. 7.35. Структурная схема цифровой системы передачи непрерывных сообщений: 1 – дискретизатор; 2 – квантователь; 3 – кодер; 4 – АЦП; 5 – передатчик; 6 – линия связи; 7 – приемник; 8 – декодер; 9 – ФНЧ; 10 – ЦАП

7.11.3. Мощность шума квантования

Под шумом квантования понимают совокупность разностей

$$\varepsilon = \sum_k \Delta_k = \sum_k [b(k\Delta t) - b_d(k\Delta t)], \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

между отсчетными значениями первичного сигнала (сообщения) и ближайшими к этим значениям уровнями квантования. При равномерном квантовании, которое наиболее распространено на практике, максимальное значение шума не превосходит половины интервала квантования, т. е.

$$\varepsilon_{\max} \leq 0,5\Delta b.$$

Если полный размах непрерывного первичного сигнала $b(t)$ равен $2b_{\max}$, то число уровней квантования

$$L = \frac{2b_{\max}}{\Delta b}. \quad (7.105)$$

Принято считать, что шум квантования распределен по равномерному закону в интервале $-0,5\Delta b, +0,5\Delta b$. Средняя мощность шума квантования

$$P_\varepsilon = M(\Delta_k^2) = \frac{1}{\Delta b} \int_{-\Delta b/2}^{\Delta b/2} x^2 dx = \frac{\Delta b^2}{12}. \quad (7.106)$$

Как показано выше (п. 7.9.4), средняя мощность ненормированного первичного сигнала (сообщения)

$$P_b = b_{\max}^2 / \Pi^2,$$

где Π – пик-фактор сообщения.

Отношение сигнал/шум квантования

$$\frac{P_b}{P_\varepsilon} = \frac{b_{\max}^2 12}{\Pi^2 (\Delta b)^2} \cong \frac{3L^2}{\Pi^2} = \frac{3 \cdot 2^{2n}}{\Pi^2}.$$

Это отношение зависит от числа уровней L квантования и от связанной с этим числом длины n двоичной кодовой комбинации. Выбором числа уровней квантования (числа разрядов n двоичного кода) можно снизить влияние шума квантования на верность передачи до минимума. Однако с увеличением числа разрядов увеличивается сложность ЦАП и АЦП. Увеличивается также и ширина спектра двоичного сигнала. Шум квантования можно уменьшить, применяя неравномерное квантование. Интервал квантования при этом увеличивается с ростом уровня входного сигнала и, если в непрерывном сообщении большие уровни встречаются реже, чем малые, то при усреднении дисперсия ошибки уменьшается.

7.11.4. Влияние помех на качество передачи сообщений

При приеме двоичные слова преобразуются в цифро-аналоговом преобразователе в короткие импульсы, которые затем фильтруются фильтром нижних частот. Значение амплитуды k -го импульса определяет оценку уровня квантования в k -ом интервале дискретизации:

$$b_d^*(k\Delta t) = (\Delta b) \sum_{i=1}^n \alpha_i^* 2^{i-1}, \quad (7.107)$$

где Δb – интервал квантования;

$\alpha_i^* = \{0, 1\}$ – оценка символа двоичного числа.

Из приведенной формулы следует, что оценка уровня квантования связана с переходами символов (букв) в двоичном канале и определяется качеством воспроизведения (оценки) этих символов.

Погрешность воспроизведения уровня квантования

$$\gamma_k = b_d^*(k\Delta t) - b_d(k\Delta t)$$

определяет шумовую составляющую на выходе канала. С учетом (7.107) эта погрешность

$$\gamma_k = (\Delta b) \sum_{i=1}^n (\alpha_i^* - \alpha_i) 2^{i-1} = (\Delta b) \sum_{i=1}^n \beta_i 2^{i-1},$$

где $\beta_i = \alpha_i^* - \alpha_i$, $\alpha_i = \{0, 1\}$ – символ передаваемого двоичного слова,

$\alpha_i^* = \{0, 1\}$ – оценка этого символа.

Возможные значения случайной величины $\beta_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1

$\alpha_i^* \setminus \alpha_i$	0	1
0	0	-1
1	1	0

Записанные по диагонали нулевые значения разности принятого и переданного символов соответствуют их безошибочному приему. Остальные значения разности, равные $-1, 1$ соответствуют приему символов с ошибкой.

Из таблицы следует, что событие, заключающееся в появлении разности $\beta_i = -1$, определяется совместным появлением событий $\alpha_i = 1, \alpha_i^* = 0$ с вероятностью $P(1)P(0/1)$, а событие, заключающееся в появлении разности $\beta_i = 1$ определяется совместным появлением событий $\alpha_i = 0, \alpha_i^* = 1$ с вероятностью $P(0)P(1/0)$.

Сумма этих вероятностей определяет вероятность ошибки при передаче двоичного слова по двоичному симметричному каналу:

$$P_{\text{ош}} = P(0) P(1/0) + P(1) P(1/0),$$

где $P(0)$, $P(1)$ – априорные вероятности передачи символов 0 и 1 соответственно; $P(1/0)$, $P(0/1)$ – переходные вероятности.

Если считать, что $P(0) = P(1) = 0,5$, то для двоичного симметричного канала

$$P_{\text{ош}} = 0,5P(1/0) + 0,5P(0/1) = P(1/0) = p.$$

Математическое ожидание и дисперсия разности β_i соответственно равны:

$$M(\beta_i) = (-1)P(0/1)P(1) + 1P(1/0)P(0) = -1 \cdot p \cdot 0,5 + 1 \cdot p \cdot 0,5 = 0,$$

$$M(\beta_i^2) = (-1)^2 P(0/1)P(1) + (1)^2 P(1/0)P(0) = p \cdot 0,5 + p \cdot 0,5 = p.$$

Среднее значение шумовой составляющей при воспроизведении уровня (номера) квантования

$$M(\gamma_k) = (\Delta b) \sum_{i=1}^n M(\beta_i) 2^{i-1} = 0.$$

Дисперсия шумовой составляющей при воспроизведении уровня

$$M(\gamma_k^2) = (\Delta b)^2 M \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i 2^{i-1} \right\}^2 = p(\Delta b)^2 \sum_{i=1}^n 2^{2(i-1)}. \quad (7.108)$$

Последняя формула получена при условии, что ошибки приема различных символов независимы.

Дисперсия определяется вероятностью ошибки при приеме символов и тем больше, чем больше эта вероятность.

7.11.5. Влияние квантования и помех на качество передачи сообщений

На качество передачи непрерывного сообщения цифровым методом влияет не только присутствующая в двоичном канале помеха, но и операция квантования в передатчике. Определим выражение среднеквадратичной погрешности воспроизведения сообщения, учитывающее не только помеху, но и операцию квантования.

Полагая, что первичный сигнал $b(t)$ является сигналом с ограниченным спектром, запишем выражение для среднеквадратичной погрешности с учетом формулы (2.57):

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)] \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right\}^2 dt,$$

где T – интервал времени, в течение которого передается сигнал; F_B – верхняя частота спектра этого сигнала; n – число отсчетных значений сигнала в интервале времени T , причем $n = T/\Delta t = 2F_B T$.

Производя преобразования подынтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2 \times \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right]^2 dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)][b^*(l\Delta t) - b(l\Delta t)] \times \\ & \times \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \frac{\sin 2\pi F_B(t - l\Delta t)}{2\pi F_B(t - l\Delta t)} dt. \end{aligned}$$

С учетом свойств базисных функций (см. раздел 2.7) полученное выражение можно записать в виде:

$$\bar{\varepsilon}^2 \frac{1}{2F_B T} \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2. \quad (7.109)$$

Из-за помех выборочные значения $b^*(k\Delta t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ отличаются от соответствующих уровней квантования $b_d(k\Delta t)$ на величину γ_k , т. е.

$$b^*(k\Delta t) = b_d(k\Delta t) + \gamma_k. \quad (7.110)$$

Из-за операции квантования выборочное значение первичного сигнала отличается от уровня квантования на величину погрешности Δ_k :

$$b(k\Delta t) = b_d(k\Delta t) + \Delta_k. \quad (7.111)$$

Подставляя (7.110) и (7.111) в (7.109) и учитывая, что погрешности, возникающие в дискретном канале из-за присутствия помех и квантования, статистически независимы, получим

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\gamma_k - \Delta_k)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = M\{\gamma_k^2\} + M\{\Delta_k^2\}. \quad (7.112)$$

С учетом формул (7.106) и (7.108) запишем окончательное выражение для среднеквадратичного отклонения

$$\bar{\varepsilon}^2 = p(\Delta b)^2 \sum_{i=1}^n 2^{2(i-1)} + \frac{(\Delta b)^2}{12}. \quad (7.113)$$

При равномерном квантовании верность передачи определяется интервалом квантования Δb , вероятностью ошибки p и числом разрядов n двоичного кодового слова.

Контрольные вопросы

1. Какое приемное устройство называют оптимальным?
2. Каким алгоритмом определяется структура оптимального приемника сигналов, известных точно?
3. Какую импульсную характеристику и коэффициент передачи имеет линейный фильтр, согласованный при белом шуме с сигналом $u(t)$?
4. Как записать алгоритм оптимального некогерентного приема дискретных сообщений при неопределенной фазе сигнала?
5. Что понимают под потенциальной помехоустойчивостью системы связи? Какими формулами выражается потенциальная помехоустойчивость при приеме двоичных АМ, ФМ и ЧМ сигналов?
6. Какие способы борьбы с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами Вы знаете?
7. Как количественно оценивается помехоустойчивость при приеме непрерывных сообщений?
8. Что такое выигрыш и обобщенный выигрыш? Найдите их для АМ, АМ-ПН, АМ-ОБП, ФМ, ЧМ.
9. Чем объяснить присутствие порогового эффекта в широкополосных системах с ФМ и ЧМ? Почему пороговый эффект отсутствует в системах с АМ, АМ-ПН?
10. В чем отличие между оптимальной линейной и нелинейной фильтрацией?
11. Какие достоинства и недостатки цифровых методов передачи непрерывных сообщений Вы знаете?
12. Как оценивается помехоустойчивость ИКМ?

8. ПРИНЦИПЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СВЯЗИ

8.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Система связи является многоканальной, если она обеспечивает передачу нескольких сообщений по одной общей линии связи. Многоканальная передача сообщений позволяет приблизить скорость передачи информации к пропускной способности линии связи. Очевидно, что суммарная производительность нескольких независимых источников должна быть меньше пропускной способности линии, т. е.

$$\sum_{k=1}^N H'_k \leq C, \quad (8.1)$$

где C – пропускная способность; H'_k – производительность k -го источника; N – число источников.

На рис. 8.1 приведена укрупненная структурная схема многоканальной системы связи. В этой схеме *первичные сигналы* $a_1(t)$, $a_2(t)$, ..., $a_N(t)$, обычно имеющие одинаковые спектры, преобразуются в *групповой сигнал*

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t),$$

где $u_i(t)$ – *канальные сигналы*, однозначно связанные с первичными сигналами; N – число первичных сигналов.

Ширина спектра группового сигнала по сравнению с шириной спектра первичных сигналов увеличивается не менее чем в N раз. Расширение ширины спектра нежелательно главным образом по двум причинам: из-за ограниченности частотного диапазона линии связи; из-за возрастания сложности оборудования, следовательно, и его стоимости. Но увеличение ширины спектра является неизбежной платой за возможность разделения канальных сигналов.

В передатчике групповой сигнал преобразуется в линейный сигнал $u_n(t)$ с целью согласования группового сигнала с параметрами линии связи.

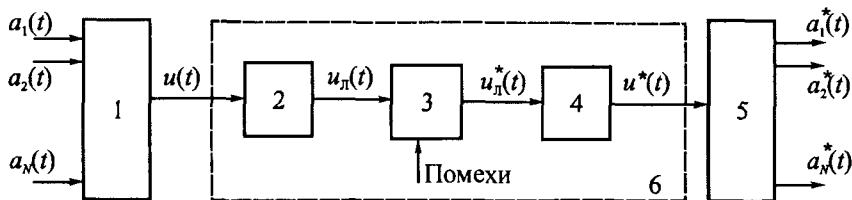


Рис. 8.1. Укрупненная структурная схема многоканальной системы связи:
 1 – формирователь группового сигнала; 2 – передатчик; 3 – линия связи; 4 – приемник;
 5 – селектор каналовных сигналов; 6 – групповой сигнал

В приемнике линейный сигнал $u_n^*(t)$ преобразуется в групповой сигнал $u^*(t)$. В селекторе каналовных сигналов, который является многоканальным, из группового сигнала выделяются каналные сигналы $u_i^*(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, которые затем преобразуются в первичные сигналы $a_i^*(t)$.

Работа k -го канального приемника определяется линейным оператором

$$L_k[u(t)] = L_k\left[\sum_{i=1}^N u_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N L_k[u_i(t)]. \quad (8.2)$$

Для разделения сигналов нужно выполнить условия:

$$L_k[u_i(t)] = \begin{cases} u_k(t), & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (8.3)$$

Условия выполняются тогда, когда каналные сигналы являются линейно-независимыми. В частном случае каналные сигналы должны быть ортогональными. При выполнении условий (8.3) идеальное k -е приемное устройство реагирует только на сигнал $u_k(t)$ и не откликается на остальные каналные сигналы, т. е. обладает свойством избирательности.

8.2. МЕТОДЫ ЧАСТОТНОГО, ВРЕМЕННОГО И ФАЗОВОГО РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

8.2.1. Частотный метод разделения сигналов

В системе связи с частотным разделением сигналов (рис. 8.2) первичные сигналы $a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$ с помощью модуляторов и полосовых фильтров преобразуются в каналные сигналы $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, спектры которых не перекрываются.

