

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

---

Кафедра радиотехнических устройств

**В. А. Чердынцев**

## **ПРИЁМ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ**

Учебное пособие  
для студентов радиотехнических специальностей

Минск 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

## Введение

1. МОДЕЛИ ПОМЕХ .....	6
2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И СОГЛАСОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ .....	15
3. БЕЗЫНЕРЦИОННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛАБОГО СИГНАЛА И ПОМЕХИ .....	18
4. ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ .....	22
5. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ .....	30
6. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА .....	90
7. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ .....	106
8. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ .....	125
9. ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ .....	134

## Список литературы

## Введение

При проектировании устройств приема и обработки радиосигналов необходимо учитывать действие помех в канале. Помехи по характеру возникновения делятся на внутренние и внешние. Внутренние помехи обусловлены действием шума в антенне и входных цепях радиоприемного устройства. Этот шум является широкополосным случайным процессом, спектральная плотность которого постоянна в широком диапазоне частот. Внешние помехи порождаются электромагнитными процессами в атмосфере, излучениями энергетических установок, радиоэлектронных средств. Характеристики таких помех разнообразны, учет их может существенно повысить качество информации, выделяемой в результате приема и обработки радиосигналов.

Существенным при рассмотрении указанных задач является представление коррелированных помех в виде узкополосных негауссовских процессов. Такое представление соответствует реальным мешающим сигналам от сторонних радиосредств, сопутствующим приему полезных сигналов. Статическое описание узкополосных негауссовских процессов не всегда возможно, поэтому результаты теории оптимального приема для таких помех носят фрагментарный характер. В пособии предложена модель коррелированного процесса, плотность распределения вероятности которого, имеет две моды (бимодальная помеха). На основе этой модели рассматриваются особенности приема и обработки сигналов, определяется влияние спектральных и статических характеристик помех на качественные показатели обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов.

Особенности задач приема заключаются в следующем.

Радиоприемное устройство обнаружения сигнала выносит решение о наличии или об отсутствии сигнала в принимаемой реализации  $r(t)$ . Наблюдаемая реализация  $r(t)$ , действующая на входе приемника обнаружения, представляется в виде

$$r(t) = \theta s(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{B.1})$$

где  $\theta = \{0, 1\}$  - параметр обнаружения, принимающий значение 1 при наличии в смеси  $r(t)$  сигнала  $s(t, \lambda)$ , и 0 - при отсутствии сигнала; сигнал  $s(t, \lambda)$  представляет детерминированную функцию времени  $t$  и параметров  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , которые могут быть случайными величинами или процессами;  $y(t)$  - аддитивная помеха,  $T$  - длительность интервала наблюдения.

Радиоприемное устройство различения в общем (многоальтернативном) случае выносит решение о наличии в смеси  $r(t)$  одного из  $k$  возможных сигналов  $s_i(t, \lambda)$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Для  $k=2$  (задача бинарного различения) смесь  $r(t)$  представляется в виде

$$r(t) = \theta s_1(t, \lambda) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{B.2})$$

где приняты обозначения, аналогичные (B.1).

При оценивании параметра  $\lambda$  сигнала  $s(t, \lambda)$  радиоприемное устройство формирует решение  $\lambda^*[r(t)]$  в конце интервала наблюдения  $t=T$  о значении параметра. Параметр  $\lambda$  считается случайной величиной с заданной априорной плотностью распределения вероятности  $W_{pr}(\lambda)$ . Смесь  $r(t)$  на входе приемника записывается в виде

$$r(t) = s(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{В.3})$$

Пособие включает разделы, посвященные моделям помех и сигналов, статистическому описанию коррелированных помех, структурному синтезу и помехоустойчивости приемников обнаружения и различения сигналов, оценку их параметров. Отдельно обсуждаются вопросы построения амплитудно-частотных подавителей помех в тракте приема сигналов. Изложение материала сопровождается примерами и задачами.

### 1.1. Основные характеристики сигналов

Радиосигнал, излучаемый передающей антенной, представляет узкополосный процесс

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]. \quad (1.1)$$

Здесь функции  $A(t)$  и  $\psi(t)$  отображают законы амплитудной и фазовой модуляции. По сравнению с колебанием несущей частоты  $\cos \omega_0 t$  эти функции являются медленно изменяющимися. Ширина  $\Delta\omega$  спектра сигнала (1.1) много меньше несущей частоты  $\omega_0$ .

Вследствие распространения электромагнитных колебаний из-за турбулентности среды, изрезанности диаграмм направленности антенны сигнал в месте приема  $s(t, \lambda)$  отличается от переданного

$$s(t, \bar{\lambda}) = b(t) A(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau) - \varphi(t)], \quad (1.2)$$

где множитель  $b(t)$  характеризует амплитудные замирания во многих системах радиосвязи,  $\varphi(t)$  - фазовый сдвиг по несущей частоте,  $\bar{\lambda} = \{b, \tau, \varphi\}$  - параметры сигнала.

Модель сигнала (1.2) достаточно полно описывает флуктуации отраженного сигнала в радиолокации и замирания в системах радиосвязи. Совместная плотность распределения вероятности (ПРВ) случайных величин  $b$  и  $\varphi$  часто принимается в виде

$$W(b, \varphi) = \begin{cases} \frac{b}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right], & b \geq 0, |\varphi| \leq \pi \\ 0, & \text{для других } b \text{ и } \varphi \end{cases} \quad (1.3)$$

Исследования медленных замираний сигналов в радиоприемниках, использующих ионосферное или тропосферное рассеяния, показывают, что замирания в таких системах приближенно описывается законом Рэлея и

имеют квазистационарный характер на временных интервалах порядка нескольких минут.

Для систем радиосвязи, использующих отражение электромагнитных волн от ионосферы, принимаемый сигнал содержит как регулярную (зеркальную), так и случайную (рассеянную) составляющие. В этом случае совместная ПРВ  $W(b, \varphi)$  представляется выражением

$$W(b, \varphi) = \begin{cases} \frac{b}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{b^2 + b_0^2 - 2ba_0 \cos(\varphi - \delta)}{2\sigma^2}\right\}, & b \geq 0, \quad |\varphi - \delta| \leq \pi \\ 0, & \text{для других } b \text{ и } \varphi, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $a_0$  - амплитуда регулярной составляющей сигнала.

Интегрируя (1.4) по  $\varphi$ , получим выражение для ПРВ  $W(a)$  в виде закона Райса:

$$W(a) = \frac{b}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{b^2 + b_0^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{ba_0}{\sigma^2}\right), \quad b \geq 0 \quad (1.5)$$

Здесь  $I_0(x)$  - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. При  $a_0 = 0$  из (1.5) следует Рэлеевский закон распределения:

$$W(a) = \frac{b}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right], \quad b \geq 0 \quad (1.6)$$

При решении задач теории оптимального радиоприема рассматриваются следующие частные виды радиосигналов.

1) Сигнал с полностью известными параметрами  $\lambda = \lambda_0$ :

$$s(t, \lambda_0) = A(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi_0], \quad t \in [0, T] \quad (1.7)$$

Нулевым индексом обозначены известные параметры. В задаче обнаружения остается неизвестным лишь факт наличия сигнала в принимаемом колебании  $r(t)$ . Здесь  $T$  обозначает длительность сигнала.

2) Сигнал со случайной начальной фазой

$$s(t, \lambda_0) = A(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \beta], \quad t \in [0, T] \quad (1.8)$$

Все параметры сигнала за исключением начальной фазы  $\varphi \equiv \beta$  считаются известными. Фаза  $\beta$  - случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

3) Сигнал со случайной амплитудой и начальной фазой

$$s(t, \lambda_0) = s(t, b, \beta) = bA(t - \tau) \cos[\omega t + \psi(t - \tau) + \beta], \quad t \in [0, T] \quad (1.9)$$

Считается, что  $b$  и  $\beta$  являются независимыми случайными величинами, причем  $b$  распределена по закону Рэля (1.6), а  $\beta$  - равномерно на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

4) Модели сигналов, в которых параметры  $\lambda$  представляют случайные процессы, отражают многие задачи, характерные для систем передачи информации. При описании параметров  $\lambda(t)$  марковскими процессами

используют аппарат марковской теории нелинейной фильтрации, на основе которой осуществляется структурный синтез устройств приема. Некоторые примеры таких задач рассмотрены в [1].

В данном пособии будут, в основном, использованы первая, вторая и третья модели сигналов.

## 1. МОДЕЛИ ПОМЕХ

### 1.1 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайный процесс характеризуется тем, что какая-либо физическая величина изменяется в некотором абстрактном пространстве случайным образом. Конкретный вид случайного процесса (т.е. единичная фотография или осциллограмма) в определенном опыте называется реализацией случайного процесса. В качестве синонимов употребляются также термины "выборочная функция" и "траектория случайного процесса".

В радиотехнике наиболее часто приходится оперировать со случайными процессами, зависящими от одного аргумента - времени. При этом под случайным (стохастическим) процессом обычно понимается физическая величина, например, ток, напряжение, напряженность поля и др., изменяющаяся случайно во времени.

В зависимости от характера изменения во времени и методов рассмотрения случайные процессы можно разделить на три группы: импульсные, флуктуационные и специального вида.

Импульсные процессы представляют собой последовательность одиночных импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через случайные промежутки времени. Как правило, реализации импульсного процесса представляют собой кусочно-разрывные функции времени. К импульсным процессам можно отнести искусственно создаваемые импульсные помехи, а также некоторые виды атмосферных помех (например, грозные разряды) и помех от электрических аппаратов.

Флуктуационные процессы представляют результирующий эффект очень большого числа часто следующих элементарных импульсов, налагающихся друг на друга. Реализации флуктуационного процесса имеют вид непрерывных функций времени. К числу флуктуационных процессов относятся тепловые и космические шумы, шумы полупроводниковых приборов и др.

Случайные процессы специального вида могут быть весьма разнообразными. Можно привести следующий пример. Пусть гармоническое колебание  $A \cos(\omega t + \varphi)$  модулируется по амплитуде флуктуационным напряжением, а по частоте - случайными импульсами. Тогда получим случайный процесс специального вида  $A(t) \cos(\omega t + \varphi(t))$ .

## 1.1. Способы полного статистического описания случайных процессов

Предположим, что имеется большое число  $N$  полностью одинаковых систем, образующих некоторый "ансамбль" систем (т.е. полную группу событий). Пусть все системы работают одновременно при одинаковых условиях. На выходе этих систем наблюдается случайный процесс  $x(t)$ . Если к каждой системе подключить одинаковые регистрирующие приборы (например, осциллографы) и на всех приборах в одно и то же время отсчитать мгновенные значения, то получим отличающиеся друг от друга значения  $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1), \dots, x_N(t_1)$ .

Выделим из общего числа  $N$  те  $n_1$  значений, которые заключены в достаточно малом интервале  $(x, x + \Delta x)$ . Оказывается, что при достаточно большом числе  $N$  относительная доля  $n_1/N$  значений, заключенных в этом интервале, стремится к некоторой определенной величине, пропорциональной  $\Delta x$  и зависящей от  $t_1$ , как от параметра. Следовательно, можем написать

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = W_1(x, t_1) \Delta x \quad (1.1)$$

Функция  $W_1(x, t_1)$  называется одномерной плотностью вероятности случайного процесса.

Одномерная плотность вероятности является важной, но не полной характеристикой случайного процесса. Она дает представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные моменты времени, не указывая, например, как значения  $x(t_1)$  в момент времени  $t_1$  влияют на дальнейшее поведение процесса при  $t_2 > t_1$ . Можно сказать, что одномерная плотность вероятности характеризует процесс статически и не дает представления о динамике его развития.

Более полной характеристикой случайного процесса является двумерная плотность вероятности, характеризующая вероятностную связь между значениями случайной функции в два произвольных момента времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Полное описание случайного процесса  $x(t)$  может быть достигнуто заданием совокупности многомерных плотностей вероятностей. Выберем  $n$  произвольных значений аргумента  $t_1, \dots, t_n$  из интервала наблюдения  $t_n \leq t_j \leq t_k$ ,  $t_k - t_n = T$  и рассмотрим значения процесса  $x_j = x(t_j)$  в эти моменты времени. Переменные  $x_j$  являются случайными величинами. Любое конкретное значение  $x^j$  случайной величины  $x_j$  часто называют выборочным значением; все  $n$  выборочных значений образуют  $n$ -мерную выборку, являющуюся точкой в  $n$ -мерном пространстве выборок.

Зададим следующую систему вероятностей:

$W(x^1)dx^1$  — вероятность того, что  $x^1 < x_1 < x^1 + dx^1$ ;  $W(x^1, x^2)dx^1 dx^2$  — вероятность того,

что  $x^1 < x_1 < x^1 + dx^1$ ,  $x^2 < x_2 < x^2 + dx^2$ ;  $W(x^1, \dots, x^n)dx^1 \dots dx^n$  — вероятность того, что  $x^1 < x_1 < x^1 + dx^1$ ,  $x^2 < x_2 < x^2 + dx^2$ , .....,  $x^n < x_n < x^n + dx^n$ .

Функция  $W(x^1, \dots, x^n)$  называется  $n$ -мерной плотностью распределения вероятности.

При изучении дискретных систем плотности вероятностей являются удобным средством исследования. В некоторых задачах, однако, полезнее "непрерывное" описание случайных процессов и, в частности, продуктивно используется функционал плотности вероятности случайного процесса. Выберем моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  так, что  $t_m - t_{m-1} = \Delta$ ;  $m=2,3,\dots,n$ , и рассмотрим предел, к которому стремится  $n$ -мерная плотность распределения вероятности в случае, если  $\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Характеристика случайного процесса, получаемая в результате подобного предельного перехода, учитывает все статистические свойства случайного процесса  $x(t)$  и называется функционалом плотности вероятности:

$$F(x_p(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} W(x^1, \dots, x^n) \quad (1.2)$$

Величина плотности вероятности  $W(x^1, \dots, x^n)$  зависит от значений  $x^1, \dots, x^n$ , принимаемых случайными переменными  $x_1, \dots, x_n$ . Аналогично этому величина функционала плотности вероятности зависит от того, какая именно реализация  $x_p(t)$  выбрана из множества реализаций случайного процесса  $x(t)$ .

Определение функционала требует дополнительных пояснений, а именно: не существует отличного от 0 или  $\infty$  предела. Вместе с тем существует конечный предел:

$$\frac{F(x_p^1(t))}{F(x_p^2(t))} = \lim_{\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{W(x^{1.1}, \dots, x^{1.n})}{W(x^{2.1}, \dots, x^{2.n})} \quad (1.3)$$

где  $x^{1.1}, \dots, x^{1.n}$  - значения реализации  $x_p^1(t)$ ;  $x^{2.1}, \dots, x^{2.n}$  - значения реализации  $x_p^2(t)$  в выбранные моменты времени. Отношение функционалов плотностей вероятностей показывает, насколько реализация  $x_p^1(t)$  более (или менее) вероятна, чем реализация  $x_p^2(t)$ . При использовании функционалов для синтеза оптимальных устройств оказывается важным именно это обстоятельство. Поэтому обычно условно считается, что функционал плотности вероятности определен с точностью до неизвестного множителя  $h$ , исчезающего при практическом использовании функционала.

Вместо плотностей вероятностей для описания случайного процесса можно задавать характеристические функции. Характеристическая функция



представляет собой преобразование Фурье от соответствующей плотности вероятности:

$$\Theta(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \int \dots \int W(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \cdot \exp(j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)) dx_1 \dots dx_n = \langle \exp(j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)) \rangle \quad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают операцию математического ожидания или, иначе, операцию статистического усреднения (т. е. усреднения по ансамблю реализаций).

Из формулы видно, что характеристическая функция независимых случайных величин равна произведению характеристических функций отдельных величин. Этот результат часто используют при вычислении плотности вероятности суммы независимых случайных величин.

### **1.3. Описание случайных процессов с помощью моментных и корреляционных функций.**

Хотя полное описание случайного процесса дается многомерными плотностями вероятности, однако в ряде случаев целесообразно оперировать с другими, более простыми характеристиками случайного процесса. Это объясняется несколькими соображениями.

1. Во многих задачах нужно рассматривать преобразование случайных процессов линейными и нелинейными инерционными системами. Пусть из рассмотрения физической модели источника процесса получены выражения для плотностей вероятностей. Тогда за исключением так называемых марковских процессов и линейного преобразования нормальных процессов нельзя указать метод "пересчета" непосредственно самих плотностей вероятностей при инерционных преобразованиях случайных процессов. Эта задача решается приближенно путем пересчета отдельных характеристик случайного процесса, позволяющих в принципе найти плотность вероятности для преобразованного процесса.

2. Предположим, что нам неизвестен физический механизм устройства, создающего процесс. Тогда для выяснения характера случайного процесса необходимо экспериментально определять соответствующие плотности вероятности. Экспериментально сравнительно просто можно определить частные характеристики процесса. Экспериментальное же определение самих плотностей вероятностей в большинстве практических случаев оказывается очень сложным и дорогостоящим делом. Здесь исключение составляет одномерная плотность вероятности, для определения которой в настоящее время имеются приборы. Однако она не содержит временных характеристик, обычно необходимых для решения практических задач.

3. Имеются часто встречающиеся случайные процессы, плотности вероятности для которых определяются небольшим числом параметров.

4. Ответ на ряд практических задач может быть получен из рассмотрения отдельных, частных характеристик случайного процесса.

5. Иногда ограничиваются получением ориентировочных оценок процесса по его отдельным характеристикам, а не точного результата, даваемого соответствующими плотностями вероятности. В качестве характеристик случайного процесса, более простых, чем плотности вероятности, можно использовать моментные или корреляционные функции. Ценным свойством моментных и корреляционных функций является то, что функции более низкого порядка несут больше сведений о случайном процессе, чем функции высокого порядка.

Под моментными функциями случайного процесса  $x(t)$ , заданного на некотором интервале, понимаются функции  $M_{i_1}(t), M_{i_1, i_2}(t), \dots, M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , симметричные относительно всех своих аргументов, являющиеся статистическими средними (математическими ожиданиями) произведений

$$\begin{aligned} M_{i_1}(t) &= \langle x^{i_1}(t) \rangle = \int x^{i_1} W(x, t) dx, \\ M_{i_1, i_2}(t_1, t_2) &= \langle x^{i_1}(t_1) x^{i_2}(t_2) \rangle = \int x_1^{i_1} x_2^{i_2} W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \\ M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \langle x^{i_1}(t_1) x^{i_2}(t_2) \dots x^{i_n}(t_n) \rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Момент  $M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , зависящий от  $n$  несовпадающих аргументов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , называется  $n$ -мерным моментом  $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ -го порядка.

Вместо моментов  $M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , называемых начальными, можно рассматривать центральные моменты, которые определяются соотношением

$$\mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle (x(t_1) - M_1(t_1))^{i_1} (x(t_2) - M_1(t_2))^{i_2} (x(t_3) - M_1(t_3))^{i_3} \dots (x(t_n) - M_1(t_n))^{i_n} \rangle \quad (1.6)$$

Моментные функции можно также получить из характеристической функции путем ее разложения в ряд Маклорена.

Перейдем к определению корреляционных функций. Корреляционные функции  $K_1(t_1), K_2(t_1, t_2), K_3(t_1, t_2, t_3), \dots$  определяются при помощи разложения в ряд Маклорена не самой характеристической функции, а ее логарифма. Аналогами корреляционных функций в одномерном случае являются так называемые кумулянты.

Не приводя здесь формальных разложений, укажем окончательные формулы для первых трех корреляционных функций:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= M_1(t) = \langle x(t) \rangle; \\ K_2(t_1, t_2) &= \mu_2(t_1, t_2) = \langle (x(t_1) - M_1(t_1))(x(t_2) - M_1(t_2)) \rangle, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} K_3(t_1, t_2, t_3) &= M_3(t_1, t_2, t_3) - M_1(t_1)K_2(t_2, t_3) - \\ &- M_1(t_2)K_2(t_1, t_3) - M_1(t_3)K_2(t_1, t_2) + 2M_1(t_1)M_1(t_2)M_1(t_3). \end{aligned}$$

По моментным и корреляционным функциям можно восстановить характеристическую функцию и, следовательно, плотность вероятности. Поэтому моментные функции так же, как и корреляционные, могут быть использованы для описания случайных процессов.

Отметим, что наибольшее распространение при описании случайных процессов получили одномерный момент  $M_1(t_1)$  и корреляционная функция  $K_2(t_1, t_2)$ , совпадающая с двумерным центральным моментом второго порядка.

#### 1.4. Стационарные и нестационарные случайные процессы

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Случайный процесс  $x(t)$  называется стационарным в узком смысле, если его плотности вероятности  $W(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  произвольного порядка  $n$  не меняются при любом сдвиге всей группы точек  $t_1, \dots, t_n$  вдоль оси времени, т. е. если при любых  $n$  и  $t_0$  справедливо равенство

$$W(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = W(x_1, \dots, x_n, t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0). \quad (1.8)$$

Случайный процесс  $x(t)$  называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание  $M_1(t_1)$  постоянно (т. е. не зависит от времени), а корреляционная функция  $K_2(t_1, t_2)$  зависит только от разности аргументов  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{aligned} M_1(t) &= M_1, \\ K_2(t_1, t_2) &= K(t_2 - t_1) = K(\tau). \end{aligned} \quad (1.9)$$

В общем случае стационарность в широком смысле не тождественна стационарности в узком смысле. Случайные процессы, стационарные в узком смысле, будут всегда стационарны в широком смысле, но не наоборот.

## 1.5. Спектральная плотность

Введем важное понятие спектральной плотности (интенсивности)  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса  $x(t)$ , определив ее как преобразование Фурье от автокорреляционной функции:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (1.10)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$K_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (1.11)$$

Спектральная плотность  $S(\omega)$  при всех частотах неотрицательна. Функция  $S(\omega)$  характеризует распределение мощности по спектру, поэтому спектральную плотность иногда называют спектром мощности или энергетическим спектром, так как она имеет размерность энергии.

Корреляционная функция  $K_2(\tau)$  и спектральная плотность  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса обладают всеми свойствами, характерными для пары преобразований Фурье. В частности, чем "шире" спектр  $S(\omega)$ , тем "уже" корреляционная функция  $K_2(\tau)$ , и наоборот.

Необходимо заметить, что спектральная плотность  $S(\omega)$  определена для положительных и отрицательных значений круговой частоты  $\omega$ , причем  $S(\omega) = S(-\omega)$ . В отличие от такого двустороннего "математического" спектра, введем одностороннюю "физическую" спектральную плотность  $S_\phi(\omega)$ , отличную от нуля лишь при положительных частотах:

$$S_\phi(\omega) = S(-\omega) + S(\omega) = 2S(\omega). \quad (1.12)$$

В отличие от спектрального анализа детерминированных сигналов спектральная плотность случайного процесса не дает возможности восстановить какую-либо реализацию процесса, так как она не содержит сведений о фазах отдельных спектральных составляющих. Можно найти множество различных случайных функций (например путем трансформации фазового спектра), имеющих одинаковую спектральную плотность и функцию корреляции.

## 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И СОГЛАСОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ.

Такие фильтры применяются при обнаружении и различении детерминированных сигналов. Критерием оптимальности применения этих фильтров является получение на выходе фильтра максимально возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению помехи.

Получим выражение комплексной частотной и импульсной характеристик оптимального фильтра. На входе линейного фильтра с комплексной частотной характеристикой  $K(j\omega)$  действует сумма полностью известного сигнала  $s(t)$  и помехи  $y(t)$ , представляющей собой стационарный случайный процесс с известной спектральной плотностью  $S_y(\omega)$ :

$$r(t) = s(t) + y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.1)$$

Обозначим полезный сигнал на выходе фильтра через  $s_B(t)$  и помеху на выходе через  $y_B(t)$ . Пусть сигнал  $s(t)$  имеет спектральную функцию

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

тогда спектральная функция на выходе фильтра определяется произведением  $S(j\omega)K(j\omega)$ , а выходной сигнал выражением

$$s_B(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.2)$$

Спектральная плотность помехи на выходе фильтра определяется выражением  $S_y(\omega)|K(j\omega)|^2$ , поэтому дисперсия помехи на выходе фильтра равна

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)|K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.3)$$

На основании (2.2) и (2.3) получим выражение для отношения сигнал/помеха по мощности на выходе фильтра в некоторый момент времени  $t_0$ :

$$q = \frac{|s_B(t_0)|^2}{\sigma_B^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega) \exp(j\omega t_0) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)|K(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.4)$$

Задача заключается в том, чтобы найти такую функцию  $K(jw)$ , при которой отношение (2.4) в некоторый момент времени  $t_0$  достигает максимума. Эта задача решается с помощью неравенства Буняковского-Шварца:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx. \quad (2.5)$$

Знак равенства имеет место в том случае, если комплексные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  равны с точностью до постоянного коэффициента  $C_0$ :

$$g(x) = C_0 f(x). \quad (2.6)$$

Звездочка в (2.5) обозначает комплексно-сопряженную функцию.

Запишем неравенство (2.5) в виде

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(w)y(w)dw \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(w)|^2 dw} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(w)|^2 dw.$$

Положим

$$f^*(w) = \frac{S(jw)e^{jw t_0}}{\sqrt{2\pi S_y(w)}}, \quad g(w) = K(jw)\sqrt{S_y(w)},$$

тогда имеем:

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(jw)K(jw)e^{jw t_0} dw \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_y(w)|K(jw)|^2 dw} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(jw)|^2}{S_y(w)} dw. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что максимально возможное значение отношения сигнал/помеха определяется правой частью (2.7), т.е. величиной

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(jw)|^2}{S_y(w)} dw. \quad (2.8)$$

Согласно (2.6) это значение достигается при выполнении условия

$$K(jw)\sqrt{S_y(w)} = \frac{C_0 S^*(jw) \exp(-jw t_0)}{\sqrt{2\pi S_y(w)}}$$

или

$$K(jw) = C_0 \frac{S^*(jw)}{S_y(w)} \exp(-jw t_0). \quad (2.9)$$

где  $C_0$  - постоянный коэффициент,  $t_0$  - момент времени, соответствующий наибольшему отношению пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению помехи. Зная комплексную частотную характеристику фильтра (2.9), путем преобразования Фурье можно найти импульсную характеристику фильтра. Заметим, что в частном случае, когда помеха  $y(t)$  является белым гауссовским шумом, обработка смеси (2.1) линейным фильтром (2.9) обеспечивает оптимальность, а такой фильтр называется согласованным.

Действительно, положим  $S_y(w) = N_0 / 2 = const$ , тогда формулы (2.8), (2.9) примут вид соответственно:

$$q_0 = \frac{2E}{N_0} \quad (2.10)$$

$$K_0(jw) = k S^*(jw) \exp(-jw t_0), \quad (2.11)$$

где  $k$  - постоянная, характеризующая усиление фильтра;  $E$  - энергия сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(jw)|^2 dw. \quad (2.12)$$

Запишем спектр входного сигнала и комплексную частотную характеристику фильтра в виде

$$S(jw) = |S(jw)| \exp(j\varphi_s(w)); \quad K_0(jw) = |K_0(jw)| \exp(j\varphi(w)). \quad (2.13)$$

Для согласованного фильтра из (2.11) получим

$$|K_0(jw)| = k |S(jw)|; \quad \varphi(w) = -(\varphi_s(w) + w t_0). \quad (2.14)$$

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) согласованного фильтра пропорциональна амплитудно-частотному спектру входного сигнала (т.е. согласована со спектром сигнала), а фазочастотная характеристика равна сумме фазочастотного спектра сигнала, взятого с обратным знаком, и фазового спектра задержки ( $-j\omega t_0$ ).

Совпадение формы АЧХ фильтра с амплитудно-частотным спектром сигнала обеспечивает наилучшее выделение наиболее интенсивных участков спектра сигнала. Слабые участки спектра сигнала фильтр ослабляет. При этом форма сигнала на выходе фильтра искажается, однако обеспечивается наибольший пик выходного сигнала в момент времени  $t = t_0$  на фоне шума:

$$S_{B \max}(t_0) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = kE. \quad (2.15)$$

За счет компенсации взаимных фазовых сдвигов спектральных составляющих входного сигнала  $\varphi_s(\omega)$  фазочастотной характеристикой фильтра все гармонические составляющие одновременно достигают амплитудных значений в момент времени  $t = t_0$  и, складываясь, дают пик выходного сигнала  $S_{B \max}(t_0)$ .

Найдем импульсную характеристику согласованного фильтра. На основании (2.11) имеем

$$g_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(-j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t_0-t)} d\omega.$$

Учитывая выражение для входного сигнала

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

получим

$$g_0(t) = ks(t_0 - t). \quad (2.16)$$

Следовательно, импульсная характеристика согласованного фильтра полностью определяется формой сигнала (согласована с сигналом). Из условия физической реализуемости фильтра следует, что  $t_0 \geq T$ , где  $T$  - продолжительность сигнала. При приеме полностью известного сигнала на фоне стационарной помехи с произвольной спектральной плотностью  $S_y(\omega)$  можно воспользоваться последовательным включением обесцвечивающего и согласованного фильтров. Обесцвечивающий фильтр преобразует помеху  $y(t)$  в белый шум. Фазочастотная характеристика фильтра может быть любой, а амплитудно-частотная обесцвечивающего фильтра имеет вид

$$|K_{oo}(j\omega)| = k_1 [S_y(\omega)]^{-1/2}. \quad (2.17)$$



где  $k_1$  - постоянная. На выходе обесцвечивающего фильтра помеха превратится в белый шум со спектральной плотностью  $S_y(\omega)|K_{об}(\omega)|^2 = k_1^2 = const$ , а спектральная функция сигнала равна

$$S_{об}(j\omega) = k_1 S(j\omega) S_y(\omega)^{-1/2}.$$

На основании (2.11) комплексная частотная характеристика соответствующего согласованного фильтра записывается в виде

$$K_{01}(j\omega) = \frac{k_1 S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{S_y(\omega)}}.$$

Оптимальный фильтр представляет последовательное соединение двух фильтров: обесцвечивающего  $K_{об}(j\omega)$  и согласованного  $K_{01}(j\omega)$ . Его комплексная частотная характеристика  $K(j\omega) = K_{об}(j\omega)K_{01}(j\omega)$  определяется формулой (2.9).

### 3. БЕЗЫНЕРЦИОННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛАБОГО СИГНАЛА И ПОМЕХИ.

Рассмотрим безынерционные нелинейные преобразование (БНП)  $Z(\cdot)$  суммы слабого детерминированного сигнала  $s(t)$  и помехи  $y(t)$ :

$$Z(r) = Z(s + y). \quad (4.1)$$

Пусть помеха имеет плотность распределения вероятности (ПРВ)  $W_{\Pi}(y)$ , нулевое среднее значение и дисперсию  $\sigma_y^2$ . Отношение сигнал/помеха на входе БНП определяется как  $q_{\text{вх}} = s^2 / \sigma_y^2$ . На выходе БНП функция  $Z(s + y)$  может быть представлена в виде ряда по степеням слабого сигнала:

$$Z(s + y) \cong Z(y) + Z'(y)s + \dots, \quad (4.2)$$

где  $Z'(y) = dZ(y)/dy$ .

Ограничившись двумя первыми членами ряда (4.2), введем отношение сигнал/помеха  $q$  на выходе БНП:

$$q = \langle Z'(y)s \rangle^2 / \langle Z^2(y) \rangle. \quad (4.3)$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения сигнальной компоненты  $Z'(y)s$  и квадрата помеховой составляющей  $Z^2(y)$ . Детерминированный множитель в числителе (4.3) может быть вынесен за знак усреднения, тогда отношение  $\mu_a^2 = q / q_{\text{вх}}$  характеризующее изменение отношения сигнал/помеха после БНП, представляется в виде

$$\mu_a^2 = \sigma_y^2 \frac{\langle Z'(y) \rangle^2}{\langle Z^2(y) \rangle}, \quad (4.4)$$

где

$$\langle Z^2(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z^2(y) W_{\Pi}(y) dy; \quad (4.5)$$

$$\langle Z'(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z'(y) W_{\Pi}(y) dy. \quad (4.6)$$

Выражение (4.5) определяет средний квадрат помехи на выходе БНП.

Очевидно, коэффициент  $\mu_a^2$  зависит от ПРВ помехи и характеристики БНП. Для линейного преобразователя  $\mu_a^2 = 1$ . Действительно, пусть

$$Z(y) = ky,$$

где  $k$  - известный коэффициент.

Тогда  $Z'(y) = k$ ,  $Z^2(y) = k^2 y^2$  и  $\mu_a^2 = 1$ .

Приведем пример нелинейного преобразования (рис. 1):

$$Z(y) = k \text{sign} y = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

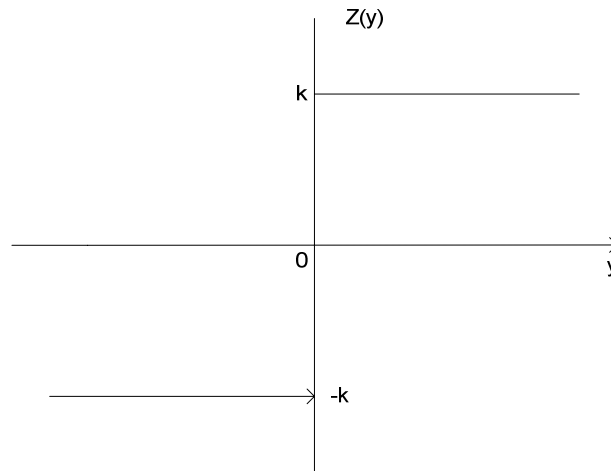


Рис.1

На входе действует помеха с гауссовской ПРВ

$$W_{\Pi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (4.8)$$

Из выражения (4.7) следует

$$Z'(y) = k2\delta(y); \quad Z^2(y) = k^2 \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8) и (4.9) в соотношения (4.5) и (4.6), получим

$$\begin{aligned} \langle Z^2(y) \rangle &= k^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Pi}(y) dy = k^2; \\ \langle Z'(y) \rangle &= 2k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) W_{\Pi}(y) dy = 2k W_{\Pi}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sigma_y} \end{aligned}$$

Коэффициент  $\mu_a^2$  согласно полученным выражениям и в соответствии с (4.4) определяется величиной  $\mu_a^2 = 2/\pi$ . Таким образом, при действии слабого сигнала и гауссовской помехи на компаратор отношение сигнал/помеха уменьшается в  $\pi/2$  раз.

Рассмотрим оптимальное безынерционное нелинейное преобразование.

Определим характеристику БНП, при которой обеспечивается максимум коэффициента  $\mu_a^2$  для заданной ПРВ  $W_{\Pi}(y)$ . Преобразуем выражение (4.6), интегрируя по частям:

$$\langle Z'(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Pi}(y) Z'(y) dy = Z(y) W_{\Pi}(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Z(y) W_{\Pi}'(y) dy. \quad (4.10)$$

Первое слагаемое в полученном выражении обращается в нуль, поскольку ПРВ  $W_{\Pi}(y)$  - нормированная функция, стремящаяся к нулю при бесконечных значениях аргумента. Разделив и умножив подынтегральное выражение (4.10) на  $W_{\Pi}(y)$ , получим

$$\langle Z'(y) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} Z(y) \left[ \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} \right] W_{\Pi}(y) dy.$$

Воспользуемся неравенством Буняковского-Шварца применительно к  $\mu_a^2$ :

$$\begin{aligned} \mu_a^2 &= \sigma_y^2 \frac{\left| - \int_{-\infty}^{\infty} Z(y) \left[ \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} \right] W_{\Pi}(y) dy \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(y) W_{\Pi}(y) dy} \leq \\ &\leq \sigma_y^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(y) W_{\Pi}(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} \right] W_{\Pi}(y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(y) W_{\Pi}(y) dy} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Равенство в (4.11) имеет место в том случае, если

$$Z(y) = - \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} = - \frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy}. \quad (4.12)$$

При этом

$$\mu_{a \max}^2 = \sigma_y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} \right] W_{\Pi}(y) dy = \sigma_y^2 I_{\phi}.$$

Здесь введена так называемая информация Фишера, характеризующая степень определенности случайной величины  $y$ :

$$I_{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{W_{\Pi}'(y)}{W_{\Pi}(y)} \right] W_{\Pi}(y) dy. \quad (4.13)$$

Условие (4.12) определяет согласованную с ПРВ  $W_{\Pi}(y)$  характеристику БНП, при которой обеспечивается наибольшее подавление помехи и, следовательно, наибольшее отношение сигнал/помеха на выходе БНП.