Это преобразование обеспечивается выбором:

– вида модуляции, при которой ширина спектра канального сигнала минимальна (например, такой модуляцией является АМ-ОБП);

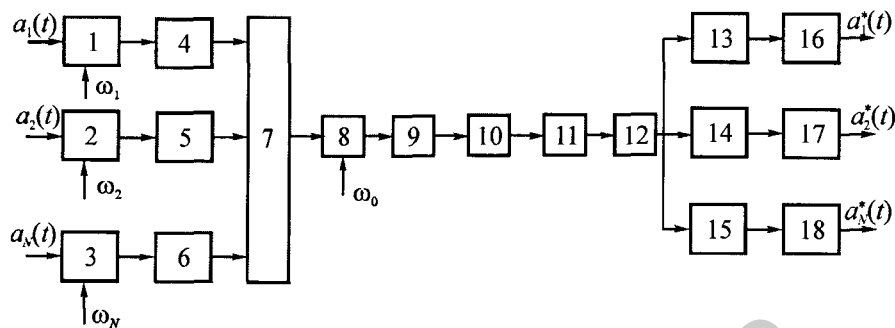


Рис. 8.2. Структурная схема многоканальной системы связи с частотным разделением сигналов: 1, 2, 3 – модуляторы; 4, 5, 6 – полосовые фильтры; 7 – сумматор; 8 – групповой модулятор; 9, 11 – усилители; 10 – линия связи; 12 – детектор; 13, 14, 15 – полосовые фильтры; 16, 17, 18 – каналные детекторы

– значений частот ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, которые не равны, причем разность между частотами в соседних участках диапазона выбирается не менее разности $\omega_i - \omega_{i-1} = \Omega_b$, где Ω_b – верхняя граничная частота спектра первичного сигнала (рис. 8.3, а);

– коэффициента передачи полосового фильтра, который при минимальной полосе пропускания передает спектральные компоненты канального сигнала без искажений и подавляет спектры соседних канальных сигналов.

В модуляторе групповой сигнал модулирует один из параметров (например, частоту) гармонического сигнала и таким образом преобразуется в линейный. Затем мощность линейного сигнала доводится до необходимого уровня с помощью усилителя. Передача полезной информации происходит в диапазоне частот, который отводится для передачи линейного сигнала. Область этого диапазона определяется несущей частотой ω_0 гармонического сигнала.

На приемном конце линейный сигнал детектируется. Полученный на выходе детектора групповой сигнал (рис. 8.3, б) фильтруется полосовыми фильтрами. Каждый из них пропускает лишь те частотные компоненты, которые попадают в их полосу пропускания. Спектральные компоненты вне полосы пропускания фильтр подавляет.

Канальный сигнал с выхода каждого фильтра детектируется. Способ детектирования определяется видом модуляции. Диаграммы на рис. 8.3, в, г, д поясняют работу первого канального приемника.

Таким образом, частотный метод разделения сигналов отличается формированием группового сигнала, спектр которого содержит не перекрывающиеся спектры канальных сигналов, и обработкой этого группового сигнала в приемнике, связанной с полосовой фильтрацией каждого канального сигнала.

Определим оператор k -го канального приемника в схеме рис. 8.2, используя равенства (8.2):

$$L_k[u^*(t)] = L_k \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L'_k g^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} u_k^*(t), & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad (8.4)$$

где $L'_k g^*(j\omega) = K_k(j\omega) \sum_{i=1}^N g_k^*(j\omega) = \begin{cases} g_k^*(j\omega), & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$; $K_k(j\omega)$ – коэффициент передачи k -го полосового фильтра; $g_i^*(j\omega)$ – спектр i -го канального сигнала.

Следовательно, для разделения сигналов используется линейный оператор L'_k , связанный с оператором L_k и определяемый полосовой фильтрацией линейного сигнала в полосе частот $[\omega_k, \omega_k + \Omega_k]$.

Для идеального разделения сигналов нужно выполнить дополнительное условие: спектры канальных сигналов должны полностью находиться в пределах полосы, отведенной для передачи этих сигналов. В этом случае они разделяются без взаимных помех. К сожалению, это условие трудно выполнить, так как амплитудно-частотные характеристики фильтров имеют плавные переходы от зоны «прозрачности» к зоне «непрозрачности», а спектральные составляющие канальных сигналов имеются также и вне заданной полосы частот. В результате возникают взаимные помехи между соседними каналами. Для ослабления взаимного влияния каналов и уменьшения помех вводят защитные частотные интервалы, что снижает эффективность использования линии связи. Так, например, в телефонных многоканальных системах связи каждому телефонному каналу отводится полоса частот, равная 4 кГц, хотя частотный спектр передаваемых тональных звуковых сигналов лежит в пределах от 300 до 3400 Гц.

8.2.2. Временное и фазовое разделение сигналов

Принцип передачи при *временном способе разделения* канальных сигналов заключается в их последовательной во времени передаче по групповому каналу.

Структурная схема многоканальной системы связи приведена на рис. 8.4, а временные диаграммы – на рис. 8.5 и рис. 8.6.

Электронные ключи, на первые входы которых подаются первичные сигналы (рис. 8.5, *в, е, и*), управляются импульсами каналов (рис. 8.5, *б, д, з*). Эти импульсы поочередно формируются на выходе распределителя импульсов каналов (РИК), запуск которого производится тактовыми импульсами с выхода генератора импульсов. Период следования тактовых импульсов обычно равен $T = 1/2F_c$, где F_c – верхняя граничная частота спектра первичного сигнала.

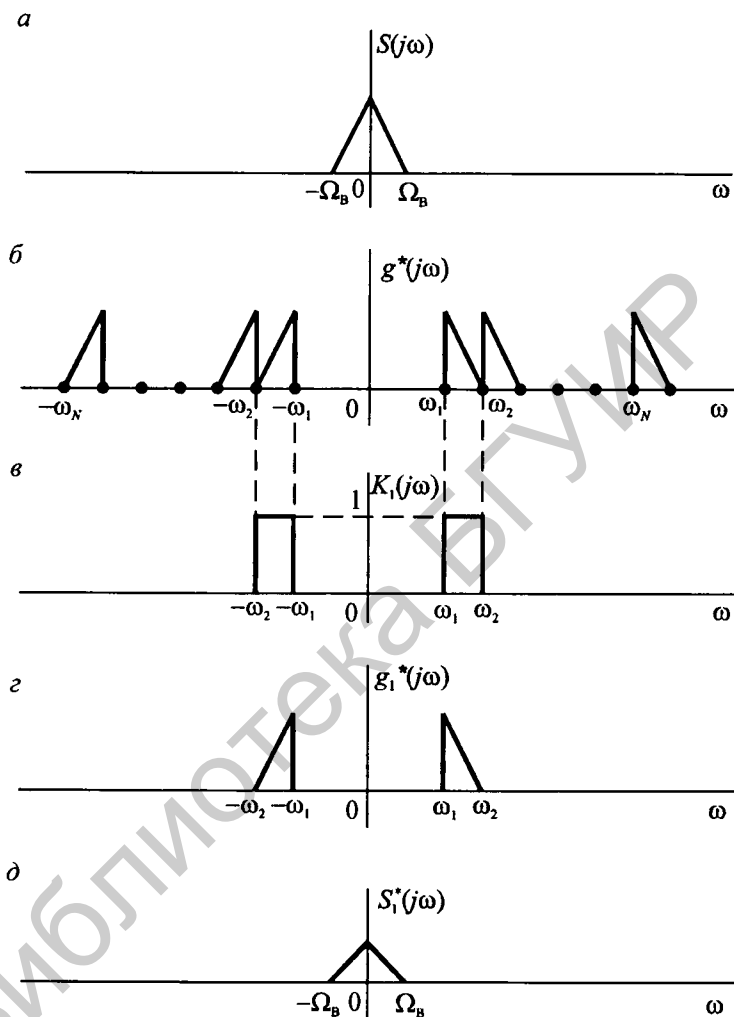


Рис. 8.3. Диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 8.2

При поступлении импульсов каналов выходы электронных ключей соединяются с их входами, что позволяет подать выборки первичных сигналов на входы сумматора. На сумматор поступает также синхронизирующий импульс (рис. 8.5, а) с выхода генератора синхрои́мпульса, который вместе с выборками канальных сигналов (рис. 8.5, з, ж, к) образует групповой сигнал $u(t)$ (рис. 8.5, л). В передатчике групповой сигнал преобразуется в линейный сигнал, параметры которого согласованы с параметрами линии связи. В приемнике производятся обратные преобразования. В результате линейный сигнал преобразуется в групповой.

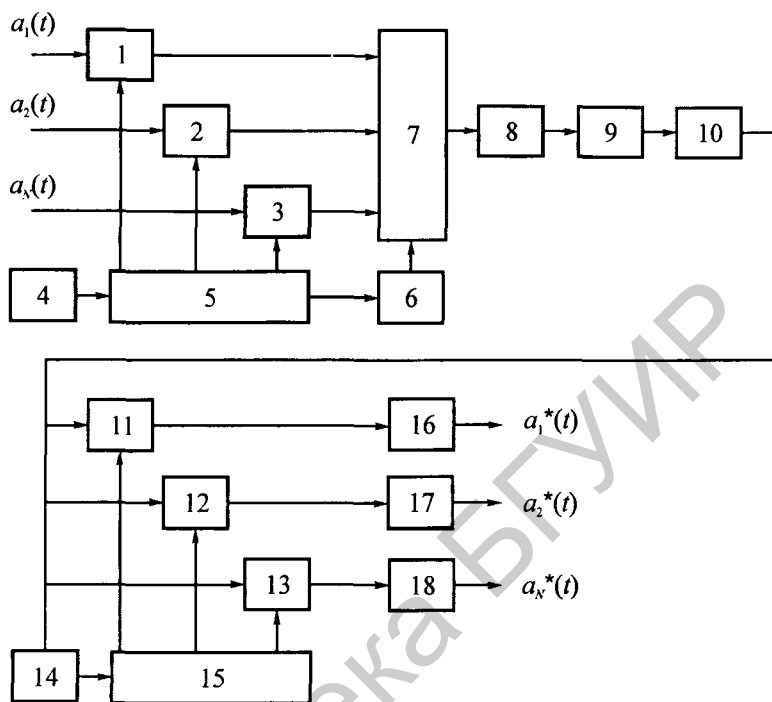


Рис. 8.4. Схема многоканальной системы связи с временным разделением сигналов: 1, 2, 3, 11, 12, 13 – электронные ключи; 4 – генератор импульсов; 5, 15 – распределитель импульсов каналов; 6 – генератор синхроимпульсов; 7 – сумматор; 8 – передатчик; 9 – линия связи; 10 – приемник; 14 – схема синхронизации; 16, 17, 18 – ФНЧ

Схема синхронизации, откликающаяся только на синхронизирующие импульсы, показанные на рис. 8.5, *а*, формирует на своем выходе импульсы синхронизации, которые запускают РИК приемника. Его схема не отличается от схемы РИК передатчика. На выходе РИК приемника формируются импульсы каналов, показанные на рис. 8.6, *б, д, з*. Этими импульсами управляют электронные ключи. При их поочередном замыкании каналные сигналы $u_i^*(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (рис. 8.6, *в, е, и*) поступают на входы канальных демодуляторов (фильтров нижних частот).

С подачей канальных сигналов (рис. 8.6, *в, е, и*) на фильтры нижних частот производится их демодуляция, т. е. восстановление первичных сигналов по их дискретным значениям. Восстановленные первичные сигналы $a_1^*(t)$, $a_2^*(t)$, ..., $a_N^*(t)$ (рис. 8.6, *г, ж, к*) далее поступают к получателям сообщений.

Таким образом, временное разделение сигналов отличается формированием группового сигнала, который содержит синхросигнал и сдвинутые во времени выборки первичных сигналов, что позволяет в приемнике выделить этот синхросигнал, затем сформировать импульсы каналов для

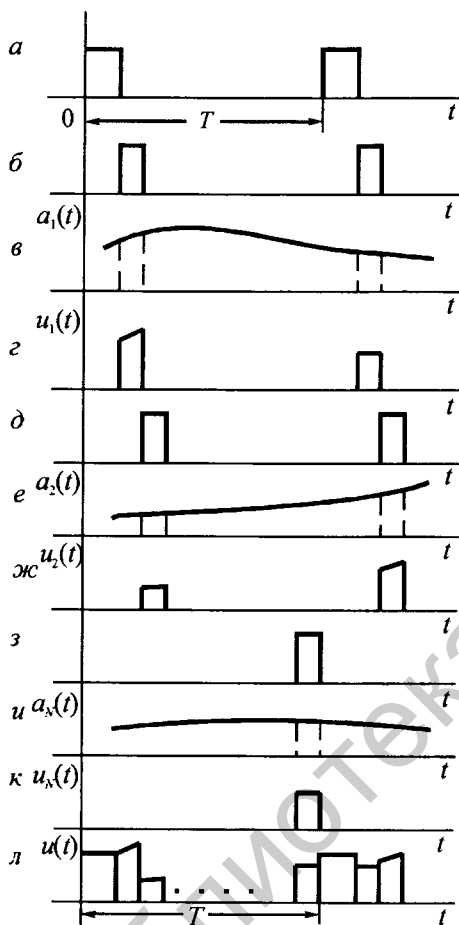


Рис. 8.5. Временные диаграммы, поясняющие работу передающей части системы, показанной на рис. 8.4

- 1) дискретизацию первичных сигналов в не перекрывающиеся моменты времени с интервалом дискретизации $1/2F_c$;
- 2) суммирование значений первичных сигналов с сигналом синхронизации;
- 3) выделение сигнала синхронизации в приемной части системы;
- 4) разделение канальных сигналов;
- 5) демодуляцию канальных сигналов.

Принцип временного разделения сигналов используется в *цифровых системах передачи*. Эти системы отличаются от рассмотренной тем, что вместо импульсно-модулированных сигналов в них используются ИКМ сигналы. Для этого выборки (канальные сигналы) квантуются по уровню, а затем производится кодирование значений соответствующих уровней.

поочередного подключения канальных приемников к выходу приемника группового сигнала и получить на выходах канальных приемников оценки первичных сигналов.

Работу каждого k -го электронного ключа можно описать следующими уравнениями:

$$K_k u^*(t) = \sum_{i=1}^N K_k u_i^*(t) = \begin{cases} u_k^*(t), & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (8.5)$$

где $K_k = \begin{cases} 1, & (k-1)\tau_u < t \leq k\tau_u, \\ 0, & k\tau_u < t \leq (k-1)\tau_u; \end{cases}$
 τ_u — длительность импульса канала (канального интервала).

Сравнивая (8.5) и (8.2), находим, что оператор L в схеме рис. 8.4 описывает параметрическую линейную систему (электронный ключ).

Как следует из приведенного выше описания, работа многоканальной системы с временным разделением включает следующие операции:

В системах с временным разделением сигналов возникают взаимные помехи между каналами в основном по двум причинам.

Из-за ограниченности ширины полосы линии связи импульсы кодовых последовательностей «расплываются» во времени. Это приводит к межсимвольной интерференции (импульсы одного канала накладываются на импульсы других каналов).

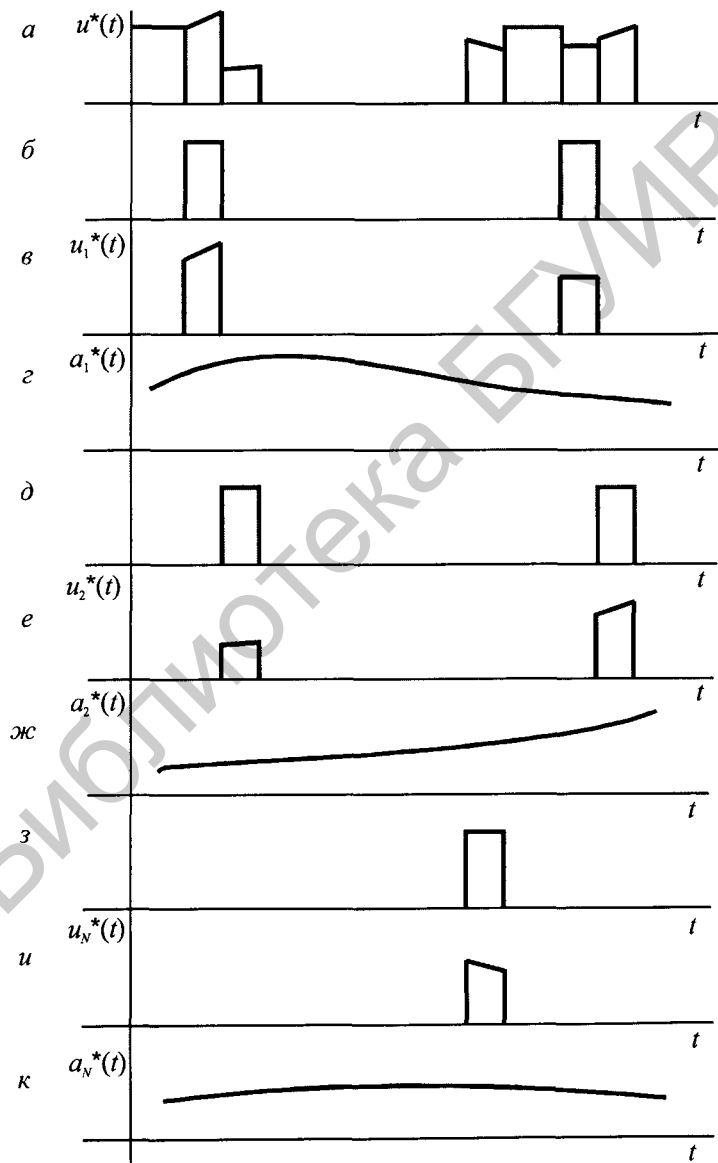


Рис. 8.6. Временные диаграммы, поясняющие работу приемной части системы, показанной на рис. 8.4

Из-за присутствия помех в линии связи моменты появления синхронных импульсов и импульсов каналов в приемнике становятся случайными (флуктуирующими).

Для уменьшения уровня взаимных помех вводят каналные интервалы, что при сохранении скорости передачи приводит к увеличению ширины спектра группового сигнала.

Фазовое разделение сигналов строится с использованием различия сигналов по фазе.

Пусть информация в N каналах передается изменением амплитуды непрерывных гармонических сигналов с одинаковой несущей частотой ω_0 . Требуется разделить эти сигналы с использованием только различия в их начальных фазах.

Сигналы равны:

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= A_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ u_2(t) &= A_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_2); \\ &\dots\dots\dots \\ u_N(t) &= A_N(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_N). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Как показывает анализ, разделение сигналов возможно только в двухканальной системе, каналные сигналы которой:

$$u_1(t) = A_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \pi/2).$$

Групповой сигнал при этом равен сумме этих сигналов, а их разделение обеспечивается операцией синхронного детектирования.

8.2.3. Разделение сигналов в волоконно-оптических системах связи

Одновременное использование разных способов разделения сигналов в системах связи позволяет улучшить их качественные показатели.

В кабельных системах, в том числе волоконно-оптических, до последнего времени доминировал временной способ разделения, что позволило довести скорости цифровых потоков в плезеохронных системах до 140 Мбит в секунду и до 10 Гбит в секунду в синхронных системах. Дальнейшее увеличение скоростей цифровых потоков в волоконно-оптических системах связи с использованием только временного способа разделения ограничивается сложностью создания устройств объединения и разъединения цифровых потоков и искажениями оптического сигнала при его передаче, вызванными, главным образом, хроматической дисперсией.

Задача решается с помощью дополнительного уплотнения оптических сигналов с разными длинами волн λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ для передачи их по одному волоконно-оптическому кабелю. При этом каждый i -й цифровой поток, сформированный с использованием временного способа, передается в виде оптического сигнала с длиной волны λ_i , где $i = 1, 2, \dots, m$ – одно

из чисел заданного множества. Оптические цифровые потоки (их число равно m) объединяются (*мультиплексируются*) с помощью оптического *мультиплексора* и затем вводятся в волоконно-оптический кабель.

При приеме с помощью оптического *демультиплексора* общий оптический цифровой поток разделяется по частотному признаку на отдельные оптические цифровые потоки. Затем разделенные таким способом цифровые потоки *демультиплексируются* с использованием временного разделения сигналов.

Волновой метод уплотнения впервые нашел применение за рубежом и называется WDM (Wavelength Division Multiplexing) методом.

Волновой метод уплотнения является разновидностью частотного метода разделения сигналов. Он отличается тем, что формирование и обработка группового сигнала в передатчике и приемнике производится в оптическом диапазоне волн.

8.3. ДРУГИЕ ВИДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

8.3.1. Пространственное разделение

На выходах пространственно разнесенных источников сообщений образуются первичные сигналы, которые в системах проводной связи поступают на входы абонентских линий. Объединение первичных сигналов в групповой сигнал при пространственном разделении связано с формированием пучков проводов и размещением их в одном кабеле. Обычно в многоканальных системах связи каналы передачи образуются с помощью различных методов разделения сигналов. Например, после пространственного метода разделения часто используют временное разделение. Пространственное разделение сигналов в многоканальных системах связи отличается от пространственного разделения сигналов в системах коммутации. Если в многоканальных системах разделяются сигналы заранее закрепленных друг с другом пар (источник сообщений – получатель сообщений), то в системах коммутации они разделяются в соответствии с адресами вызываемых абонентов.

Коммутация, в которой применяется пространственное разделение сигналов, называется *пространственной*. Коммутация, в которой применяется временное разделение сигналов, называется *временной*.

Пространственное разделение сигналов в радио и оптическом диапазонах волн основано на способности электромагнитных колебаний к направленному излучению и ослаблению.

При направленном излучении энергия колебаний концентрируется с помощью антенны в определенном направлении (в пределах некоторого телесного угла). Степень концентрации увеличивается с уменьшением длины волны.

Характеристикой направленности является зависимость напряженности поля от азимута и угла места. Графическое изображение функции направленности называется *диаграммой направленности*.

Диаграмма направленности содержит главный лепесток и боковые лепестки. В направлении главного лепестка интенсивность излучения максимальна. Для организации передачи информации от разных источников на одной и той же несущей частоте, но в разных направлениях, необходимо в пунктах передачи и приема расположить приемопередатчики и антенны с весьма малыми боковыми лепестками. Главные лепестки передающих антенн следует направлять на соответствующие приемные антенны. Пространственное разделение сигналов может быть достигнуто и с использованием другого свойства электромагнитных колебаний – их способности к ослаблению (затуханию). Это свойство используется в сотовых системах связи. Известно, что мощность сигнала на входе приемника прямо пропорциональна мощности передатчика и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Поэтому на некотором расстоянии от передатчика мощность на входе приемника становится недостаточной для уверенного приема.

Обслуживаемая территория (см. рис. 8.7) разбивается на зоны без перекрытия и пропуска участков. Наиболее подходящей фигурой, используемой при этом разбиении, является шестиугольник. В центре каждого шестиугольника устанавливается приемо-передающее оборудование с антенной, диаграмма направленности которой часто выбирается равномерной во всех направлениях, т. е. круговой. Мощность передатчиков

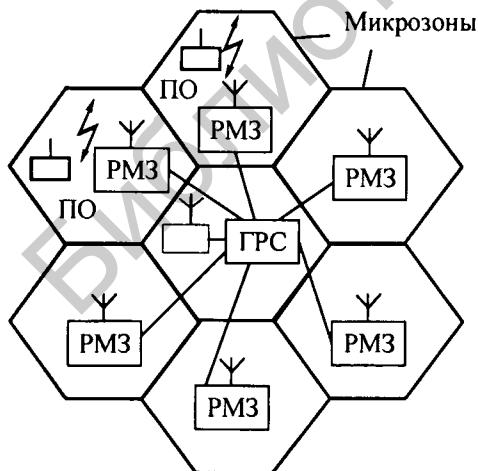


Рис. 8.7. Структурная схема сотовой системы связи:

- ГРС – главная радиостанция;
- РМЗ – радиостанция микрозоны;
- ПО – подвижный объект

выбирается сравнительно небольшой, чтобы обеспечить уверенный прием только в своей зоне. Из-за ослабления сигнала в других зонах в большинстве зон передатчики могут работать на одних и тех же частотах, так как мощность сигнала успевает в достаточной степени уменьшиться примерно через две ячейки. Поэтому считается допустимым использовать одни и те же частоты через две ячейки.

В центре обслуживаемой территории устанавливается главная радиостанция, которая соединительными линиями связывается со всеми остальными радиостанциями, расположенными

в других зонах. Главная радиостанция соединяется, кроме того, и с телефонной сетью. Все радиостанции, включая и главную, обеспечивают связь с абонентами, имеющими мобильные телефоны. Часть приемо-передающего оборудования устанавливается на подвижных объектах. При связи абонента автоматической телефонной станции с абонентом, например, подвижного объекта сигнал вызова из телефонной сети попадает на главную радиостанцию, от нее по соединительным линиям к одной из радиостанций зоны, а затем по радиоканалу к абоненту. Сотовые системы связи охватывают большие территории и большое число абонентов.

8.3.2. Поляризационное разделение сигналов

Этот вид разделения возможен в радио и оптическом диапазонах волн. Распространяющаяся электромагнитная волна характеризуется векторами электрической E и магнитной H напряженностей поля. Векторы E и H перпендикулярны, а направление распространения волны перпендикулярно плоскости, в которой лежат эти векторы. Векторы E и H , связанные с этими направлениями, имеют определенную пространственную ориентацию. Поскольку векторы почти всегда перпендикулярны, их пространственная ориентация определяется вектором E . По направлению этого вектора в пространстве и по изменению его во времени можно составить представление о характере поляризации излучения. При передаче информации векторы E и H изменяются во времени в соответствии с изменением тока в передающей антенне и для обеспечения качественного приема необходимо, чтобы поляризация приемной антенны соответствовала поляризации принимаемого сигнала. В противном случае мощность этого сигнала может оказаться ниже допустимой и качество приема ухудшится. Например, поляризация сигналов с некоторых спутников отличается от поляризации приемных антенн. Сигнал принимается в той же плоскости, в которой был послан только тогда, когда спутник и приемная антенна находятся на одной долготе. Если спутник находится на другой долготе, то в силу того, что Земля имеет форму шара, плоскость поляризации принимаемого сигнала будет расположена под некоторым углом к исходной плоскости поляризации. Для улучшения качества приема в этом случае применяют поляризаторы, с помощью которых совмещают векторы E принимаемой волны и приемной антенны. Если вектор E колеблется в вертикальной плоскости, то такая поляризация называется *вертикальной*, а если в горизонтальной плоскости, то такая поляризация называется *горизонтальной*. Электромагнитные поля с вертикальной и горизонтальной поляризацией удовлетворяют условию ортогональности и это свойство можно использовать для передачи информации от разных источников на одной и той же несущей частоте. Сигналы с разной поляризацией, излучаемые антеннами передатчиков, одновременно воздействуют на антенны приемников, но каждая антенна откликается только на тот сигнал, поляризация которого совпадает с ее поляризацией.

8.3.3. Разделение сигналов по форме

Спектры канальных сигналов многоканальных систем с частотным разделением не перекрываются в частотной области, а канальные сигналы многоканальных систем с временным разделением не совпадают во времени.