Пример 1. Пусть помеха имеет ПРВ (4.8). Согласно (4.12) получим  $Z(y) = y/\sigma_y^2$ . т.е. для гауссовской помехи оптимальная характеристика БНП представляет линейную функцию. При этом  $\mu_{a \max}^2 = 1$ .

Пример 2. Определим характеристику БНП, согласованную с помехой, имеющей ПРВ лапласовского типа:

$$W_{\Pi}(y) = C \exp \left[ - \frac{|y|}{\sigma} \right]. \quad (4.14)$$

Согласно (12) с учетом соотношения

$$\frac{d}{dy} |y| = \frac{d}{dy} (y \operatorname{sign} y) = \operatorname{sign} y$$

имеем

$$Z(y) = \frac{1}{\sigma} \operatorname{sign} y. \quad (4.15)$$

Таким образом, для помехи с лапласовской ПРВ компаратор обеспечивает наибольшее значение  $\mu_a^2$ . Поскольку дисперсия помехи  $\sigma_y^2 = 2\sigma^2$ , а информация Фишера  $I_\phi = \sigma^{-2}$ , то в соответствии с (4.13) получим  $\mu_a^2 = 2$ .

## Раздел 4. ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

### 4.1. Марковские процессы

Этот класс случайных процессов впервые систематически изучался русским математиком А.А. Марковым. Марковскими процессами можно описать наблюдаемые в радиофизике многие случайные процессы.

Благодаря хорошо разработанным для марковских процессов методам, удается решить конкретные задачи приема и обработки сигналов на фоне помех.

Приведем формальное определение марковских процессов. Возьмем в последовательные моменты времени  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$  значения случайного процесса  $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \dots, x_{n-1} = x(t_{n-1}), x_n = x(t_n)$ . Процесс  $x(t)$  является марковским, если условные вероятности

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n)}{W_n(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n)} \quad (5.1)$$

зависят лишь от последнего значения  $x_{n-1}$  в момент  $t_{n-1}$  т.е. если справедливо равенство

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (5.2)$$

Следовательно, для марковских процессов формулу (5.1) для  $(n+1)$ -мерной плотности распределения вероятности с учетом (5.2) можно записать так:

$$W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) W_n(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n) \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.3) следует

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n) &= \\ &= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \dots p(x_1, t_1 | x_0, t_0) W(x_0, t_0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким образом, многомерные плотности распределения вероятности (ПРВ) для марковских процессов (процессов без последствия) выражаются через вероятности перехода  $p(x, t | x_0, t_0)$  и одномерную ПРВ  $W(x_0, t_0)$ . Иначе говоря, начальная одномерная ПРВ  $W(x_0, t_0)$  и вероятность перехода  $p(x, t | x_0, t_0)$  полностью определяют марковский случайный процесс.

В тех случаях, когда вероятность перехода зависит только от разности  $\tau = t - t_0$ , т.е.

$$p(x, t | x_0, t_0) = p(x, \tau, x_0) = p_\tau(x, x_0),$$

марковский случайный процесс называется стационарным (однородным по времени). Если при  $\tau \rightarrow \infty$  вероятность перехода стремится к некоторому

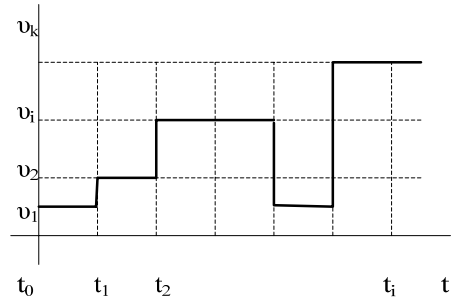
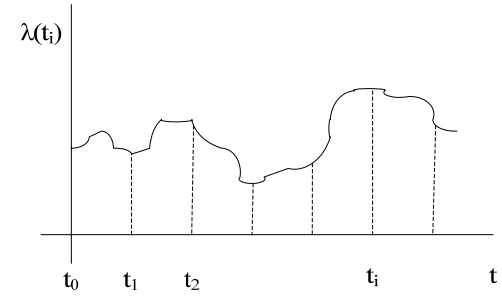
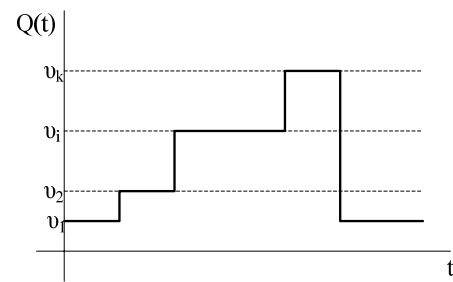
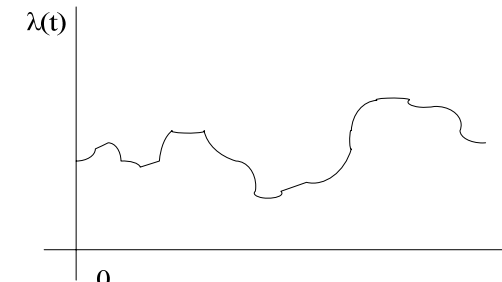
пределу  $p(x)$ , не зависящему от начального состояния  $x_0$ , то говорят, что существует предельная или стационарная вероятность.

Примером марковского процесса является броуновское движение частицы, поведение которой описывается уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = n(t) \quad (5.5)$$

где  $n(t)$  - белый гауссовский шум с нулевым средним значением и дельта-функцией корреляции  $R(\tau) = (N_0 / 2)\delta(\tau)$ .

Различают четыре основных вида марковских процессов: марковская цепь (марковский процесс, у которого область значений и область определения - дискретные множества), марковская последовательность (процесс, у которого область значений - непрерывное множество, а область определения - дискретное), дискретный марковский процесс (процесс, у которого область значений - дискретное множество, а область определения - непрерывное множество), непрерывнозначный марковский процесс.

	Область значений	
Время	Дискретная	Непрерывная
Дискретное	 <p>цепь Маркова</p>	 <p>марковская последовательность</p>
Непрерывное	 <p>дискретный марковский процесс</p>	 <p>непрерывнозначный марковский процесс</p>

Приведенный выше пример (5.5) относится к непрерывнозначному марковскому процессу. Большой класс линейных и нелинейных систем, выходные процессы которых  $\lambda(t)$  являются марковскими, определяется теоремой Дуба. Согласно этой теореме, случайный марковский  $\lambda(t)$ , процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = f(\lambda, t) + g(\lambda, t)n(t), \quad (5.6)$$

где  $f(\lambda, t)$  и  $g(\lambda, t)$  - детерминированные функции, удовлетворяющие определенным условиям;  $n(t)$  - белый гауссовский шум с характеристиками:

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1). \quad (5.7)$$

Стохастическому дифференциальному уравнению (5.6) можно поставить в соответствие уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для одномерной плотности распределения вероятности  $W(\lambda, t)$ :

$$\frac{\partial W(\lambda, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(\lambda, t)W(\lambda, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(\lambda, t)W(\lambda, t)], \quad (5.8)$$

где  $K_1(\lambda, t)$  - коэффициент сноса,  $K_2(\lambda, t)$  - коэффициент диффузии. Эти коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} K_1(\lambda, t) &= f(\lambda, t) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \lambda} b(\lambda, t) = f(\lambda, t) + \frac{1}{4} N_0 g(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, t), \\ K_2(\lambda, t) &= \frac{1}{2} N_0 g^2(\lambda, t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) - уравнение с частными производными параболического типа и решается известными методами при заданных граничных и начальных условиях.

Рассмотрим конкретные примеры непрерывных марковских процессов.

Пример 1. Чисто диффузионный процесс (процесс Винера) определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dv(t)}{dt} = n(t), \quad v(0) = 0. \quad (5.10)$$

Здесь  $n(t)$  - белый гауссовский шум (5.7):

$$\langle n(t) \rangle = 0; \quad \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1).$$

Известно, что для дельта-функции справедливы соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \delta(x - x_0) dx = 1; \quad \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (5.11)$$

Из уравнения (5.10) следует, что

$$v(t) = \int_0^t n(\tau) d\tau,$$

или

$$dv(t) = n(t) dt. \quad (5.12)$$

Поскольку белый шум  $n(t)$  предполагается нормальным (гауссовским) процессом и при линейных преобразованиях свойство нормальности



сохраняется, то процесс  $\nu(t)$  будет тоже нормальным. Согласно (5.12) среднее значение и дисперсия процесса  $\nu(t)$  определяются выражениями

$$\langle \nu(t) \rangle = 0; \quad \sigma_\nu^2 = \int_0^t \int_0^t \langle n(\tau_1)n(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N_0}{2} t. \quad (5.13)$$

Поэтому одномерная ПРВ процесса  $\nu(t)$  имеет вид

$$W(\nu, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{N_0 t}\right), \quad t > 0. \quad (5.14)$$

Таким образом, чисто диффузиональный процесс  $\nu(t)$  является нормальным с нулевым средним и дисперсией, пропорциональной времени.

Пример 2. Нормальный марковский процесс. Процесс  $\lambda(t)$  задан стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} + \alpha\lambda(t) = n(t), \quad (5.15)$$

где  $\alpha$  - постоянный коэффициент;  $n(t)$  - белый гауссовский шум (5.7).

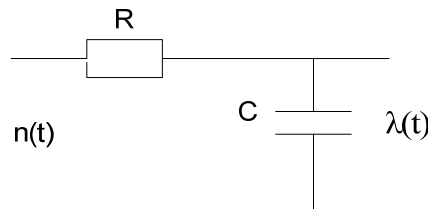


Рис. 5.1.

К такому уравнению можно прийти, если  $\lambda(t)$  формируется с помощью RC-цепочки, на входе которой действует  $n(t)$  (рис.5.1). В данном случае  $\alpha = 1/RC$ .

Коэффициенты сноса и диффузии в рассматриваемом случае согласно (5.9) определяются так:

$$a(\lambda) = -\alpha\lambda; \quad b(\lambda) = \frac{\gamma^2}{2} N_0 = const.$$

Уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial W(\lambda, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda W(\lambda, t)] + \frac{1}{4} \gamma^2 N_0 \frac{\partial^2 W(\lambda, t)}{\partial \lambda^2}, \quad (5.16)$$

На основе стохастических дифференциальных уравнений можно построить схемы формирования марковских процессов. С заданными плотностями распределения вероятности.

Пусть уравнение, описывающее марковский процесс, задано в виде

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = f(\lambda) = n(t). \quad (5.17)$$

Этому уравнению соответствует схема, приведенная на рис. 5.2, где  $p \equiv d/dt$  - оператор дифференцирования.

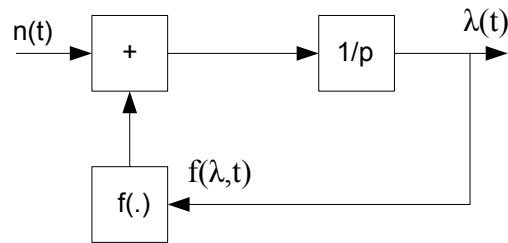


Рис. 5.2.

Для стационарного состояния в уравнении ФПК (5.8)  $\partial W(\lambda, t) / \partial t = 0$ . С учетом (5.17) и стационарного режима имеем

$$0 = -f(\lambda)W(\lambda) + \frac{N_0}{4} \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}.$$

Отсюда следует выражение для функции  $f(\lambda)$ :

$$f(\lambda) = \frac{N_0}{4} \frac{1}{W(\lambda)} \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}.$$

Таким образом, с помощью схемы рис.5.2. при соответствующей (5.18) характеристике  $f(\lambda)$  из белого гауссовского шума  $n(t)$  формируется случайный процесс с заданной ПРВ  $W(\lambda)$ .

Пример 3. Пусть задана бимодальная ПРВ:

$$W(\lambda) = C \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\lambda - a \operatorname{sign} \lambda)^2\right], \text{ где } \operatorname{sign} \lambda = \begin{cases} 1, \lambda \geq 0 \\ -1, \lambda < 0 \end{cases}.$$

В соответствии с (5.18)

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{N_0}{4} (\lambda - a \operatorname{sign} \lambda) [1 - 2a \delta(\lambda)]. \quad (5.19)$$

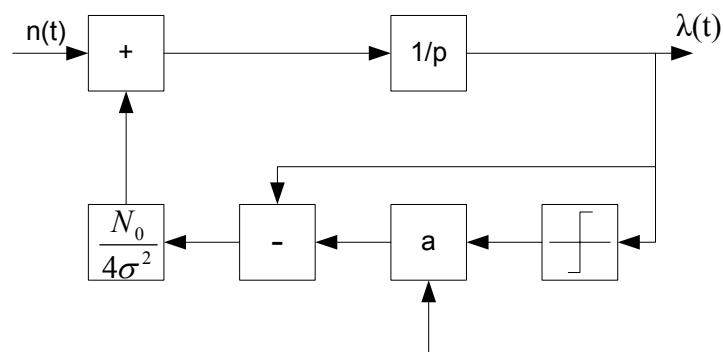


Рис. 5.3 а

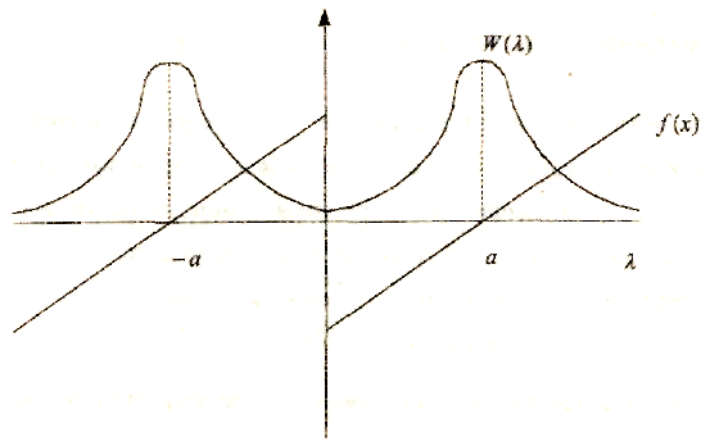


Рис. 5.3 б

При реализации нелинейного элемента  $f(\lambda)$  слагаемым, содержащим дельта-функцию, можно пренебречь.

Схема формирования процесса приведена на рис. 5.3,а. На рис. 5.3,б изображена характеристика  $f(\lambda)$ , соответствующей заданной ПРВ  $W(\lambda)$ .

## 5. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

### 5.1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

В результате процесса обнаружения должно быть принято решение о наличии или отсутствии сигнала (цели). Решение может быть принято при двух взаимно исключающих условиях: условие  $A_1$  – «сигнал есть»; условие  $A_2$  – «сигнала нет».

При выработке решения эти условий неизвестны. Из-за действия помех каждому из условий может соответствовать одно из двух решений: решение  $A_1^*$  – «сигнал есть»; решение  $A_2^*$  – «сигнала нет».

Говорят о **правильном обнаружении**, если при условии  $A_1$  выдается решение  $A_1^*$ , и о **пропуске сигнала**, если при условии  $A_1$  за счет действия помех выдается решение  $A_2^*$ . Указанные условные решения можно охарактеризовать качественными показателями – соответствующими условными вероятностями правильного обнаружения  $D = P(A_1^* | A_1)$  и пропуска сигнала  $\hat{D} = P(A_2^* | A_1)$ . Решения  $A_1^*$  и  $A_2^*$  соответствуют одному и тому же условию наличия сигнала  $A_1$  и являются взаимоисключающими, поэтому  $D + \hat{D} = 1$ .

При условии отсутствия сигнала  $A_2$  возможно принятие правильного решения  $A_2^*$  – «сигнала нет», что соответствует **правильному необнаружению**. Если за счет действия помехи принимается решение  $A_1^*$  – «сигнал есть», то говорят о **ложной тревоге**. Качественными показателями решений при отсутствии сигнала являются условные вероятности ложной тревоги  $F = P(A_1^* | A_2)$  и правильного необнаружения  $\hat{F} = P(A_2^* | A_2)$ . Для взаимоисключающих событий  $A_1^*$  и  $A_2^*$  при одном и том же условии  $A_2$  справедливо соотношение  $F + \hat{F} = 1$ .

В реальных обнаружителях обычно требуется обеспечить достаточно высокую вероятность правильного обнаружения  $D = 0,9 \dots 0,999$ . Вероятность ложной тревоги стремятся свести и величине порядка  $10^{-3}$  и менее, поскольку ложная информация загружает систему обработки и может привести к нежелательным последствиям.

Если считать, что условие  $A_1$  соответствует наличию сигнала  $s_1(t)$ , а условие  $A_2$  – сигнала  $s_2(t)$ , то при различении сигналов можно говорить о принятии соответствующих решений  $A_1^*$  и  $A_2^*$ . Качественными показателями различения двух сигналов являются вероятность правильного приема сигнала  $s_1$  при условии  $A_1$  и вероятность ошибочного приема сигнала  $s_2$  при условии

$A_1$ , т. е.  $P(A_1^* | A_1) = P(s_1 | s_1)$  и  $P(A_2^* | A_1) = P(s_2 | s_1)$ . Условная вероятность  $P(s_2 | s_1)$  характеризует ошибочную ситуацию. Очевидно, что

$$P(s_1 | s_1) + P(s_2 | s_1) = 1. \quad (5.1)$$

Условную вероятность ошибочного приема  $P(s_2 | s_1)$  обозначают через  $P_{e1}$ .

При условии  $A_2$  (наличие сигнала  $s_2$ ) может быть принято либо правильное решение  $A_2^*$ , либо ошибочное решение  $A_1^*$  которые характеризуются соответствующими условными вероятностями  $P(A_2^* | A_2) = P(s_2 | s_2)$  и  $P(A_1^* | A_2) = P(s_1 | s_2)$ . Условная вероятность ошибочного приема в данном случае обозначается через  $P_{e2}$ . Для вероятностей  $P(s_2 | s_2)$  и  $P(s_1 | s_2)$  справедливо соотношение, аналогичное (5.1).

В системах передачи информации вероятности  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$  используют для оценки качества приема дискретных символов. Как правило, требования к качеству приема сигналов  $s_1$  и  $s_2$  одинаковы, и стремятся снизить обе вероятности:  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$ . Обычно в РЭИС ПИ стараются обеспечить  $P_{e1} = P_{e2} = 10^{-3}$  и меньше.

Система выдачи информации должно удовлетворять противоречивым требованиям. Например, при обнаружении в условиях действия помех необходимо обеспечить минимальную вероятность пропуска сигнала. Снижение этой вероятности сопряжено с возрастанием вероятности ложной тревоги. Чтобы обеспечить разумный компромисс, выбирают такое правило решения, при котором для совокупности всех возможных ситуаций приема обеспечивались бы наилучшие результаты, т. е. правило решения должно быть оптимальным в среднем, статистически. Для характеристики подобных противоречивых ситуаций вводят понятие среднего риска.

Рассмотрим возможные ситуации при различении или обнаружении сигналов:

- 1)  $(A_1^*, A_1)$  – правильный прием сигнала  $s_1$  (правильное обнаружение);
- 2)  $(A_2^*, A_1)$  – ошибочный прием сигнала  $s_1$  (пропуск сигнала);
- 3)  $(A_1^*, A_2)$  – ошибочный прием сигнала  $s_2$  (ложная тревога);
- 4)  $(A_2^*, A_2)$  – правильный прием сигнала  $s_2$  (правильное обнаружение).

Каждая из ситуаций характеризуется своей вероятностью  $P_i$ , причем  $\sum P_i = 1$ . Поставим в соответствие каждой возможной ситуации некоторую **плату за ошибку**, или **риск**  $R_i$ . Для ошибочных ситуаций этот риск больше, а для безошибочных – меньше или равен нулю. В силу случайного характера ситуаций плата за ошибку является случайной. **Средний риск (средняя плата)**  $\langle R \rangle$  представляет математическое ожидание случайной величины  $R$ :

$$\langle R \rangle = \sum R_i P_i, \quad (5.2)$$

где  $R_i$  – риск (плата) за  $i$ -ю ситуацию;  $P_i$  – вероятность  $i$ -й ситуации.

Обозначим значения риска за ошибочные ситуации  $R_F = R(A_1^* | A_2)$  и  $R_D = R(A_2^* | A_1)$  и будем считать нулевой платой за безошибочные ситуации.

Тогда средний риск можно записать в виде

$$\langle R \rangle = R_F P(A_1^*, A_2) + R_D P(A_2^*, A_1). \quad (5.3)$$

Вероятности, входящие в выражение (5.3), согласно теореме умножения вероятностей, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} P(A_1^*, A_2) &= P(A_2)P(A_1^* | A_2) = P(A_2)P_{e2}; \\ P(A_2^*, A_1) &= P(A_1)P(A_2^* | A_1) = P(A_1)P_{e1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В задачах обнаружения указанные вероятности определяются через  $\hat{D}$  и  $F$ :

$$\begin{aligned} P(A_1^*, A_2) &= P(A_2)F; \\ P(A_2^*, A_1) &= P(A_1)\hat{D}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

С учетом соотношений (5.3) и (5.5) запишем средний риск:

$$\langle R \rangle = R_F P(A_2)F + R_{\hat{D}} P(A_1)\hat{D}. \quad (5.6)$$

Из всех систем обнаружения наилучшей следует считать ту, которая обеспечивает наименьший средний риск. Таким образом, можно говорить об обнаружителе, оптимальном по критерию **минимума среднего риска**.

Для РЭИС ПИ плата за ошибки  $R_F$  и  $R_{\hat{D}}$  обычно одинакова. Если положить  $R_F = R_{\hat{D}} = 1$ , то из выражения (5.3) с учетом соотношений (5.4) следует

$$\langle R \rangle = P(A_1)P_{e1} + P(A_2)P_{e2} = P_e. \quad (5.7)$$

Здесь  $P_e$  – полная вероятность ошибочного приема сигналов (вероятность полной ошибки), а критерий минимума среднего риска сводится к критерию минимума вероятности полной ошибки. Этот критерий носит название **критерия идеального наблюдателя**. При равных априорных вероятностях появления сигналов  $s_1$ , и  $s_2$ , т. е.  $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$ , средний риск становится полной вероятностью ошибочного приема для симметричной системы передачи двоичных сообщений:

Рассмотрим другие частные критерии, следующие из минимизаций среднего риска (5.6). Положив  $D = 1 - \hat{D}$ , можно записать:

$$\langle R \rangle = R_{\hat{D}} P(A_1) [1 - (D - l_0 F)], \quad (5.8)$$

где  $l_0 = R_F P(A_2) / [R_{\hat{D}} P(A_1)]$ .

Поскольку  $R_{\hat{D}} P(A_1) > 0$ , критерий минимума среднего риска (5.8) сводится к максимизации разности

$$D - l_0 F = \max. \quad (5.9)$$

Это **весовой критерий**. Согласно этому критерию, необходимо стремиться к увеличению взвешенной разности за счет повышения условной вероятности правильного обнаружения и снижения условной вероятности ложной тревоги. Множитель  $l_0$  называют **весовым**, он зависит от соотношения плат за ошибки и от априорных вероятностей наличия или отсутствия цели (сигнала).

Сравним две системы, одна из которых является оптимальной по критерию (5.9). Тогда  $D_{\text{opt}} - l_0 F_{\text{opt}} \geq D' - l_0 F'$  или  $D_{\text{opt}} \geq D' + l_0 (F_{\text{opt}} - F')$ . Отсюда при  $F' = F_{\text{opt}}$

$$D_{\text{opt}} \geq D'. \quad (5.10)$$

Соотношение (5.10) остается в силе и в случае, если  $F' \leq F_{\text{opt}}$ . Это означает, что оптимальная система обеспечивает наибольшую вероятность правильного обнаружения (наименьшую вероятность пропуска) из всех систем, у которых вероятность ложной тревоги не больше, чем у оптимальной системы. Указанные условия составляют содержание **критерия Неймана-Пирсона**. Как и критерий идеального наблюдателя, он является следствием критерия минимума среднего риска. Достоинством его можно считать независимость от априорных вероятностей наличия или отсутствия цели (сигнала), что существенно при решении задач радиолокационного обнаружения.

## 5.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

### 5.2.1. Постановка задачи

На интервале  $[0, T]$  наблюдается аддитивная смесь  $r(t)$  сигнала и шума (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Сигнал представляет детерминированную функцию времени и известных параметров (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**), Статистические свойства помехи  $n(t)$ , представляющей гауссовский белый шум, считаются известными и определяются соотношениями (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Задача оптимального обнаружения сводится к определению правила оценивания параметра обнаружения  $\theta$  (т. е. к нахождению оценки  $\theta^* = \theta^*(r(t))$ ), обеспечивающего минимум среднего риска (или максимума весового критерия). Алгоритм оптимального обнаружения должен определить математические операции, по которым для каждой принятой реализации  $r(t)$  можно найти наиболее рациональный ответ о наличии или отсутствии сигнала. Далее необходимо определить качественные показатели обнаружителя, т. е. условные вероятности  $D$  и  $F$ , и выяснить пути реализации оптимального обнаружителя.

### 5.2.2. Методика решения задачи обнаружения

Для решения задачи оптимального обнаружения воспользуемся критерием (5.9). Чтобы определить оптимальное решающее правило  $\theta^* = \theta^*(r(t))$  необходимо записать развернутое выражение вероятностей  $D$  и  $F$ . Эти вероятности характеризуются условными плотностями вероятности реализации  $r(t)$  при наличии и отсутствии сигнала в смеси. Чтобы определить плотности вероятности, рассмотрим простейший метод дискретного

наблюдения, при котором берутся отсчеты функции  $r(t)$  через равные отрезки времени  $\Delta t$ . При этом интервал наблюдения разбивается на  $m$  равных элементарных интервалов, где  $m = T/\Delta t$ . Введем осредненные за элементарный интервал  $\Delta t$  значения колебания  $r(t)$ , сигнала  $s(t)$  и шума  $n(t)$ :

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} r(t) dt; \\ s_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} s(t) dt; \\ n_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} n(t) dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Очевидно, что

$$n_i = r_i - s_i. \quad (5.12)$$

Таким образом, рассматриваются системы случайных величин, которые полностью характеризуются многомерными ( $m$ -мерными) плотностями вероятности. В дальнейшем нас будет интересовать предельный случай, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Запишем совместную плотность вероятности для случайных величин  $n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Случайные величины  $n_i$  с учетом условий (**Ошибка! Источник ссылки не найден.** **Ошибка! Источник ссылки не найден.**) и (5.11) являются гауссовскими и имеют характеристики:  $\langle n_i \rangle = 0$ ;  $\sigma_{n_i}^2 = \langle n_i^2 \rangle = N_0/2\Delta t$ ;  $\langle n_i n_j \rangle = 0$  при  $i \neq j$ . Тогда совместная плотность вероятности на основании независимости случайных величин  $n_i$ , входящих в совокупность, примет вид

$$W(n_1, n_2, \dots, n_m) = W(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^m W(n_i) = \left( \frac{\pi N_0}{\Delta t} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m n_i^2 \Delta t \right]. \quad (5.13)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей вектором обозначены совокупности значений:  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_m\}$ .

При отсутствии сигнала в смеси  $r_i = n_i$ , поэтому условная плотность вероятности совокупности значений реализации совпадает с плотностью вероятности помехи (5.13), куда вместо  $n_i$  следует подставить  $r_i$ .

При условии действия суммы сигнала и шума, подставив значения  $n_i$  из выражения (5.12), можно записать условную плотность вероятности совокупности значений реализации  $r$  в следующем виде:

$$W_{c.n}(\mathbf{r}) = W_n(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \left( \frac{\pi N_0}{\Delta t} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m (r_i - s_i)^2 \Delta t \right]. \quad (5.14)$$

При рассмотрении реализации  $r$  в виде совокупности случайных величин решающее правило представляет функцию этой системы случайных величин  $\theta^*(\mathbf{r}) = \theta^*(r_1, r_2, \dots, r_m)$ . По условию, решающая функция может принимать только два значения: 0 и 1. Вероятность  $D$  определяется при действии в смеси  $r(t)$  и сигнала, и шума, т.е. плотностью вероятности  $W_{c.n}(\mathbf{r})$ . В



случае произвольной решающей функции  $\theta^*(\mathbf{r})$  условная вероятность  $D$  принятия решения  $\theta^* = 1$  определяется выражением

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{\text{с.п.}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Аналогично при действии одной помехи и произвольной решающей функции  $\theta^*(\mathbf{r})$  условная вероятность  $F$  принятия решения  $\theta^* = 1$  определяется выражением

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{\text{п.}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Используя приведенные выражения, запишем взвешенную разность, входящую в формулу (5.9):

$$D - l_0 F = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{\text{п.}}(\mathbf{r}) (l(\mathbf{r}) - l_0) d\mathbf{r}. \quad (5.15)$$

Здесь введено обозначение

$$l(\mathbf{r}) = \frac{W_{\text{с.п.}}(\mathbf{r})}{W_{\text{п.}}(\mathbf{r})}, \quad (5.16)$$

которое называется **отношением правдоподобия**.

Согласно критерию (5.9), оптимальной считается та система, которая обеспечивает наибольшее значение взвешенной разности (5.15). Поэтому необходимо отыскать такую решающую функцию  $\theta^*(\mathbf{r})$ , которая максимизирует подинтегральное выражение при всех сочетаниях значений  $r_1, r_2, \dots, r_m$ . Можно убедиться в том, что оптимальная решающая функция имеет вид

$$\theta_{\text{opt}}^*(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(\mathbf{r}) > l_0; \\ 0, & \text{если } l(\mathbf{r}) < l_0, \end{cases} \quad (5.17)$$

т.е. принимается решение о наличии цели (сигнала), если отношение правдоподобия превышает порог  $l_0$ , и принимается решение об отсутствии цели (сигнала), если отношение правдоподобия оказывается меньше порога  $l_0$ . Таким образом, оптимальный обнаружитель действует по следующему алгоритму: по принятым значениям  $r_1, r_2, \dots, r_m$  вычисляется отношение правдоподобия и производится его сравнение с порогом.

Отношение правдоподобия (5.16) с учетом выражений (5.13) и (5.14) можно представить в виде

$$l(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m s_i^2 \Delta t \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^m r_i s_i \Delta t \right]. \quad (5.18)$$

Чтобы осуществить переход к непрерывному наблюдению  $r(t)$ , необходимо в выражении (5.18) перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . При этом отношение правдоподобия (функция переменных  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ) перейдет в **функционал отношения правдоподобия**:

$$l(r(t)) = \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s(t) dt \right]. \quad (5.19)$$

Оптимальное решающее правило (5.17) для непрерывного наблюдения записывается следующим образом:

$$\theta_{\text{opt}}^*(r(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(r(t)) > l_0; \\ 0, & \text{если } l(r(t)) < l_0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Правило сохраняется при переходе к монотонным функциям от  $l(r(t))$ . В частности, применив логарифмическую функцию, получим

$$\ln l(r(t)) = -\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} z(r(t)),$$

где  $E = \int_0^T s^2(t) dt$  – энергия сигнала;

$$z(r(t)) = z(T) = \int_0^T r(t)s(t) dt \quad (5.21)$$

есть корреляционный интеграл. С учетом этих соотношений оптимальное решающее правило принимает следующий вид:

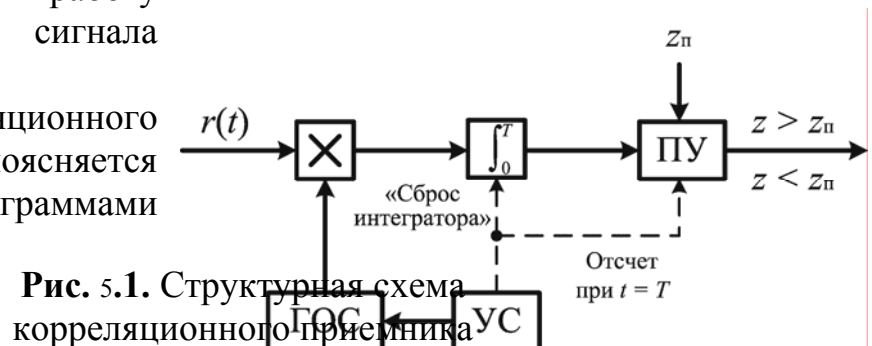
$$\theta_{\text{opt}}^*(r(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } z(T) > z_{\text{п}}; \\ 0, & \text{если } z(T) < z_{\text{п}}, \end{cases} \quad (5.22)$$

где порог  $z_0 = \frac{N_0}{2} \left( \ln l_0 + \frac{E}{N_0} \right)$ .

### 5.2.3. Корреляционный оптимальный обнаружитель

В соответствии с алгоритмом обнаружения (5.21) и (5.22) структурная схема оптимального обнаружителя может быть представлена в виде корреляционного приемника с пороговым устройством (рис. 5.1). В пороговом устройстве (ПУ) производится сравнение значения корреляционного интеграла в момент ожидаемого окончания действия сигнала  $T$  с порогом  $z_{\text{п}}$  и принимается решение о наличии или отсутствии цели (сигнала). Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала  $s(t)$ , что обеспечивается устройством синхронизации (УС). Это же устройство синхронизирует работу генератора опорного сигнала (ГОС) для коррелятора.

Работа корреляционного обнаружителя поясняется временными диаграммами



(рис. 5.2). Диаграмма на рис. 5.2 в есть смесь  $r(t)$ , соответствующая сумме сигнала (рис. 5.2 а) и шума (рис. 5.2 б). Сравнение напряжения, вырабатываемого на выходе интегратора (рис. 5.2 з), с порогом производится в момент  $t = T$ , при этом величина  $z(T)$  является случайной и зависит от реализации шума на интервале  $[0, T]$ . При наличии в смеси  $r(t)$  сигнала и шума величину  $z(T)$  можно представить в виде суммы:

$$z(T) = \int_0^T s^2(t) dt + \int_0^T n(t)s(t) dt = E + z_{\text{сл}}.$$

Второе слагаемое  $z_{\text{сл}}$  представляет случайную величину. Ее среднее значение равно нулю. Действительно, с учетом условия (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**) имеем

$$\langle z_{\text{сл}} \rangle = \left\langle \int_0^T n(t)s(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle n(t) \rangle s(t) dt = 0 \quad (5.23)$$

Дисперсия случайной величины  $z_{\text{сл}}$  определяется выражением

$$\langle z_{\text{сл}}^2 \rangle = \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1)n(t_2) \rangle s(t_1)s(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t_1 - t_2) s(t_1)s(t_2) dt_1 dt_2.$$

Здесь учтено, что автокорреляционная функция белого шума определяется  $\delta$ -функцией [см. условие (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**)]. Применяя свойство  $\delta$ -функции (**Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.**), получаем

$$\langle z_{\text{сл}}^2 \rangle = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (5.24)$$

Введем отношение сигнал/шум  $q$  как отношение квадрата максимального значения сигнальной составляющей напряжения на выходе интегратора к среднему квадрату случайной составляющей:

$$q = \frac{E^2}{N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0}.$$

Заметим, что отношение сигнал/шум на выходе коррелятора определяется энергией сигнала и спектральной плотностью шума. Оно не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, если шум белый.