Кроме сигналов с разнесенными спектрами и сигналов, не совпадающих во времени, существует класс сигналов, которые могут передаваться одновременно и иметь перекрывающиеся частотные спектры.

Разделение этих сигналов принято называть *разделением по форме*.

К числу сигналов, разделяющихся по форме, относятся шумоподобные сигналы, кодированные кодовыми последовательностями кодов Уолша, Д-кодов, симплексных кодов.

В многоканальных системах с шумоподобными сигналами групповой сигнал равен сумме этих сигналов, для разделения которых в приемнике используется линейный оператор, определяемый согласованной фильтрацией. Последовательности Уолша строятся на базе двоичного алфавита $-1, 1$, а любые пары этих последовательностей удовлетворяют условию ортогональности. Но применение этих последовательностей связано с передачей по каналу связи специальных синхросигналов для поддержания временных соотношений между принимаемыми и опорными последовательностями.

В случае применения M -последовательностей или D -последовательностей необходимости в передаче специальных синхросигналов нет, так как в качестве синхросигналов могут использоваться те же M - или D -последовательности, которые используются в качестве носителей передаваемой информации.

Для разделения сигналов по форме должно удовлетворяться следующее условие:

$$\int_0^T u_i(t)u_j(t)dt = 0, \quad i \neq j. \quad (8.7)$$

При этом необходима временная привязка опорных сигналов к принимаемому сигналу, осуществляемая устройством синхронизации.

Сигнал синхронизации $u(t)$ должен удовлетворять условию:

$$\int_0^T u(t)u(t + \tau)dt = \begin{cases} E, & \tau = 0; \\ 0, & -\tau_0 > \tau \geq -T; \\ 0, & T \geq \tau > \tau_0; \end{cases} \quad (8.8)$$

для $-T \leq \tau \leq T$; где T – длительность сигнала; E – энергия; $[-\tau_0, \tau_0]$ – интервал задержки, в пределах которого значения основного лепестка автокорреляционной функции сигнала $u(t)$ меньше или равны E . Для кодофазомодулированных сигналов этот интервал определяется временем τ_0 , которое необходимо для передачи одного символа кодовой последовательности.

Известные сигналы, используемые для синхронизации, условию (8.8) не удовлетворяют, так как значения их автокорреляционных функций при указанных сдвигах не равны нулю, но находятся в пределах, которые обеспечивают допустимую ошибку определения временного положения опорных сигналов по отношению к принимаемым.

Структурная схема многоканальной системы связи с разделением сигналов по форме приведена на рис. 8.8. Передающая часть системы содержит N идентичных модуляторов, сумматор и передатчик. Каждый модулятор содержит генератор тактовых импульсов, предназначенный для синхронизации аналого-цифрового преобразователя и генератора шумоподобного сигнала. Если все модуляторы передатчика синхронизируются от общего источника импульсов, то шумоподобные сигналы всех модуляторов будут совпадать во времени и выполнение условия (8.7) обеспечивается выбором ортогональных сигналов. На рис. 8.8 общий источник тактовых импульсов не показан.

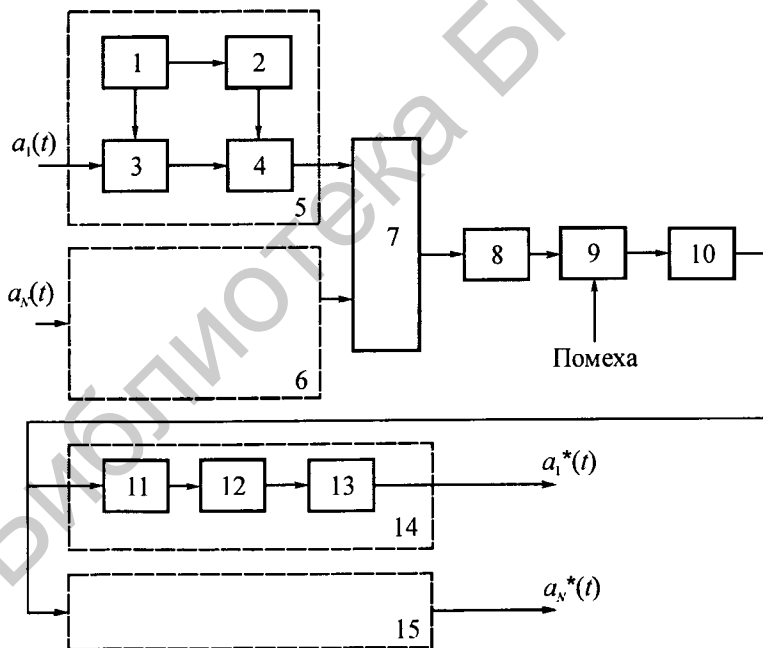


Рис. 8.8. Структурная схема многоканальной системы связи с разделением сигналов по форме: 1 – генератор тактовых импульсов; 2 – генератор ШС; 3 – АЦП; 4 – умножитель; 5, 6 – модуляторы; 7 – сумматор; 8 – передатчик; 9 – линия связи; 10 – приемник; 11 – согласованный фильтр; 12 – решающее устройство; 13 – ЦАП; 14, 15 – демодуляторы

Период шумоподобных сигналов выбирается равным длительности информационного символа с выхода АЦП. В процессе амплитудной модуляции информационному символу 1 (рис. 8.9, а) ставится в соответствие

один период шумоподобного сигнала $T = N \tau_0$ (рис. 8.9, б), а символу 0 – отсутствие этого сигнала. Отметим, что наряду с амплитудной модуляцией применяется и фазовая модуляция (см. п. 3.7.3.). Если F_c – верхняя граничная частота спектра первичного сигнала, а L – число уровней квантования, то ширина спектра сигнала на выходе умножителя

$$\Delta f \geq 2F_c M \log_2 L, \quad (8.9)$$

где N – число символов в одном периоде шумоподобного сигнала, причем длительность каждого символа τ_0 меньше длительности элемента двоичного слова с выхода АЦП в N раз.

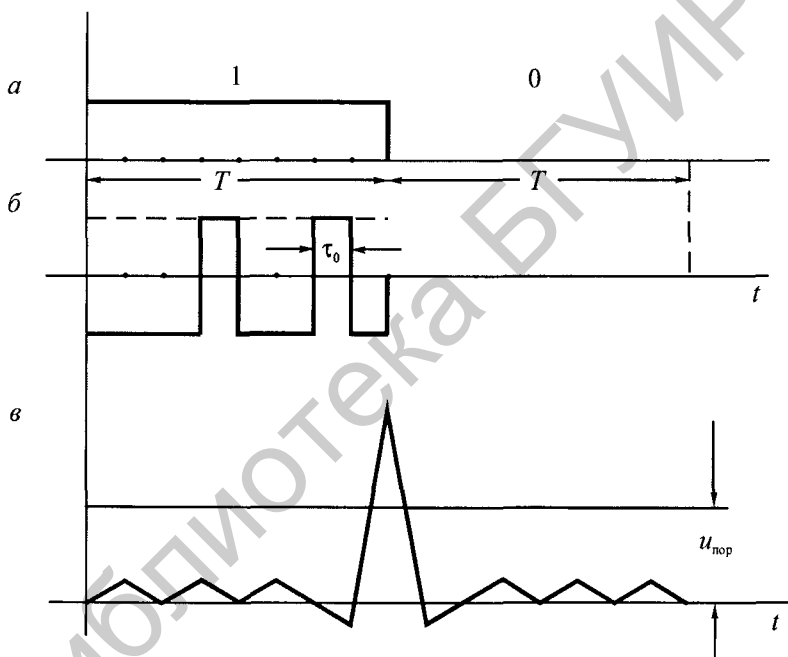


Рис. 8.9. Временные диаграммы, поясняющие работу схемы, приведенной на рис. 8.8

Сравнивая формулу (8.9) с формулой (3.62) для ИКМ сигнала, находим, что ширина спектра каждого канального сигнала в N раз больше ширины спектра ИКМ сигнала.

Групповой сигнал на выходе сумматора, равный сумме канальных модулированных шумоподобных сигналов, представляет собой случайный процесс, среднее значение и дисперсия которого определяются загрузкой отдельных каналов, если каждый канал подключается к сумматору на время передачи информации. Для передачи группового сигнала по линии связи в передатчике системы связи этим сигналом модулируется носитель сообщения. Далее модулированный сигнал поступает в линию связи.

Приемная часть системы содержит приемник и N идентичных канальных приемников (демодуляторов). В структуру каждого демодулятора входит согласованный фильтр, решающее устройство и ЦАП. На входах всех согласованных фильтров присутствует принятый групповой сигнал. На вход приемника поступает смесь модулированного сигнала и помехи, присутствующей в линии связи. В результате детектирования этого сигнала оценка группового сигнала одновременно поступает на входы канальных приемников.

Канальные согласованные фильтры откликаются только на шумоподобные сигналы, с которыми они согласованы. На шумоподобные сигналы соседних каналов согласованные фильтры не откликаются. Например, согласованный фильтр первого канала откликается на сигнал, который формируется в первом модуляторе (рис. 8.9, б). Отклик фильтра показан на рис. 8.9, в. Отклики других фильтров на рис. 8.9 не показаны. В решающих устройствах значения откликов в момент времени $t = T$ сравниваются с заданным пороговым уровнем. В зависимости от результатов этих сравнений на выходах пороговых устройств формируются оценки принимаемых информационных символов, равных или 0, или 1. Кодовые слова с выходов решающих устройств поступают на цифро-аналоговые преобразователи и преобразуются в сообщения. Демодуляция сигнала происходит в присутствии помехи, которая состоит из двух составляющих. Первая является известной по предыдущим главам суммой внутренней и внешней флуктуационных помех, а вторая – специфичной для систем с шумоподобными сигналами помехой. Эта помеха определяется суммой шумоподобных сигналов других каналов и называется *структурной помехой*. Структурная помеха появляется в следующих случаях:

- когда в передатчике все модуляторы синхронизируются от общего источника импульсов, но выбранное множество шумоподобных сигналов является почти ортогональным, для которого условие (8.7) точно не выполняется;
- когда в передатчике модуляторы не синхронизируются от общего источника импульсов.

В первом случае уровень структурной помехи определяется взаимно корреляционными функциями при нулевом сдвиге между опорным канальным шумоподобным сигналом и присутствующими шумоподобными сигналами других каналов.

Во втором случае уровень структурной помехи определяется значениями взаимно корреляционных функций при произвольных сдвигах между опорным канальным шумоподобным сигналом и присутствующими шумоподобными сигналами других каналов.

С целью обеспечения заданного качества передаваемой информации должны предусматриваться меры по уменьшению уровня структурной помехи. Рассмотренные принципы разделения сигналов по форме и построения многоканальной системы связи используются в *многоканальных асинхронных адресных системах связи (ААСС)*. В ААСС (рис. 8.10)

каждому абоненту присваивается один из «почти ортогональных» шумоподобных сигналов, который является адресом канала. Пусть, например, абоненту 1 нужно связаться с абонентом k . С этой целью набирается номер абонента k и в генераторе адресного сигнала 1 устанавливается форма шумоподобного сигнала с номером k . Если число абонентов равно N , то и число набираемых форм также равно N . Шумоподобный сигнал с номером k посылается в линию связи и таким образом действует на входах приемников всех остальных абонентов. На шумоподобный сигнал k настроена приемная аппаратура только абонента k , поэтому связь устанавливается между абонентами 1 и k . Приемники других абонентов на этот шумоподобный сигнал не откликаются. Ответная информация от абонента k передается с использованием шумоподобного сигнала с номером k . Важной особенностью ААСС является отсутствие центральной коммутационной станции. Все абоненты имеют прямой доступ друг к другу, а если используется радиопередача, то частотная перестройка приемопередатчиков для вхождения в связь не производится.

В технической литературе имеется описание ААСС, в которых используется от 1000 до 1500 каналов с 50...100 активными абонентами.

Принцип разделения сигналов по форме реализован также в системе подвижной связи CDMA (Code Division Multiple Access).

В этой системе используются:

- последовательности Уолша длиной в 64 символа;
- M -последовательности с периодами $N = 2^{42} - 1$ и $N = 2^{15} - 1$.

Последовательности Уолша предназначены:

– для разделения сигналов прямых каналов одной соты (базовая станция – подвижные станции);

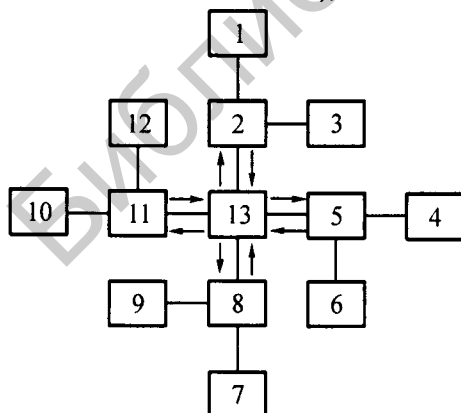


Рис. 8.10. Структурная схема многоканальной асинхронной адресной системы связи:

1, 4, 7, 10 – абоненты; 2, 5, 8, 11 – приемопередатчики (мобильные телефоны);

3, 6, 9, 12 – генераторы адресного сигнала;

13 – линия связи

– для кодирования цифровой информации в обратных каналах (подвижные станции – базовая станция).

M -последовательности с периодом $N = 2^{42} - 1$ (длинные коды) применяются для разделения сигналов обратных каналов одной соты (подвижные станции – базовая станция), а M -последовательности с периодом $N = 2^{15} - 1$ служат для разделения сигналов соседних базовых станций.