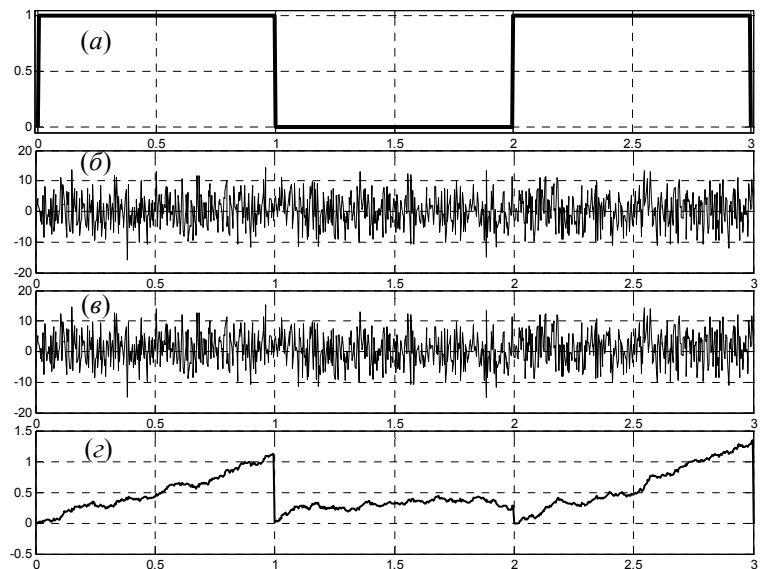


Рис. 5.2. Работа коррелятора

#### 5.2.4. Качественные показатели оптимального обнаружителя

Определим вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги. Для этого необходимо знать условные плотности вероятности напряжения  $z(T)$ , вырабатываемого интегратором при наличии и отсутствии сигнала в смеси  $r(t)$ .

Поскольку шум  $n(t)$  гауссовский, то случайная величина  $z(t)$  также имеет гауссовскую плотность вероятности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_z^2 = \langle z_{\text{сл}}^2 \rangle$ :

$$W(z_{\text{сл}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{z_{\text{сл}}^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (5.25)$$

При отсутствии сигнала в смеси  $r(t)$  условная плотность вероятности  $W_{\text{п}}(z)$  совпадает с выражением (5.25), куда вместо  $z_{\text{сл}}$  следует подставить  $z(T) \equiv z$ . При действии в смеси сигнала и шума случайная величина  $z(T)$  имеет гауссовскую плотность вероятности с математическим ожиданием  $\langle z \rangle = E$  и дисперсией  $\sigma_z^2$ :

$$W_{\text{с.п}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(z(T) - E)^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (5.26)$$

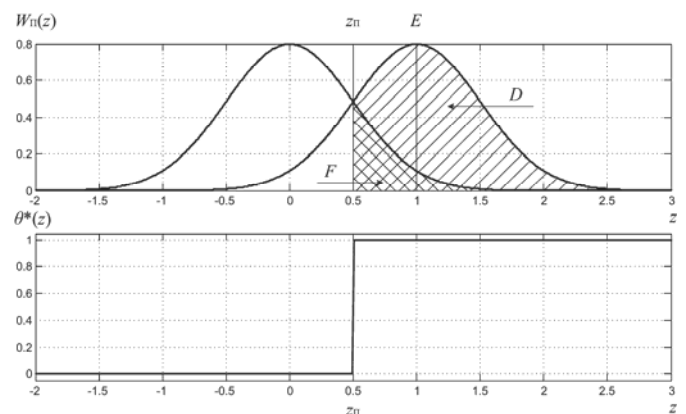
В соответствии с правилом обнаружения (5.22) условную вероятность ложной тревоги определим как вероятность превышения порога  $z_{\text{п}}$  случайной величиной  $z$ , если на входе обнаружителя действует только шум:

$$F = \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} W_{\text{п}}(z) dz \quad (5.27)$$

Условная вероятность правильного обнаружения определяется вероятностью превышения порога  $z_{\text{п}}$  случайной величиной  $z$ , если на входе обнаружителя действуют сигнал и шум:

$$D = \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} W_{\text{с.п}}(z) dz \quad (5.28)$$

На рис. 5.3 приведены кривые условных плотностей вероятности  $W_{\text{п}}(z)$  и  $W_{\text{с.п}}(z)$  (а) и функция  $\theta^*(z)$ , соответствующая оптимальному решающему правилу (б). Заштрихованные площади под кривыми численно равны вероятностям  $D$  и  $F$ . Для вычисления вероятности  $F$  воспользуемся формулой (5.27) и, подставив в нее выражение  $W_{\text{п}}(z)$ , после замены переменной  $t = z/\sigma_z$  получим



**Рис. 5.3.** Условные ПРВ процесса на входе устройства обнаружения (а) и оптимальная решающая функция (б)

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_{\text{п}}/\sigma_z}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\text{п}}}{\sigma_z}\right), \quad (5.29)$$

где  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = \Phi(x)$  — это

интеграл вероятности. Вид функции  $\Phi(x)$  показан на рис. 5.4.

Вероятность правильного обнаружения вычисляется аналогично после подстановки в формулу (5.28) выражения (5.26) и замены переменной  $t = (z - E)/\sigma_z$ :

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-E)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(z_{\text{п}}-E)/\sigma_z}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\text{п}}-E}{\sigma_z}\right) \quad (5.30)$$

Учитывая выражение для  $\sigma_z^2$  [см. формулу (5.24)], можно в аргумент функции  $\Phi$  в соотношении (5.30) ввести отношение сигнал/шум  $q$ . Обозначим через  $h_{\text{п}} = z_{\text{п}}/\sigma_z$  относительное значение порога. Тогда условные вероятности  $F$  и  $D$  можно записать в следующем виде:

$$F = 1 - \Phi(h_{\text{п}}) \quad (5.31)$$

$$D = 1 - \Phi(h_{\text{п}} - \sqrt{q}) \quad (5.32)$$

Семейство зависимостей вероятности правильного обнаружения  $D$  от отношения сигнал/шум при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги  $F$  называют **характеристиками обнаружения**. Кривые обнаружения детерминированного сигнала приведены на рис. 5.5. По этим кривым можно определить **пороговый сигнал** (пороговое отношение сигнал/шум) — сигнал, который при заданной вероятности ложной тревоги можно обнаружить с требуемой вероятностью правильного обнаружения.

Пороговый сигнал в оптимальном приемнике характеризуется энергией и не зависит от формы сигнала. На практике порог устанавливается по величине дисперсии шума на выходе коррелятора  $\sigma_z^2$ . По таблицам интеграла вероятности определяют значение аргумента  $h_{\text{п}}$  (относительного порога) при заданной вероятности ложной тревоги [см. формулу (5.31)]. При известной дисперсии  $\sigma_z^2$  определяют порог  $z_{\text{п}} = h_{\text{п}}\sigma_z^2$ .

На практике прием детерминированных сигналов, как правило, не встречается, поэтому приведенные результаты следует рассматривать как

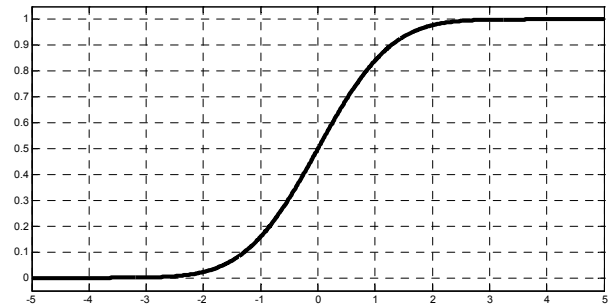


Рис. 5.4. График интеграла вероятности

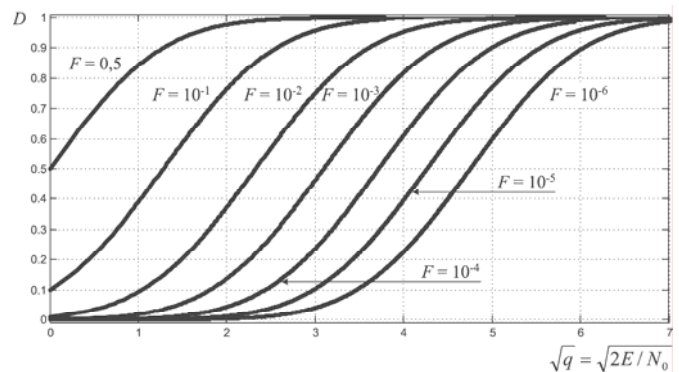


Рис. 5.5. Характеристики обнаружения

потенциальный предел, достижимый при обнаружении сигнала в белом шуме.

### 5.2.5. Согласованные фильтры в оптимальных обнаружителях

Значение  $z(T)$  может быть получено не только с помощью корреляционного приемника, но также с помощью линейного фильтра, который называют **согласованным (оптимальным) фильтром**.

Потребуем, чтобы линейный фильтр обеспечивал на своем выходе напряжение, пропорциональное значению корреляционного интеграла  $z(t_3)$  при произвольном времени  $t_3$  прихода сигнала  $s(t - t_3)$ . Запишем корреляционный интеграл в виде

$$z(t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t - t_3)dt. \quad (5.33)$$

Выражение (5.33) представляет интеграл свертки, которую осуществляет линейный фильтр. Если импульсная реакция линейного фильтра (реакция на  $\delta$ -функцию) описывается функцией  $g(t)$ , то реакция фильтра на произвольное воздействие  $r(t)$  выражается следующим образом:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)r(\tau)d\tau \quad (5.34)$$

Здесь необходимо учитывать, что для физически реализуемого фильтра при  $t < 0$  импульсная реакция тождественно равна нулю:  $g(t) \equiv 0$ . Для определения импульсной реакции согласованного фильтра потребуем, чтобы напряжение на его выходе в момент времени  $t = t_3 + t_0$  ( $t_0$  – некоторая постоянная величина) с точностью до вещественного множителя равнялось величине корреляционного интеграла:

$$u_{\text{вых}}(t_3 + t_0) = Cz(t_3) \quad (5.35)$$

Это равенство означает, что на выходе согласованного фильтра должны последовательно во времени воспроизводиться текущие значения корреляционного интеграла с некоторой постоянной задержкой  $t_0$ . В соответствии с соотношениями (5.33) – (5.35) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t_3 + t_0 - \tau)r(\tau)d\tau = C \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - t_3)r(\tau)d\tau.$$

Это равенство тождественно выполняется в случае, если  $g(t_3 + t_0 + \tau) = Cs(\tau - t_3)$ . Введем новую переменную  $t = t_3 + t_0 + \tau$  и получим выражение для импульсной реакции согласованного (оптимального) фильтра:

$$g(t) = g_{\text{opt}}(t) = Cs(t_0 - t), \quad (5.36)$$

где  $C, t_0$  – постоянные величины.

*В момент времени  $t_3 + t_0$  согласованный фильтр обеспечивает на выходе напряжение, пропорциональное величине корреляционного интеграла  $z(t_3)$ . Следовательно, такой фильтр можно использовать при оптимальном обнаружении сигналов.*

Импульсная реакция согласованного фильтра в соответствии с выражением (5.36) представляет функцию  $s(t)$ , в которой аргумент  $t$  заменен

на  $(t_0 - t)$ . Это означает зеркальное отображение функции  $s(t)$  (сигнала) относительно прямой  $t = t_0/2$ . Действительно, введя переменную  $t = t_0/2 + \varepsilon$ , из выражения (5.36) получим

$$g_{\text{opt}}(t_0/2 + \varepsilon) = Cs(t_0/2 - \varepsilon).$$

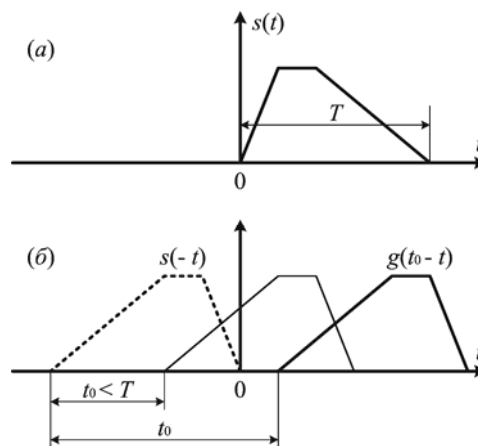


Рис. 5.6 иллюстрирует операцию зеркального отображения сигнала (а) и образования функции  $g_{\text{opt}}(t)$ . Постоянные  $C$  и  $t_0$  позволяют учесть требования, которые необходимо выполнять для оптимального приема сигнала. Величина  $C$  выбирается из условия обеспечения требуемого уровня сигнала на выходе фильтра. При выборе  $C$  необходимо соответствующим образом устанавливать порог обнаружения, чтобы обеспечить требуемую вероятность ложной тревоги. Величина  $t_0$  определяется из условия физической реализуемости фильтра. Поскольку при  $t < 0$   $g_{\text{opt}}(t) = 0$  необходимо, чтобы

$$t_0 \geq T \quad (5.37)$$

где  $T$  – продолжительность сигнала. При невыполнении условия (5.37) импульсная реакция фильтра опережает входное воздействие  $\delta$ -функции [см. рис. 5.6, б], что противоречит условию физической реализуемости фильтра.

Можно убедиться в том, что на выходе согласованного фильтра в момент времени  $t = t_3 + t_0$  обеспечивается отношение сигнал/шум  $q = 2E/N_0$ , т. е. такое же, как и на выходе коррелятора. Следовательно, характеристики обнаружения при использовании согласованных фильтров будут определяться соотношениями (5.31) и (5.32). Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 5.7. Временные диаграммы, поясняющие работу согласованного фильтра, показаны на рис. 5.8.: график а

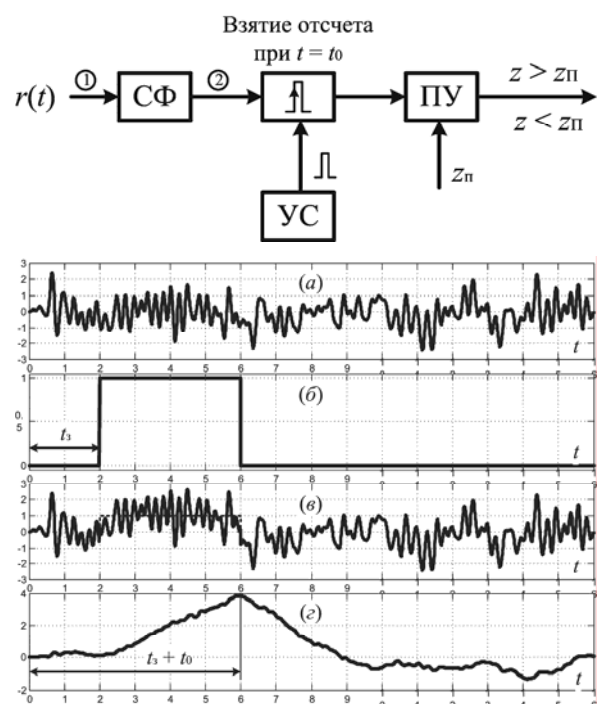


Рис. 5.8. Процесс обнаружения прямоугольного импульса в согласованном фильтре

соответствует шуму в канале связи; на графике б показан обнаруживаемый сигнал; график в соответствует смеси сигнала и помехи, т. е. определяет сигнал в точке 1 рис. 5.7; график г есть напряжение на выходе собственно СФ (точка 2 рис. 5.7).

Определим частотную характеристику согласованного фильтра. Комплексный коэффициент передачи фильтра связан с импульсной реакцией преобразованием Фурье:

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{opt}}(t) \exp[-j\omega t] dt. \quad (5.38)$$

Подставив в формулу (5.38) выражение (5.36) для импульсной реакции и произведя замену переменной  $\tau = t_0 - t$ , получим

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = C \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - t) \exp[-j\omega t] dt = C \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp[j\omega \tau] \exp[-j\omega t_0] d\tau. \quad (5.39)$$

Введем спектральную функцию сигнала  $s(t)$ :

$$S_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau, \quad (5.40)$$

тогда  $\hat{S}_s(j\omega) \equiv S_s(-j\omega)$  – комплексно-сопряженная спектральная функция сигнала. С учетом формулы (5.40) выражение (5.39) примет вид

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = C \hat{S}_s(j\omega) \exp(-j\omega t_0). \quad (5.41)$$

Модуль комплексного коэффициента передачи определяет амплитудно-частотную характеристику согласованного фильтра:

$$|K_{\text{opt}}(j\omega)| = C |S_s(j\omega)| \quad (5.42)$$

Здесь учтено, что модули комплексно-сопряженных спектральных функций  $S_s(j\omega)$  и  $\hat{S}_s(j\omega)$  равны.

Из выражения (5.42) следует, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с амплитудно-частотным спектром сигнала. В этом проявляется свойство согласованности оптимального фильтра: он подчеркивает наиболее интенсивные составляющие спектра сигнала и подавляет вместе с шумом наименее интенсивные составляющие спектра.

Аргумент комплексного коэффициента передачи определяется выражением  $\arg K_{\text{opt}}(j\omega) = -\arg S_s(j\omega) - \omega t_0$ , т. е. состоит из аргумента спектральной функции ожидаемого сигнала, взятого с обратным знаком, и аргумента задержки  $-\omega t_0$ . Фазочастотная характеристика согласованного фильтра обеспечивает компенсацию фазовых сдвигов спектральных составляющих сигнала, что приводит к их одновременному наложению в момент времени  $t = t_3 + t_0$  и достижению максимума напряжения сигнала на выходе фильтра. Действительно, приняв  $t_3 = 0$ , получим

$$u_{\text{с.ф.}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\text{opt}}(j\omega) S_s(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 \exp[j\omega(t - t_0)] d\omega.$$

Квадрат модуля  $|S_s(j\omega)|^2$  представляет четную функцию частоты. Представив  $\exp[j\omega(t - t_0)]$  по формуле Эйлера, получим в правой части выражения для



$u_{c.ф}(t)$  сумму двух интегралов. С учетом равенства нулю интеграла от нечетной функции будем иметь

$$u_{c.ф}(t) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 \cos[j\omega(t-t_0)] d\omega.$$

При  $t = t_0$  получаем наибольшее значение интеграла

$$u_{c.ф}(t_0) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 d\omega = CE.$$

Здесь учтено равенство Парсеваля, в соответствии с которым энергия сигнала определяется интегралом от квадрата модуля спектральной функции.

Величина  $u_{c.ф}(t_0)$  соответствует максимальному значению сигнала на выходе согласованного фильтра.

### 5.2.6. Реализация согласованных фильтров

Рассмотрим некоторые виды сигналов и соответствующие им согласованные фильтры.

Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса определяется следующими характеристиками. Сигнал имеет вид

$$s(t) = \text{rect}\left[\frac{t}{\tau_n}\right] = \begin{cases} A, & t \in [0, \tau_n] \\ 0, & t \notin [0, \tau_n] \end{cases} \quad (5.43)$$

Спектральная функция такого сигнала

$$S_s(j\omega) = A \int_0^{\tau_n} \exp(-j\omega t) dt = \frac{A}{j\omega} [1 - \exp(j\omega\tau_n)].$$

Наложим  $t_0 = \tau_n$  и найдем комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра по формуле (5.41):

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{CA}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega\tau_n)].$$

Функциональная схема фильтра приведена на рис. 5.9, а. Фильтр содержит идеальный усилитель с коэффициентом усиления  $k_0 = CA$ , интегратор, линию задержки на время  $\tau_n$  и вычитающее устройство. Реакция согласованного фильтра на сигнал показана на рис. 5.9, б. Форма напряжения соответствует автокорреляционной функции прямоугольного импульса:

$$U_{c.ф}(t) = CE \left[ 1 - \frac{|t - \tau_n|}{\tau_n} \right], \quad t \in [0, 2\tau_n].$$

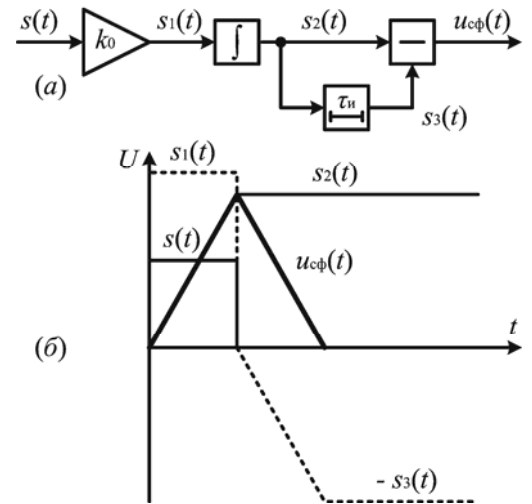
Максимум напряжения  $u_{c.ф}(t)$  достигается при  $t = \tau_n$ .

В случае согласованного фильтра для последовательности знакопеременных импульсов (псевдослучайной последовательности – ПСП) сигнал задан в виде

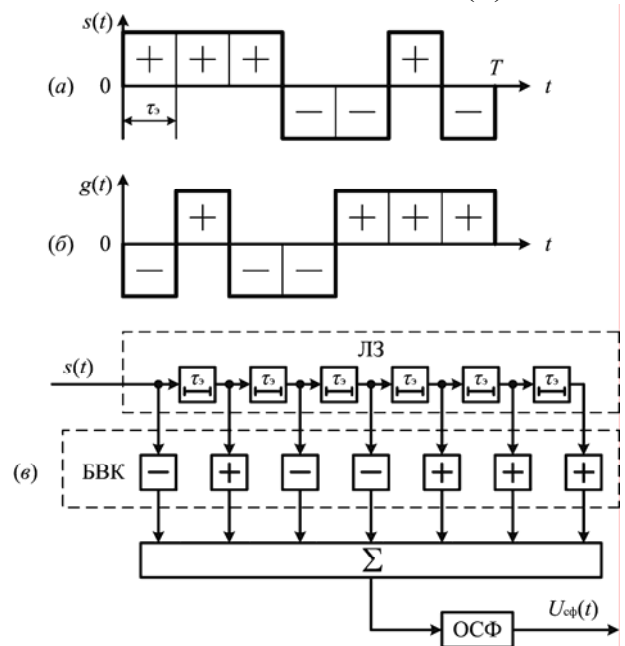
$$s(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} v_{\mu} \operatorname{rect}\left[\frac{t - \mu\tau_3}{\tau_3}\right],$$

где  $v_{\mu}$  принимает значения  $\pm 1$  в соответствии с законом формирования ПСП;  $\tau_3$  – длительность элемента ПСП. Пример чередования знаков в ПСП показан на рис. 5.10, а. Соответствующая последовательности импульсная реакция согласованного фильтра приведена на рис. 5.10, б. Фильтр в данном случае может быть реализован с помощью многоотводной линии задержки (ЛЗ) и блока весовых коэффициентов (БВК), на выходах которого формируются напряжения, подаваемые на входы сумматора (рис. 5.10, в). На выходе сумматора включен окончательный фильтр (ОСФ), согласованный с элементом ПСП – прямоугольным импульсом, имеющим длительность  $\tau_3$ .

Процесс формирования выходной реакции согласованного фильтра для ПСП показан на рис. 5.11, а. Для шумоподобного сигнала, каким является ПСП, наблюдается эффект сжатия сигнала (рис. 5.11, б), проявляющийся в сокращении эффективной продолжительности сложного сигнала в результате согласованной фильтрации. Коэффициент сжатия (на уровне 0,5 максимального значения выходного напряжения) определяется базой сигнала и в рассматриваемом случае равен  $N = T/\tau_3$ , где  $T$  – продолжительность ПСП. Таким образом, ширина спектра выходного сигнала согласованного фильтра остается такой же, как и у входного сигнала.



**Рис. 5.9.** Функциональная схема СФ для прямоугольного импульса (а) и формирование отклика схемы (б)



**Рис. 5.10.** ПСП (а); импульсная реакция СФ (б); функциональная схема СФ (в)

Таким образом, ширина спектра выходного сигнала согласованного фильтра остается такой же, как и у входного сигнала.

Отметим, что согласованный фильтр, обеспечивая максимальное отношение сигнал/шум на выходе, существенно изменяет форму сигнала.

Использование линий задержки и весового суммирования возможно не только для дискретных сигналов. Такое использование основано на приближенном представлении импульсной реакции  $g_{opt}(t)$  в виде ступенчатой функции (рис. 5.12):

$$g_{opt}(t) \cong \sum_{k=0}^{M-1} g_{opt}(k\Delta t) \text{rect}\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta t}\right). \tag{5.44}$$

Интервал  $\Delta t$  выбирается из условия обеспечения требуемой точности аппроксимации импульсной реакции. Если эффективная ширина спектра функции  $g_{opt}(t)$  ограничена частотой  $F_B$ , то, по теореме Котельникова, необходимый интервал  $\Delta t$  должен быть не более  $1/(2F_B)$ . Коэффициенты в блоке весовых коэффициентов выбираются в соответствии с величинами  $g_k \equiv g_{opt}(k\Delta t)$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Структурная схема согласованного фильтра на линии задержки показана на рис. 5.13. Оконечный согласованный фильтр согласован с прямоугольным импульсом, имеющим длительность  $\Delta t$ .

№ отвода ЛЗ	Вес	Сигналы на выходах БВК													
		Время →													
1	-	-	-	-	+	+	+								
2	+		+	+	+	-	-	+	-	-					
3	-			-	-	-	+	+	-	+					
4	-				-	-	-	+	+	-	+				
5	+					+	+	+	-	-	+	-			
6	+						+	+	+	-	-	+	-		
7	+							+	+	+	-	-	+	-	
		0	-1	0	-1	0	-1	0	+7	0	-1	0	-1	0	0

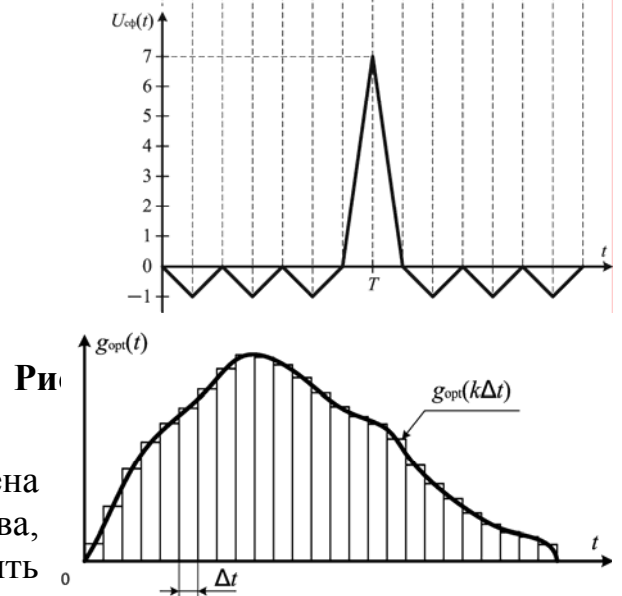


Рис. 5.12. Аппроксимация импульсной реакции СФ для

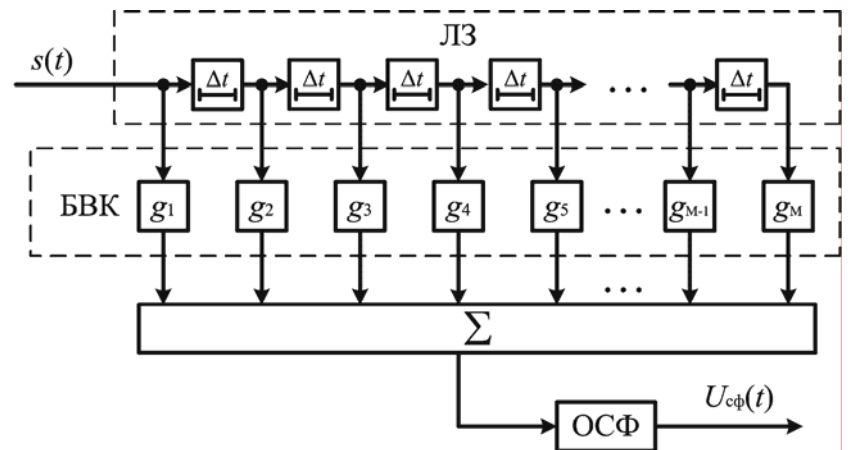


Рис. 5.13. Функциональная схема СФ для произвольного сигнала

### 5.3. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ФОНЕ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

#### 5.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала, зависящего от случайных неизмеряемых параметров. Примерами такого рода сигналов являются сигнал со случайной начальной фазой, модель которого дается выражением (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**), сигнал со случайными начальной фазой и амплитудой (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**), некогерентные пачки радиоимпульсов (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) и (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

В общем случае при наличии в сигнале случайных параметров наблюдаемую при обнаружении смесь  $r(t)$  можно представить в виде  $r(t) = \theta s(t, \vec{\beta}) + n(t)$ , где  $\vec{\beta}$  – вектор случайных параметров сигнала; плотность вероятности  $W(\vec{\beta})$  предполагается известной. Для определения алгоритма оптимального обнаружения необходимо вычислить отношение правдоподобия и, воспользовавшись решающим правилом (5.9), выявить структуру оптимального обнаружителя и его качественные показатели.

#### 5.3.2. Отношение правдоподобия при наличии случайных параметров сигнала

Рассмотрим вначале совместную плотность вероятности дискретных значений  $r_k$  принимаемого колебания и случайных неизмеряемых параметров  $\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ . Согласно теореме умножения вероятностей, можно записать:

$$W(\mathbf{r}, \vec{\beta}) = W(\mathbf{r})W(\vec{\beta} | \mathbf{r})W(\vec{\beta})W(\mathbf{r} | \vec{\beta}). \quad (5.45)$$

Поскольку, по условию нормировки, интегрирование условной плотности вероятности в бесконечных пределах всегда дает единицу, после интегрирования левой и правой частей выражения (5.45) по всем значениям получим

$$W(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{\beta})W(\mathbf{r} | \vec{\beta})d\vec{\beta}. \quad (5.46)$$

По условию  $W(\mathbf{r}) = W_{c.n}(\mathbf{r})$  – плотность вероятности реализации величин  $r_1, \dots, r_m$  при наличии суммы сигнала и помехи. Разделив обе части равенства (2.46) на плотность вероятности реализации этих величин при условии действия одной помехи  $W_n(\mathbf{r})$  получим, согласно формуле (5.16), следующее выражение для отношения правдоподобия:

$$l(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{\beta}) \frac{W(\mathbf{r} | \vec{\beta})}{W_n(\mathbf{r})} d\vec{\beta}.$$

Отношение плотностей вероятности под знаком интеграла можно рассматривать как **условное (частное) отношение правдоподобия** при

фиксированных значениях параметров  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . При этом сигнал становится полностью известным, и для условного отношения правдоподобия справедливы выражения (5.18) и (5.19).

Чтобы получить искомое отношение правдоподобия, входящее в оптимальное решающее правило (5.20), необходимо усреднить частное отношение правдоподобия по всем значениям случайных неизмеряемых параметров с учетом их плотности вероятности:

$$l(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{\beta}) l(\mathbf{r} | \vec{\beta}) d\vec{\beta}$$

или

$$l[r(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{\beta}) l[r(t) | \vec{\beta}] d\vec{\beta}.$$

Условное отношение правдоподобия в соответствии с выражением (5.19) можно представить в виде

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E(\vec{\beta})}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} z(r(t) | \vec{\beta})\right],$$

где

$$E(\vec{\beta}) = \int_0^T s^2(t, \vec{\beta}) dt; \quad (5.47)$$

$$z(r(t) | \vec{\beta}) = \int_0^T r(t) s(t, \vec{\beta}) dt. \quad (5.48)$$

Окончательное выражение для отношения правдоподобия при произвольной плотности вероятности случайных параметров сигнала принимает вид

$$l[r(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{\beta}) \exp\left[-\frac{E(\vec{\beta})}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} z(r(t) | \vec{\beta})\right] d\vec{\beta}. \quad (5.49)$$

Это выражение можно конкретизировать для определенных моделей сигналов.

### 5.3.3. Отношение правдоподобия для сигнала со случайной начальной фазой

Пусть обнаруживаемый сигнал задан в виде (**Ошибка! Источник ссылки не найден.** **Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Примем здесь  $\tau_0 = 0$  и будем считать фазу  $\varphi \equiv \beta$  равномерно распределенной на интервале  $[-\pi, \pi]$  с плотностью вероятности  $W(\beta) = 1/(2\pi)$ .

Для того, чтобы воспользоваться общей формулой (5.59), вычислим предварительно энергию (2.49) и корреляционный интеграл (2.48) при фиксированном значении параметра  $\beta$ .

По формуле косинуса суммы сигнал  $s(t, \beta)$  (см. выражение (**Ошибка! Источник ссылки не найден.** **Ошибка! Источник ссылки не найден.**)) представим в виде

$$s(t, \beta) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] \cos \beta - S_0 \sin[\omega_0 t + \psi(t)] \cos \beta.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]; \\ s_2(t) &= -S_0(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)] \end{aligned}$$

и запишем сигнал  $s(t, \beta)$  с учетом введенных обозначений

$$s(t, \beta) = s_1(t) \cos \beta + s_2(t) \sin \beta \quad (5.50)$$

На основании этого выражения условное значение корреляционного интеграла можно записать следующим образом:

$$z[r(t) | \beta] = \int_0^T r(t) s(t, \beta) dt = z_1 \cos \beta + z_2 \sin \beta.$$

Здесь

$$z_i = \int_0^T r(t) s_i(t, \beta) dt = z_i[r(t)], \quad i = 1, 2. \quad (5.51)$$

Введем величины  $Z$  и  $Q$  определив их соотношениями:

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}; \quad (5.52)$$

$$\cos Q = z_1/Z; \quad \sin Q = z_2/Z. \quad (5.53)$$

С учетом этих величин условное значение корреляционного интеграла приводится к виду

$$z[r(t) | \beta] = Z [\cos \beta \cos Q + \sin \beta \sin Q] = Z \cos(\beta - Q). \quad (5.54)$$

Найдем условное значение энергии  $E(\beta)$  сигнала. При малом изменении амплитуды  $S_0(t)$  и фазы  $\psi(t)$  за период колебаний высокой частоты энергия практически не зависит от начальной фазы  $\beta$ , т. е.

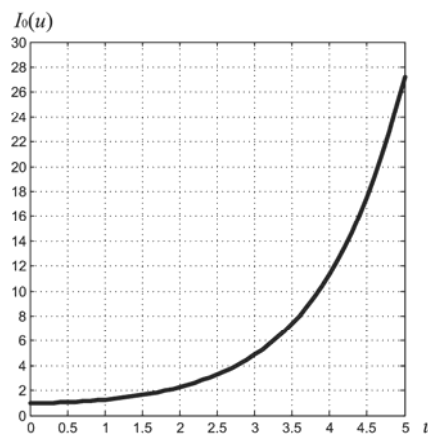
$$E(\beta) = \int_0^T S_0^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \psi(t) + \beta] dt \cong \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt = E. \quad (5.55)$$

Подставив полученные выражения для корреляционного интеграла (2.54) и энергии (5.55) в формулу (2.49) и учитывая плотность вероятности  $W(\beta)$ , найдем выражение для безусловного отношения правдоподобия:

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2Z}{N_0} \cos(\beta - Q)\right] d\beta.$$

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[u \cos(\beta - Q)] d\beta = I_0(u) \quad (5.56)$$



есть модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Это четная функция своего аргумента, причем  $I_0(0) = 1$  (рис. 5.14). Имея в виду выражение (5.56), запишем отношение правдоподобия для сигнала со случайной начальной фазой в окончательном виде:

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left[\frac{2Z}{N_0}\right], \quad (5.57)$$

где  $Z$  определяется из соотношений (5.51) и (5.52).