Используемые в прямых каналах последовательности Уолша являются носителями пере-

даваемой цифровой информации. Некоторому i -му каналу соответствует i -я периодически повторяющаяся последовательность Уолша, которая модулируется по фазе (знаку) двоичными информационными послылками i -го источника ($i = 1, 2, \dots, 64$).

В обратных каналах для целей кодирования применена модуляция последовательностей Уолша по форме, заключающаяся в том, что двоичная информационная последовательность разбивается на блоки длиной в 6 символов и каждому слову блока ставится в однозначное соответствие i -я последовательность Уолша (см. п. 3.7.3).

Как в прямых, так и в обратных каналах последовательности Уолша и M -последовательности связывают во времени и строят из элементов $(-1, 1)$.

Приемники базовой и подвижной станций используют корреляционный прием. Реализация этого приема связана с генерированием опорных сигналов, совмещением их с принимаемыми сигналами; умножением опорных сигналов на принимаемый сигнал; фильтрацией результата умножения. Это обеспечивает выделение двоичной информационной последовательности, которая далее поступает для дальнейшей обработки.

Контрольные вопросы

1. Какие преимущества имеет многоканальная передача сообщений?
2. Какие требования предъявляются к канальным сигналам при формировании группового сигнала системы многоканальной передачи?
3. В чем сходство и различие методов частотного и временного разделения сигналов?
4. В чем заключается принцип фазового разделения сигналов?
5. Каким условиям должны удовлетворять шумоподобные сигналы при их разделении?
6. В чем заключается способ разделения сигналов в асинхронно-адресных системах связи?
7. Какие способы пространственного разделения сигналов Вам известны? На каких принципах они основаны?

9. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ СВЯЗИ

9.1. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ

Под *эффективностью* Q понимают некоторую функцию показателей качества, которая характеризует систему связи с технической точки зрения:

$$Q = f(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}). \quad (9.1)$$

Показателями качества k_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$ называются такие параметры, которые удовлетворяют условию: чем больше (меньше) параметр, тем лучше (хуже) система. Приведем некоторые показатели качества систем связи: точность (верность) воспроизведения сообщения, скорость передачи информации, пропускная способность канала, помехозащищенность, надежность и т. д. Примерами параметров являются: длина рабочей волны, на которой работает радиосистема, ширина полосы канала связи и др. В отношении параметров нельзя утверждать, что чем он больше (меньше), тем лучше (хуже) система. Для более полного описания вводят еще один важный показатель качества – стоимость C .

Функцию эффективности и стоимость применяют для оценки оптимальности системы связи. Критерий оптимальности записывают в виде:

$$Q = f(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \max(\min); \quad (9.2)$$

$$C \leq C_m,$$

где C_m – максимально допустимое значение стоимости.

Задача отыскания оптимальной системы связи, таким образом, связана с отысканием функции эффективности, которая называется также *целевой функцией*. К этой функции предъявляются следующие требования:

- 1) она должна наиболее полно характеризовать систему;

2) функция должна быть простой для вычислений и удобной для практического использования.

Эти требования являются противоречивыми. Чтобы удовлетворить, например, первому требованию, надо использовать большое число показателей качества, но при этом целевая функция становится сложной и неудобной для расчетов.

Часто целевую функцию берут равной весовой сумме показателей качества:

$$Q = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i k_i, \quad (9.3)$$

где λ_i – постоянные весовые коэффициенты.

Выбор коэффициентов и показателей качества в определенной мере является произвольным и основывается в том числе на накопленном опыте проектирования и эксплуатации системы. Одной из методик выбора является метод экспертных оценок, при котором учитывается относительная важность показателей качества.

Часто оценку оптимальности системы ведут по одному (наиболее важному) показателю качества, переведя остальные в разряд ограничений. Условие оптимальности записывают в виде:

$$k_1 = \max(\min); k_2 \leq k_{2M}, \dots, k_m \leq k_{(m-1)M}, \quad (9.4)$$

где k_1 – наиболее важный показатель; $k_{2M}, \dots, k_{(m-1)M}$ – максимально допустимые значения других показателей качества.

Применяют также поэтапную процедуру оптимизации. Вначале производят оптимизацию по одной группе параметров, а затем – по другой.

9.2. ПРИНЦИПЫ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ И РАЗРАБОТКЕ СИСТЕМ СВЯЗИ

Условия оптимальности, приведенные выше, используются при синтезе системы или ее отдельных частей. *Синтез системы* – это определение ее структуры или алгоритма функционирования, связанного с этой структурой. В процессе синтеза определяется состав системы, вид ее отдельных частей (например, передатчика, приемника), характер их взаимосвязи и взаимодействия, форма несущих колебаний, способ модуляции и демодуляции, вид кодирования.

Различают *математический* и *инженерный* синтез.

Математический синтез – это отыскание чисто математическим путем структуры системы на основе математических выражений и критерия оптимальности. Из-за сложности решаемой задачи математический синтез

больших систем, к которым относятся и системы связи, пока еще не представляется возможным. Поэтому его используют только для отыскания более мелких частей систем, таких, например, как демодулятор, линейный фильтр и т. д. Структуры устройств, полученные в результате математического синтеза, всегда являются оптимальными. Однако математическая оптимизация отдельных частей системы не гарантирует построения оптимальной системы в целом.

Примеры математического синтеза приведены в главе 7.

Под инженерным синтезом понимают отыскание структуры системы с использованием:

1) математических методов исследования, включающих синтез отдельных частей системы, расчеты на ЭВМ, математическое моделирование и автоматизированное проектирование;

2) экспериментальных методов исследования на макетах и образцах системы;

3) результатов лабораторных, заводских и других испытаний;

4) эвристических методов, использующих предыдущий опыт и знания по созданию и эксплуатации аналогичных систем, интуицию и творческие способности членов коллектива, участвующих в проектировании.

Название «*эвристический*» происходит от слова «эврика» – находить. При инженерном синтезе условия оптимальности системы используют не для отыскания (чисто математическим путем) ее структуры, а чаще всего для выбора структуры системы из некоторого числа заранее найденных структур. Такой выбор называется дискретным.

Если структура системы связи, полученная в результате проведения инженерного синтеза, удовлетворяет заданному критерию оптимальности, то такая система называется *оптимальной*.

В противном случае синтезированная структура является *неоптимальной*. Критерий оптимальности (кроме математических выражений) может содержать и описательную часть, в которой содержатся не заданные математически условия и ограничения, накладываемые на систему.

Инженерный синтез системы является составной частью системного подхода к проектированию.

Сущность системного подхода заключается в целостном, всестороннем рассмотрении проектируемой системы с учетом:

– этапов ее «жизненного цикла» (проектирование, производство эксплуатация и утилизация);

– истории и перспектив ее развития (эволюции);

– взаимодействия с природой и обществом в целом;

– взаимного влияния элементной базы и системотехники;

– основных видов взаимодействия внутри системы (функционального, конструктивного, динамического, информационного, энергетического);

– изменения исходных данных и даже решаемой задачи в процессе проектирования, производства и эксплуатации с целью получения более надежных результатов проектирования и обеспечения универсальности применения системы, чтобы при изъятии или добавлении некоторых блоков система была пригодной для решения новых задач;

– выделения главных показателей качества, подлежащих улучшению в первую очередь;

– сочетания принципов композиции, декомпозиции, иерархичности;

– вскрытия основных технических противоречий, препятствующих улучшению качества системы и ускорению процесса ее разработки;

– правильного сочетания различных методов проектирования, в первую очередь математических, эвристических и экспериментальных, а в рамках математических методов – аналитических и проводимых с помощью ЭВМ;

– обеспечения должного взаимодействия в процессе проектирования специалистов различных уровней и профилей.

9.3. АНАЛИЗ СИСТЕМ СВЯЗИ ПО ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ

9.3.1. Энергетическая и частотная эффективность систем связи

Предварительный анализ систем можно вести по небольшому числу показателей качества. Обычно в их качестве берут *скорость передачи* R (бит/с) и *верность передачи*, определяемую вероятностью ошибки p при передаче дискретных сообщений или величиной среднеквадратичной погрешности воспроизведения сообщения при передаче непрерывных. Иногда верность передачи непрерывных сообщений характеризуют отношением сигнал/шум на выходе демодулятора. Полагают, что сигналы передаются в канале с полосой, равной F , и аддитивным, нормальным, белым шумом. Отношение сигнал/шум в канале выражают через отношение $\rho_0 = P_c/N_0$, где P_c – мощность сигнала, N_0 – спектральная плотность мощности шума.

Разделим скорость передачи на пропускную способность канала и таким образом вычислим коэффициент использования пропускной способности:

$$\eta = R/C. \quad (9.5)$$

С учетом формулы Шеннона перепишем выражение (9.5) в виде:

$$\eta = R/F \log(1 + \rho), \quad (9.6)$$

где $\rho = P_c/P_{\text{ш}}$ – отношение мощностей сигнала и шума в полосе частот F .

Введем коэффициенты использования канала по мощности β и по полосе частот γ . Эти коэффициенты определяют соответственно эффективность

использования энергии сигнала (энергетическая эффективность) и эффективность использования полосы канала (частотная эффективность):

$$\beta = R/\rho_0, \gamma = R/F. \quad (9.7)$$

Энергетическую эффективность систем с ортогональными сигналами можно выразить через отношение

$$\alpha = E_0/N_0,$$

где $E_0 = E/\log_2 m$ – удельная энергия, которая необходима для передачи одного бита информации; E – энергия сигнала; k – число бит информации, передаваемой в течение длительности сигнала; m – число ортогональных сигналов.

$$\beta = R/\rho_0 = RN_0/P_c = N_0/P_c \tau_n = N_0/E_0 = 1/\alpha,$$

где $R = 1/\tau_n$, τ_n – длительность одного информационного символа.

Подставляя выражения (9.7) в (9.6), получим

$$\eta = \gamma/\log(\gamma/\beta + 1), \gamma = \rho\beta. \quad (9.8)$$

В идеальной системе связи коэффициент использования пропускной способности равен единице при сколь угодно малой вероятности ошибки. Подставляя это значение в (9.8), получим зависимость между энергетической и частотной эффективностью для идеальной системы связи:

$$\gamma = \log(\gamma/\beta + 1), \beta = \gamma/(2^\gamma - 1). \quad (9.9)$$

График функции приведен на рис. 9.1 (кривая 1). Каждой точке кривой соответствует идеальная система связи. Поскольку число точек на этой кривой равно бесконечности, то число идеальных систем также равно бесконечности. В каждой из этих систем коэффициент использования пропускной способности равен единице, а вероятность ошибки воспроизведения сообщения стремится к нулю.

Максимальное значение энергетической эффективности найдем из (9.9):

$$\beta_{\max} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{2^\gamma - 1} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443 \quad (1,59 \text{ дБ}).$$

Для исследуемых систем рассчитывают аналогичные кривые.

В реальных системах связи коэффициент использования канала меньше 1, а вероятность ошибки имеет конечное значение. Поэтому следует ожидать, что кривые для реальных систем будут располагаться ниже кривой, соответствующей идеальным системам.

На рис. 9.1 приведены рассчитанные кривые зависимостей энергетической от частотной эффективности для идеальной системы связи (кривая 1), для системы связи, в которой используются биортогональные сигналы одинако-

вой энергии (кривая 2) и для системы связи, в которой применяются ортогональные некогерентные ЧМ сигналы одинаковой энергии (кривая 3). Вероятность ошибки, определяющая помехоустойчивость реальных систем связи, выбрана одинаковой. Цифры на кривых указывают число сигналов выбранного ансамбля.

Сравнивая характеристики систем, отметим следующее.

1. Характеристики реальных систем хуже характеристик идеальных систем.

2. Системы с биортогональными сигналами имеют лучшие характеристики по сравнению с системами, в которых используются ортогональные сигналы.

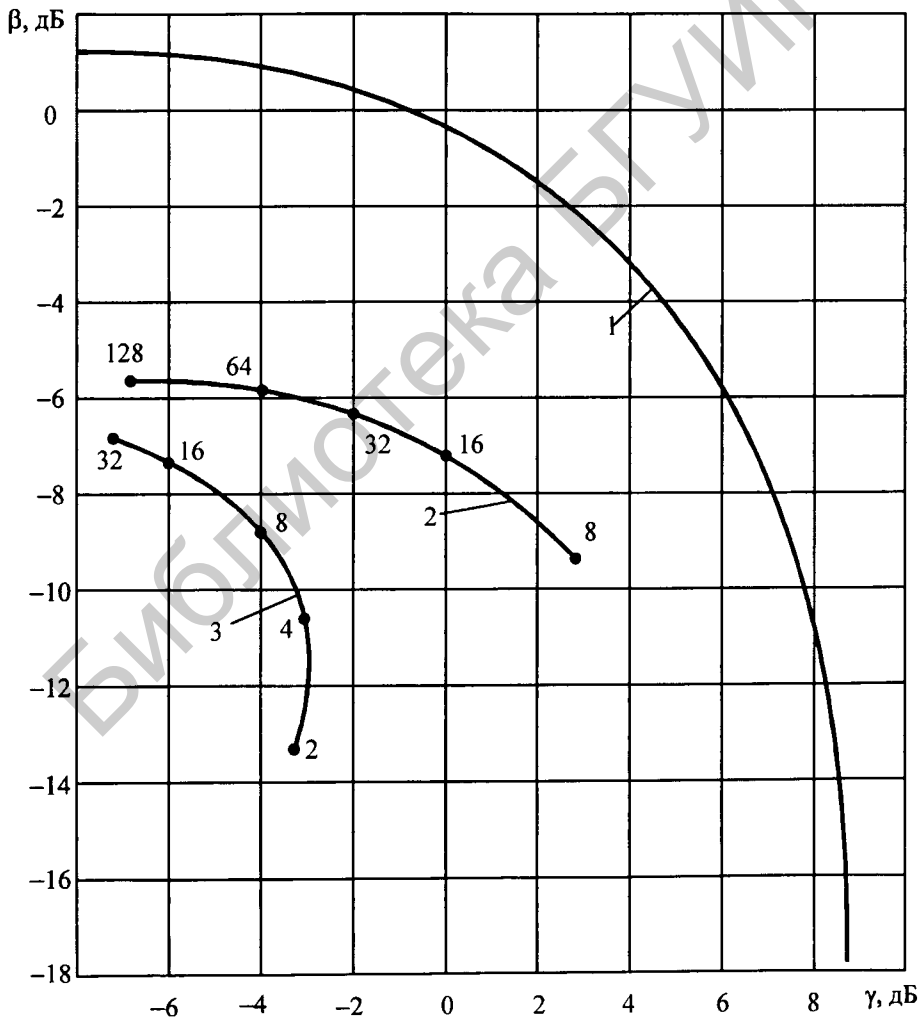


Рис. 9.1. Кривые энергетической и частотной эффективности систем связи

3. Энергетическая эффективность систем связи (как с биортогональными, так и с ортогональными сигналами) увеличивается по мере увеличения числа используемых сигналов. При этом частотная эффективность этих систем уменьшается.