### 5.3.4. Отношение правдоподобия для сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой

Предположим, что обнаруживаемый сигнал задан выражением (Ошибка! Источник ссылки не найден..Ошибка! Источник ссылки не найден.), в котором  $\tau_0 = 0$ . Пусть начальная фаза ( $\varphi = \beta$  равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ ), а амплитудный коэффициент  $A$  представляет случайную величину с плотностью вероятности Релея при среднеквадратическом значении, равном единице. Для независимых величин  $A$  и  $\beta$  совместная плотность вероятности определяется следующим образом:

$$W(\beta, A) = \frac{1}{2\pi} 2A \exp[-A^2], \quad A \geq 0; \beta \in [-\pi, \pi].$$

Вычислим корреляционный интеграл  $z[r(t)|\beta, A]$  энергию  $E(\beta, A)$  для фиксированных значений параметров  $\beta$  и  $A$ . По аналогии с п. 5.3.3 можно получить:

$$z[r(t)|\beta, A] = AZ \cos(\beta - Q);$$

$$E(\beta, A) = A^2 E,$$

где выражения для  $Z, Q, E$  совпадают с аналогичными в п. 5.3.3. В отличие от рассмотренного случая сигнала со случайной начальной фазой энергия  $E(\beta, A)$  зависит от случайного амплитудного множителя  $A$ . Среднее значение энергии определяется следующим образом:

$$E_{\text{cp}} = \int_0^{\infty} dA \int_0^{2\pi} E(\beta, A) W(\beta, A) d\beta = E \int_0^{\infty} 2A^3 \exp[-A^2] dA = E,$$

т. е., среднее значение равно энергии сигнала при частном значении  $A = 1$ .

Используя общую формулу (5.49), получим выражение для отношения правдоподобия в виде

$$l[r(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dA \int_0^{2\pi} A \exp[-A^2] \exp\left[-\frac{A^2 E}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2AZ}{N_0} \cos(\beta - Q)\right] d\beta.$$

Применив формулу (5.56), а также табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} I_0(\mu x) \exp(-\nu x^2) x dx = \frac{1}{2\nu} \exp\left[\frac{\mu^2}{2\nu}\right], \quad (5.58)$$

получим окончательное выражение отношения правдоподобия для сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой:

$$l[r(t)] = \frac{N_0}{E + N_0} \exp\left[\frac{1}{N_0} \frac{Z^2}{E + N_0}\right], \quad (5.59)$$

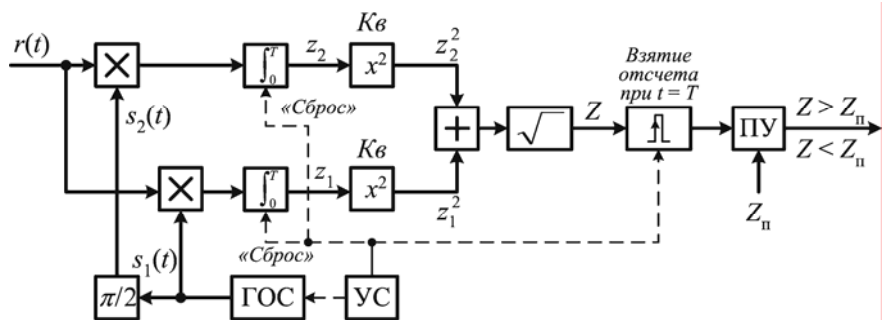
где величина  $Z$  определяется по формулам (5.51), (5.52).

### 5.3.5. Структурные схемы оптимальных обнаружителей сигналов со случайными параметрами

Алгоритмы оптимального обнаружения рассматриваемых сигналов реализуются на основании полученных выражений для отношения правдоподобия (5.57) и (5.59) и правила (5.20). Решающее правило можно преобразовать, имея в виду, что сравнение с порогом остается в силе для любой монотонной функции отношения правдоподобия. На этом основании запишем оптимальное решающее правило:

$$\theta_{\text{opt}}^*[r(t)] = \begin{cases} 1, & \text{если } Z > Z_0; \\ 0, & \text{если } Z < Z_0. \end{cases} \quad (5.60)$$

Используя выражение (5.60), а также соотношения, определяющие величину  $Z$ , структурную схему обнаружителя можно представить в виде, изображенном на рис. 5.15. Такую схему называют **квадратурным приемником**.



**Рис. 5.15.** Квадратурный приемник для обнаружения сигналов со случайными параметрами

Квадратурные каналы организуют благодаря включению фазовращателя в цепь опорного сигнала одного из умножителей. Квадраторы (Кв), сумматор ( $\Sigma$ ), вычислитель квадратного корня ( $\sqrt{\quad}$ ) обеспечивают формирование на входе ПУ в момент времени  $t = T$  значения  $Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ . Наличие двух каналов исключает возможность потери полезного сигнала вследствие незнания его начальной фазы. При отсутствии приращения корреляционного интеграла, например в первом канале, второй канал обеспечивает приращение за счет сдвига фазы опорного сигнала на  $\pi/2$ . Схема, представленная на рис. 5.15, как и схема, изображенная на рис. 5.1, требует знания временного положения ожидаемого сигнала. Если время запаздывания сигнала неизвестно, оптимальный обнаружитель усложняется. При разбиении интервала неопределенности времени запаздывания на элементарные участки, длительность каждого из которых определяется требуемой разрешающей способностью, можно построить многоканальный обнаружитель. Каждый канал его настраивается на сигнал с соответствующим ожидаемым запаздыванием. Решение об обнаружении сигнала принимается одновременно с оценкой времени запаздывания.

Вместо схемы с квадратурными каналами используют схему с согласованным фильтром. Возможность использования согласованных фильтров



в обнаружителях сигналов, имеющих случайные параметром, основывается на следующих рассуждениях. Из соотношений (5.60) и (5.51) следует необходимость формирования квадратурных компонентов сигнала.

Представим эти компоненты в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \operatorname{Re}[\bar{S}_0(t)\exp(j\omega_0 t)] = \operatorname{Re}[\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t)]; \\ s_2(t) &= -\operatorname{Im}[\bar{S}_0(t)\exp(j\omega_0 t)] = \operatorname{Im}[\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

где комплексная огибающая  $\bar{S}_0(t) = S_0(t)\exp[i\psi(t)]$ . Знак “\*” означает комплексно-сопряженную функцию. В соответствии с соотношениями (5.51) и приведенными выражениями запишем:

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{Re} \left[ \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right]; \\ z_2 &= \operatorname{Im} \left[ \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right]. \end{aligned}$$

Величина  $Z$  представляет модуль комплексного числа:

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \left| \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right|. \quad (5.61)$$

Используем очевидное равенство

$$r(t) = R(t)\cos[\omega_0 t + \psi_R(t)] = \frac{1}{2} [\bar{R}(t)e^{j\omega_0 t} + \bar{R}^*(t)e^{-j\omega_0 t}].$$

При этом подынтегральное выражение в формуле (5.61) представим в виде суммы:

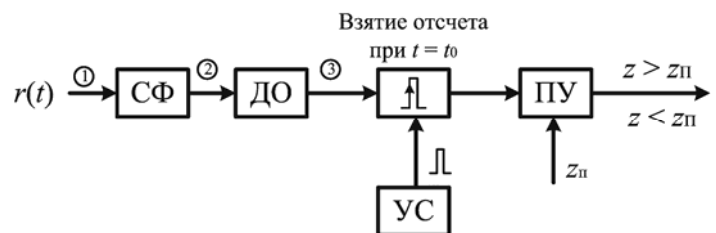
$$0,5[\bar{R}(t)\bar{S}_0^*(t) + \bar{R}^*(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j2\omega_0 t)],$$

в которой второе слагаемое представляет быстро осциллирующую функцию с частотой  $2\omega_0$ . Интеграл от такой функции можно считать приближенно равным нулю. Поэтому

$$Z \cong \frac{1}{2} \left| \int_0^T \bar{R}(t)\bar{S}_0^*(t) dt \right|. \quad (5.62)$$

Полученному выражению ставится в соответствие схема, содержащая согласованный фильтр (СФ) с импульсной реакцией  $\bar{S}_0^*(t)$  и включенный после СФ линейный детектор огибающей (ДО), который реализует операцию взятия модуля. Структурная схема обнаружителя сигнала со слу-

чайной фазой или со случайными фазой и амплитудой представлена на рис. 5.16. Временные диаграммы, поясняющие работу схемы, – на рис. 5.17: *a* – шум в канале; *б* – радиоимпульс; *в* – соответствует точке 1 рис. 5.16 и является смесью полезного сигнала и шума; *г* – соответствует точке 2 рис. 5.16 и является сигналом на выходе СФ; графики *д* и *е* поясняют работу



**Рис. 5.16.** Оптимальный обнаружитель на согласованном фильтре

ДО ( $\delta$  – взятие модуля от сигнала  $z$ ;  $e$  – отфильтрованная огибающая, соответствующая точке 3).

### 5.3.6. Качественные показатели обнаружения сигналов со случайными параметрами

Для определения характеристик обнаружения сигналов со случайными параметрами необходимо знать условные плотности вероятности случайной величины  $Z$  при наличии и отсутствии сигнала в наблюдаемой смеси.

Плотность вероятности  $W(Z)$  можно определить из выражения для совместной плотности вероятности  $W(Z, Q)$ , проинтегрировав ее по всем возможным значениям  $Q$ . Совместная плотность вероятности  $W(Z, Q)$  вычисляется на основании совместной плотности вероятности  $W(z_1, z_2)$  путем перехода к новым переменным с учетом якобиана преобразования.

Рассмотрим обнаружитель сигнала, содержащего случайную фазу  $\beta$  и случайную амплитуду  $A$ , подчиняющуюся распределению Релея. При известной амплитуде сигнала плотность вероятности  $W(A) = \delta(A - 1)$ , т. е. принимается  $A = 1$ . При отсутствии сигнала  $W(A) = \delta(A)$ , т. е. принимается  $A = 0$ .

Можно показать по аналогии с соотношениями (5.23) и (5.24), что для любого фиксированного значения  $A$  средние значения случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  и их дисперсии определяются выражениями:

$$\langle z_{1,2} \rangle = A \int_0^T s(t, \beta) s_{1,2}(t) dt = \begin{cases} AE \cos \beta; \\ AE \sin \beta; \end{cases}$$

$$\sigma_{z_{1,2}}^2 \equiv \sigma_z^2 = \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s_{1,2}(t_1) s_{1,2}(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0 E}{2}.$$

Случайные величины  $z_1$  и  $z_2$  некоррелированы и подчиняются гауссовскому закону распределения. Следовательно, эти величины статистически независимы. Некоррелированность вытекает из приближенного равенства нулю смешанного центрального момента  $\langle (z_1 - \langle z_1 \rangle)(z_2 - \langle z_2 \rangle) \rangle$ . Действительно этот момент сводится к интегралу от произведения двух колебаний  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , при этом интеграл практически равен нулю.

Совместная условная плотность вероятности случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  с учетом их независимости определяется выражением

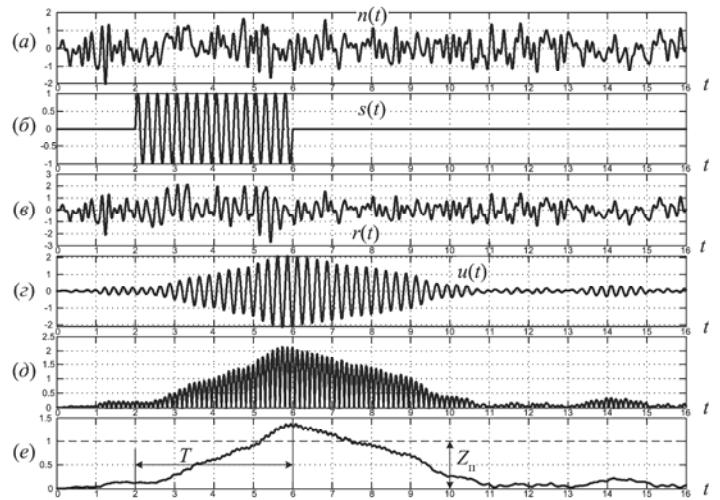


Рис. 5.17. Работа оптимального обнаружителя радиоимпульса

$$W(z_1, z_2 | \beta, A) = W(z_1 | \beta, A) = W(z_2 | \beta, A) = \frac{1}{2\pi\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{(z_1 - \langle z_1 \rangle)^2 + (z_2 - \langle z_2 \rangle)^2}{2\sigma_z^2}\right].$$

Полагая на основании выражения (5.53)  $z_1 = Z \cos Q$ ,  $z_2 = Z \sin Q$  перейдем к новым переменным двумерной плотности вероятности

$$W(Z, Q | \beta, A) = W(z_1, z_2 | \beta, A) \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(Z, Q)},$$

где

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(Z, Q)} = \begin{vmatrix} \cos Q & \sin Q \\ -Z \sin Q & Z \cos Q \end{vmatrix} = Z$$

есть якобиан преобразования. После преобразований получим

$$W(Z, Q | \beta, A) = \frac{Z}{2\pi\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_z^2}(Z^2 + A^2 E^2 - 2AEZ \cos(\beta - Q))\right].$$

Одномерная условная плотность вероятности  $W(Z | \beta, A)$  вычисляется путем интегрирования правой части полученного выражения по  $Q$ :

$$W(Z | \beta, A) = \int_0^{2\pi} W(Z, Q | \beta, A) dQ = \frac{Z}{\sigma_z^2} I_0\left(\frac{AEZ}{\sigma_z^2}\right) \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2 E^2}{2\sigma_z^2}\right].$$

Производя усреднение по параметрам  $\beta$  и  $A$  с учетом плотности вероятности  $W(\beta, A)$ , найдем искомую плотность вероятности величины  $Z$ :

$$W(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\infty} W(Z | \beta, A) W(A) dA.$$

Вид этой плотности вероятности меняется в зависимости от заданной плотности вероятности  $W(A)$ , поэтому целесообразно рассмотреть частные случаи:

1) при  $W(A) = \delta(A - 1)$  (сигнал со случайной начальной фазой и известной амплитудой)

$$W_{\text{с.н}}(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + E^2}{2\sigma_z^2}\right] I_0\left(\frac{ZE}{\sigma_z^2}\right), \quad Z > 0; \quad (5.63)$$

2) при  $W(A) = 2A \exp[-A^2]$  – релейском распределении (сигнал со случайными амплитудой и начальной фазой)

$$W_{\text{с.н}}(Z) = \frac{2Z}{2\sigma_z^2 + E^2} \exp\left[-\frac{Z^2}{2\sigma_z^2 + E^2}\right], \quad Z > 0;$$

3) при  $W(A) = \delta(A)$  (сигнал отсутствует)

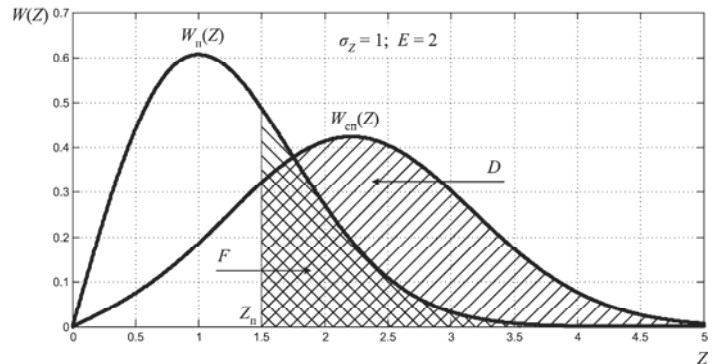
$$W_{\text{н}}(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp\left[-\frac{Z^2}{2\sigma_z^2}\right], \quad Z > 0.$$

Здесь при интегрировании использована табличная формула (5.58). Кривые условных плотностей вероятности  $W_n(Z)$  и  $W_{c.n.}(Z)$  при обнаружении сигнала со случайной начальной фазой приведены на рис. 5.18. Заштрихованные площади под кривыми справа от прямой, проходящей через пороговое значение  $Z_n$ , соответствуют вероятностям ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ .

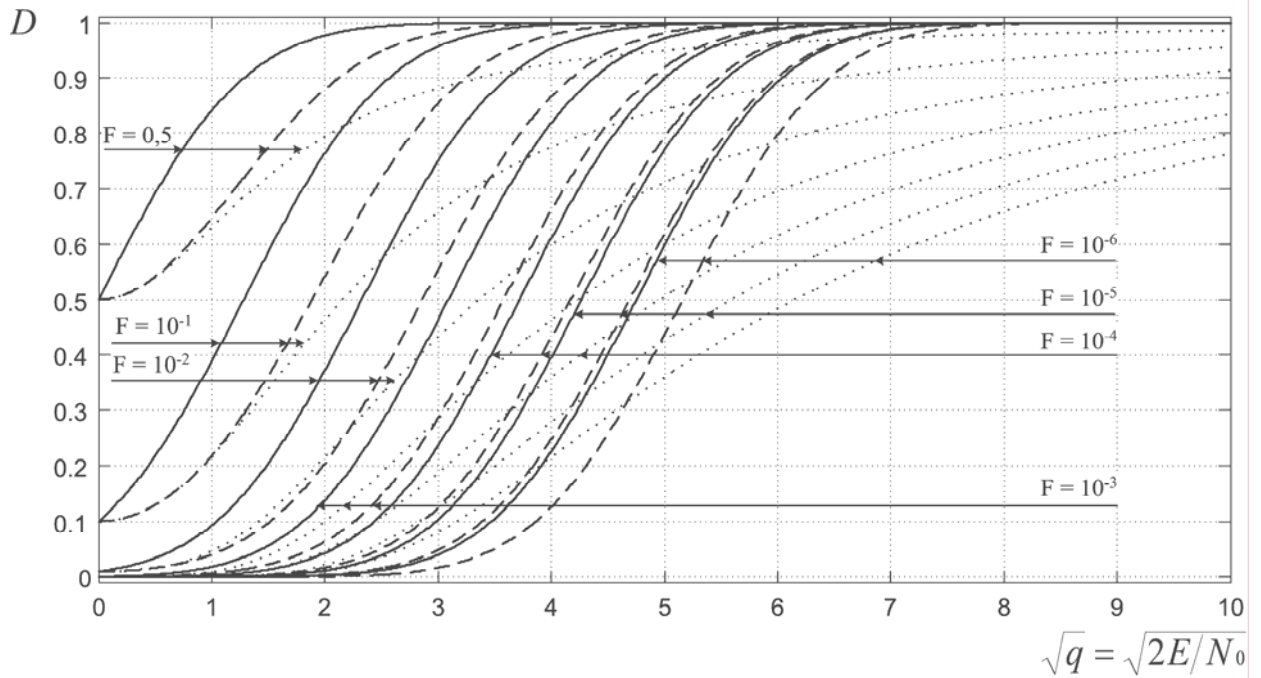
Введем переменную  $v = Z/\sigma_z$  и относительный порог  $h = Z_n/\sigma_z$ . Тогда с учетом параметра обнаружения  $q = 2E/N_0$  (отношения сигнал/шум) получим:

$$D = \int_{h_n}^{\infty} I_0(\sqrt{q}v) \exp\left[-\frac{q+v^2}{2}\right] dv;$$

$$F = \int_{h_n}^{\infty} v \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right] dv = \exp\left[-\frac{h_n^2}{2}\right].$$



**Рис. 5.18.** Графики условных плотностей вероятности корреляционных интегралов при наличии и отсутствии сигнала в смеси (сигнал со случайной начальной фазой и известной амплитудой)



**Рис. 5.19.** Характеристики обнаружения полностью известного сигнала (сплошные линии), сигнала с неизвестной начальной фазой (штриховые линии), сигнала с неизвестной начальной фазой и неизвестной амплитудой (точечные линии)

Приведенные соотношения определяют семейство характеристик обнаружения, показанных на рис. 5.19 (штриховые линии).

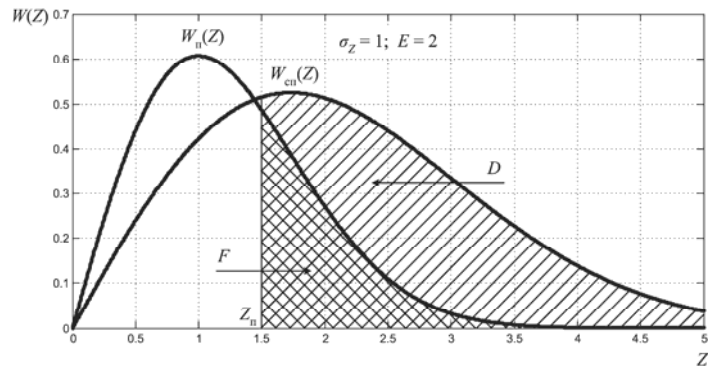
При сигнале со случайными амплитудой и начальной фазой условные вероятности  $D$  и  $F$  определяются площадями, заштрихованными под кривыми  $W_{c.n}(Z)$  и  $W_n(Z)$  на рис. 5.20. Эти вероятности вычисляются по следующим формулам:

$$D = \int_{h_n}^{\infty} W_{c.n}(Z) dZ = \exp\left[-\frac{h_n^2/2}{1+q/2}\right]; \quad (5.64)$$

$$F = \int_{h_n}^{\infty} W_n(Z) dZ = \exp\left[-\frac{h_n^2}{2}\right]. \quad (5.65)$$

Исключив величину  $h_n$  из соотношений (5.64) и (5.65), получим  $D = F^{(1+q/2)^{-1}}$ .

Кривые обнаружения, соответствующие данному случаю, приведены на рис. 5.19 (точечные). Для сравнения на этом же рисунке показаны кривые обнаружения сигнала с полностью известными параметрами (сплошные). Из анализа кривых можно сделать вывод о том, что для обнаружения сигнала со случайными параметрами требуется большая энергия, чем для обнаружения полностью известного сигнала при условии одинаковых качественных показателей обнаружения. Кривые обнаружения для сигнала со случайной амплитудой при больших значениях вероятности  $D$  смещаются вправо особенно сильно, что объясняется возможностью значительных замираний сигнала в канале распространения и снижением качества обнаружения. Вместе с тем при малых значениях  $D$  (менее 0,2) из-за случайного характера амплитуды возможно некоторое улучшение качества обнаружения по сравнению с сигналом, имеющим известную амплитуду и случайную начальную фазу.



**Рис. 5.20.** Графики условных плотностей вероятности корреляционных интегралов при наличии и отсутствии сигнала в смеси (сигнал со случайными начальной фазой и амплитудой)

## 2.4 ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ.

Если помеха описывается негауссовским распределением вероятностей, то использование устройств обнаружения сигналов, оптимизированных под гауссовскую помеху, может привести к неоптимальному результату. В связи с этим задачи приема и обработки сигналов на фоне негауссовских помех представляют значительный интерес.

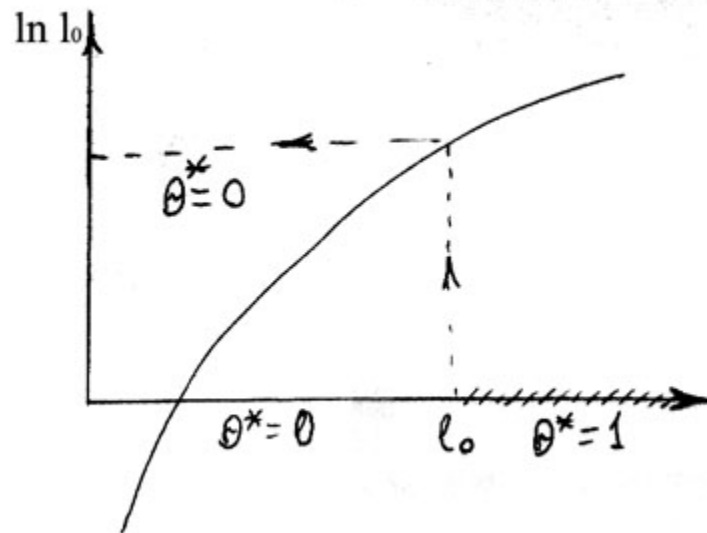
Рассмотрим вначале задачу обнаружения детерминированного сигнала, заданного в виде последовательности отсчетов  $s(t_k) \equiv s_k$  на фоне помехи  $y(t_k) \equiv y_k$  с независимыми значениями при наблюдении в дискретном времени процесса

$$r_k = \theta s_k + y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

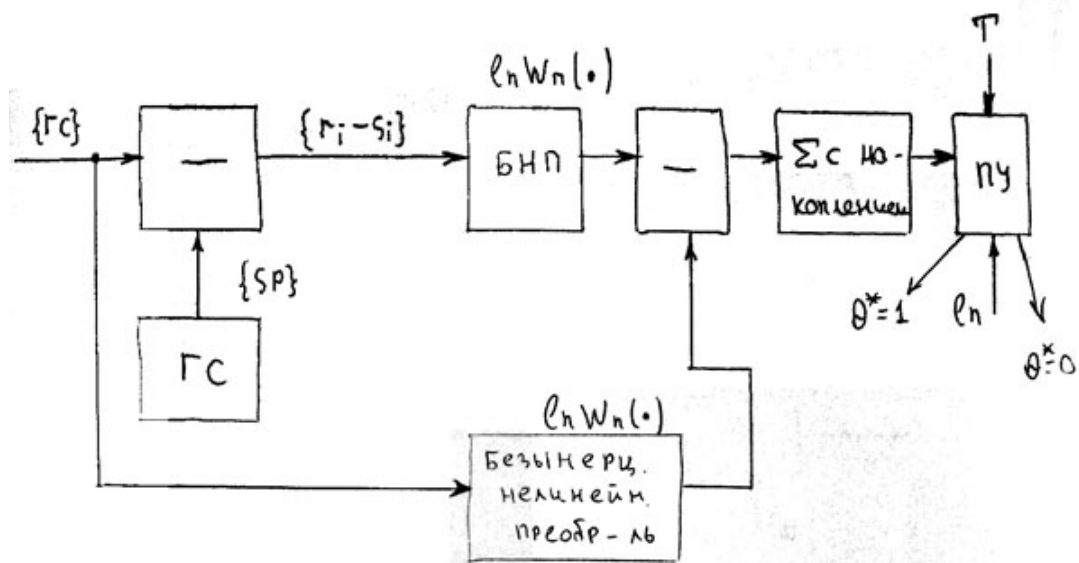
Плотность распределения вероятности помехи задана и обозначена  $W(y_k)$ .

Оптимальный обнаружитель должен формировать отношение правдоподобия (5.16), которое для случая независимых отсчетов помехи запишется в виде:





$$\left[ \begin{array}{l} \Theta^* = 1 \\ \ln l[\vec{r}] = \sum_{i=1}^N [\ln W_{\Pi}(r_i - s_i) - \ln W_{\Pi}(r_i)] > l_{\text{порог}} \\ \Theta^* = \theta \end{array} \right]$$



Практическая реализация обнаружителя существенно упрощается в случае слабых сигналов. При этом ряд по степеням достаточно малых величин  $s_k$  в (5.66), (5.67) можно ограничить одним членом ряда:

$$\ln l(\mathbf{r}) \cong Z_1 = \sum_{k=1}^n f_1(r_k) s_k,$$

где

$$f_1(r_k) = -\frac{d \ln W(r_k)}{dr_k}. \quad (5.70)$$



При  $s_k \rightarrow 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) величина  $Z_I$ , сходится в среднем квадратичном к величине  $Z$ ; это означает асимптотическую оптимальность алгоритма

$$\sum_{k=1}^n -\frac{d \ln W(r_k)}{dr_k} s_k \underset{\theta^*=0}{\overset{\theta^*=1}{>}} Z_{\text{п}}.$$

Структурная схема обнаружителя в рассматриваемом случае включает на входе безынерционный нелинейный преобразователь (БНП), характеристика которого (5.70) связана с заданной одномерной плотностью вероятности помехи.

Если помеха гауссовская с дисперсией  $\sigma_0^2$ , то БНП вырождается в линейный преобразователь с характеристикой  $f_1(r_k) = \sigma_0^{-2} r_k$ .

При различении сигналов на фоне интенсивной негауссовской помехи алгоритм различения остается таким же, как и при белом шуме, однако входная смесь  $r(t)$  предварительно поступает в БНП.

Для слабых сигналов со случайными параметрами структурные схемы, рассмотренные ранее (см. п.п. 5.2.4, 5.4.2) дополняются устройством БНП, включаемым на входе.

Заметим, что при переходе к непрерывному наблюдению на интервале  $[0, T]$  алгоритм обнаружения детерминированного сигнала на фоне негауссовской помехи сводится к формированию корреляционного интеграла  $Z(T)$  и сравнению его с порогом:

$$Z(T) = \int_0^T f_1[r(t)]s(t)dt \underset{\theta^*=0}{\overset{\theta^*=1}{>}} Z_{\text{п}}$$

где нелинейная функция  $f_1$  определяется выражением (5.70).

Определение характеристик обнаружения осуществляется по методике п. 5.2.4. Считаем величину  $Z(T)$  распределенной по гауссовскому закону, поскольку операция суммирования (интегрирования) приводит к нормализации результата. Тогда достаточно определить средние значения и дисперсии величины  $Z(T)$  при наличии и отсутствии сигнала  $s(t)$  в смеси  $r(t)$ .

Можно показать, что отношение сигнал/помеха  $q_{\text{вых}}$  на выходе БНП определяется соотношением

$$q_{\text{вых}} = q_{0\Gamma} \mu_a^2, \quad (5.71)$$

где  $q_{0\Gamma} = 2E/N_y$  – отношение сигнал/шум, рассчитываемое из условия действия гауссовского шума с такой же средней мощностью, как и у негауссовской помехи  $N_y = 2T\sigma_y^2$ , где  $\sigma_y^2$  – средняя мощность негауссовской помехи. Коэффициент  $\mu_a^2$  характеризует степень подавления негауссовской помехи в БНП. Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$\mu_a^2 = \sigma_y^2 I_\Phi = \sigma_y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{W(y)} \frac{dW(y)}{dy} \right)^2 W(y) dy. \quad (5.72)$$

Здесь  $I_\Phi$  – информация по Фишеру, зависящая от плотности вероятности помехи.

В частном случае гауссовской помехи со средней мощностью  $\sigma_y^2$  имеем  $I_\Phi = \sigma_y^{-2}$  и  $\mu_a^2 = 1$ . Очевидно, что коэффициент  $\mu_a^2$  и для некоторых помех может быть существенно больше единицы.

Таким образом, повышение отношения сигнал/помеха в БНП позволяет получить характеристики обнаружения более качественные, чем при гауссовском шуме с такой же средней мощностью, как у негауссовской помехи.

Рассмотрим пример импульсной помехи с плотностью вероятности

$$W(y) = A \exp[-\alpha |y|^\nu]. \quad (5.73)$$

Здесь  $\nu$  принимает значения от 0,5 до 2. Коэффициент  $A$  определяется из условия нормировки.

Характеристика БНП для данного примера

$$f_1(y) = \alpha \nu |y|^{\nu-1} \text{sign}(y).$$

Если  $\nu = 1$ , то  $W(y) = 0,5\alpha \exp[-\alpha |y|]$  соответствует распределению Лапласа. Тогда

$$f_1(y) = \alpha \text{sign } y,$$

т. е. БНП представляет идеальный ограничитель. Коэффициент подавления в этом случае  $\mu_a^2 = 2$ .

Следует отметить, что в БНП осуществляется амплитудное подавление помехи. Если помеха коррелирована, то вместо БНП включается инерционный нелинейный преобразователь. Коэффициент подавления помехи при этом зависит также от частотных свойств помехи. Верхняя граница коэффициента амплитудно-частотного подавления  $\mu_{ач}^2$  определяется произведением коэффициентов амплитудного и частотного подавления:  $\mu_{ач}^2 = \mu_a^2 \mu_q^2$ . Если коэффициент корреляции помехи, то для лапласовского распределения  $\mu_q^2 = (1 - \rho^2)^{-1}$ .

Слабый сигнал (интенсивная помеха).

$$\langle |y_i|^2 \rangle \gg S_i^2$$

$$\ln W_{\Pi}(r_i - s_i) \approx \ln W_{\Pi}(r_i) - \frac{d \ln W_{\Pi}(r_i)}{dr_i} s_i + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln W_{\Pi}(r_i)}{dr_i^2} s_i^2$$

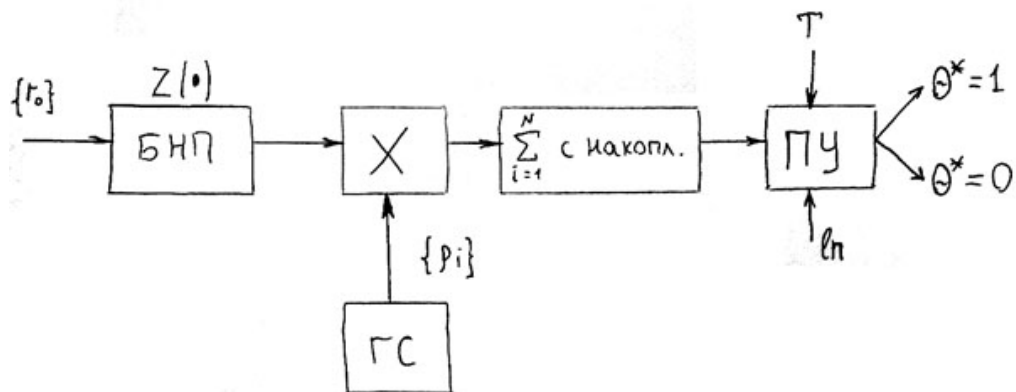
Ограничимся рассмотрением 2-х первых слагаемых

$$\Theta^* = 1$$

$$\ln l[r] = \sum_{i=1}^N Z[r_i] s_i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} l_n$$

$$\Theta^* = \theta$$

$$\left[ Z(y) = -\frac{d \ln W_n(y)}{dy} = -\frac{1}{W(y)} \frac{dW_n(y)}{dy} \right]$$



$$\Theta^* = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow \theta} \frac{1}{\Delta \cdot N} \sum_{i=1}^N Z[r_i] S_i \cdot \Delta = \frac{1}{T} \int_0^T Z[r(t)] \cdot S(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} l_n$$

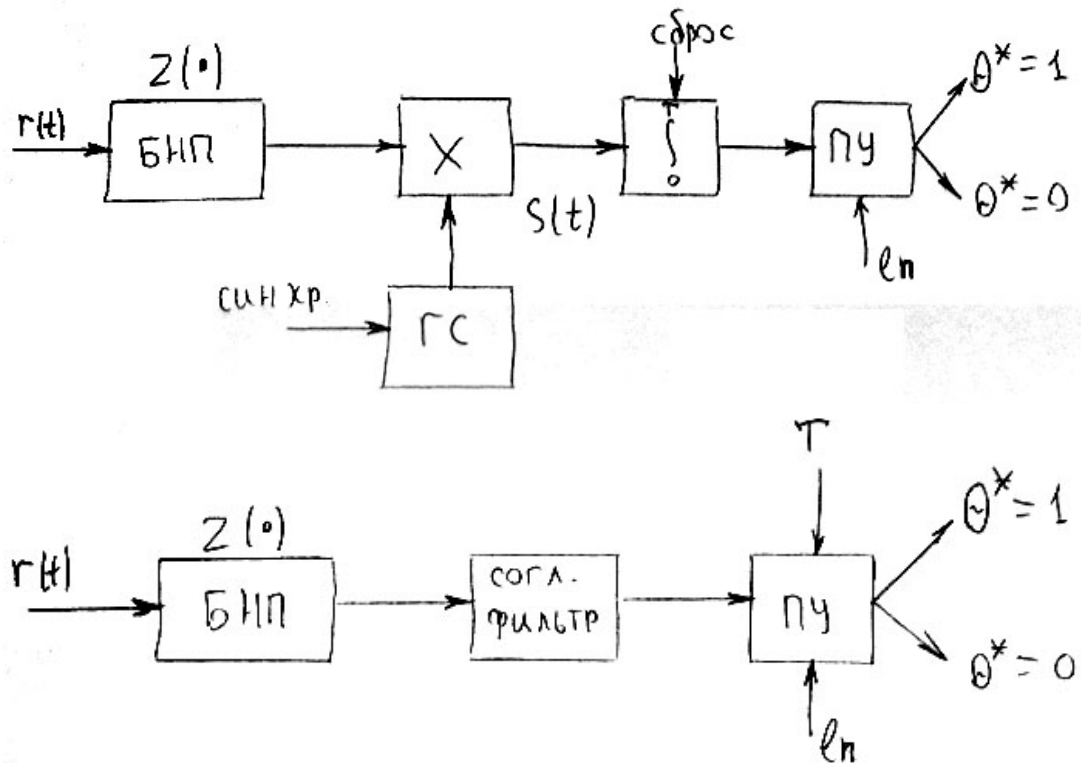
$$\Theta^* = \theta$$

$$\Delta \cdot N = T$$

$$\Theta^* = 1$$

$$Z = \int_0^T Z[r(t)] S(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} l_n$$

$$\Theta^* = \theta$$



### Качественные показатели обнаружения полезного сигнала.

$$D - l_0 F = \max$$

$D = P(\Theta^* = 1 | \Theta = 1)$  - вероятность правильного обнаружения.