При решении задач оптимизации космических и спутниковых систем связи на одно из первых мест выдвигается проблема создания бортового оборудования с малым весом, малыми габаритами и небольшой потребляемой от источника питания мощностью. Перечисленным требованиям отвечают системы с высокой энергетической эффективностью, характеристики которых будут занимать левую верхнюю часть рис. 9.1.

Если важнейшим показателем качества является не энергетическая, а частотная эффективность систем связи, то характеристики таких систем будут определяться нижней правой областью рисунка.

Расчеты показывают, что применение циклического кода позволяет повысить энергетическую эффективность в обмен на некоторое снижение частотной эффективности (как и при использовании ортогональных сигналов). Если затраты на усложнение конструкции кодирующих и декодирующих устройств меньше затрат на увеличение мощности сигналов в канале связи, то это усложнение окажется оправданным. Поэтому совершенствование элементной базы а также кодирующих и декодирующих устройств с целью их удешевления открывает перспективу для их широкого внедрения. Таким образом, построение и анализ кривых $\beta = f(\gamma)$ позволяет из ряда вариантов систем отбросить заведомо негодные варианты. Однако выбор системы по показателям эффективности β , γ не может быть окончательным, так как при этом не учитываются другие важные показатели, например стоимость.

Контрольные вопросы

1. Что называют эффективностью системы связи и как она определяется количественно?
2. Сформулируйте задачу отыскания оптимальной системы связи. Как записываются условия оптимальности?
3. Что Вы понимаете под синтезом системы? Что такое математический и инженерный синтез системы?
4. В чем сущность системного подхода к исследованию и разработке систем связи?
5. Какие математические выражения определяют энергетическую и частотную эффективность систем связи? Как эти характеристики связаны между собой в идеальной системе связи?
6. Чем отличаются характеристики эффективности реальных систем связи от идеальной по Шеннону системы связи?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория электросвязи – фундаментальная дисциплина, которая своим содержанием определяет профессиональную подготовку инженеров.

Начало формирования теории электросвязи, как отдельной самостоятельной дисциплины, связывают с появлением фундаментальных работ В. А. Котельникова и К. Шеннона.

Влияние этих работ на теорию электросвязи огромно и не уменьшилось до настоящего времени, несмотря на существенный прогресс в развитии этой теории. Дальнейшее развитие теории будет происходить и в обозримом будущем. Это объясняется тем, что потребность в качественной передаче и обработке непрерывно растущих объемов информации постоянно нарастает. При этом основная проблема теории связи, связанная с отысканием методов передачи и приема, обеспечивающих получение требуемой достоверности принимаемых сообщений и повышение скорости передачи, все еще остается актуальной.

Содержание глав данного учебника охватывает основные разделы теории, позволяющие решать задачи передачи информации от источника до потребителя сообщений. Они не выходят за рамки действующей программы по дисциплине «Теория электрической связи» и изложены на основе известных, проверенных методов. Теоретические положения доведены до инженерных расчетов. Спектральный анализ дополнен формулами для спектральной плотности и спектральной плотности мощности периодических сигналов. Приведенные в учебнике решения по расчету информационных характеристик источников непрерывных сообщений и непрерывных каналов (дифференциальной энтропии, производительности источника, скорости передачи информации) позволяют не только обойти вычислительные трудности (так как предполагают использование ЭВМ), но углубить понимание показателей качества.

Из-за ограниченности объема книги отдельные направления теории остались за рамками данной книги. Это в первую очередь касается следующих теорий:

– оптимальных методов приема сигналов на фоне помех, основанных на нелинейной теории фильтрации случайных марковских процессов (непрерывных и дискретных), и оценки помехоустойчивости этих методов;

– теории поиска и синхронизации, в том числе шумоподобных сигналов, включающей анализ и синтез устройств поиска и синхронизации и оценки их помехоустойчивости;

– теории адаптивных систем, позволяющих обеспечить высокую достоверность передачи сообщений в каналах с переменными параметрами при неполной априорной информации о сигналах и помехах. С этими и другими направлениями теории электросвязи любознательный читатель может ознакомиться по монографиям и научным статьям после изучения материала данной книги.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Дельта-функция, свойства функции

Возьмем функцию $u_a(t)$, близкую к единичной функции, и вычислим производную $u'_a(t)$. Графики функции и ее производной приведены на рис. П. 1.1.

Дельта-функция – это предел производной $u'_a(t)$, если приращение аргумента $a \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} u'_a(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(a/2) - u(-a/2)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a}.$$

Рассмотрим основные свойства дельта-функции.

1. Дельта-функция является четной функцией.
2. При стремлении знаменателя полученного выражения к нулю $a \rightarrow 0$ дельта-функция стремится к бесконечности.
3. Площадь, ограниченная дельта-функцией, равна 1, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

4. Если аргумент дельта-функции равен $t - t_0$, то такая функция не равна нулю только в момент времени $t = t_0$.

5. Полезным для расчетов является *фильтрующее* свойство дельта-функции, которое заключается в следующем. Интеграл от произведения

некоторой функции $u(t)$ и дельта-функции равен значению функции $u(t)$ в момент времени, для которого дельта-функция не равна нулю.

Например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t)dt = u(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)\delta(t)dt = u(-\tau).$$

6. Спектральная плотность дельта-функции

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1.$$

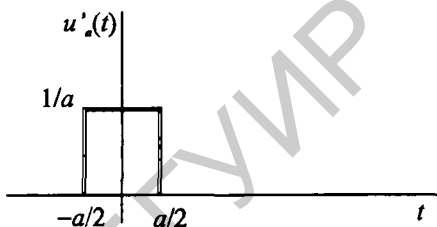
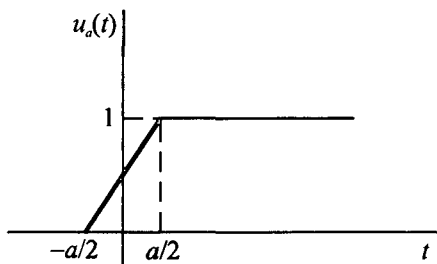


Рис. П.1.1. Функция и производная функции

7. Обратное преобразование Фурье от спектральной плотности дельта-функции дает следующий важный результат:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{П. 1.1})$$

Размерность этой дельта-функции 1/с.

8. В частотной области дельта-функция записывается в виде

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt. \quad (\text{П. 1.2})$$

Размерность этой функции – секунда на радиан.

Дельта-функция является примером так называемых обобщенных функций, определяемых как пределы последовательностей непрерывных функций [30]. Примером последовательностей непрерывных функций является совокупность прямоугольных импульсов единичной площади, длительность которых a , а высота $1/a$ (см. рис. П.1.1).

Приложение 2

Коды Баркера

Последовательность символов $1, -1$ длиной $N, N = 2, 3, 4, \dots$, автокорреляционные функции которых равны N при нулевом сдвиге и 0 или ∓ 1 при других сдвигах, называются кодами Баркера. Установлено, что коды Баркера существуют, если $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Для других значений N

боковые остатки автокорреляционных функций последовательностей выходят за границы значений $-1, 1$.

Сигнал, кодированный кодом Баркера длиной $N = 3$, имеет автокорреляционную функцию, приведенную на рис. 2.8. Коды Баркера могут использоваться в системах связи в качестве синхронизирующих последовательностей.

Приложение 3

Ортогональные коды

Из числа ортогональных функций (математических моделей сигналов) в системах связи чаще других используют двоичные функции, которые определяются ортогональными кодами. Достаточно широкий класс этих кодов формируется на основе матриц Адамара. Под матрицами Адамара понимают квадратные матрицы с элементами $-1, 1$. Строки и столбцы этих матриц можно использовать для формирования ортогональных кодовых комбинаций (слов). Матрицы Адамара имеют порядок либо $N = 2^k$, либо $N = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Например, матрица $A_{N \times M}$ имеет порядок NM . Она получена из матрицы Адамара A_M подстановкой матрицы A_N вместо элемента 1 и $-A_M$ вместо элемента -1 .

Рассмотрим задачу.

Найти матрицу Адамара порядка восемь по матрицам Адамара порядка два и четыре. Матрица порядка два

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрица порядка четыре

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица порядка восемь

$$A_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно получить матрицы более высокого порядка. Если первая строка и первый столбец матрицы содержат только единицы, то такая матрица считается записанной в нормальной форме.

Строки и столбцы этих матриц Адамара можно использовать для формирования ортогональных кодовых слов, так как каждая пара строк (столбцов) удовлетворяет условию ортогональности:

$$r_{i,j}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} b_{j,k} = 0,$$

где a_i, b_j – элементы кодовых слов строк или столбцов ортогонального кода.

Частным случаем ортогональных кодов являются коды (последовательности) Уолша, порядок которых равен $N = 2^k, k = 1, 2, 3, \dots$.

Коды Уолша не относятся к числу самосинхронизирующихся последовательностей, так как боковые «остатки» их автокорреляционных функций имеют сравнительно большие значения, которые приближаются к значениям основных лепестков. По этой причине передачу модулированных двоичными информационными посылками последовательностей Уолша сопровождают специально сформированными сигналами синхронизации.

На основе матрицы Адамара порядка два строятся семейства ортогональных Д-кодов длиной $N = 2^k, k = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим слова Д-кода длиной $N = 2^k$ буквой A^k .

По этому слову можно найти пару слова $\overline{A^k}$, у которой первые 2^{k-1} символы совпадают с первыми 2^{k-1} символами слова A^k , а последние 2^{k-1} символы не совпадают. По любому слову A^k можно найти негативное слово $\underline{A^k}$, если у слова A^k изменить все символы, на противоположные.

В семействе Д-кода имеется 2^k кодовых слова, которые отличаются следующими свойствами.

1. Каждому слову семейства соответствует пара этого слова, а количество таких пар равно 2^{k-1} .

2. Слова с неравными порядковыми номерами $i \neq j$ удовлетворяют условию ортогональности.

3. Д-коды являются самосинхронизирующимися, т. е. боковые «остатки» автокорреляционных функций их слов имеют относительно малые значения по сравнению с основными (значениями соответствующих автокорреляционных функций при нулевых сдвигах).

4. Первая половина семейства Д-кодов длиной 2^k формируется из двух слов Д-кода в два раза меньшей длины по правилу:

$$A^k = A^{k-1} \left| \overline{A^{k-1}} \right.,$$

где $|$ – знак присоединения к слову Д-кода длиной 2^{k-1} его пары.

Вторая половина семейства формируется из двух слов в два раза меньшей длины по правилу:

$$A^k = A^{k-1} \left| \overline{A}^{k-1} \right.$$

Пример. По исходной матрице Адамара порядка два найти Д-код длиной 4.

Решение. Исходная матрица Адамара равна:

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы определяет первое кодовое слово Д-кода $A_1^1 = 11$, а вторая строка – слово $A_2^1 = 1 - 1$. Верхние индексы слов определяют их длину, равную 2^k . Нижние индексы определяют порядковые номера слов кода.

Первую половину семейства Д-кодов длиной 4 находим по формуле

$$A^k = A^{k-1} \left| \overline{A}^{k-1} \right.$$

Для этого к слову $A_1^1 = 11$ присоединяем пару $\overline{A}_1^1 = 1 - 1$. Получим кодовое слово $A_1^2 = A_1^1 \left| \overline{A}_1^1 \right. = 111 - 1$. К слову $A_2^1 = 1 - 1$ присоединяем пару $\overline{A}_2^1 = 11$. Получим слово $A_2^2 = A_2^1 \left| \overline{A}_2^1 \right. = 1 - 111$.

Вторую половину семейства Д-кодов длиной 4 находим по формуле

$$A^k = A^{k-1} \left| \overline{A}^{k-1} \right.$$

Для этого к слову $A_1^1 = 11$ присоединяем негатив пары $\overline{A}_1^1 = -11$. Получим слово $A_3^2 = A_1^1 \left| \overline{A}_1^1 \right. = 11 - 11$. К слову $A_2^1 = 1 - 1$ присоединяем негатив пары $\overline{A}_2^1 = -1 - 1$. Получим слово $A_4^2 = A_2^1 \left| \overline{A}_2^1 \right. = 1 - 1 - 1 - 1$. Д-код длиной

4 равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично находятся Д-коды длиной 8, 16, 32 и т. д.

Симплексные коды

Симплексные коды также строятся на основе матриц Адамара вычеркиванием строк и столбцов этих матриц. Например, вычеркиванием первого столбца и первой строки матрицы A_4 получим матрицу, определяющую код длиной 3.

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Несложно проверить, что взаимно корреляционные функции каждой пары этого кода одинаковы и равны -1 , т. е. удовлетворяют условию (2.50).

Если найдены матрицы более высоких порядков, то можно указанным способом получить симплексные коды большей длины.

Другой, более рациональный способ нахождения симплексных кодов связан с получением и использованием математических уравнений, которые определяют правило кодирования и структурную схему генератора этих кодов. Такими уравнениями являются рекуррентные уравнения, известные для ряда последовательностей: M -последовательностей, последовательностей Лежандра, последовательностей Холла и последовательностей Якоби, которые отличаются тем, что нормированные периодические автокорреляционные функции их кодовых последовательностей удовлетворяют условию:

$$r(q) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k+q} = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ -1/N, & q \neq 0, \end{cases}$$

где a_k – элементы кодовой последовательности, равные $-1, 1$; N – период последовательности; q – сдвиг элементов.

Периодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности при нулевом сдвиге равна 1, а при остальных сдвигах равна $-1/N$. Такая функция называется *двухурневой автокорреляционной функцией*. Очевидно, что если периодическая автокорреляционная функция является двухурневой, то все циклические сдвиги кодовой последовательности определяют симплексный код.

M -последовательности, последовательности Лежандра, последовательности Холла и последовательности Якоби являются линейными рекуррентными последовательностями, удовлетворяющими следующему рекуррентному уравнению:

$$a_i = c_0 + c_1 a_{i-1} + c_2 a_{i-2} + \dots + c_n a_{i-n}, \quad (\text{П.4.1})$$

где значения кодового слова a_i , так же как и коэффициентов c_i , принадлежат двоичному алфавиту, т. е. равны или 0, или 1, а суммирование производится по модулю два.

Уравнение (П. 4.1) называется правилом кодирования, а число n – памятью. Коэффициент c_0 принимают равным нулю и уравнение записывают в виде:

$$a_i = c_1 a_{i-1} + c_2 a_{i-2} + \dots + c_n a_{i-n}. \quad (\text{П.4.2})$$

Полученное уравнение определяет структуру генератора последовательности. В генераторе n последних символов запоминаются, а затем суммируются по модулю два с весами c_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Для M -последовательности с периодом $N = 15$ структурная схема генератора приведена на рис. 3.38. Описание работы генератора приведено в п. 3.7.2. Отметим, что период генерируемой последовательности по уравнению (П.4.2) $N \leq 2^k - 1$, $k = 2, 3, \dots$. Линейные рекуррентные последовательности с максимальным периодом $N = 2^k - 1$ называются M -последовательностями.

Предметный указатель

- Автокорреляционная функция
- кодовой последовательности, 45
 - нормированная, 190
 - периодической кодовой последовательности, 47
 - периодического сигнала, 44
 - сигнала, 38
- Алфавит, 14
- Анализ
- сигналов, 86, 87
 - спектральный, 69, 86
- Аналитический сигнал, 50
- Ансамбль реализаций, 179
- База сигнала, 9, 107, 119
- Базисные функции, 21
- Белый шум, 194
- Быстрое преобразование Фурье, 165
- Вероятность
- апостериорная, 223
 - априорная, 224
 - ложной тревоги, 335
 - ошибки, 19
 - пропуска сигнала, 335
- Взаимно корреляционная функция, 42, 184, 189
- Время передачи информации, 13
- Выборка, 58
- Генерация цифровая, 368
- Девиация частоты, 100
- Декодер, 16
- Декодирование мажоритарное, 266
- Дельта-функция, 402
- Демодулятор, 16
- Демодуляция, 16
- Детектирование
- когерентное (синхронное), 143
 - некогерентное, 131
 - шумоподобных сигналов, 150
- Диаграмма направленности, 386
- Диапазон
- динамический, 9, 13
 - коротковолновый (КВ), 207
 - ультракоротковолновый (УКВ), 207
- Дискретизация, 14, 61
- Дискретизирующая последовательность, 160
- Дискриминатор, 347
- Длительность сигнала, 9
- Замирание сигнала
- гладкое, 203
 - селективное, 203
- Избыточность
- источника дискретных сообщений, 230
 - кода, 253
- Импульсная характеристика, 71
- Индекс амплитудной модуляции, 92
- Индекс частотной модуляции
- дискретной, 107
 - непрерывной, 100
- Интервал
- дискретизации, 128
 - защитный, 379
 - квантования, 128
 - корреляции, 190
- Информация, 7
- взаимная, 225
 - собственная, 225
- Искажение
- информации, 204
 - сигнала, 11, 201
- Источник
- дискретный, 8
 - непрерывный, 8
- Канал
- без памяти, 209
 - дискретно-непрерывный, 13, 211
 - дискретный, 13, 209

- непрерывный, 206
 - однородный, 209
 - связи, 12
- Квантование, 128
- Код
- блочный, 252
 - БЧХ, 266
 - двоичный, 127, 246
 - исправляющий ошибки, 249
 - итеративный, 269
 - каскадный, 269
 - линейный, 252
 - модуляционный, 105, 118
 - нелинейный, 252
 - непрерывный, 252
 - неравномерный, 15, 230
 - ортогональный, 46
 - относительный, 110
 - помехоустойчивый, 15
 - равномерный, 15, 252
 - разделимый, 252
 - рекуррентный, 268
 - сверточный, 268
 - симплексный, 57
 - систематический, 252
 - с проверкой на четность, 252
 - циклический, 252, 260
- Кодер, 15
- Кодирование
- помехоустойчивое, 246
 - эффективное, 230
- Кодовая комбинация, 14
- запрещенная, 246
 - разрешенная, 246
- Кодовое расстояние, 248
- Колебание
- гармоническое, 21
 - когерентное, 105
 - комбинационное, 76
 - некогерентное, 105
- Коммутация, 385
- Коррелятор, 279
- Коэффициент
- гармоник, 204
 - сжатия, 291
- Критерий оптимальности
- информационный, 275
 - максимальной обратной вероятности, 276
 - максимума отношения правдоподобия, 276
 - максимума функции правдоподобия, 343
 - минимума среднеквадратичной ошибки, 343
 - минимума среднего риска, 277, 343
- Математическая модель
- блока (системы), 68
 - канала, 205
- Модуляция
- амплитудная, 16, 84
 - двоичная АМ, 85, 88, 94
 - дискретная, 15, 94, 104, 108
 - дельта-модуляция, 131
 - импульсного переносчика, 123
 - импульсно-кодовая, 126
 - квадратурная АМ, 113
 - многократная ФМ, 111
 - непрерывная, 15, 85
 - относительно фазовая, 16
 - фазовая, 16, 99
 - частотная, 16, 99
 - шумоподобного сигнала, 86
- Моменты распределения, 183
- Мультиплексор, 385
- Норма вектора, 53
- Обнаружение сигнала, 272, 280
- Обработка сигнала, 17
- Отношение
- мощности сигнала к мощности шума, 245, 341
- Ошибка anomальная, 358

- Параметр
 - информационный (представляющий), 8
 - обнаружения, 284
- Парсеваля равенство, 37
- Передачик, 11
- Перемодуляция, 92
- Переносчик (носитель сообщения), 8
- Период, 25
- Периодическая автокорреляционная функция
 - кодовой последовательности, 47
 - сигнала, 44
- Плотность распределения
 - вероятности, 181
 - огибающей, 196
 - фазы, 197
- Поиск
 - во времени, 296
 - по частоте, 296
- Показатель качества, 17, 394
- Полином
 - неприводимый, 260
 - порождающий, 260
- Полоса пропускания канала, 13
- Поляризация, 387
- Помеха
 - аддитивная, 205
 - внешняя, 12, 204
 - внутренняя, 12, 204
 - мультипликативная, 205
 - структурная, 391
- Помехоустойчивость, 17, 18
- Последовательность
 - линейная, 115
 - нелинейная, 115
 - псевдослучайная, 116
- Преобразование
 - аналого-цифровое, 127
 - Лапласа дискретное, 173
 - Фурье, 26
 - Фурье быстрое, 165
 - Фурье дискретное, 163
 - частоты, 80
 - z-преобразование, 172
- Прием
 - адаптивный, 323
 - в целом, 17, 273
 - посимвольный, 17, 272
- Приемник, 11
 - неоптимальный, 314
 - оптимальный, 17, 272
 - корреляционный, 279
 - следящий корреляционный, 345
- Преобразование Гильберта, 50
- Производительность
 - источника дискретных сообщений, 228
 - источника непрерывных сообщений, 240
- Пропускная способность канала связи, 19, 241, 242
- Радиосигнал
 - узкополосный/широкополосный, 9
- Разделение сигналов
 - временное, 379
 - поляризационное, 387
 - по форме, 388
 - частотное, 377
 - фазовое, 384
- Распознавание сигналов, 272, 286
- Распределение Рэлея, 197
- Расстояние Хэмминга, 57
- Регенерация импульсов, 368
- Ретрансляция сигнала, 368
- Ряд Котельникова, 58
- Ряд Уолша, 64
- Ряд Фурье
 - дискретный, 163
 - в комплексной форме, 22
 - в тригонометрической форме, 23
 - обобщенный, 22

- Связь, 10
- Сеть, 10
- Сжатие сигнала, 291
- Сигнал, 8
 - аналитический, 50
 - аналоговый, 9
 - бигармонический, 76
 - вторичный, 8
 - двоичный, 9
 - детерминированный, 8, 20
 - дискретный, 9
 - квазигармонический, 53
 - кодированный, 46
 - модулированный, 8
 - модулирующий, 8
 - однополосный, 96
 - первичный, 8
 - случайный, 8
 - с активной паузой, 105
 - с пассивной паузой, 94
 - узкополосный, 53
 - цифровой, 9
 - шумоподобный, 16
 - эквивалентный, 237
- Синдром, 255
- Синтез
 - инженерный, 395
 - математический, 87, 395
 - оптимального приемника, 277
 - цифрового фильтра, 176
 - эвристический, 277
- Система связи, 10
 - адаптивная, 142
 - аналоговая, 12
 - дуплексная, 12
 - многоканальная, 12
 - оптимальная, 396
 - неоптимальная, 396
 - оптическая, 11
 - проводная, 11
 - радио, 11
 - симплексная, 12
 - телевизионная, 12
 - телеграфная, 12
 - телефонная, 12
 - цифровая, 12
- Система передачи данных, 12
- Скважность, 24
- Скорость передачи информации, 19
- Слово, 14
- Случайный процесс
 - марковский, 187
 - нестационарный, 185
 - нормальный, 192
 - стационарный, 184
 - узкополосный, 194
- Сообщение, 7
 - аналоговое, 7
 - дискретное, 7
 - случайное, 8
 - телефонное, 7
- Спектр
 - амплитуд, 23
 - дискретный, 21
 - ограниченный, 58
 - фаз, 23
 - энергетический, 37
- Спектральная плотность, 25
 - периодической автокорреляционной функции сигнала, 44
 - периодического сигнала, 28
- Спектральная плотность мощности, 38
- Уравнение Винера – Хопфа, 361
- Условие согласования сигнала с каналом, 13
- Устройство тактовой синхронизации, 273
- Фаза мгновенная, 52, 99
- Фильтр
 - дискретный, 157
 - квазиоптимальный, 315
 - Колмогорова – Винера, 360
 - линейный оптимальный, 359
 - линейный цифровой, 170

- рекурсивный, 175
- согласованный, 290
- трансверсальный, 174
- Фильтрация**
 - линейная, 359
 - нелинейная, 359
- Формула Шеннона, 244**
- Функция**
 - автокорреляции, 38
 - взаимной корреляции, 42
 - детерминированная, 20
 - кусочно-линейная, 76
 - Крампа, 197
 - периодическая, 24
 - правдоподобия, 207
 - распределения, 179
 - системная, 173
 - случайная, 179
 - целевая, 394
- Характеристика обнаружения сигнала, 336**
- Частота мгновенная, 52, 99**
- Частотная модуляция**
 - дискретная, 104
 - непрерывная, 97
- Ширина**
 - спектра, 90
 - спектра АМ сигнала, 90, 91
 - спектра ЧМ сигнала, 102
 - спектральной плотности мощности, 191
- Шум**
 - белый, 194
 - квантования, 371
 - квантовый, 338
- Энергия, 9**
- Энтропия, 226**
 - дифференциальная, 232
 - квантованной выборки, 234
- Эпсилон-энтропия, 237**
- Эффективность частотная, энергетическая, 397**

ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников, В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М. : Госэнергоиздат, 1956.
2. Шеннон, К. Математическая теория связи / Работы по теории информации и кибернетике : пер. с англ. / Под ред. Р. Л. Добрушина, О. В. Лупанова. – М. : ИЛ, 1963.
3. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М. : Сов. радио, 1974. – Кн. 2, 1975. – Кн. 3, 1976.
4. Тихонов, В. Н. Статистическая радиотехника. – М. : Радио и связь, 1982.
5. Тихонов, В. Н. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В. Н. Тихонов, Н. К. Кульман. – М. : Сов. радио, 1975.
6. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А. Г. Зюко, А. И. Фалько, И. П. Панфилов и др.; под ред. А. Г. Зюко. – М. : Радио и связь, 1985.
7. Финк, Л. М. Теория передачи дискретной информации. – М. : Сов. радио, 1963.
8. Клюев, Л. Л. Теория электрической связи. – Минск : Дизайн-ПРО, 1998.
9. Теория электрической связи : учебник для вузов под ред. Кловского Д. Д. / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. Н. Коржик, М. В. Назаров. – М. : Радио и связь, 1998.
10. Теория передачи сигналов. Учебник для вузов / А. Т. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Захаров, Л. М. Финк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986.
11. Кловский, Д. Д. Теория электрической связи. Сб. задач и упражнений : учеб. пособ. для вузов / Д. Д. Кловский, В. А. Шилкин. – М. : Радио и связь, 1990.
12. Радиотехнические системы передачи информации : учеб. пособ. для вузов / В. А. Борисов, В. В. Калмыков и др. – М. : Радио и связь, 1990.
13. Бернанд, С. Цифровая связь. Теоретические основы и принципы применения : пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003.