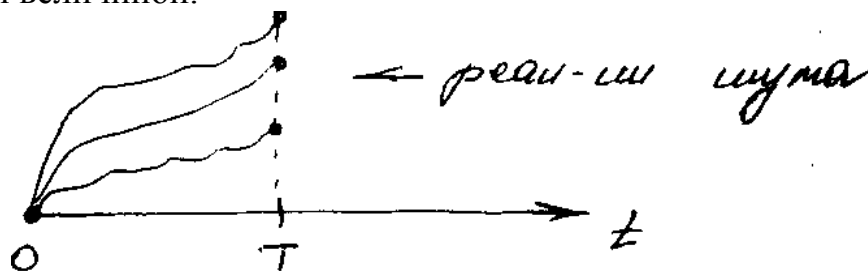
$F = P(\Theta^* = 1 | \Theta = 0)$  - вероятность ложной тревоги.

$D + \hat{D} = 1$  - вероятность пропуска.

$F + \hat{F} = 1$  - вероятность правильного необнаружения.

Рассмотрим случай слабого сигнала:

корреляционный интеграл включает случайную величину  $\Rightarrow$  и сам является случайной величиной.



Важно определить ЗР случайной величины  $J$ .

Считаем  $Z(r(t))$  искомой случайной величиной, и из-за ее случайности ...

В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности результат большого числа случайных величин, каждая из которых имеет свой малый вклад в результате приводит в образованию гауссовской случайной величины.

Можем утверждать на основе данной теоремы, что ЗР  $J$ - гауссовский.

$$W(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp \left[ -\frac{(J - \langle J \rangle)^2}{2\sigma_y^2} \right]$$

Неизвестными являются параметры  $J, \sigma_y^2$  и их нужно определить.

Будем определять при 2 условиях:

**1.  $\Theta = 0$  (сигнала нет), тогда:**

$$\int_0^T Z[y(t)]s(t)dt = J_0$$

$$\langle J_0 \rangle = \left\langle \int_0^T Z[y(t)]s(t)dt \right\rangle = \int_0^T \langle Z[y(t)] \rangle s(t)dt = 0$$

$$\langle Z[y(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z[y(t)]W_{II}(y)dy = 0$$

Тогда используя (\*) получим:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} dW_{II}(y) = W_{II}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Учитывая что  $W_{II}(y)$  удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{II}(y)dy = 1 \quad (\text{т.к. это ПРВ})$$

↓

$$W_{II}(\pm\infty) = 0$$

$$\text{т.о.} \quad \langle J_0 \rangle = 0,$$

тогда

$$\sigma_J^2 = \langle J_0 \rangle = \left\langle \left| \int_0^T Z(y)s(t)dt \right|^2 \right\rangle =$$

$$\left| \int_0^T Z[y(t)]s(t)dt \right|^2 \leq \int_0^T Z^2[y(t)]dt \cdot \int_0^T s^2(t)dt,$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma_J^2 &= E \left\langle \int_0^T Z^2[y(t)]dt \right\rangle = E \left\langle \int_0^T Z^2[y(t)] \right\rangle dt = \\ &= E \left\langle Z^2[y(t)] \right\rangle \int_0^T dt = E \langle Z^2(y) \rangle T \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}\sigma_J^2 &= E \cdot T \langle Z^2 [y(t)] \rangle \\ \langle Z^2 [y(t)] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2(y) W_{\Pi}(y) dy = \left| \frac{ucn.}{(*)} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy} \right]^2 W_{\Pi}(y) dy = I_{\phi}\end{aligned}$$

↑ информация Фишера.

информация Фишера  $I_{\phi}$  характеризует степень определенности случайной величины.

$$I_{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy} \right]^2 W_{\Pi}(y) dy$$

Знание этой величины позволяет определить потенциальные качества обнаружителя сигнала.

,тогда

$$\sigma_J^2 = E \cdot T \cdot I_{\phi} \quad (4)$$

**1.  $\Theta = 1$  (сигнал есть) слабый сигнал**, тогда:

$$(**) Z(r) = Z(s+y) \cong Z(y) + Z'(y) \cdot S + \dots$$

Вычисляем корреляционный интеграл:

(используем(\*\*))

$$\begin{aligned}\langle J_1 \rangle &= \int_0^T \langle Z[r(t)] \rangle s(t) dt \approx \int_0^T \langle Z[y(t)] \rangle s(t) dt + \\ &+ \int_0^T \langle Z'(y) \rangle s'(t) dt = 0\end{aligned}$$

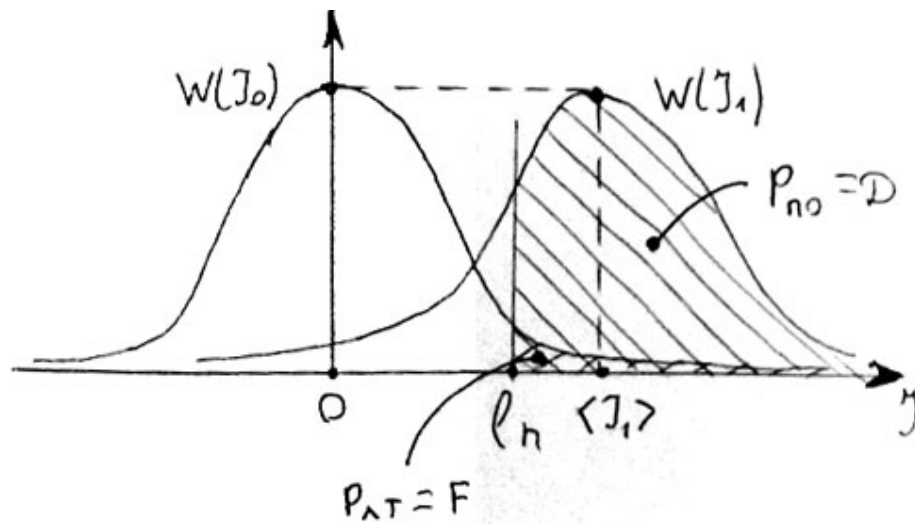
$$\langle J_1 \rangle = \int_0^T \langle Z'(y) \rangle s^2(t) dt = \langle Z'[y(t)] \rangle \cdot E$$

$$\langle Z'(y) \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} Z'(y) W_{\Pi}(y) dy \quad (***)$$

$$Z'(y) = \frac{dZ(y)}{dy} = \langle Z^2(y) \rangle$$

$$\langle J_1 \rangle = E \cdot \langle Z^2 [y(t)] \rangle = E \cdot I_{\phi}$$

$\sigma_J^2 = E \cdot T \cdot I_{\phi}$  остается тем же что и было

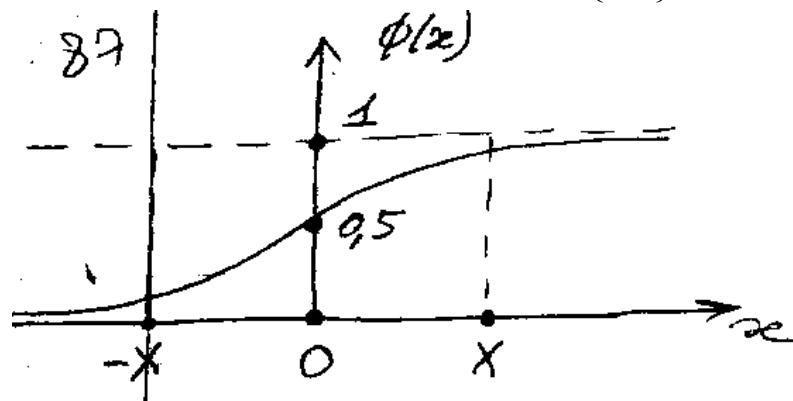


Снижение порога  $\uparrow P_{LT}$ ,  $\uparrow$  порога  $\downarrow P_{LT}$ , также порог влияет и на  $P_{no}$ .

Вычисляем вероятности:

$$F = \int_{l_{II}}^{+\infty} W(J_0) dJ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \int_{l_{II}}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{J^2}{2\sigma_J^2}\right\} dJ = *$$

используем  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$



$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$* = \left|t + \frac{J}{\sigma_J}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{l_{II}}{\sigma_J}}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 1 - \Phi\left(\frac{l_{II}}{\sigma_J}\right)$$

получили

$$F = 1 - \Phi\left(\frac{l_{II}}{\sigma_J}\right)$$

вероятность ЛТ.

Находим вероятность ПО:

$$\begin{aligned}
 D &= \int_{l_{II}}^{\infty} W(J_1) dJ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \int \exp\left\{-\frac{(J - \langle J_1 \rangle)^2}{2\sigma_J^2}\right\} dJ = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{l_{II} - \langle J_1 \rangle}{\sigma_J}}^{-\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 1 - \Phi\left(\frac{l_{II} - \langle J_1 \rangle}{\sigma_J}\right) \\
 D &= 1 - \Phi\left(\frac{l_{II} - \langle J_1 \rangle}{\sigma_J}\right)
 \end{aligned}$$

вероятность правильного обнаружения.

Относительное значение порога:

$$\begin{aligned}
 \frac{l_{II}}{\sigma_J} &= h_{II} \\
 q &= \frac{\langle J_1 \rangle^2}{\sigma_J^2} = \frac{E^2 \cdot I_{\phi}^2}{E \cdot T \cdot I_{\phi}} = \frac{E \cdot I_{\phi}}{T}
 \end{aligned}$$

умножим и разделим на среднюю мощность помехи  $\langle y^2 \rangle$

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 W_{II}(y) dy$$

,тогда

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{E}{\langle y^2 \rangle T} \langle y^2 \rangle I_{\phi} \\
 \langle y^2 \rangle I_{\phi} &= \mu_a^2
 \end{aligned}$$

$\mu_a^2$  - коэффициент амплитудного подавления помехи.

$$\langle y^2 \rangle T = \frac{N_y}{2}$$

$N_y$  - спектральная плотность мощности помехи (двухсторонняя).

$$q = \frac{2E}{N_y} \cdot \mu_a^2 = q_{ЭГ} \cdot \mu_a^2$$

$q_{ЭГ}$  - эквивалентное гауссовское отношение сигнал/шум (это отношение сигнал/шум на входе обнаружителя)

$$q = q_{ЭГ} \cdot \mu_a^2$$

$$\mu_a = \langle y^2 \rangle \cdot I_{\phi}$$

$$\langle y^2 \rangle = \sigma_y^2 \quad (\text{при } m_y = 0)$$



## 5.4. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

### 5.4.1. Различение детерминированных сигналов

Рассмотрим задачу различения двух детерминированных сигналов. В качестве критерия оптимальности примем критерий идеального наблюдателя (5.7), в соответствии с которым минимизируется полная вероятность ошибочного приема  $P_e$ .

Принятую смесь сигнала и шума представим в виде (**Ошибка! Источник ссылки не найден.Ошибка! Источник ссылки не найден.**), полагая сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  известными точно:

$$r(t) = \theta s_1(t) + (1 - \theta) s_2(t) + n(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.74)$$

Параметр  $\theta$  может принимать одно из двух значений – 0 или 1. Считаются известными априорные вероятности  $P(s_1)$  и  $P(s_2)$  присутствия каждого из сигналов, причем  $P(s_1) + P(s_2) = 1$ . Белый гауссовский шум  $n(t)$  имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию  $R_n(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2)$ . По принятой реализации (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) требуется принять решение о значении параметра  $\theta$ , т. е. определить, какой из двух возможных сигналов присутствует в реализации. В данной задаче ошибочные ситуации характеризуются условными вероятностями  $P_{e2} = P(s_1|s_2)$  и  $P_{e1} = P(s_2|s_1)$ .

При решении задачи различения двух сигналов можно воспользоваться методикой, изложенной в п. 5.2.2, и определить оптимальное решающее правило  $\theta^*[r(t)]$ , минимизирующее полную вероятность ошибки  $P_e$ . По аналогии с соотношениями (5.8) и (5.9) критерий минимизации вероятности  $P_e$  можно свести к максимизации взвешенной разности:

$$P(s_1|s_1) - l_0 P(s_1|s_2) = \max,$$

где  $P(s_1|s_1)$  – вероятность принятия решения о наличии сигнала при условии действия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_1$ ;  $P(s_1|s_2) = P_{e2}$  – вероятность ошибочного принятия решения о наличии сигнала  $s_1$ ;  $l_0 = P(s_1)/P(s_2)$  – отношение априорных вероятностей.

Применяя представление процессов в виде набора дискретных значений и пользуясь методикой, описанной в п. 5.2.2, после перехода к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим следующее оптимальное правило различения двух сигналов:

$$\theta^*[r(t)] = \begin{cases} 1, & \text{если } l_1[r(t)] > l_0; \\ 0, & \text{если } l_1[r(t)] < l_0. \end{cases} \quad (5.75)$$

Здесь отношение правдоподобия  $l_1[r(t)]$  определяется выражением

$$l_1[r(t)] = \frac{W[r(t)|s_1]}{W[r(t)|s_2]} = \exp\left[-\frac{E_1 - E_2}{N_0}\right] \exp\left\{\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt\right\}, \quad (5.76)$$

где  $W[r(t)|s_i]$ ,  $i = 1, 2$ , – функционалы плотности вероятности реализации, вычисленные при условии наличия в смеси сигналов  $s_1$  и  $s_2$ ;  $E_1, E_2$  – энергии этих сигналов.

Исходя из выражения (5.75), оптимальное правило различения можно свести к следующему:

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = h \quad (5.77)$$

где  $h$  – пороговый уровень. При превышении порога величиной, стоящей в левой части неравенства (5.77), принимается решение о правильности гипотезы  $H_1$  (в реализации присутствует сигнал  $s_1$ ). Если значение корреляционного интеграла меньше порога  $h$ , принимается гипотеза  $H_2$  (в реализации присутствует сигнал  $s_2$ ). Таким образом, задача различения сигналов (так же, как и задача обнаружения) может трактоваться как задача проверки статистических гипотез.

В симметричной системе передачи двоичных сигналов принимается  $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$ ;  $E_1 = E_2$ , поэтому  $P_{e1} = P_{e2}$ . Для такой системы выражение (5.77) упрощается, поскольку порог  $h = 0$ :

$$\int_0^T r(t)s_1(t)dt - \int_0^T r(t)s_2(t)dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0. \quad (5.78)$$

Возможны различные варианты реализации оптимального алгоритма различения двух сигналов, известных точно; с использованием корреляторов (рис. 5.21) и согласованных фильтров (рис. 5.22). При построении схем, приведенных на рисунках, интеграл в левой части неравенства (5.77) представляется в виде разности и принято  $h_1 = N_0 h / 2$ :

$$\int_0^T r(t)s_1(t)dt - \int_0^T r(t)s_2(t)dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} h_1.$$

Разность величин  $u_1$  и  $u_2$  на выходах интеграторов сравнивается с порогом  $h_1$ . Согласованные с сигналами  $s_1$  и  $s_2$  фильтры (СФ) на рис. 5.22 обеспечивают формирование в момент  $t = t_0 + t_3$ ,  $t_0 \geq T$ , величин, пропорциональных значениям  $u_1$  и  $u_2$ . При  $t_0 = T$  и  $C = 1$  импульсная реакция СФ определяется соотношением [см. формулу (5.36)]  $g_i(t) = s_i(T - t)$ ,  $i = 1, 2$ .

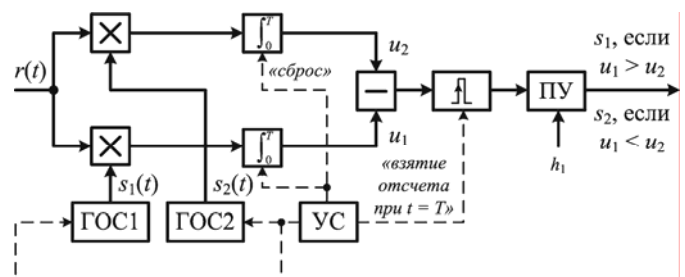


Рис. 5.21. Оптимальный различитель на основе корреляторов

Возможна реализация различителя на основе одноканальной схемы. В этом случае генератор опорного сигнала (ГОС) формирует разностный сигнал  $s_1(t) - s_2(t)$ , а СФ имеет импульсную реакцию  $g(t) = s_1(T-t) - s_2(T-t)$ . Схемы различителей одноканального типа приведены на рис. 5.23, 5.24.

Вычислим вероятность общей ошибки  $P_e$  различителя двух детерминированных сигналов. Рассмотрим симметричную систему передачи. Решающее правило (5.77) содержит в левой части неравенства величину, которая зависит от реализации шума и поэтому случайна. Поскольку  $n(t)$  – гауссовский белый шум, случайная величина корреляционного интеграла подчиняется гауссовскому закону. При наличии в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_1(t)$  выражение в левой части неравенства (5.83) можно представить в виде

$$u(T) = u_{s_1} = \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt.$$

Гауссовская случайная величина  $u_{s_1}$  имеет среднее значение

$$\langle u_{s_1} \rangle = E(1 - \rho_s) \tag{5.79}$$

и дисперсию

$$\langle u_{s_1}^2 \rangle - \langle u_{s_1} \rangle^2 = EN_0(1 - \rho_s) \tag{5.80}$$

Здесь

$$\rho_s = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \tag{5.81}$$

есть коэффициент взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

При условии наличия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_2(t)$  случайная величина  $u(t)$ , образуемая на выходе коррелятора или СФ, определяется выражением

$$u(T) = u_{s_2} = \int_0^T [s_2(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt.$$

Характеристики этой гауссовской случайной величины следующие: среднее значение

$$\langle u_{s_2} \rangle = -E(1 - \rho_s); \tag{5.82}$$

дисперсия

$$\langle u_{s_2}^2 \rangle - \langle u_{s_2} \rangle^2 = EN_0(1 - \rho_s). \tag{5.83}$$

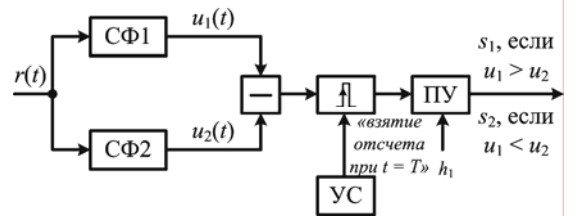


Рис. 5.22. Оптимальный различитель на основе

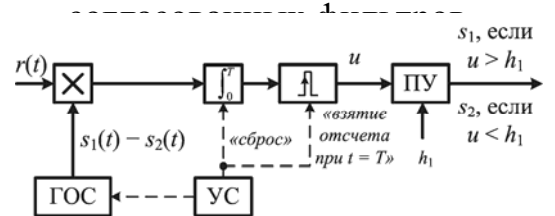


Рис. 5.23. Одноканальный различитель на корреляторе

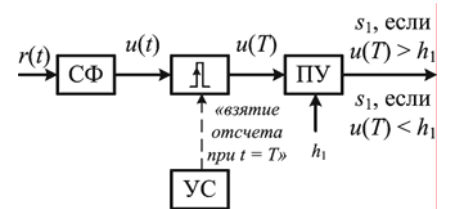


Рис. 5.24. Одноканальный различитель на согласованном фильтре

Выражения (5.79) – (5.83) получены в соответствии с методикой, приведенной в п. 5.2.3.

Плотности вероятности  $W_1(u_s)$  и  $W_2(u_s)$  определяются при условии присутствия в смеси сигналов  $s_1$  и  $s_2$  соответственно. Вид этих условных плотностей вероятности показан на рис. 5.25, где заштрихованные площади соответствуют условным вероятностям ошибочного приема  $p(s_1|s_2)$  и  $p(s_2|s_1)$ . Указанные вероятности определяются выражениями:

$$p(s_1|s_2) = \int_h^{\infty} W_2(u) du; \quad p(s_2|s_1) = \int_{-\infty}^h W_1(u) du. \quad (5.84)$$

Вероятность общей ошибки в соответствии с соотношениями (5.7) и (5.84) для симметричной системы может быть записана в виде

$$P_e = 0,5 \left[ \int_0^{\infty} W_2(u) du + \int_{-\infty}^0 W_1(u) du \right].$$

После вычислений с учетом выражений для плотностей вероятности получим

$$P_e = 1 - \Phi(\sqrt{0,5q(1-\rho_s)}), \quad (5.85)$$

где  $q = 2E/N_0$  – отношение сигнал/шум;  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности (5.29).

Таким образом, вероятность полной ошибки при приеме равновероятных сигналов с одинаковыми энергиями для заданного отношения сигнал/шум  $q = 2E/N_0$  зависит от величины коэффициента взаимной корреляции сигналов  $\rho_s$ . Наибольшей помехоустойчивостью обладают

сигналы с минимальным коэффициентом корреляции  $\rho_s$ . Заметим, что  $|\rho_s| \leq 1$ . Для **противоположных** сигналов  $s_1(t) = -s_2(t)$  имеем  $\rho_s = -1$ . Для **одинаковых** сигналов  $s_1(t) = s_2(t)$  коэффициент  $\rho_s = 1$ . Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  **ортогональны**, если  $\rho_s = 0$ . *Наибольшей различимостью обладают сигналы, одинаковые по форме и противоположные по знаку (противоположные сигналы). Одинаковые сигналы различить невозможно. Вероятность ошибки  $P_e$*

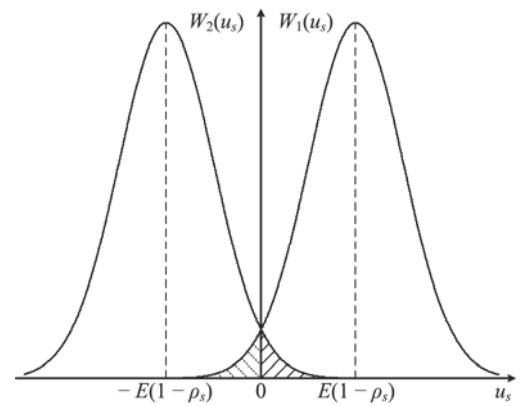


Рис. 5.25. Условные ПРВ при различении

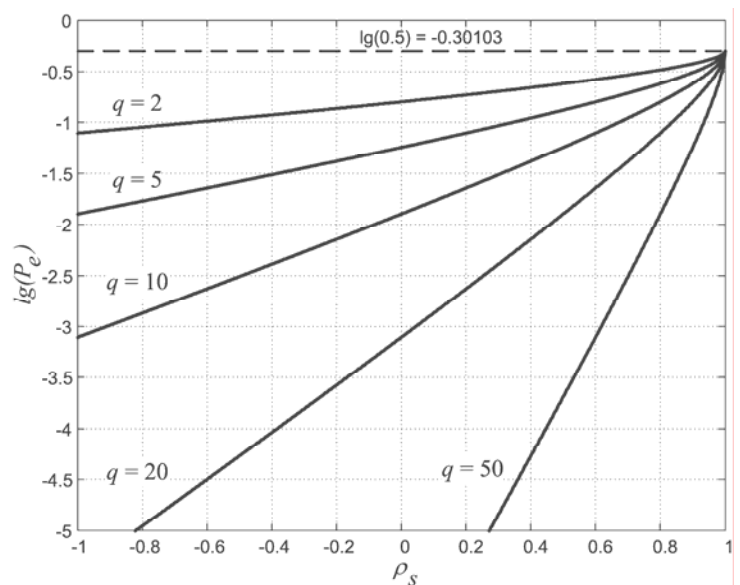


Рис. 5.26. Логарифм вероятности ошибки различения как функция взаимной корреляции сигналов при различных отношениях С/Ш

зависит от коэффициента корреляции  $\rho_s$ , как показано на рис. 5.26, где значения отношения сигнал/шум зафиксированы. Наименьшую вероятность  $P_e$  можно достичь при  $\rho_s = -1$ . Если  $\rho_s = 1$ , то независимо от значений  $q$ , вероятность  $P_e = 0,5$ .

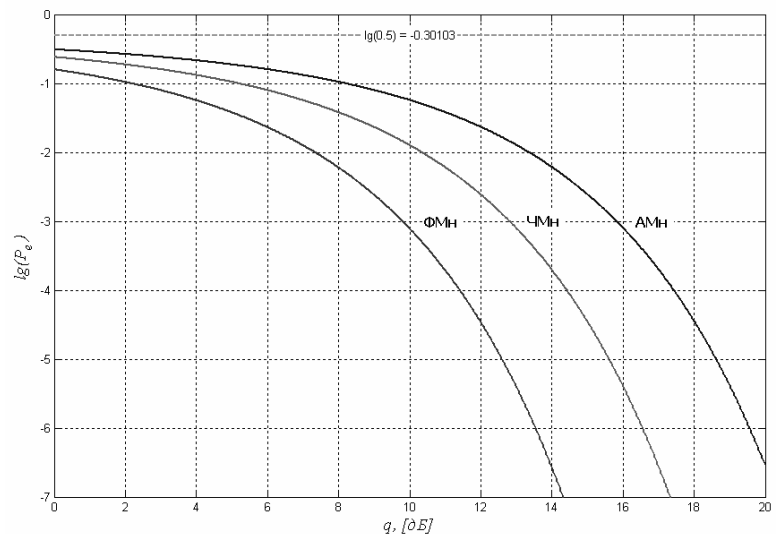
Обычно пользуются кривыми **потенциальной помехоустойчивости**, которые характеризуют зависимость вероятности общей ошибки  $P_e$  от отношения сигнал/шум  $q$  при оптимальном приеме детерминированных сигналов. Рассмотрим частные случаи кривых для некоторых видов манипулированных сигналов, применяемых для передачи двоичных сообщений.

При **амплитудной манипуляции (АМ)** и передаче сообщений с пассивной паузой

$$s_1(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \varphi]; \quad s_2(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

В этом случае  $\rho_s = 0$ , а характеристики плотностей вероятности  $W_1(u_s)$  и  $W_2(u_s)$  следующие:  $\langle u_{s1} \rangle = E$ ;  $\langle u_{s2} \rangle = 0$ ;  $\langle u_{si}^2 \rangle - \langle u_{si} \rangle^2 = N_0 E / 2$ ,  $i = 1, 2$ , где  $E = A_m^2 T / 2$  – энергия сигнала.

При равных вероятностях наличия и отсутствия сигнала вероятность  $P_e$  полной ошибки записывается в виде суммы  $0,5(P_{e1} + P_{e2})$ , где  $P_{e1}$  соответствует условной вероятности  $\hat{D} = 1 - D$  пропуска сигнала  $s_1$ , а вероятность  $P_{e2}$  – условной вероятности ложной тревоги. Вероятности  $D$  и  $F$  вычислены в п. 5.2.4 и определяются соотношениями (5.31) и (5.32). На основании этих соотношений можно определить оптимальный порог  $h_{\text{opt}}$ , при котором полная вероятность  $P_e$  минимальна. Из условия  $dP_e/dh = 0$  или по формуле (5.77) находим  $h_{\text{opt}} = E/2$ . При таком пороге вероятность  $P_e$  минимальна и равна  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q}/2)$ , где  $q = 2E/N_0$ . График зависимости  $P_e$  от  $q$  для АМ приведен на рис. 5.27.



**Рис. 5.27.** Логарифм вероятности ошибки различения как функция отношения сигнал/шум

При **частотной манипуляции (ЧМ)** сигнал на интервале  $[0, T]$  принимает одно из двух возможных значений частоты, поэтому

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos[\omega_1 t + \varphi_1]; \\ s_2(t) &= A_m \cos[\omega_2 t + \varphi_2]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

При условии  $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$  можно считать сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  ортогональными, т. е.  $\rho_s = 0$ . Подставив это значение коэффициента

корреляции в формулу (2.91), получим выражение для вероятности полной ошибки:  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q}/2)$ , зависимость которой от отношения сигнал/шум  $q$  приведена на рис. 5.27.

Отметим некоторые особенности ЧМ сигналов. Различают ЧМ сигналы с разрывом фазы, которые определяются выражениями (5.86). Такие сигналы формируются разными генераторами, коммутируемыми в соответствии с передаваемыми информационными символами. Начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  независимы друг от друга.

ЧМ сигналы без разрыва фазы формируются с помощью одного генератора, частота которого изменяется в соответствии с передаваемыми символами. При этом фаза колебаний в начале очередного тактового интервала совпадает с фазой колебания в конце предыдущего интервала:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos[\omega_1(t - kT) + \Phi_k + \varphi] \\ s_2(t) &= A_m \cos[\omega_2(t - kT) + \Phi_k + \varphi] \end{aligned} \quad t \in [kT, (k+1)T],$$

где  $\Phi_k = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i T$  – набег фазы за  $k-1$  предыдущих интервалов;  $\omega_i$  – значение частоты на  $i$ -м интервале ( $\omega_i = \omega_1$  или  $\omega_i = \omega_2$ ). Влияние значения информационного символа на фазу сигнала в последующих интервалах можно использовать для повышения помехоустойчивости по сравнению с посимвольным приемом независимых посылок. Так, при выборе  $(\omega_2 - \omega_1)T = \pi$  можно получить вероятность  $P_e$  приема ЧМ радиосигналов с непрерывной фазой такую же, как и при приеме фазоманипулированных сигналов.

При **фазовой манипуляции** (ФМ) справедливо следующее соотношение для сигналов:

$$s_1(t) = -s_2(t) = A_m \cos \omega_0 t, \quad t \in [0, T].$$

Коэффициент корреляции  $\rho_s = -1$ , и в соответствии с выражением (5.85) вероятность полной ошибки  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q})$ .

Зависимость вероятности  $P_e$  от отношения сигнал/шум для ФМ сигналов приведена на рис. 5.27.

Сравнение кривых, представленных на рис. 5.27, показывает, что наибольшей помехоустойчивостью обладает фазовая манипуляция, наименьшей – амплитудная манипуляция с пассивной паузой. Приведенные зависимости характеризуют **потенциальную помехоустойчивость**. В реальных системах осуществить идеальный когерентный прием сигналов не удастся из-за влияния случайных дестабилизирующих факторов на фазу и амплитуду радиосигнала. Поэтому реальная помехоустойчивость при рассмотренных условиях (помеха – гауссовский белый шум) всегда ниже потенциальной.

#### 5.4.2. Различение двоичных сигналов со случайными параметрами

Рассмотрим радиосигналы со случайными начальными фазами. Такие сигналы можно представить квазигармоническими колебаниями в виде [см.

выражение (**Ошибка! Источник ссылки не найден.Ошибка! Источник ссылки не найден.**)]

$$s_i(t) = S_{0i}(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t) + \varphi_i], \quad i = 1, 2,$$

где  $S_{0i}(t)$ ,  $\psi_i(t)$  – функции, определяющие закон модуляции;  $\omega_i$  – несущая частота;  $\varphi_i$  – начальная фаза  $i$  – го сигнала. Считаем начальные фазы сигналов независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Оптимальное решающее правило различения сигналов характеризуется соотношением (5.75). Чтобы определить отношение правдоподобия  $l_1[r(t)]$ , воспользуемся методикой, примененной при решении задачи обнаружения сигнала со случайной начальной фазой (п. 5.3.3). Введем обозначения для корреляционных интегралов:

$$\begin{aligned} z_{ic} &= \int_0^T r(t) S_{0i}(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t)] dt; \\ z_{is} &= \int_0^T r(t) S_{0i}(t) \sin[\omega_i t + \psi_i(t)] dt; \\ Z_i &= \sqrt{z_{ic}^2 + z_{is}^2}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.87)$$

и после преобразований, аналогичных описанным в п. 5.3.3, получим

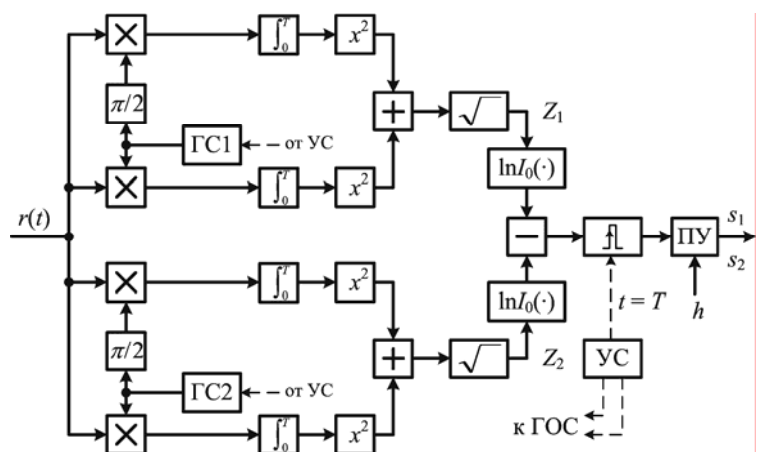
$$l_1[r(t)] = \exp \left[ \frac{E_2 - E_1}{N_0} \right] \frac{I_0(2Z_1/N_0)}{I_0(2Z_2/N_0)} \quad (5.88)$$

Логарифмируя выражение (5.88), можно оптимальное правило различения привести к виду

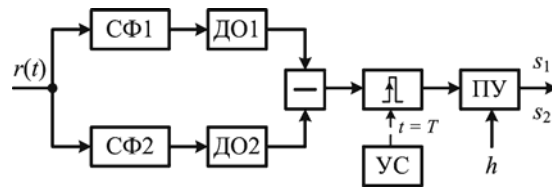
$$\ln I_0(2Z_1/N_0) - \ln I_0(2Z_2/N_0) \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} h \quad (5.89)$$

Здесь  $E_1, E_2$  – энергия сигналов;  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $h$  – порог.

Структурные схемы оптимальных различителей сигналов, имеющих случайные начальные фазы, можно реализовать на базе квадратурных корреляционных каналов (рис. 5.28) или на базе согласованных фильтров с детекторами огибающих (рис. 5.29). В приведенных схемах различителей используются те же элементы, что и в обнаружителях сигналов со случайными начальными фазами (см. рис. 5.15, 5.16).