14. Феер, К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции расширенных спектров. – М. : Радио и связь, 2000.
15. Проксис, Дж. Цифровая связь : пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 2000.
16. Помехоустойчивость систем радиосвязи / В. И. Борисов, В. М. Зинчук и др.; под ред. В.И. Борисова. – М. : Радио и связь, 2003.
17. Басакаев, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988.
18. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М. : Радио и связь, 2000.
19. Теплов, Н. Л. Помехоустойчивость систем передачи дискретной информации. – М. : Связь, 1964.
20. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки : пер. с англ. / У. Питерсон, Э. Уэлдон; под ред. Р. Л. Добрушина, С. Н. Самойленко. – М.: Мир, 1976.
21. Кларк, Дж. мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи : пер. с англ. / Дж. Кларк мл., Дж. Кейн. – М. : Радио и связь, 1987.
22. Гуткин, Л. С. Проектирование радиосистем и радиоустройств. – М. : Радио и связь, 1986.
23. Гуткин, Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. – М. : Сов. радио, 1972.
24. Залманзон, Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М. : Наука, 1989.
25. Большаков, М. А. Вопросы нелинейной фильтрации / М. А. Большаков, В. Г. Репин. – Автоматика и телемеханика, 1961. – № 4.
26. Стратонович, Р. Л. К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций. Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – №2.
27. Теория и применение псевдослучайных сигналов / А. И. Алексеев, А. Г. Шереметьев, Г. И. Тузов, Б. И. Глазов. – М. : Наука, 1969.
28. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
29. Заездный, А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. – М. : Связь, 1969.
30. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. – М. : Физматгиз, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СВЯЗИ	7
1.1. Информация, сообщение, сигнал	7
1.2. Связь, сеть связи, система связи	10
1.3. Кодирование и модуляция	14
1.4. Демодуляция и декодирование	16
1.5. Основные характеристики систем связи	17
Контрольные вопросы	19
Глава 2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	20
2.1. Разложение детерминированных функций в ортогональные ряды	20
2.2. Спектральная плотность сигнала	25
2.3. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала	36
2.4. Автокорреляционная функция	38
2.5. Комплексное и квазигармоническое представление узкополосных сигналов	50
2.6. Геометрические представления сигналов	53
2.7. Теорема Котельникова	58
2.8. Ряд Уолша	64
Контрольные вопросы	67
Глава 3. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ ...	68
3.1. Определения линейной, нелинейной и параметрической систем	68
3.2. Преобразования спектров сигналов в параметрических и нелинейных цепях	69
3.2.1. Линейные преобразования дискретного спектра	69
3.2.2. Линейное преобразование непрерывной спектральной плотности	71
3.2.3. Преобразование дискретного спектра параметрической цепью	72
3.2.4. Преобразование параметрической цепью спектральной плотности	73
3.2.5. Безынерционное преобразование дискретного спектра	74
3.2.6. Безынерционное преобразование спектральной плотности	79
3.3. Преобразование частоты. Модуляция и детектирование	80
3.3.1. Преобразование частоты	80

3.3.2. Модуляция	83
3.3.3. Детектирование	86
3.4. Амплитудная модуляция гармонического переносчика	87
3.4.1. Модулирующие сигналы	87
3.4.2. Амплитудная непрерывная модуляция с подавленной несущей	88
3.4.3. Амплитудная непрерывная модуляция с большим уровнем несущей	91
3.4.4. Двоичная амплитудная модуляция	94
3.4.5. Амплитудная модуляция с одной боковой полосой	96
3.4.6. Векторное представление непрерывных амплитудно-модулированных сигналов	97
3.5. Частотная модуляция гармонического переносчика	97
3.5.1. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с малым индексом модуляции	97
3.5.2. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с большим индексом модуляции	101
3.5.3. Методы формирования непрерывного частотно-модулированного сигнала	102
3.5.4. Дискретная частотная модуляция	104
3.6. Фазовая модуляция гармонического переносчика	107
3.6.1. Непрерывная фазовая модуляция	107
3.6.2. Двоичная фазовая модуляция	108
3.6.3. Многократная фазовая модуляция	111
3.6.4. Квадратурная амплитудная модуляция	113
3.6.5. Двоичная фазовая модуляция с одной боковой полосой ...	114
3.6.6. Квадратурная двоичная дискретная фазовая модуляция ...	114
3.7. Дискретная модуляция шумоподобного сигнала	115
3.7.1. Двоичная модуляция постоянного тока	115
3.7.2. Генерирование шумоподобных сигналов	115
3.7.3. Модуляция шумоподобного сигнала по форме	118
3.8. Модуляция импульсного переносчика	123
3.8.1. Амплитудно-импульсная модуляция	123
3.8.2. Широтно-импульсная модуляция. Фазо-импульсная модуляция	125
3.8.3. Импульсно-кодовая модуляция	126
3.8.4. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция	128
3.8.5. Дельта-модуляция	131
3.9. Некогерентное детектирование	131
3.9.1. Некогерентное детектирование непрерывных амплитудно-модулированных сигналов	131
3.9.2. Некогерентное детектирование двоичных сигналов	135

3.9.3. Детектирование непрерывных частотно-модулированных сигналов	135
3.9.4. Детектирование сигналов с амплитудно-импульсной модуляцией	139
3.9.5. Декодирование сигналов с импульсно-кодовой модуляцией	140
3.9.6. Декодирование сигналов с дифференциальной импульсно-кодовой модуляцией	140
3.9.7. Декодирование дельта-модулированных сигналов	141
3.9.8. Детектирование сигналов с широтно-импульсной и сигналов с фазо-импульсной модуляцией	142
3.10. Когерентное детектирование	143
3.10.1. Математическая модель когерентного детектора	143
3.10.2. Когерентное детектирование амплитудно-модулированного сигнала с одной боковой полосой	145
3.10.3. Когерентное детектирование двоичных фазо-модулированных сигналов	147
3.10.4. Детектирование сигналов с относительной фазовой модуляцией	147
3.10.5. Детектирование шумоподобных сигналов	150
3.10.6. Особенности реализации операции умножения в устройствах формирования и преобразования сигналов	152
3.11. Принципы цифровой обработки сигналов	155
3.11.1. Цифровые и дискретные фильтры	155
3.11.2. Основы дискретизации непрерывных сигналов	157
3.11.3. Дискретный ряд Фурье и дискретное преобразование Фурье	163
3.11.4. Быстрое преобразование Фурье	165
3.11.5. Дискретное преобразование Уолша	169
3.11.6. Прямое и обратное z-преобразование	170
3.11.7. Дискретное преобразование Лапласа	173
3.11.8. Трансверсальный цифровой фильтр	174
3.11.9. Рекурсивный цифровой фильтр	175
3.11.10. Пример синтеза линейных цифровых фильтров	176
Контрольные вопросы	177

Глава 4. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. Математические модели непрерывных, случайных процессов	179
4.2. Математические модели дискретных, случайных процессов	186
4.3. Функция корреляции и спектральная плотность мощности	189
4.4. Нормальный случайный процесс	192
4.5. Узкополосные, случайные процессы	194

4.6. Геометрические представления случайных сигналов и помех	197
Контрольные вопросы	199
Глава 5. КАНАЛЫ СВЯЗИ	200
5.1. Общие сведения о каналах передачи информации	200
5.1.1. Классификация каналов	200
5.1.2. Краткие сведения о причинах искажений сигналов	201
5.1.3. Помехи в каналах связи	204
5.2. Математические модели каналов связи	205
5.2.1. Модель непрерывного канала без шума	205
5.2.2. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом	206
5.2.3. Канал с неопределенной фазой сигнала	207
5.2.4. Канал с межсимвольной интерференцией и аддитивным шумом	209
5.2.5. Математические модели дискретных каналов связи	209
5.2.6. Математическая модель дискретно-непрерывного канала связи	211
5.2.7. Особенности оптических каналов связи	211
5.3. Воздействие сигналов и помех на линейные и нелинейные звенья каналов связи	213
5.3.1. Постановка задачи	213
5.3.2. Прохождение случайных сигналов и помех через линейные системы	213
5.3.3. Прохождение случайных сигналов и помех через нелинейные системы	216
5.3.4. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через когерентный детектор	218
5.3.5. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через некогерентный детектор	220
Контрольные вопросы	222
Глава 6. ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ И КОДИРОВАНИЯ СООБЩЕНИЙ ...	223
6.1. Общие сведения	223
6.1.1. Количество информации в дискретных сообщениях. Понятие энтропии	223
6.1.2. Производительность источника дискретных сообщений. Скорость передачи информации	228
6.2. Эффективное кодирование источников дискретных сообщений	229
6.3. Информационные характеристики источников непрерывных сообщений	231
6.3.1. Дифференциальная энтропия	231
6.3.2. Эпсилон-энтропия	237
6.4. Пропускная способность канала связи	241

6.4.1. Пропускная способность дискретного канала связи	241
6.4.2. Пропускная способность непрерывного канала связи	242
6.5. Основы теории помехоустойчивого кодирования	245
6.5.1. Теорема кодирования для канала с помехами	245
6.5.2. Принципы построения помехоустойчивых кодов	246
6.5.3. Классификация помехоустойчивых кодов	252
6.5.4. Линейные двоичные блочные коды	253
6.5.5. Циклические, сверточные и каскадные коды	260
Контрольные вопросы	270
Глава 7. ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ ..	272
7.1. Оптимальный прием элементов дискретных сообщений.	
Критерии оптимального приема	272
7.2. Синтез оптимальных приемников при приеме элементов дискретных сигналов, известных точно	277
7.2.1. Реализация оптимального приема на базе коррелятора	277
7.2.2. Бинарное обнаружение сигналов	280
7.2.3. Бинарное распознавание сигналов	286
7.2.4. Реализация алгоритма оптимального приема на основе согласованных фильтров	289
7.3. Оптимальный прием дискретного сигнала со случайными параметрами	298
7.3.1. Оптимальный прием при неопределенной фазе дискретного сигнала	298
<i>Прием дискретного ЧМ-ФМ сигнала</i>	<i>302</i>
<i>Прием дискретного ЧМ сигнала</i>	<i>304</i>
<i>Прием ортогональных фазомодулированных сигналов одинаковой энергии</i>	<i>304</i>
<i>Прием двоичных сигналов</i>	<i>305</i>
7.3.2. Оптимальный прием при неопределенной фазе и амплитуде элементов сигнала	313
7.4. Неоптимальные методы приема дискретных сообщений	314
7.5. Цифровые методы обработки сигналов в приемнике	317
7.6. Методы приема дискретных сообщений в каналах с рассеянием ...	318
7.7. Способы борьбы с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами	322
7.8. Анализ помехоустойчивости систем связи при приеме элементов сигналов, известных точно	324
7.8.1. Потенциальная помехоустойчивость двоичной системы при приеме элементов сигналов, известных точно	324
7.8.2. Помехоустойчивость оптимального приема m сигналов, известных точно	328
7.8.3. Помехоустойчивость оптимального приема m сигналов с неизвестными (случайными) начальными фазами	334

7.8.4. Помехоустойчивость оптимального приема амплитудно-модулированного сигнала с неизвестной (случайной) начальной фазой	335
7.8.5. Помехоустойчивость приема оптических сигналов	336
7.9. Оптимальный прием непрерывных сообщений	340
7.9.1. Показатели качества передачи	340
7.9.2. Прием отдельных значений непрерывных сообщений. Критерии оптимальности	341
7.9.3. Прием сигнала, модулированного сообщением	349
7.9.4. Сравнительная оценка помехоустойчивости систем передачи непрерывных сообщений	353
7.9.5. Порог помехоустойчивости в системах с широкополосными видами модуляции	357
7.10. Оптимальная линейная и нелинейная фильтрация	359
7.10.1. Линейная фильтрация сигнала	359
7.10.2. Понятие о нелинейной фильтрации	363
7.11. Цифровые методы передачи непрерывных сообщений	367
7.11.1. Общие сведения о цифровых методах передачи. Помехоустойчивость цифровых методов передачи непрерывных сообщений	367
7.11.2. Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом	370
7.11.3. Мощность шума квантования	371
7.11.4. Влияние помех на качество передачи сообщений	372
7.11.5. Влияние квантования и помех на качество передачи сообщений	373
Контрольные вопросы	375
Глава 8. ПРИНЦИПЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СВЯЗИ	376
8.1. Основы теории разделения сигналов	376
8.2. Методы частотного, временного и фазового разделения сигналов	377
8.2.1. Частотный метод разделения сигналов	377
8.2.2. Временное и фазовое разделение сигналов	379
8.2.3. Разделение сигналов в волоконно-оптических системах связи	384
8.3. Другие виды разделения сигналов	385
8.3.1. Пространственное разделение	385
8.3.2. Поляризационное разделение сигналов	387
8.3.3. Разделение сигналов по форме	388
Контрольные вопросы	393
Глава 9. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ СВЯЗИ	394
9.1. Оценка эффективности систем связи	394

9.2. Принципы системного подхода к исследованию и разработке систем связи	395
9.3. Анализ систем связи по их эффективности	397
9.3.1. Энергетическая и частотная эффективность систем связи	397
Контрольные вопросы	400
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	401
ПРИЛОЖЕНИЯ	402
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	409
ЛИТЕРАТУРА	414

Библиотека БГУИР