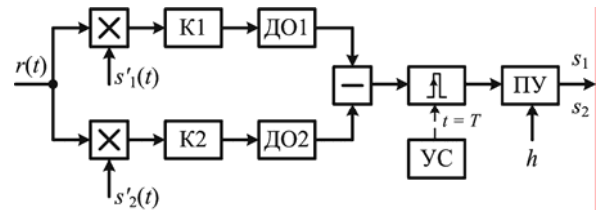
**Рис. 5.28.** Некогерентный различитель радиосигналов на основе корреляторов



**Рис. 5.29.** Некогерентный различитель радиосигналов на основе СФ

Кроме указанных методов построения различителей, используется **корреляционно-фильтровой**, который основан на преобразовании сигнала, фильтрации и детектировании. Входная смесь умножается на сигналы  $s'_1(t)$  и  $s'_2(t)$ , частоты которых сдвинуты относительно входных частот на величину  $\omega'$ .

После перемножителей включаются идеальные (с малым затуханием) колебательные контуры ( $K$ ), настроенные на частоты  $\omega_i - \omega'$ ,  $i = 1, 2$ , и выполняющие роль интеграторов, и детекторы огибающих ( $ДО$ ) (рис. 5.30).  $ДО$  имеют нелинейные характеристики, определяемые функцией  $\ln I_0(x)$ . Следует отметить, что из всех рассмотренных вариантов корреляционно-фильтровой приемник наиболее прост в реализации.



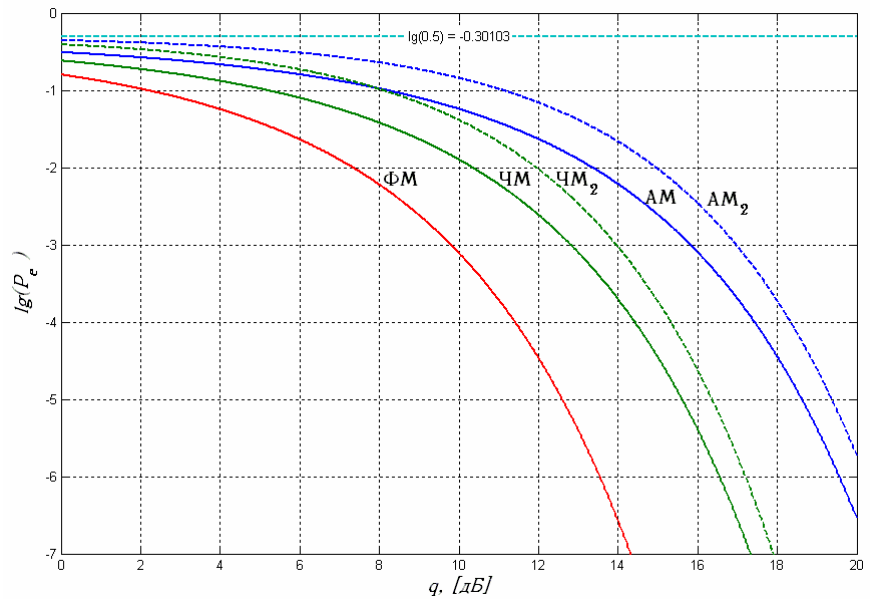
**Рис. 5.30.** Корреляционно-фильтровой различитель

Определим вероятность  $P_e$  ошибочного приема. Для этого необходимо вычислить условные вероятности ошибок  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$ . С этой целью определяют совместную плотность вероятности случайных величин  $z_{ic}, z_{is}$ ,  $i = 1, 2$ , а затем по известному правилу переходят к новым величинам, используя соотношение (5.87). В общем случае выражение для  $P_e$  оказывает громоздким. Для симметричной системы, использующей ортогональные сигналы ( $\rho_s = 0$ ),

$$P_e = 0,5 \exp(-q/4) \quad (5.90)$$



В случае АМ с пассивной паузой показатель берется равным  $-q/8$ . Рассчитанные кривые помехоустойчивости для некоторых систем передачи двоичных сигналов приведены на рис. 5.31. Штриховые кривые относятся к некогерентному приему (сигналы со случайными начальными фазами) и рассчитаны по формуле (5.90), сплошные кривые – к когерентному приему, определяемому выражением (5.85). Как видно из сопоставления кривых, наибольшей помехоустойчивостью обладают когерентные приемники ФМ сигналов. При некогерентном приеме наименьшую вероятность ошибки обеспечивают системы с ЧМ сигналами, которые являются практически ортогональными. Благодаря простоте реализации системы с ЧМ сигналами наиболее часто применяются на практике.



**Рис. 5.31.** Кривые помехоустойчивости при когерентном (сплошные линии) и некогерентном (штриховые линии) приеме

когерентному приему, определяемому выражением (5.85). Как видно из сопоставления кривых, наибольшей помехоустойчивостью обладают когерентные приемники ФМ сигналов. При некогерентном приеме наименьшую вероятность ошибки обеспечивают системы с ЧМ сигналами, которые являются практически ортогональными. Благодаря простоте реализации системы с ЧМ сигналами наиболее часто применяются на практике.

### 5.4.3. Различение ансамблей сигналов

В РЭИС ПИ для передачи информации нередко используют несколько различных (ансамбль) сигналов  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . При этом на каждом временном интервале длительностью  $T$  может передаваться один из  $m$  сигналов. Рассмотрим оптимальный различитель (по критерию минимума вероятности полной ошибки)  $m$  детерминированных сигналов  $s_i(t)$  принимаемых на фоне белого шума  $n(t)$ . Исходное колебание имеет вид

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, m}.$$

Предполагаем, что сигналы имеют одинаковые энергии и равные априорные вероятности появления  $P(s_i) = 1/m$ . Считаем, что в реализации  $r(t)$  присутствует тот из сигналов, апостериорная вероятность для которого наибольшая, т. е. принимается решение о наличии сигнала  $s_i$ , если для всех  $j \neq i$

$$P_{ps}(s_i) \geq P_{ps}(s_j). \quad (5.91)$$

Апостериорная вероятность определяется выражением

$$P_{ps}(s_i) = kP(s_i)W[r(t)|s_i], \quad (5.92)$$

которое характеризует условную вероятность присутствия  $i$ -го сигнала при наблюдении реализации смеси  $r(t)$  на интервале  $[0, T]$ . В выражение (2.92) входит  $P(s_i)$  – априорная вероятность присутствия  $i$ -го сигнала;  $W[r(t)|s_i] \equiv W_{c.пi}[r(t)]$  – функционал плотности вероятности реализации, вычисленный при условии наличия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_i(t)$ ;  $k$  – нормирующий коэффициент.

Выполнение условия (5.91) обеспечивает наибольшую вероятность правильного решения для каждой реализации и, следовательно, минимальную полную вероятность ошибки. С помощью уже известной методики можно записать выражение для условной плотности вероятности  $W_{c.пi}(\mathbf{r})$  по аналогии с формулой (5.14), а затем перейти к непрерывному наблюдению. В результате условие (5.91) примет вид

$$P(s_i) \exp \left[ -\frac{E_i}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_i(t) dt \right] \geq P(s_j) \exp \left[ -\frac{E_j}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_j(t) dt \right]. \quad (5.93)$$

Это соотношение определяет оптимальный алгоритм различения  $m$  сигналов. При априорно равновероятных сигналах, имеющих равные энергии, алгоритм (5.93) приводится к более простому путем логарифмирования обеих частей неравенства. В результате имеем

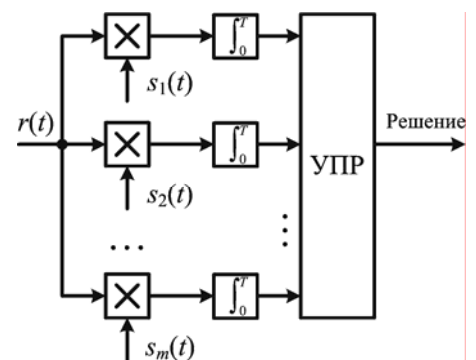
$$u_i = \int_0^T r(t) s_i(t) dt \geq \int_0^T r(t) s_j(t) dt = u_j.$$

Приведенному алгоритму соответствует структурная схема  $m$ -канального корреляционного различителя, показанная на рис. 5.32. Различитель включает устройство принятия решения (УПР), которое определяет канал с наибольшим значением корреляционного интеграла. Вместо коррелятора каждый канал может включать согласованный фильтр, настроенный на соответствующий сигнал из ожидаемого ансамбля. Решение вырабатывается в момент окончания действия сигнала. Схема, представленная на рис. 5.32, является обобщением рассмотренных схем различения двоичных сигналов. Отметим, что принцип многоканального построения различителя сохраняется и при различении  $m$  сигналов, содержащих случайные параметры.

Вероятность полной ошибки можно вычислить достаточно просто для ансамбля равновероятных ортогональных сигналов с одинаковыми энергиями. Условие ортогональности сигналов записывается в виде

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определим вначале условную совместную плотность вероятности  $W(u_1, \dots, u_m | s_i)$  гауссовских случайных величин  $u_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Характеристики этих случайных величин определяются выражениями:



**Рис. 5.32.** Структурная схема многоканального различителя

$$\begin{aligned}\langle u_j \rangle &= \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \\ \langle u_j^2 \rangle - \langle u_j \rangle^2 &= EN_0/2; \\ \langle (u_i - \langle u_i \rangle)(u_j - \langle u_j \rangle) \rangle &= \begin{cases} EN_0/2, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}\end{aligned}$$

Зная условную плотность вероятности  $W(u_1, \dots, u_m | s_i)$  можно найти вероятность правильного решения:

$$P_{ii} = \int_{-\infty}^{+\infty} du_i \int_{-\infty}^{u_i} \dots \int_{-\infty}^{u_i} W(u_1, \dots, u_m | s_i) du_1 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_m.$$

В результате интегрирования и замены  $u_i$  на  $x$  можно получить следующее выражение для вероятности  $P_{ii}$ :

$$P_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \sqrt{q})^2\right] \Phi^{m-1}(x) dx, \quad (5.94)$$

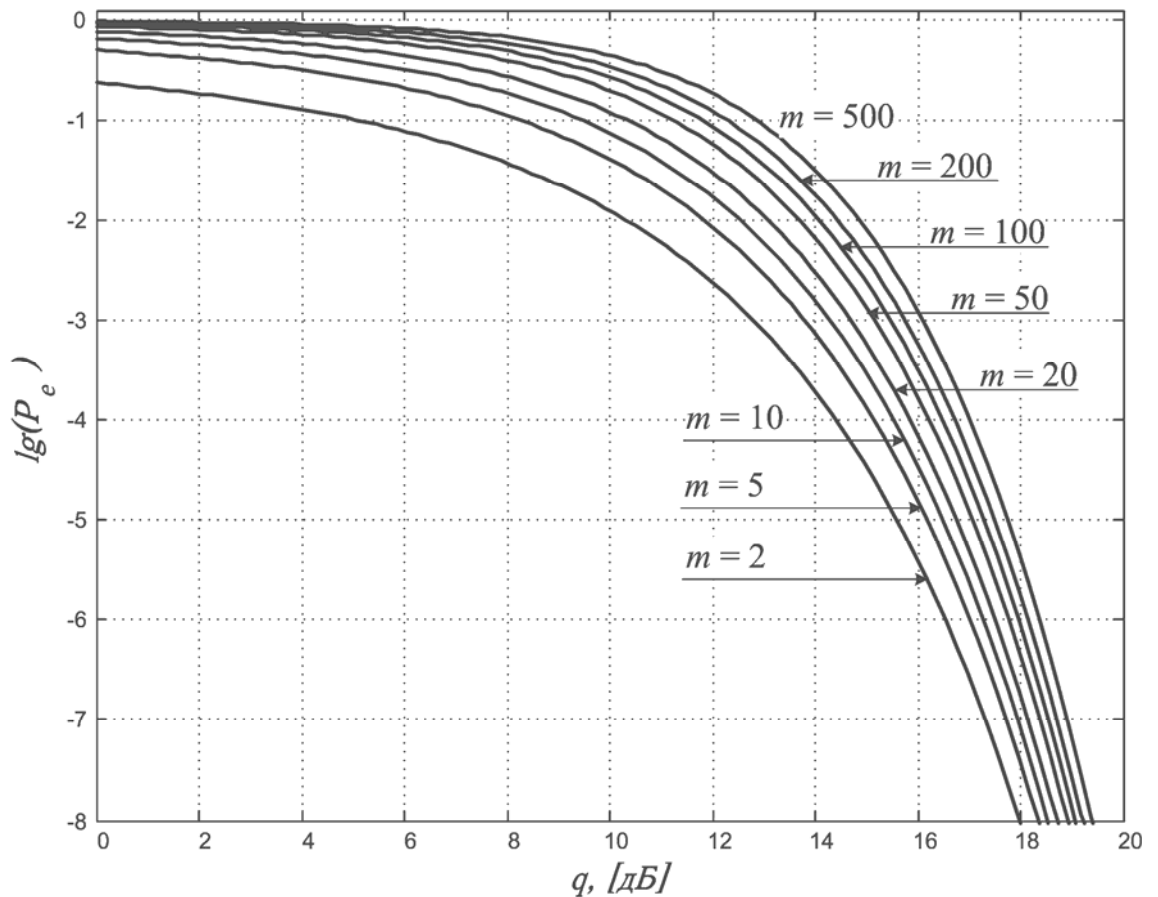
где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности [см. (5.29)]. Для равновероятных сигналов вероятность правильного приема каждого из сигналов одинакова.

Полная вероятность ошибки при различении равновероятных сигналов определяется соотношением

$$P_e = \sum_{i=1}^m (1 - P_{ii}) P(s_i) = 1 - P_{ii},$$

где вероятность  $P_{ii}$  вычисляется по формуле (5.94).

Кривые помехоустойчивости когерентного приема ортогональных сигналов для значений  $m$ , равных 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 приведены на рис. 5.33. Как видно из рисунка, *увеличение числа каналов  $m$  приводит к росту вероятности  $P_e$* . Это можно объяснить увеличением вероятности превышения напряжением канала, где действует в момент  $t = T$  только шум, напряжения канала, в котором действуют ожидаемый сигнал и шум.



**Рис. 5.33.** Характеристики различения  $m$  ортогональных сигналов

Каналы приема в различителе  $m$  ортогональных сигналов, имеющих случайные начальные фазы, строятся аналогично рис. 5.28 и 5.29. Выход детектора каждого канала подключается к УПР, где вырабатывается решение. Оценка помехоустойчивости некогерентного различителя показывает, что при  $\log_2 m > 7$  разница между когерентным и некогерентным приемниками становится пренебрежимо малой. В пределе при  $m \rightarrow \infty$  полные вероятности ошибки  $P_e$  для когерентного и некогерентного приемников совпадают. Верхняя граница для вероятности  $P_e$  определяется соотношением

$$P_e \leq (m-1) [1 - \Phi(\sqrt{q/2})], \quad (5.95)$$

или с учетом асимптотики функции  $\Phi(\sqrt{q/2})$  получается

$$P_e \leq \frac{(m-1)}{\sqrt{\pi q}} \exp\left[-\frac{q}{4}\right], \quad (5.96)$$

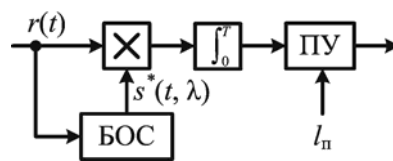
где  $q = 2E/N_0$  – отношение сигнал/шум.

#### 5.4.4. Обнаружение и различение сигналов с неизвестными параметрами

В рассмотренных выше задачах обнаружения и различений сигналов предполагались известными статистические характеристики помехи и случайных параметров сигнала. Во многих случаях априорные плотности вероятности параметров могут существенно отличаться от реально су-

ществующих. При этом качественные показатели приема ухудшаются по сравнению с ожидаемыми. Отсутствие или неполнота априорных сведений о параметрах сигналов и помех приводит к необходимости постановки задачи приема сигналов в условиях априорной неопределенности.

Возможны различные подходы к решению указанной задачи. Первый подход заключается в использовании приближенных априорных плотностей вероятности, например, равномерной в ожидаемом интервале изменения параметра. Вид априорного распределения оказывает влияние на переходный (нестационарный) режим работы устройства. В стационарном режиме результаты практически не зависят от вида априорной плотности вероятности неизвестных параметров. Второй подход основан на применении оценок неизвестных параметров, полученных с использованием результатов на всем интервале наблюдения.



**Рис. 5.34.** Обобщенная структурная схема оценочно-корреляционного обнаружителя

С практической точки зрения наиболее интересен третий подход, предполагающий использование текущих оценок неизвестных параметров и осреднения с учетом текущей апостериорной плотности вероятности. Обобщенная схема **оценочно-корреляционного** обнаружителя приведена на рис. 5.34. Оценка сигнала формируется в блоке оценки сигнала (БОС) на основе апостериорной плотности вероятности параметров  $\vec{\lambda}$ :

$$s^*(t, \vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \vec{\lambda}) \mathcal{W}(t, \vec{\lambda}) d\vec{\lambda}.$$

Формирование такой оценки сигнала в общем случае сопряжено с большими трудностями, связанными с необходимостью получения текущей апостериорной плотности вероятности параметров сигнала. Заметное упрощение алгоритма и схемы приема может быть получено при замене оценки сигнала  $s^*(t, \vec{\lambda})$  на функцию  $s(t, \vec{\lambda}^*)$ , в которой  $\vec{\lambda}^*$  – оценка неизвестных параметров. В условиях, когда отношение сигнал/шум  $q \gg 1$ , такая замена практически не снижает качества приема. Формирование функции  $s(t, \vec{\lambda}^*)$  осуществляется с помощью генератора сигнала, параметры которого изменяются в соответствии с текущими оценками  $\vec{\lambda}^*(t)$ . Эти оценки вырабатываются с помощью специальных устройств фильтрации, конкретные примеры построения которых подробно рассматриваются далее, в гл. 6.

Особое место занимают задачи обнаружения сигналов при нефиксированном времени анализа. В таких задачах используется критерий **последовательного наблюдения**. При последовательном наблюдении производится непрерывный анализ отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами: низким  $h_1 = (1 - D) / (1 - F)$  и высоким  $h_2 = D / F$ . Если отношение правдоподобия больше порога  $h_2$ , принимается решение о наличии сигнала (цели). Если отношение правдоподобия меньше порога  $h_1$ , принимается решение об отсутствии сигнала (цели). Если отношение правдоподобия находится между высоким и низким порогами, наблюдение продолжается до тех пор, пока не будет принято определенное решение. Последовательный анализ, разработанный А. Вальдом, позволяет независимо задавать вероятности ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ , экономит среднее время, требуемое для принятия решения, т. е. время анализа. Теория показывает, что процедура последовательного анализа обеспечивает минимизацию среднего времени, необходимого для принятия решения при заданных вероятностях  $D$  и  $F$ .

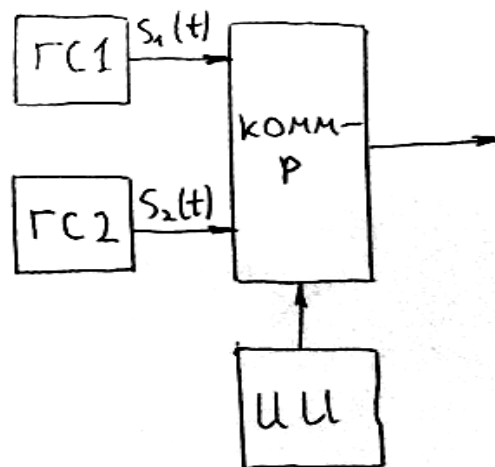
## 5.6. РАЗЛИЧИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ

В случае детерминированных сигналов наблюдаемый процесс представляется в виде

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 + X)s_1(t) + \frac{1}{2}(1 - X)s_2(t) + y(t), [0, T], \quad (2.1)$$

где  $X = \{\pm 1\}$  – информационный параметр,  $y(t)$  – помеха с заданной одномерной плотностью распределения вероятности  $W_{II}(y_i)$ . Из (2.1) следует  $r(t) = s_1(t) + y(t)$  при  $X = 1$ , и  $r(t) = s_2(t) + y(t)$  при  $X = -1$ .

Структурная схема формирователя сигнала имеет вид:





**Случай слабого сигнала (интенсивная помеха).**

Для случая слабого сигнала

$$\ln W_{\Pi}(r_i - s_{1i}) \approx \ln W_{\Pi}(r_i) - \frac{d \ln W_{\Pi}(r_i)}{dr_i} s_{1i} + \dots$$

$$\ln W_{\Pi}(r_i - s_{2i}) \approx \ln W_{\Pi}(r_i) - \frac{d \ln W_{\Pi}(r_i)}{dr_i} s_{2i} + \dots$$

т.е. раскладываем в ряд и ограничиваем двумя первыми членами ряда.  
Если задана одномерная  $W_{\Pi}(y)$ , тогда характеристика БНП:

$$Z(y) = -\frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy} = -\frac{1}{W_{\Pi}(y)} \frac{dW_{\Pi}(y)}{dy}$$

,тогда можно записать:

$$X^* = 1(s_1(t))$$

$$\sum_{i=1}^N Z(r_i)(s_{1i} - s_{2i}) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (6)$$

$$X^* = -1(s_2(t))$$

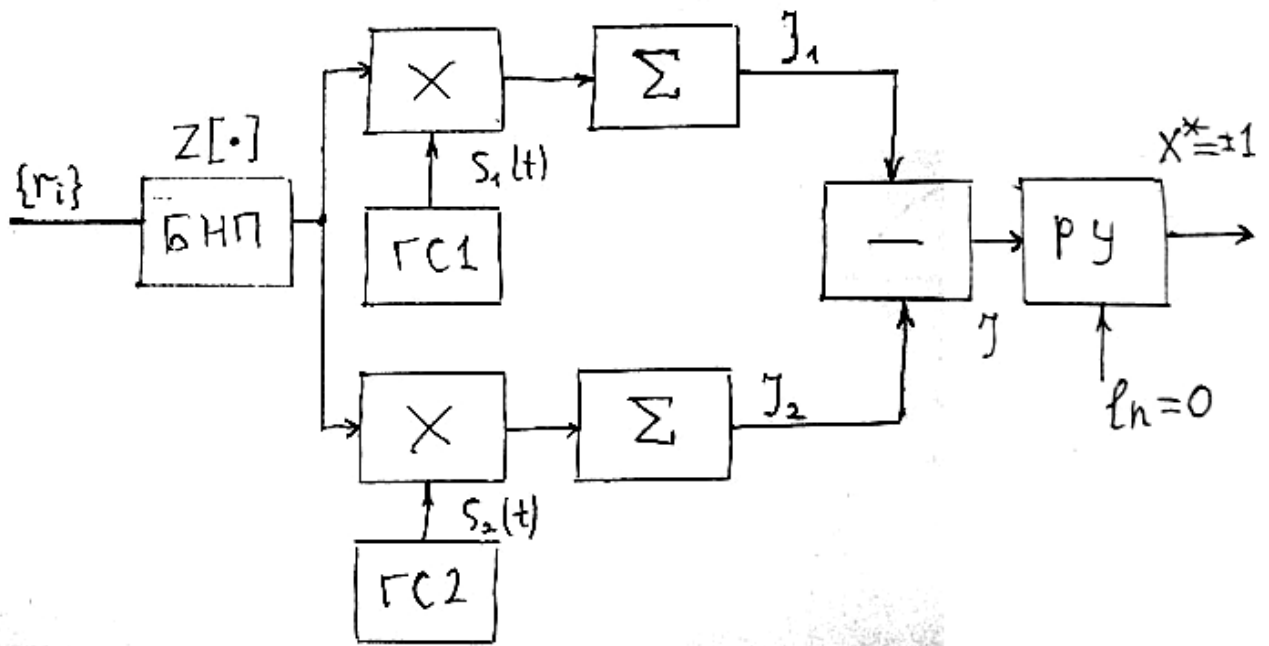
Или в другой форме

$$X^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^N Z[r_i]s_{1i} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \sum_{i=1}^N Z[r_i]s_{2i} \quad (6a)$$

$$X^* = -1$$

Сформируем схему (используя уравнение (6a)):



Перейдем к непрерывному времени.



$$\frac{1}{\Delta N} \sum_{i=1}^N Z[r_i] s_{1i} \cdot \Delta$$

$$\Delta \cdot N = T$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \cdot N} \sum_{i=1}^N Z[r_i] s_{1(2)i} \Delta = \frac{1}{T} \int_0^T Z[r(t)] s_{1(2)}(t) dt$$

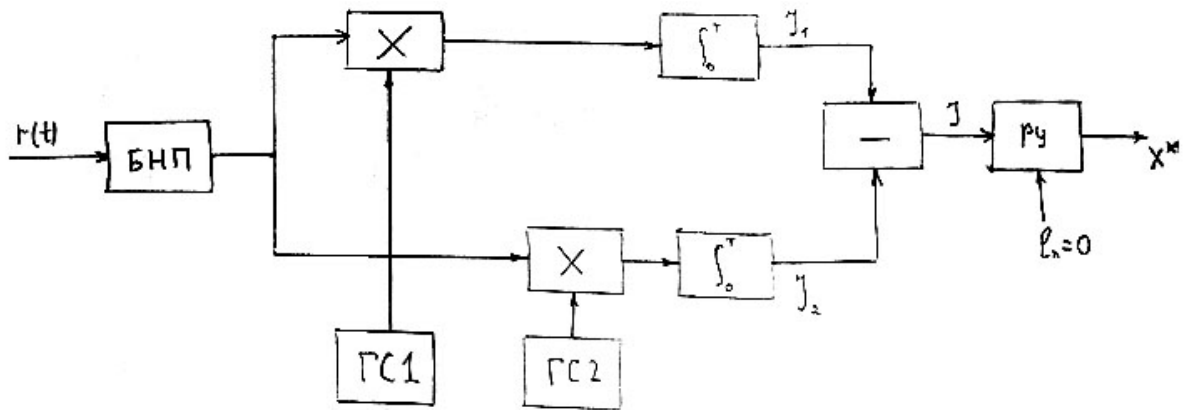
Таким образом, алгоритм для непрерывного времени сводится к следующему

$$X^* = 1$$

$$\int_0^T Z[r(t)] s_1(t) dt > \int_0^T Z[r(t)] s_2(t) dt \quad (7)$$

$$X^* = -1$$

Для уравнения (7) сформируем структурную схему:



РУ- решающее устройство.

Решение принимается на основе сравнения разности корреляционных интегралов с нулевым порогом

$$X^* = 1$$

$$J = \int_0^T Z[r(t)] \{s_1(t) - s_2(t)\} dt > 0$$

$$X^* = -1$$

$$W(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \exp \left\{ -\frac{(J - \langle J \rangle)^2}{2\sigma_J^2} \right\}$$

Есть основание считать, что дисперсия при наличии  $s_1(t)$  или  $s_2(t)$  одинакова, и остается такой же при отсутствии сигналов. Таким образом, необходимо вычислить среднее значение корреляционного интеграла и при условиях  $s_1(t)$  ( $X=1$ ) и  $s_2(t)$  ( $X=-1$ )

**Определение статистических характеристик величины J.**

Рассмотрим 2 случая :

$$1. X=1 \Rightarrow s_1(t) \text{ и } \langle J \rangle_1$$

$$2. X=-1 \Rightarrow s_2(t) \text{ и } \langle J \rangle_2$$

Дисперсия для обоих случаев будет одинаковой  $\sigma_y^2$

Определяем эти величины, учтем, что сигналы слабые.

1.  $s_1(t) \Rightarrow$  (поскольку сигнал слабый)

$$Z(r) \cong Z(y) + Z'(y) \cdot s_1(t) (*),$$

тогда корреляционный интеграл J распадается на два:

$$J = \int_0^T Z(y) [s_1 - s_2] dt + \int_0^T s_1(t) Z'(y) [s_1 - s_2] dt$$

$$Z(r) = Z(s_1 + y)$$

Данная функция раскладывается в ряд и ограничивается двумя членами ряда получаем (\*).

$$\langle J \rangle_1 = \int_0^T \langle Z(y) \rangle [s_1 - s_2] dt + \int_0^T \langle Z'(y) \rangle [s_1 - s_2] s_1 dt$$

$$\langle Z(y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(y) W_{\Pi}(y) dy = W_{\Pi}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

т.к. ПРВ на бесконечности стремится к нулю,

$$Z(y) = -\frac{1}{W_{\Pi}(y)} \frac{dW_{\Pi}(y)}{dy} = -\frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy}$$

$$Z'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z'(y) W_{\Pi}(y) dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} Z(y) W_{\Pi}(y) dy$$

$$Z'(y) = \frac{dZ(y)}{dy}$$

$$\langle Z'(y) \rangle = \langle Z^2(y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d \ln W_{\Pi}(y)}{dy} \right]^2 W_{\Pi}(y) dy = I_{\phi},$$

тогда

$$\langle J_1 \rangle = I_{\phi} \int_0^T s_1(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt$$

$$E_1 = E_2 = E = \int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt$$

т.е. считаем, что энергии сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  одинаковы (симметричный канал)

$$\langle J_1 \rangle = I_\phi \cdot E(1 - \rho_{12})$$

$$\rho_{12} = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt - \text{нормируемая корреляционная функция сигналов}$$

$$s_1(t) \text{ и } s_2(t).$$

, чтобы сигналы были различны необходимо  $\rho_{12} < 1$ ,

2.  $s_2(t) = -s_1(t)$

аналогично можно получить

$$\langle J_2 \rangle = I_\phi \int_0^T s_2(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt$$

получим все тоже самое, но со значением “-”, т.е.

$$\langle J_2 \rangle = -I_\phi \cdot E(1 - \rho_{12})$$

Дисперсию будем искать предполагая, что сигналов вообще нет (это проще), но можно и следующим образом:

$$\sigma_J^2 = \langle J^2 \rangle_1 - \langle J^2 \rangle_2$$

Дисперсию будем искать вычисляя значение интеграла при нулевом сигнале, считая что действует только помеха.

$$\langle J^2 \rangle_0 = \left\langle \left| \int_0^T Z[y](s_1(t) - s_2(t)) dt \right|^2 \right\rangle$$

В соответствии с неравенством Буняковского-Шварца имеем:

$$\left| \int_0^T Z[y](s_1(t) - s_2(t)) dt \right|^2 \leq \int_0^T Z^2[y] dt \int_0^T [s_1 - s_2]^2 dt$$

Берем нижнюю границу неравенства и усредняем:

$$\langle J^2 \rangle_0 = \sigma_J^2 = \int_0^T \langle Z^2[y] \rangle dt \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt =$$

$$= I_\phi \cdot T \cdot (2E - 2R_{12})$$

$$\langle J^2 \rangle_0 = I_\phi \cdot T \cdot E \cdot (1 - \rho_{12})$$

$$\rho_{12} = \frac{R_{12}}{E} - \text{нормальная корреляционная функция.}$$

$$q = \frac{\langle J \rangle_1^2}{\sigma_J^2} = I_\phi \cdot E \cdot (1 - \rho_{12}) \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{T}$$

$$q = \frac{I_\phi \cdot E \cdot (1 - \rho_{12})}{2T} - \text{отношение сигнал/шум.}$$

Введем эквивалентное отношение сигнал/шум, которое определяется энергией сигнала  $E$  и средней мощностью гауссовского шума, равной средней мощности действующей негауссовской помехи:

$$q_{\text{эГ}} = \frac{E}{T \langle y^2 \rangle},$$

тогда

$$q = q_{ЭГ} \mu_a^2 \cdot 0.5(1 - \rho_{12})$$

$\mu_a^2 = \langle y^2 \rangle I_\phi$  - коэффициент подавления помехи.

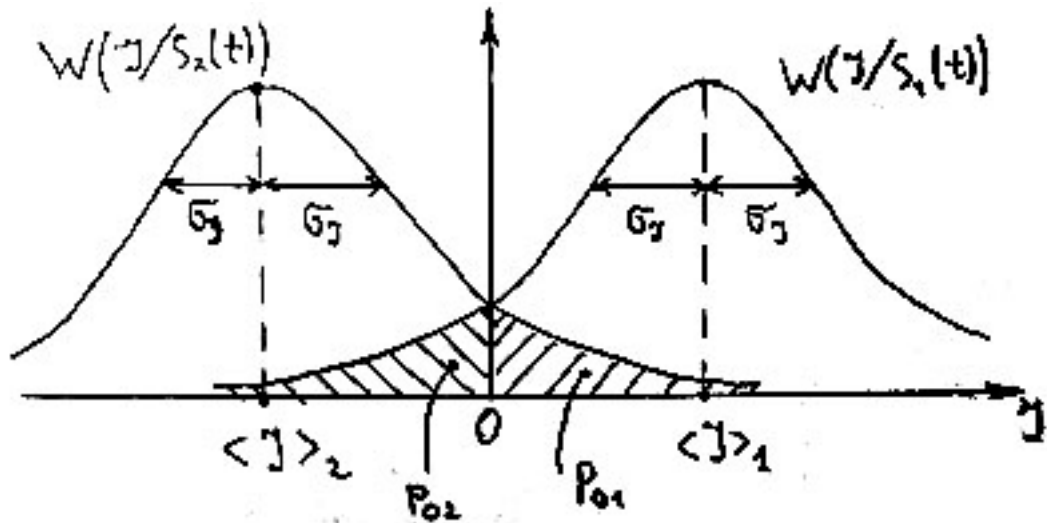


Рис. Условные ПРВ корреляционного интеграла при действии сигналов  $s_1$  и  $s_2$

Считаем равными вероятности ошибок при действии сигналов  $s_1$  и  $s_2$  (симметричный канал). Тогда  $P_{e1} = P_{e2} = P_e$

$$P_e = P_{e2} = \int_{-\infty}^0 W(J|s_1) dJ$$

Приведем это выражение к интегралу вероятности.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(J - \langle J \rangle_1)^2}{2\sigma_J^2}\right] dJ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\langle J \rangle_1}{\sigma_J}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = \Phi\left(-\frac{\langle J \rangle_1}{\sigma_J}\right)$$

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{0.5q_{ЭГ} \cdot \mu_a^2 (1 - \rho_{12})}\right) \quad (2.*)$$

где  $q = q_{ЭГ} \mu_a^2$ ,

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. Противоположные сигналы  $s_1(t) = -s_2(t)$

$$\rho_{12} = -1$$

тогда

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{q_{ЭГ} \cdot \mu_a^2}\right)$$

2. Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  - ортогональны, тогда:

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{0.5q_{ЭГ} \cdot \mu_a^2}\right)$$

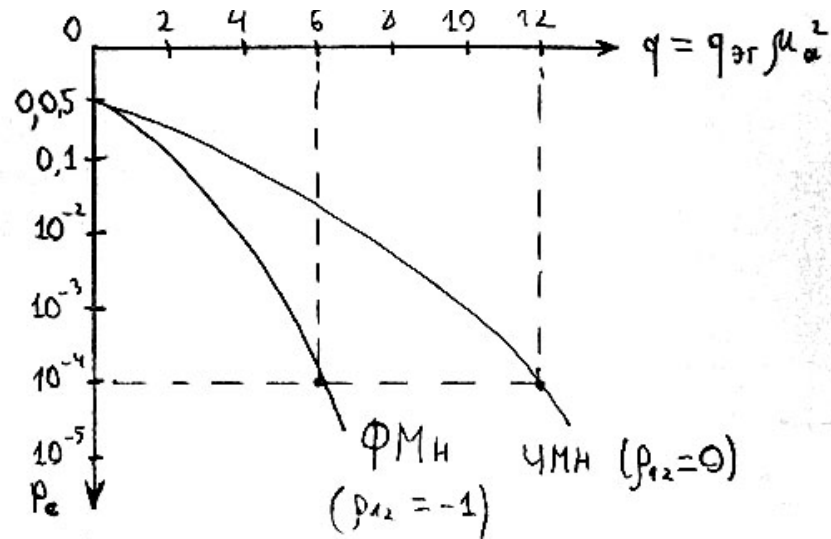
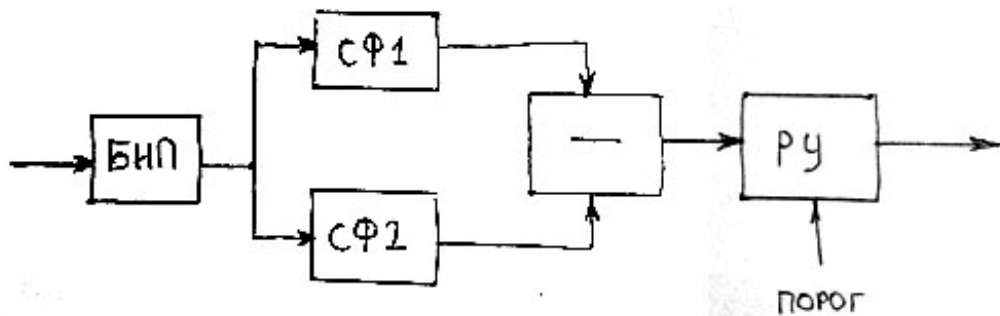


Рис.

Структурная схема на согласованных фильтрах (сигналы считаем слабыми)



(схема для детерминированных сигналов, СФ1- построен на  $s_1(t)$ , СФ2- на  $s_2(t)$  ).

Различение слабых сигналов со случайными начальными фазами на фоне интенсивных негауссовских помех)

Постановка задачи:

Наблюдаемый процесс представляет собой смесь сигнала и шума.

$$r(t) = \frac{1}{2}(1+X)s_1(t, \beta_1) + \frac{1}{2}(1-X) \cdot s_2(t, \beta_2) + y(t); [0, T], \quad (1)$$

где  $X = \{\pm 1\}$ .

Многомерная ПРВ определяется выражением

$$W_{\Pi}(\vec{y}) = \prod_{i=1}^n W_{\Pi}(y_i)$$

Первая гипотеза – действует сигнал  $s_1(t)$ ,

Вторая гипотеза – действует сигнал  $s_2(t)$ .

Рассмотрим эти гипотезы и определим, какой из сигналов действует.

$$\vec{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$$

$$\vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

$$\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

считаем отсчеты взаимонезависимыми. Если мы зафиксируем  $\beta_1, \beta_2$ , то сигналы становятся известными. Тогда условное отношение правдоподобия представляется в виде

$$l[\vec{r} | \beta_1, \beta_2] = \frac{W_{\Pi}(\vec{r} - \vec{s}_1(\beta_1))}{W_{\Pi}(\vec{r} - \vec{s}_2(\beta_2))} = \exp[J(\beta_1, \beta_2)],$$

а алгоритм различения для детерминированных сигналов известен:

$$J = \int_0^T Z[r(t)] [s_1(t) - s_2(t)] dt \begin{matrix} > & 0 \\ < & 0 \end{matrix}$$

Для дискретного времени получим следующее выражение условного значения  $J$ :

$$J(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^N Z[r_i] [s_1(t_i, \beta_1) - s_2(t_i, \beta_2)] = \sum_{i=1}^N Z[r_i] [s_{1i}(\beta_1) - s_{2i}(\beta_2)]$$

Если  $\beta_1, \beta_2$  независимы, то

$$W(\beta_1, \beta_2) = W(\beta_1) \cdot W(\beta_2)$$

Будем считать, что ПРВ  $\beta_{1,2}$  - равномерная на интервале  $[0, 2\pi]$

$$W(\beta_{1,2}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \beta_{1,2} \in [0, 2\pi] \\ 0, & \beta_{1,2} \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

Тогда безусловное отношение правдоподобия определяется усреднением условного

$$l[\vec{r}] = \int_0^{2\pi} d\beta_1 \int_0^{2\pi} d\beta_2 l[\vec{r} | \beta_1, \beta_2]$$

Для слабых сигналов алгоритм различения сводится к сравнению интегралов

$$\int_0^T Z[r(t)] s_1(t, \beta_1) dt \stackrel{>}{<} \int_0^T Z[r(t)] s_2(t, \beta_2) dt$$

или сравнению функций от этих интегралов

$$\exp[J_1(\beta)] \stackrel{>}{<} \exp[J_2(\beta)],$$

$$s_1(t)$$

$$s_2(t)$$

где

$$J_1(\beta_1) = \int_0^T Z[r(t)] s_1(\beta_1) dt, \quad J_2(\beta_2) = \int_0^T Z[r(t)] s_2(\beta_2) dt$$

Если сигналы представляют квазигармонические колебания  $s_i(t, \beta_i) = A_i(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t) + \beta_i]$ ,  $i = 1, 2$ , то их можно представить в виде

$$s_1(t, \beta_1) = s_{1c}(t) \cos \beta_1 + s_{1s}(t) \sin \beta_1,$$

$$s_2(t, \beta_2) = s_{2c}(t) \cos \beta_2 + s_{2s}(t) \sin \beta_2.$$

Квадратурные компоненты сигналов (синусные и косинусные) определяются выражениями

$$s_{jc}(t) = A_j(t) \cos(\omega_j t + \psi_j(t)),$$

$$s_{js}(t) = A_j(t) \sin(\omega_j t + \psi_j(t)).$$

При этом корреляционные интегралы представляются в виде

$$J_1(\beta_1) = J_{1c} \cos \beta_1 + J_{1s} \sin \beta_1$$

$$J_2(\beta_2) = J_{2c} \cos \beta_2 + J_{2s} \sin \beta_2$$

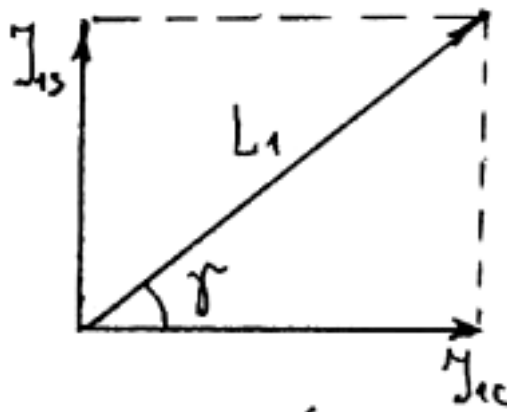
где

$$J_{1c}(\beta_1) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot s_{1c}(t) dt, \quad J_{1s}(\beta_1) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot s_{1s}(t) dt.$$

аналогично

$$J_{2c}(\beta_2) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot s_{2c}(t) dt, \quad J_{2s}(\beta_2) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot s_{2s}(t) dt.$$

Перейдем от декартовой системы координат  $(J_{ic}, J_{is})$  к полярной  $(L_i, \gamma_i)$



Тогда  $L_1 = \sqrt{J_u^2 + J_{1s}^2}$

$$J_1(\beta_1) = L_1 (\cos \gamma \cdot \cos \beta_1 + \sin \gamma \cdot \sin \beta_1).$$

Экспоненту представим в виде:

$$\exp(J_1(\beta_1)) \Rightarrow J_1(\beta_1) = L_1 \cdot \cos(\gamma - \beta_1)$$

$$J_2(\beta_2) = L_2 \cdot \cos(\gamma - \beta_2)$$

Усредняя по ПРВ  $W(\beta_i)$ , получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[L_1 \cos(\gamma - \beta_1)] d\beta_1 = I_0(L_1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[L_2 \cos(\gamma - \beta_2)] d\beta_2 = I_0(L_2)$$

Поскольку монотонные функции от  $L$  не меняют статистических сведений, содержащихся в наблюдаемом процессе, вместо сравнения  $I_0(L_1)$  и  $I_0(L_2)$  можем сравнивать  $L_1$  и  $L_2$ .

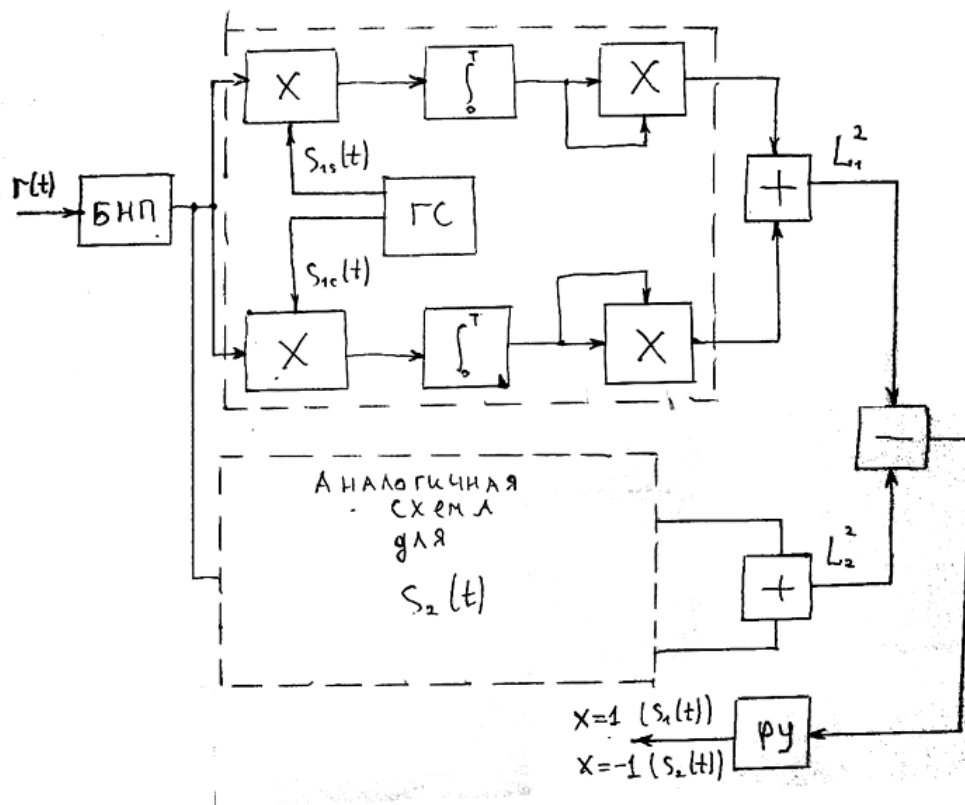
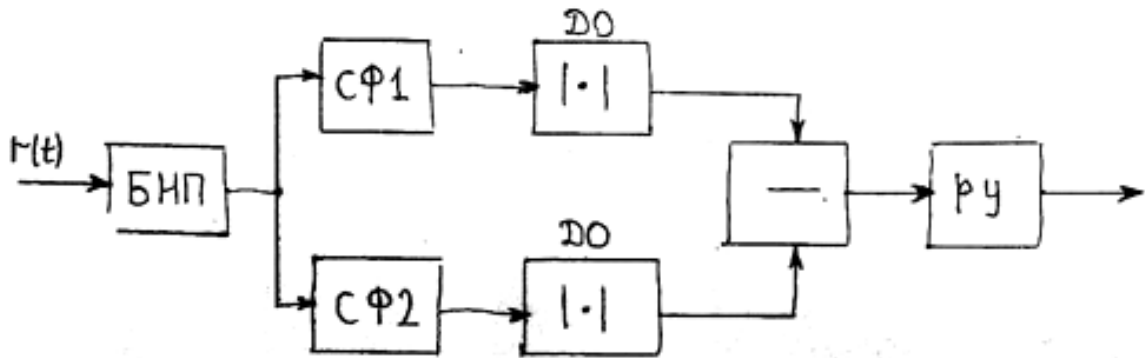


Схема различения сигналов со случайными начальными фазами



Для узкополосных сигналов справедливо выражение  $L_1 \approx \frac{1}{2} \left| \int_0^T \hat{Z}(r(t)) \cdot \hat{S}_1(t) dt \right|$ , на основе которого можно реализовать следующую схему различителя сигналов.



СФ1 согласован с первым сигналом, СФ2 – со вторым.

В момент времени  $T$ , соответствующий окончанию действующего сигнала  $s_i(t)$ , получаем максимум напряжения на выходе детектора огибающей  $i$ -го канала.

## 6. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

### 6.1. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА И МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

Задача оценки (измерения) параметров сигнала состоит в следующем. Наблюдается аддитивная смесь  $r(t)$  сигнала  $s(t, \vec{\lambda})$  с помехой  $n(t)$  на интервале  $[0, T]$ . Измеряемые параметры  $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  и сопутствующие неизмеряемые параметры  $\vec{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  образуют систему случайных величин с известной совместной плотностью вероятности  $W(\vec{\lambda}, \vec{\beta})$ . Помеха представляет белый гауссовский шум с нулевым средним значением и двусторонней спектральной плотностью  $N_0/2$ . Решение задачи измерения состоит в подборе оценок  $\vec{\lambda}^* = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*\}$  для измеряемых параметров  $\vec{\lambda}$ , оптимальном с точки зрения минимума среднего риска. Необходимо найти качественные показатели оптимальной обработки и рассмотреть пути реализации найденных алгоритмов оценки.

Показателем качества измерения параметра  $\lambda$  является ошибка измерения, т. е. отклонение  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$ , где  $\lambda^*$  – оценка (измеренное значение) параметра. Различают грубые (**аномальные**), систематические и случайные ошибки. Специальными мерами первые два вида ошибок могут быть устранены, а случайные ошибки, порождаемые помехами, полностью устранить невозможно. Случайные ошибки характеризуются плотностью вероятности, по которой можно определить средний квадрат ошибок, вероятную (серединную) ошибку, вероятность попадания ошибок в заданные пределы и т. д. **Среднеквадратичная ошибка**  $\varepsilon_{\text{СКВ}}$  определяется корнем квадратным из среднего квадрата ошибки  $\langle \varepsilon^2 \rangle$ . **Вероятная ошибка**  $\varepsilon_{\text{в}}$  определяется равенством вероятностей  $P(|\varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{в}}) = P(|\varepsilon| > \varepsilon_{\text{в}}) = 0,5$ . При гауссовском (нормальном) законе распределения ошибок с характеристиками  $\langle \varepsilon \rangle = 0, \sigma_{\varepsilon}^2 = \varepsilon_{\text{СКВ}}^2$  между вероятной и среднеквадратичной ошибками имеет место соотношение  $\varepsilon_{\text{в}} = (2/3)\varepsilon_{\text{СКВ}}$ . В качестве **максимальной ошибки** обычно используют  $\varepsilon_{\text{max}} = 4\varepsilon_{\text{в}}$ . Для нормального закона вероятность  $P(|\varepsilon| < \varepsilon_{\text{max}}) = 0,993$ , т. е. вероятность превышения максимальной ошибки составляет 0,7 %.

Введем понятия **риска и среднего риска** применительно к измерению одного параметра. Совокупность возможных ситуаций при измерении соответствует совокупности различных значений параметра  $\lambda$  и его оценки  $\lambda^*$ . При этом цена (риск) за каждую ситуацию определяется случайной величиной  $R(\lambda, \lambda^*)$ , которая называется **функцией потерь**, а средний риск

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda, \lambda^*) W(\lambda, \lambda^*) d\lambda^* \quad (6.1)$$

где  $W(\lambda, \lambda^*)$  – совместная плотность вероятности случайных величин  $\lambda$  и  $\lambda^*$ .

**Критерий минимума среднего риска** определяется соотношением

$$\langle R \rangle = \min_{\lambda} \quad (6.2)$$

Оптимальной системой измерения (оценки) по этому критерию является та, для которой выполняется соотношение (6.2).

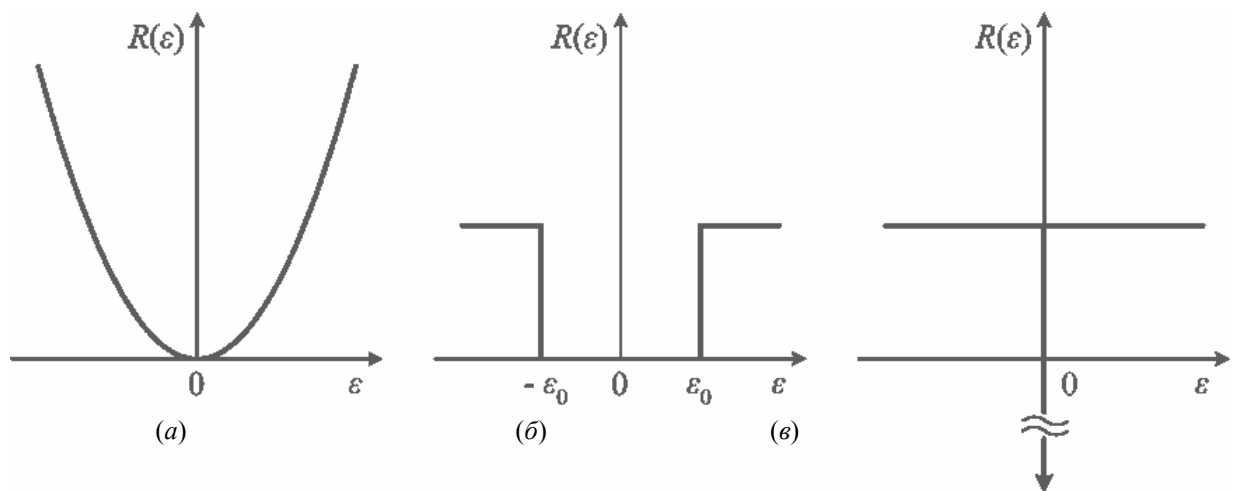
Если считать функцию потерь зависящей лишь от разности  $\lambda - \lambda^* = \varepsilon$ , средний риск будет определяться плотностью вероятности  $W(\varepsilon)$  функцией потерь  $R(\varepsilon)$ . Для частных случаев функции  $R(\varepsilon)$  можно получить частные критерии оптимального измерения. Для квадратичной функции потерь  $R(\varepsilon) = \varepsilon^2$  (рис. 6.1, а)

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon = \langle \varepsilon^2 \rangle = \min_{\varepsilon},$$

что определяет **критерий минимума среднего квадрата ошибки**. Для функции потерь, заданной выражением  $R(\varepsilon) = 1 - \text{rect}[(\varepsilon + \varepsilon_0)/(2\varepsilon_0)]$  (рис. 6.1, б), критерий минимума среднего риска сводится к критерию минимума вероятности превышения модулем ошибки заданной величины  $\varepsilon_0$ :

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{-\varepsilon_0}^{-\infty} W(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\infty}^{\varepsilon_0} W(\varepsilon) d\varepsilon = P(|\varepsilon| > \varepsilon_0) = \min_{\varepsilon}$$

При простой функции потерь  $R(\varepsilon) = 1 - \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  критерий минимума



**Рис. 6.1.** Некоторые виды функций потерь

среднего риска сводится к критерию максимума апостериорной вероятности:  $W(\varepsilon_0) = \max_{\varepsilon_0}$  (рис. 6.1, в).

Формирование оценки параметра осуществляется по определенному правилу, которое называют **решающим**. При закономерных (нерандомизированных) правилах каждой реализации  $r(t)$  соответствует определенная оценка  $\lambda^*$ , т. е. решающее правило  $\lambda^*[r(t)]$  или для дискретных значений реализации —  $\lambda^*(r)$

Рассмотрим методику формирования оценки параметра по принятым значениям реализации  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$ . В качестве критерия оптимальности решающего правила используем критерий минимума среднего риска. Предварительно преобразуем выражение (6.1) для среднего риска, заменив элемент вероятности  $W(\lambda, \lambda^*) d\lambda d\lambda^*$  на  $W(\lambda, \mathbf{r}) d\lambda d\mathbf{r}$ . Тогда

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda, \lambda^*) W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda \quad \text{при } \lambda^* = \lambda^*[\mathbf{r}]. \quad (6.3)$$

Полагая, по теореме умножения, плотность вероятности  $W(\lambda, \mathbf{r}) = W(\mathbf{r})W(\lambda | \mathbf{r})$ , перепишем выражение (6.3) в виде

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle W(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

где

$$\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R(\lambda, \lambda^*) \rangle W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda \quad (6.4)$$

есть **условный средний риск**, вычисляемый для фиксированных значений  $\mathbf{r}$ .

Усреднение условного среднего риска с учетом плотности вероятности  $W(\mathbf{r})$  дает **безусловный средний риск**. Таким образом, критерий минимума среднего риска сводится к критерию **минимума условного среднего риска**:  $\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \min_{\lambda^*}$ .

Минимизация условного среднего риска требует знания условной плотности вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r})$ , которая представляет **апостериорную плотность вероятности** параметра  $\lambda$ . По теореме умножения вероятностей можно записать:  $W(\lambda, \mathbf{r}) = W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda) = W(\mathbf{r})W(\lambda | \mathbf{r})$ . Отсюда апостериорная плотность вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r}) \equiv W_{\text{ps}}(\lambda)$  определяется выражением

$$W_{\text{ps}}(\lambda) = kW(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda), \quad (6.5)$$

где  $k$  – коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$k = [W(\mathbf{r})]^{-1} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda) d\lambda \right]^{-1}.$$

Условная плотность вероятности  $W(\mathbf{r} | \lambda)$ , рассматриваемая как функция от  $\lambda$ , называется **функцией правдоподобия**. При фиксированных значениях реализации эта функция показывает, насколько одно возможное значение параметра  $\lambda$  “более правдоподобно”, чем другое.

Для нахождения оптимальных оценок можно использовать применяемое в задачах обнаружения **условное отношение правдоподобия**, которое представляет отношение плотности вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r}) \equiv W_{\text{c.п}}(\mathbf{r})$  к плотности вероятности  $W_{\text{п}}(\mathbf{r})$ :

$$l(\mathbf{r} | \lambda) = W(\mathbf{r} | \lambda) / W_{\text{п}}(\mathbf{r}). \quad (6.6)$$

С учетом выражения (6.6) апостериорная плотность вероятности представляется в виде  $W_{\text{ps}}(\lambda) = k_1 W(\lambda) / l(\mathbf{r} | \lambda)$ , где  $k_1 = kW_{\text{п}}(\mathbf{r})$ .

Переходя от дискретных значений  $\mathbf{r}$  к непрерывным реализациям  $r(t)$ , получаем

$$W_{\text{ps}}(\lambda) = kW(\lambda)W[r(t) | \lambda] = k_1 W(\lambda)l[r(t) | \lambda].$$

Выражения для условных функционалов  $l[r(t) | \lambda]$  были получены в гл. 5, и ими можно воспользоваться при решении конкретных задач оценки параметров сигнала. Таким образом, **апостериорная плотность вероятности с точностью до нормирующего множителя определяется**

умножением априорной плотности вероятности  $W(\lambda)$  параметра  $\lambda$  на функционал или отношение правдоподобия.

Для конкретной модели сигнала и шума (смеси  $r(t)$ ) функционал правдоподобия  $F(\lambda) \equiv W[r(t) | \lambda]$  вычисляется в результате перехода к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$  [см. аналогичный переход от формулы (5.18) к (5.19)]. При фиксированных значениях параметра  $\lambda$  можно воспользоваться выражением (5.14) для  $W_{с.п}(\mathbf{r})$ , на основании которого в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим с точностью до коэффициента

$$F(\lambda) \sim \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [r(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right]. \quad (6.7)$$

Заметим, что сомножитель, стоящий перед экспонентой в выражении (5.14), при  $\Delta t \rightarrow 0$  стремится к нулю. Однако при решении задач приходится оперировать с отношениями функционалов (например, с отношением правдоподобия), поэтому роль указанного сомножителя незначительна при дальнейших рассуждениях.

Апостериорная плотность вероятности определяется формулой (6.5), которую называют формулой **Байеса**. С учетом соотношения (6.7) формула Байеса принимает вид

$$W_{ps}(\lambda) = kW(\lambda)F(\lambda). \quad (6.8)$$

Располагая апостериорной плотностью вероятности, для конкретных функций потерь можем найти оптимальную оценку  $\lambda^*$ , минимизирующую средний риск. Такие оценки называют **байесовскими**.

Рассмотрим квадратичную функцию потерь. Критерий минимума условного среднего риска (6.4) сводится к следующему:

$$\lambda^{*2} - 2\lambda^* \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda = \min_{\lambda^*}.$$

Оптимальная оценка находится дифференцированием левой части приведенного соотношения по  $\lambda^*$  и приравниванием к нулю результата. Решение полученного уравнения имеет вид

$$\lambda_0^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda, \quad (6.9)$$

т. е. оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценка совпадает с апостериорным средним значением. Такая оценка называется **несмещенной**. Условный средний риск с учетом выражения (6.9) равен условной апостериорной дисперсии:

$$\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0^*)^2 W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda = \sigma_{\lambda}^2. \quad (6.10)$$

Таким образом, при квадратичной функции потерь обеспечивается оценка параметра с минимальной дисперсией ошибки.

Применим простую функцию потерь  $R(\lambda, \lambda^*) = 1 - \delta(\lambda - \lambda^*)$ . Минимизация условного среднего риска (6.4) в этом случае приводит к критерию  $W(\lambda | \mathbf{r})|_{\lambda=\lambda^*}$  или  $W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda)|_{\lambda=\lambda^*} = \max_{\lambda}$ , т. е. оптимальная оценка

обращает в максимум апостериорную плотность вероятности оцениваемого параметра.

При отсутствии априорных сведений об оцениваемом параметре обычно предполагают, что априорная плотность вероятности равномерна на заданном интервале неопределенности. Тогда вычисление оценки сводится к максимизации функции правдоподобия:

$$W(\mathbf{r} | \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = \max_{\lambda}.$$

Условие оптимальности оценки в этом случае может быть выражено в виде **уравнения правдоподобия**:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W(\mathbf{r} | \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = 0.$$

**Оценка максимального правдоподобия**  $\lambda$  представляет корень уравнения правдоподобия, обеспечивающий глобальный максимум. Эта оценка в общем случае отличается от оптимальной среднеквадратичной. В тех случаях, когда функции  $W(\mathbf{r} | \lambda)$  и  $W(\lambda | \mathbf{r})$  являются симметричными относительно точки  $\lambda^*$ , все рассмотренные критерии приводят к одной и той же оценке  $\lambda^*$ .

В теории оценок доказано, что дисперсия (6.10) несмещенной оценки удовлетворяет, неравенству Крамера-Рао. При равномерном априорном распределении и гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности с математическим ожиданием  $\lambda_0$  и дисперсией  $\sigma_\lambda^2$  нижняя граница, определяемая **неравенством Крамера-Рао**, имеет вид

$$\sigma_\lambda^2 = \left\langle \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln W(\mathbf{r} | \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right| \right\rangle^{-1}, \quad (6.11)$$

где  $\lambda_0$  – оценка максимального правдоподобия. Из формулы (6.11) следует, что апостериорная погрешность характеризуется второй производной от логарифма функции правдоподобия.

## 6.2. ОЦЕНКА НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

### 6.2.1. Оценка параметров известного сигнала

Параметры сигнала делят на энергетические и неэнергетические. К энергетическим относятся те параметры, от которых зависит энергия сигнала, т. е.  $E = E(\lambda)$ , в противном случае параметры называют неэнергетическими. В дальнейшем ограничимся рассмотрением неэнергетических параметров.

Вся доступная информация об оцениваемых параметрах содержится в формуле Байеса (6.8). С учетом выражения (6.7) эта формула для известного сигнала принимает вид

$$W_{\text{ps}}(\lambda) = kW(\lambda) \exp\left[-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T r^2(t) dt\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)s(t, \lambda) dt\right]. \quad (6.12)$$

Множитель  $\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T r^2(t) dt\right]$  не зависит от  $\lambda$  и не содержит информации об оцениваемом параметре, поэтому он может быть включен в постоянный коэффициент  $k$ . В случае оценки неэнергетических параметров энергия сигнала также не зависит от  $\lambda$ , т. е.  $E(\lambda) = E$ , следовательно, множитель  $\exp\left[-\frac{E}{N_0}\right]$  может быть включен в постоянную  $k$ . Таким образом, формула (6.12) приводится к виду

$$W_{ps}(\lambda) = kW(\lambda)\exp[z(\lambda)],$$

где  $z(\lambda)$  – корреляционный интеграл, определяемый выражением

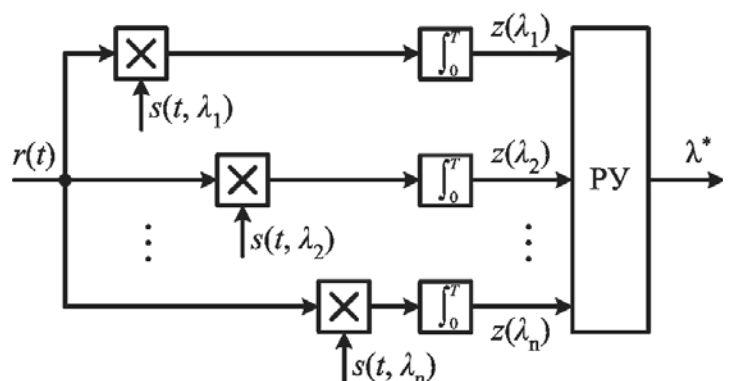
$$z(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)s(t, \lambda) dt. \quad (6.13)$$

Корреляционный интеграл включает существенные операции над принятой реализацией  $r(t)$ , которые необходимо выполнить, чтобы извлечь всю доступную информацию о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в  $r(t)$ . По этой причине функцию  $z(\lambda)$  называют **достаточной статистикой** для оценки параметра  $\lambda$ . Сопоставляя выражения (6.13) и (6.7), нетрудно установить,  $z(\lambda)$  представляет логарифм функционала правдоподобия. Максимально правдоподобной оценкой, следовательно, является такое значение  $\lambda^*$ , которое обеспечивает максимум логарифма функционала правдоподобия. Такая оценка должна удовлетворять следующему уравнению правдоподобия:

$$\left. \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0. \quad (6.14)$$

В соответствии с выражениями (6.13) и (6.14) можно предложить способы реализации устройств оценивания. Первый способ основан на запоминании принимаемой реализации  $r(t)$  с последующим умножением ее на сигнал и интегрированием для последовательных значений оцениваемого параметра из области его допустимых значений. При этом за оценочное значение принимается то  $\lambda^*$ , для которого функция  $z(\lambda)$  имеет наибольшее значение. Этот способ требует больших затрат времени. Обычно применяют другой, многоканальный, способ, позволяющий получить  $n$  значений параметра в  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$  (рис. 6.2).

Принимаемая реализация  $r(t)$  умножается на опорные сигналы  $s(t, \lambda_i)$ , каждый из которых имеет одно из  $n$  значений параметра  $\lambda$ . На выходах интеграторов формируются значения  $z(\lambda_i)$ . Решающее устройство (РУ) определяет номер канала с максимальным значением корреляционного интеграла.



**Рис. 6.2.** Структурная схема многоканального устройства оценки неэнергетических параметров

Число каналов зависит от требуемой точности измерения параметра. При фиксированных интервалах параметра  $[\lambda', \lambda'']$ , на которые разбивается область ожидаемых значений  $\lambda$ , увеличение числа каналов  $n$  целесообразно до определенных пределов. Эти пределы обусловлены возможным появлением аномальных ошибок, характеристика которых дана в п. 6.2.5. При относительно малых шумах действием аномальных ошибок можно пренебречь. В этом случае дисперсия ошибок измерения может быть вычислена как нижняя граница неравенства Крамера-Рао (6.11). С учетом выражения (6.13) в предположении равномерной априорной плотности вероятности  $W(\lambda)$  из формулы (6.11) следует

$$\sigma_{\lambda}^2 = \left[ - \frac{\partial^2 z_s(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda^*} \right]^{-1}, \quad (6.15)$$

где  $z_s(\lambda)$  – сигнальная функция, определяемая выражением

$$z_s(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t, \lambda) s(t, \lambda_0) dt; \quad (6.16)$$

$\lambda_0$  – истинное значение параметра, относительно которого осуществлено разложение в ряд Тейлора функции

$$z(\lambda) = z(\lambda_0) + \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^*} (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda^*} (\lambda - \lambda_0)^2.$$

Поскольку сигнальная функция пропорциональна автокорреляционной функции (АКФ) сигнала, можно утверждать, что дисперсия (6.15) обратно пропорциональна значению второй производной АКФ сигнала в нуле.

### 6.2.2. Оценка параметров сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим оценку неэнергетического параметра сигнала, у которого начальная фаза представляет случайную величину, равномерно распределенную на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Сумма такого сигнала и белого шума представляет наблюдаемую смесь  $r(t)$ .

Найдем выражение для функционала правдоподобия, используя известную методику, изложенную в п. 5.3.3. Модель сигнала при этом принимается в виде **(Ошибка! Источник ссылки не найден.Ошибка! Источник ссылки не найден.)**. В итоге  $F(\lambda) = C_0 I_0[Z(\lambda)]$ , где  $C_0$  – постоянная величина, не зависящая от параметра  $\lambda$ ;  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В соответствии с выражением (5.62) функция  $Z(\lambda)$  определяется огибающей напряжения, вырабатываемого согласованным фильтром, т. е.

$$Z(\lambda) = \frac{1}{N_0} \left| \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t, \lambda) dt \right|. \quad (6.17)$$

По аналогии с соотношением (6.14) уравнение правдоподобия можно представить в виде



$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln F(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = \left[ \frac{I_1[Z(\lambda)]}{I_0[Z(\lambda)]} \cdot \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda^*} = 0$$

Здесь  $I_1(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Поскольку функции Бесселя не равны нулю, уравнение правдоподобия можно упростить:

$$\frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^*} = 0, \quad (6.18)$$

где  $Z(\lambda)$  определяется выражением (6.17).

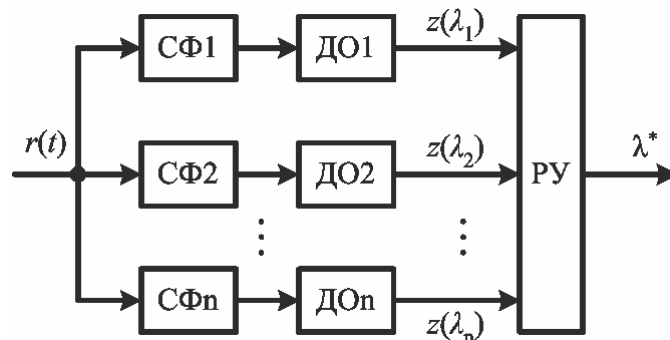
По аналогии с формулой (6.14) реализация оптимального устройства оценивания параметра для сигнала со случайной начальной фазой требует построения  $n$  каналов, каждый из которых включает согласованный фильтр, настроенный на сигнал  $s(t, \lambda_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и детектор огибающей. На рис. 6.2 приведена многоканальная схема устройства оценивания.

Для больших значений отношения сигнал/шум, когда аномальные ошибки практически отсутствуют, дисперсия “нормальных” ошибок оценивания определяется выражением (6.15), в которое следует подставлять сигнальную функцию  $Z_s(\lambda)$ . В рассматриваемом случае сигнальная функция определяется формулой

$$Z_s(\lambda) = \frac{1}{N_0} \left| \int_0^T \bar{S}_0(t, \lambda_0) \hat{S}_0(t, \lambda) dt \right|. \quad (6.19)$$

При вычислении производной от модуля функции следует иметь в виду равенство  $|f(x)| = \sqrt{f(x)\hat{f}(x)}$ . Вторую производную от сигнальной функции, вычисленную с учетом этого равенства, следует подставлять в формулу (6.15).

Приведенные здесь и в п. 6.2.1 соотношения справедливы в общем



**Рис. 6.3.** Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала со случайной начальной фазой

случае оценки неэнергетических параметров сигнала. Конкретизация этих соотношений позволяет решить некоторые частные задачи, встречающиеся в радиоэлектронных системах.

### 6.2.3. Оценка начальной фазы радиоимпульса

Алгоритм работы оптимального измерителя начальной фазы радиоимпульса

$$s(t, \varphi) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi], \quad t \in [0, T],$$

определяется уравнением правдоподобия

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln F(\varphi) \right|_{\varphi=\varphi^*} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi] dt \right\} \Bigg|_{\varphi=\varphi_0} = 0.$$

Выполняя операцию дифференцирования, можно привести это уравнение к виду

$$\int_0^T r(t) S_0(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi] dt = 0.$$

Учитывая формулу для синуса суммы, из приведенного уравнения получаем выражение для оценки начальной фазы:

$$\varphi^* = -\operatorname{arctg} \frac{\int_0^T r(t) S_0(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)] dt}{\int_0^T r(t) S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] dt}. \quad (6.20)$$

Структурная схема, соответствующая алгоритму (6.20), содержит два корреляционных канала, опорные сигналы которых сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $\pi/2$ , и вычислитель функции  $\operatorname{arctg}(u_1/u_2)$  (рис. 6.4). Вместо корреляторов можно использовать согласованные фильтры.

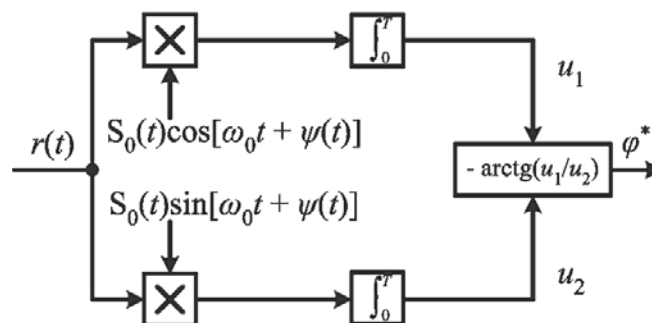
В частном случае при отсутствии амплитудной и фазовой модуляции сигнала уравнение правдоподобия приобретает вид

$$\int_0^T r(t) S_0(t) \sin[\omega_0 t + \varphi^*] dt = 0.$$

Это уравнение можно представить схемой, аналогичной схеме (рис. 6.4), а также приближенно схемой фазовой автоподстройки, приведенной на рис. 6.5. В этом устройстве переменный коэффициент усиления стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . При отсутствии шума напряжение на выходе перемножителя (фазового дискриминатора) определяется следующим образом:

$$u(t) = A \cos[\omega_0 t + \varphi_0] \sin[\omega_0 t + \varphi_1^*] = (A/2) \sin[\varphi_1^* - \varphi_0] + (A/2) \sin[2\omega_0 t + \varphi_1^* + \varphi_0],$$

где  $\varphi_1^*$  – фаза подстраиваемого генератора (ПГ), значение которой отличается



**Рис. 6.4.** Функциональная схема устройства оценки начальной фазы радиоимпульса

в общем случае от максимально правдоподобной оценки  $\varphi^*$ . Фильтр нижних частот (ФНЧ) осуществляет весовое интегрирование, подавляя колебание на удвоенной частоте (второе слагаемое в  $u(t)$ ), а также случайные колебания, обусловленные шумом. Напряжение  $U_\Phi(t)$ , пропорциональное фазовой ошибке, подстраивает ПГ, обеспечивая приближение  $\varphi_1^*$  к  $\varphi^*$ .

Для вычисления дисперсии оценки начальной фазы определим сигнальную функцию  $z_s(\varphi)$ . По формуле (6.16) находим

$$z_s(\varphi) \cong \frac{2E}{N_0} \cos[\varphi - \varphi_0].$$

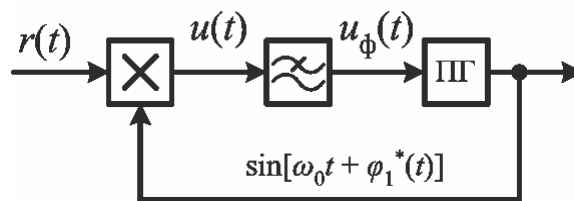
Отсюда

$$\left. \frac{\partial^2 z_s(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{2E}{N_0},$$

а дисперсия

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{N_0}{2E} = 1/q.$$

Таким образом, дисперсия оценки начальной фазы обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и не зависит от формы радиоим-



**Рис. 6.5.** Устройство оценки начальной фазы радиоимпульса

пульса.

#### 6.2.4. Оценка временного положения радиоимпульса со случайной начальной фазой

Рассмотрим радиоимпульс

$$s(t - \tau) = S_0(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \psi(t - \tau) + \varphi], \quad t \in [0, T],$$

у которого начальная фаза  $\varphi$  случайна и равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Полагаем, что момент  $t = \tau$  соответствует середине радиоимпульса (рис. 6.6, а).

В уравнение правдоподобия (6.18) входит производная от функции (6.17). В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left| \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t - \tau) \right|_{\tau=\tau^*} = 0. \quad (6.21)$$

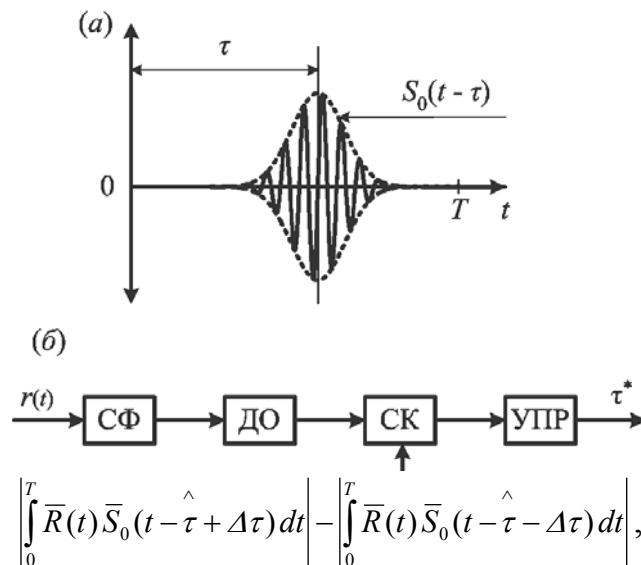
Если обозначить

$$\bar{X}(t) = \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t-\tau) dt; \quad \bar{X}'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{X}(\tau),$$

то с учетом операции вычисления производной от модуля функции уравнение правдоподобия можно представить в виде

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\bar{X}(\tau) \hat{X}(\tau)} = \frac{1}{2|\bar{X}(\tau)|} \left[ \bar{X}(\tau) \hat{X}'(\tau) + \hat{X}(\tau) \bar{X}'(\tau) \right]_{\tau=\tau^*} = 0.$$

Реализация устройства оценивания  $\tau$  на основе уравнения (6.21) требует использования схем, включающих согласованный фильтр (СФ), детектор огибающей (ДО) и устройство принятия решения (УПР), которое определяет временное положение огибающей сигнала на выходе детектора (рис. 6.6, б). Строблируемый каскад (СК) обеспечивает ограничение рассматриваемого интервала возможных значений задержки  $\tau$  априорными границами  $[\tau_1, \tau_2]$ , т. е. с помощью СК вводятся априорные данные. УПР действует в соответствии с уравнением (6.21), определяя момент времени, соответствующий максимуму напряжения на выходе детектора. Для упрощения реализации локального оценивания задержки операцию дифференцирования в уравнении (6.21) заменяют вычислением конечной разности:



которая при  $\tau = \tau^*$  должна обращаться в нуль. Величина  $\Delta\tau$  выбирается из условия обеспечения наибольшей точности оценивания. Если область неопределенности задержки сигнала существенно превышает время его корреляции, для определения локальной оценки необходимо предварительно осуществить поиск сигнала. В результате поиска и обнаружения сигнала область неопределенности его временного положения сокращается до величины порядка времени корреляции.

Потенциальная точность оценки времени запаздывания определяется по формуле (6.15), в которой сигнальная функция рассчитывается с помощью выражения (6.19). Произведя необходимые преобразования с учетом

определения модуля комплексной функции, выразим вторую производную от сигнальной функции следующим образом:

$$\left. \frac{\partial^2 Z_s(\tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=\tau_0} = -q \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega - \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |S(j\omega)|^2 d\omega \right]^2 \right\} = -q\gamma^2, \quad (6.22)$$

где  $S(j\omega)$  – спектральная функция сигнала  $S_n(t)$ , нормированного в соответствии с соотношением

$$E = \int_0^T |S_n(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (6.23)$$

Дисперсия оценки времени запаздывания вычисляется на основании выражений (6.15) и (6.22)

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{q\gamma^2}. \quad (6.24)$$

Здесь  $\gamma^2$  – величина, определяющая второй момент от квадрата модуля спектра сигнала  $|S(j\omega)|^2$  относительно средней частоты (квадрат эффективной полосы спектра). В частном случае – для радиоимпульса с огибающей гауссовской формы  $S_0(t) = \exp[-2,8t^2/\tau_n^2]$  имеем  $\gamma^2 = 2,8/\tau_n^2 = (\pi\Delta f)^2/1,4$ , где  $\Delta f$  – ширина полосы квадрата модуля спектра импульса на уровне 0,5. Таким образом, дисперсия  $\sigma_\tau^2$  оптимальной оценки времени запаздывания обратно пропорциональна отношению сигнал/шум  $q$  и квадрату эффективной полосы спектра радиоимпульса.

### 6.2.5. Оценка смещения частоты радиоимпульса

Принимаемое колебание запишем в виде

$$r(t) = S_0(t) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi] + n(t), \quad t \in [0, T],$$

где оценке подлежит смещение (сдвиг) частоты  $\Omega$ , а фазу  $\varphi$ , как и в п. 6.2.4, считаем случайной величиной. Функционал правдоподобия

$$F(\Omega) = C_0 I_0 [Z(Q)],$$

где корреляционный интеграл представляется в развернутом виде:

$$Z(Q) = \frac{2}{N_0} \sqrt{\left\{ \int_0^T r(t) S_0(t) \cos[(\omega_0 - \Omega)t] dt \right\}^2 + \left\{ \int_0^T r(t) S_0(t) \sin[(\omega_0 - \Omega)t] dt \right\}^2}$$

Реализация алгоритма максимального правдоподобия возможна на основе многоканальной схемы, включающей согласованные фильтры, настроенные на частоту  $\omega_0 - \Omega_i$ , где  $\Omega_i = i\Delta\omega$ ,  $i = \overline{1, n}$ . На выходе каждого согласованного фильтра включается детектор огибающей. Выходы детекторов соединены с решающим устройством, которое определяет номер канала с наибольшим выходным напряжением. За оценку сдвига частоты принимается частота расстройки этого канала относительно  $\omega_0$ . Представленную на рис. 6.3 многоканальную схему можно рассматривать как устройство оценивания частотного сдвига. Частоты  $\Omega_i$  должны перекрывать с шагом  $\Delta\omega$  весь ожидаемый диапазон сдвигов частоты. Практически расстройка между каналами выбирается равной  $\Delta\omega \cong 2\pi/T$ .

Анализ показывает, что потенциальная точность оценивания частоты определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{1}{q\alpha^2}, \quad (6.25)$$

где

$$\alpha^2 = \int_0^T t^2 |s_H(t)|^2 dt - \left[ \int_0^T t |s_H(t)|^2 dt \right]^2 \quad (6.26)$$

есть второй момент квадрата огибающей импульса относительно среднего значения временного положения радиоимпульса ( $\alpha$  – эффективная продолжительность сигнала);  $s_H(t)$  – сигнал, нормированный в соответствии с соотношением (6.23).

В частном случае – для радиоимпульса с гауссовской огибающей, рассмотренного выше, в п. 6.2.4, – при неизвестном частотном сдвиге дисперсия оценки такого сдвига определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{\pi^2}{1,4q\tau_H^2} = \frac{4\pi^2 \Delta f^2}{(2,8)^3 q}.$$

Для сравнения приведем дисперсию оценки сдвига частоты прямоугольного импульса:

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{12}{q\tau_H^2}$$

Таким образом, дисперсия оценки частотного сдвига обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и квадрату эффективной продолжительности радиоимпульса.

### 6.2.6. Влияние аномальных ошибок на оценку параметров

Установим влияние **аномальных ошибок** на результат оценивания сигнала. Рассмотрим это влияние на примере оценки сдвига частоты. Пусть сигнал имеет вид

$$s(t, \Omega) = A_0 \cos[(\omega_0 + \rho\Omega)t], \quad t \in [-T/2, T/2]$$

и принимается на фоне белого шума. Здесь  $\rho$  – заданный коэффициент. Оценке подвергается частота  $\Omega$ , априорная плотность вероятности которой  $W(\Omega)$  предполагается равномерной в пределах  $[-\sqrt{3}\sigma_0, \sqrt{3}\sigma_0]$ . Априорная дисперсия случайной величины  $\Omega$  равна  $\sigma_0^2$ . Разбивая весь диапазон ожидаемых частот на участки, организуем многоканальную схему по типу представленной на рис. 6.2. Окончательная локальная оценка сдвига частоты формируется согласно уравнению правдоподобия на основании выбора канала с максимальным выходным напряжением. Устройство локальной оценки частоты показано на рис. 6.7, где НИ – нуль-индикатор, вырабатывающий оценку  $\hat{\Omega}$ , в соответствии с уравнением

$$\frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} [r(t) - s(t, \Omega)] \frac{\partial s(t, \Omega)}{\partial \Omega} dt \Big|_{\Omega=\hat{\Omega}} = 0.$$

В процессе работы схемы оценка  $\hat{\Omega}$  сводится к оптимальной  $\Omega^*$  путем управления частотой генератора сигнала (ГС).

Для прямоугольного радиоимпульса дисперсия  $\sigma_{\Omega}^2$  оценки частоты при условии правильного выбора канала определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{12}{q(\rho T)^2}. \quad (6.27)$$

Тогда относительная дисперсия

$$\delta_{\Omega}^2 = \sigma_{\Omega}^2 / \sigma_0^2 = \frac{12}{q\sigma_0^2(\rho T)^2}$$

Из формулы (6.27) видно, что с увеличением коэффициента  $\rho$  относительная дисперсия уменьшается, однако здесь не учитывается влияние  $\rho$  на вероятность ошибки первоначального определения подынтервала  $\Delta\omega$ . Число  $n$  подынтервалов при  $\Delta\omega = 2\pi/(\rho T)$  определяется выражением

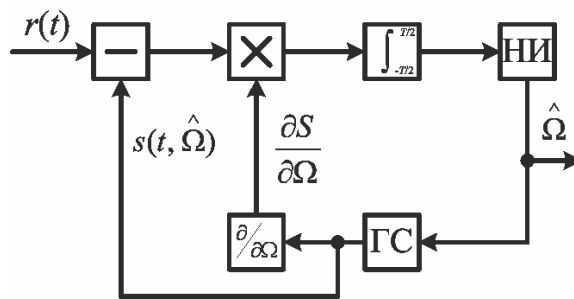


Рис. 6.7. Устройство локальной оценки частоты

$$n \cong \frac{2\sqrt{3}\sigma_0}{\Delta\omega} = \frac{\rho T \sqrt{3}\sigma_0}{\pi}.$$

Интервал  $\Delta\omega$  выбран из условия обращения в нуль сигнальной функции в точках  $\Omega_i$ , кратных величине  $2\pi/(\rho T)$ . Действительно, для нормированной функции  $\tilde{Z}_s(\Omega)$  имеем

$$\tilde{Z}_s(\Omega) = \frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} s(t, \Omega) s(t, \Omega^*) dt \cong \frac{\sin[\rho(\Omega - \Omega^*)T/2]}{\rho(\Omega - \Omega^*)T/2}.$$

Воспользуемся выражениями (5.95) и (5.96) для вероятности  $P_e$  полной ошибки различения  $n$  сигналов. При условии  $\rho T \gg 1$

$$P_e \leq \frac{\rho T \sqrt{3}\sigma_0 / \pi - 1}{\sqrt{\pi q}} \exp\left[-\frac{q}{4}\right]. \quad (6.28)$$

С увеличением  $\rho T \sqrt{3}\sigma_0$  вероятность ошибочного выбора  $i$ -го интервала  $\Delta\omega$  из  $n$  возможных возрастает. Эту вероятность называют **вероятностью аномальной ошибки** или **вероятностью неоднозначности оценки**.

Чтобы вероятность пребывания в ошибочном подынтервале была достаточно мала, необходимо при заданной величине  $\rho$  обеспечить некоторое минимальное отношение сигнал/шум  $q$ . Для минимизации среднего квадрата

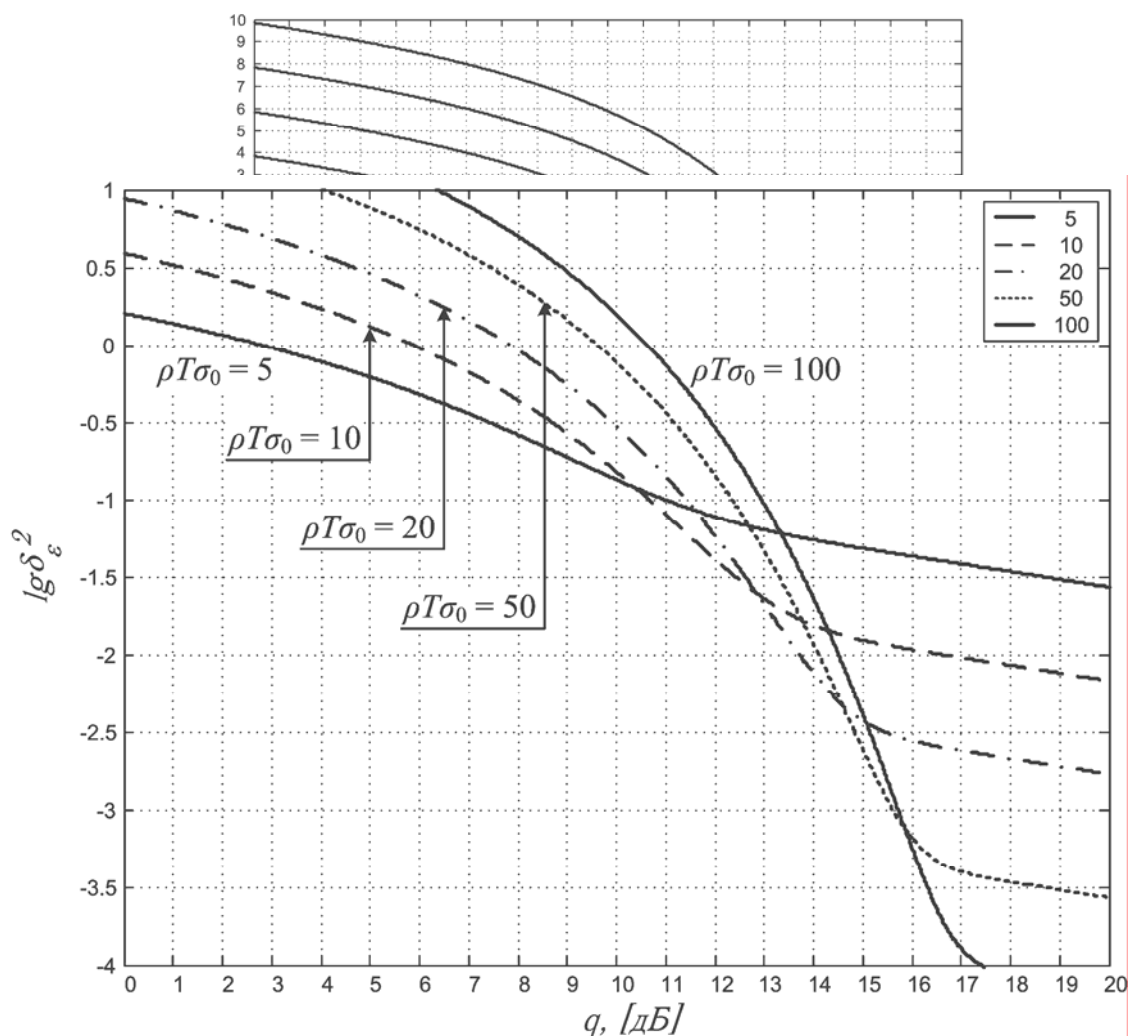
ошибки при ограниченном значении вероятности  $P_e = P_0$  выбирают  $\rho$  так, чтобы в формуле (6.28) выполнялось равенство. Решив это равенство относительно  $\rho T \sigma_0$  (единицей в числителе дроби (6.28) пренебрегаем), после подстановки результата в выражение (6.27) получим

$$\delta_\Omega^2 \cong 9(q/2)^{-2} \exp\left[\frac{-q/2}{\pi^3 P_0^2}\right].$$

Зависимость  $\delta_\Omega^2$  от отношения сигнал/шум приведена для пяти значений  $P_0$  на рис. 6.8. Наблюдается пороговый эффект, обусловленный аномальными ошибками. Например, при  $P_0 10^{-5}$  снижение  $q$  с 18 дБ до 15 дБ вызывает увеличение  $\delta_\Omega^2$  семь порядков.

Для сравнения алгоритмов оценивания параметров сигнала удобнее оперировать одним показателем качества – полным средним квадратом ошибки  $\sigma_\varepsilon^2$ , учитывающим различные значения ошибок при двух несовместных событиях: при правильном и при ошибочном выборе подынтервала. Считая неверный выбор любого из подынтервалов равновероятным и рассматривая  $\hat{\Omega}$  и  $\Omega^*$  как независимые случайные величины, равномерно распределенные на заданном интервале  $[-\sqrt{3}\sigma_0, \sqrt{3}\sigma_0]$ , получаем следующее выражение для относительного значения полного среднего квадрата ошибки:

$$\delta_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_0^2 = \frac{\delta_\Omega^2 \sqrt{q}}{\sqrt{\pi}} (1 - P_e) + 2P_e,$$





где  $P_e$  определяется из равенства (6.28). Зависимости  $\delta_\varepsilon^2$  от отношения сигнал/шум приведены на рис. 3.9 при нескольких значениях  $\rho T \sigma_0$ . Эти зависимости носят пороговый характер.

## Раздел 7. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ

### Оценки максимального правдоподобия

Уравнение правдоподобия:

$$\left. \frac{\partial W(\vec{r}/\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

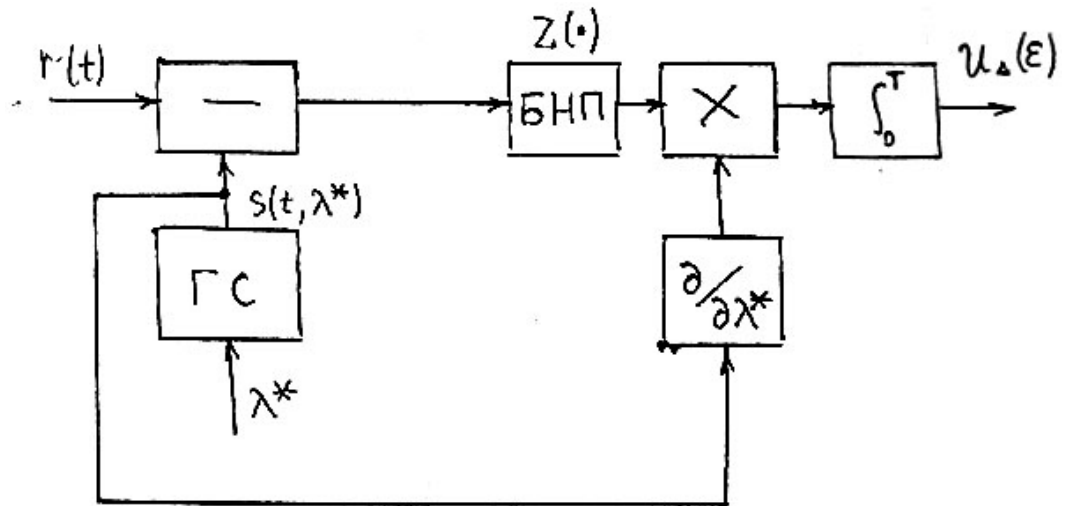
ИЛИ

$$\left. \frac{\partial \ln W(\vec{r}/\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

$$\ln W(\vec{r}/\lambda) = \sum_{i=1}^N \ln W(r_i - S_i(\lambda))$$

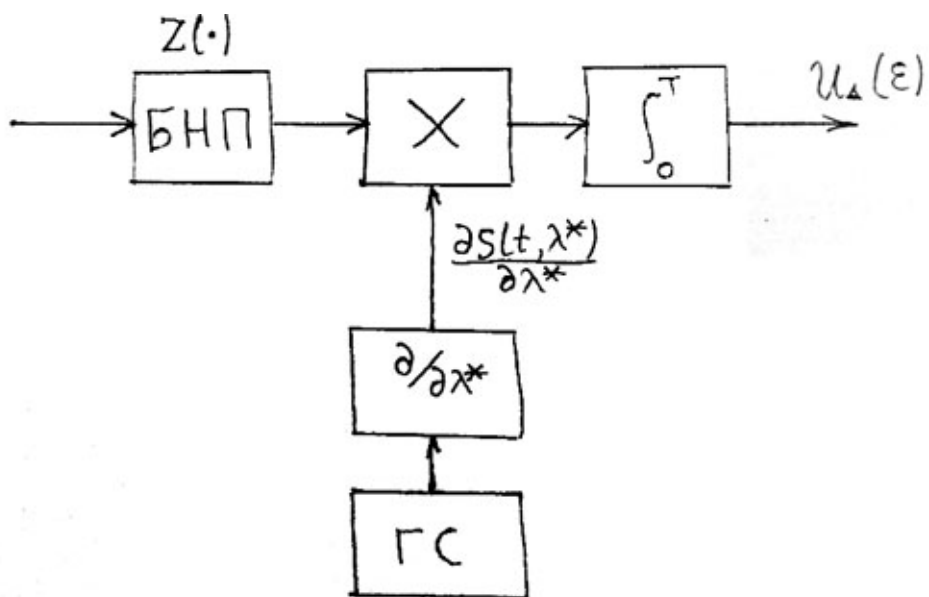
$$\left. \frac{\partial \ln W(\vec{r}/\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = \sum_{i=1}^N Z(r_i - S_i(\lambda)) \cdot \left. \frac{\partial S_i(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \cdot N} \sum_{i=1}^N Z[r_i - S_i(\lambda)] \frac{\partial S_i(\lambda)}{\partial \lambda} \cdot \Delta \\ & = -\frac{1}{T} \left. \int_0^T Z[r(t) - s(t, \lambda)] \frac{\partial S(t, \lambda)}{\partial \lambda} dt \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0 \end{aligned}$$



Формирование невязки необходимо если процесс и сигнал сравнимы

$$\int_0^T Z[r(t)] \frac{\partial S(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} dt = u(\epsilon)$$



### Задачи.

1.  $S(t, \varphi) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\varphi^* - ?$

$$2. \quad S(t, \tau) = a_0 g(t - \tau) \cos(\omega_0 t)$$

Рассмотрим случай:

$$\left. \frac{\partial \ln W[r(t)/\lambda]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

$$r(t) = S(t, \lambda) + y(t) \quad [0, T]$$

Рассмотрим случай, когда помимо оцениваемого параметра есть сопутствующий

$$r(t) = S(t, \lambda, \beta) + y(t)$$

$$W(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \beta \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

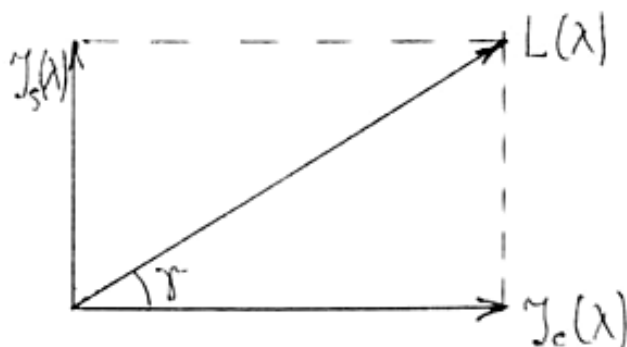
$$S(t, \lambda, \beta) = A(t, \lambda) \cos(\omega_0 t + \psi(t, \lambda) + \beta)$$

$$S(t, \lambda, \beta) = S_c(t, \lambda) \cos \beta + S_s(t, \lambda) \sin \beta$$

$$J(\lambda, \beta) = J_c(\lambda) \cos \beta + J_s(\lambda) \sin \beta, \text{ где}$$

$$J_c(\lambda) = \int_0^T Z[r(t)] S_c(t, \lambda) dt$$

Получим интеграл в виде двух компонент, т. е. некий вектор в декартовой системе координат



$$L(\lambda) = \sqrt{J_c^2(\lambda) + J_s^2(\lambda)}$$

Из рисунка следует:

$$J(\lambda, \beta) = L(\lambda) [\cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta] = L(\lambda) \cos(\gamma - \beta)$$

Функция правдоподобия:

$$W(r(t)|\lambda, \beta) = \exp[J(\lambda, \beta)] = \exp[L(\lambda)(\gamma - \beta)]$$

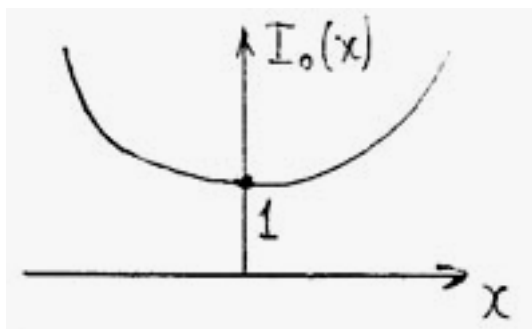
Необходимо получить:

$$W(r(t)|\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[L(\lambda)(\gamma - \beta)] d\beta = I_0(L(\lambda))$$

- функция Бесселя

Уравнение правдоподобия для сигнала со случайной начальной фазой, имеющий равномерный закон распределения:

$$\left. \frac{\partial I_0(L(\lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$



Это монотонная функция для  $x \in [-\infty, 0]$  и монотонно-возрастающая для  $x \in [0, \infty]$ , поэтому рассматривать

$$\left. \frac{\partial L^2(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 0, \text{ тогда}$$

$$\left. \frac{\partial L^2(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{opt}^*} = 2 \left[ J_c(\lambda) \cdot J_c'(\lambda) + J_s(\lambda) \cdot J_s'(\lambda) \right] \Big|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

Получим уравнение правдоподобия:

$$\left[ J_c(\lambda) \cdot J_c'(\lambda) + J_s(\lambda) \cdot J_s'(\lambda) \right] \Big|_{\lambda_{opt}^*} = 0$$

, где

$$J_c(\lambda) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot S_c(t, \lambda) dt$$

$$J_s(\lambda) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot S_s(t, \lambda) dt$$

$$Z[y] = -\frac{d \ln W(y)}{dy}$$

Пример:

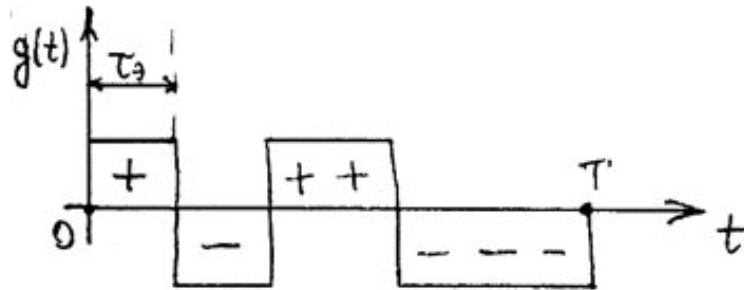
Оценка задержки шумоподобного сигнала

$$r(t) = a_0 g(t - \tau) \cos(\omega_0 t + \beta) + y(t)$$

Помеха негауссовская с  $W_{II}(y)$

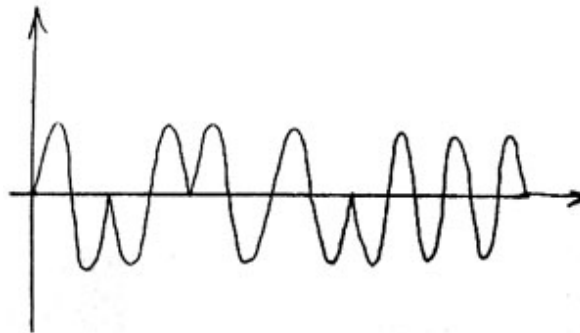
$$T = N\tau,$$

$\tau$  - длительность элемента псевдослучайной последовательности

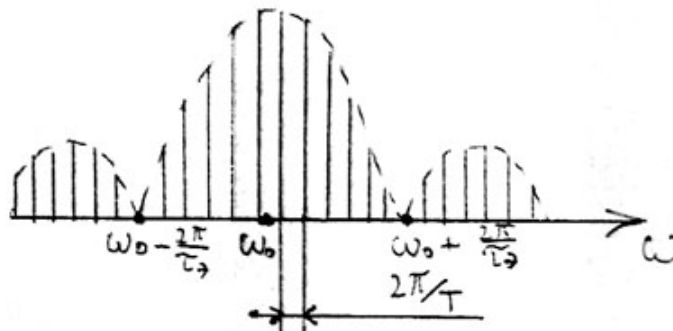


$$g(t) = \{\pm 1\}$$

$$g(t) \cos \omega_0 t$$



$$g(t) \cos \omega_0 t$$

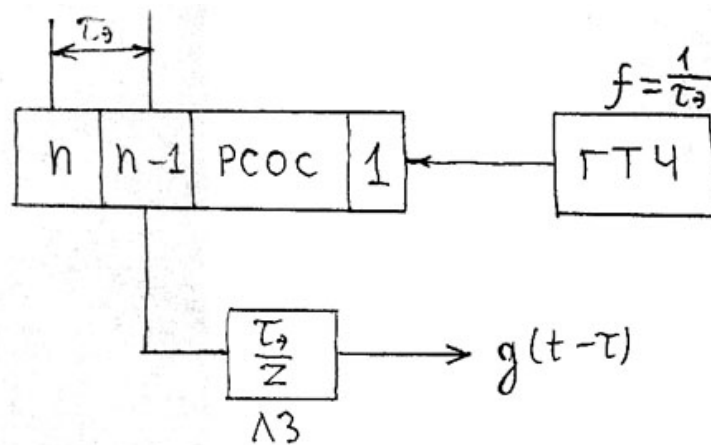


$$J_c(\tau) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot g(t-\tau) \cos \omega_0 t dt$$

$$J_s(\tau) = \int_0^T Z[r(t)] \cdot g(t-\tau) \sin \omega_0 t dt$$

В силу того, что  $g(t)$  – разрывная функция

$$\frac{\partial g(t-\tau)}{\partial \tau} \approx \frac{1}{\Delta \tau} \left[ g\left(t-\tau + \frac{\Delta \tau}{2}\right) - g\left(t-\tau - \frac{\Delta \tau}{2}\right) \right]$$



$$J_c'(\tau) = \frac{dJ_c(\tau)}{d\tau} = \int_0^T Z[r(t)] \frac{1}{\tau_3} \cdot \left[ g\left(t-\tau_3 + \frac{\tau_3}{2}\right) - g\left(t-\tau_3 - \frac{\tau_3}{2}\right) \right] \cdot \cos \omega_0 t dt$$

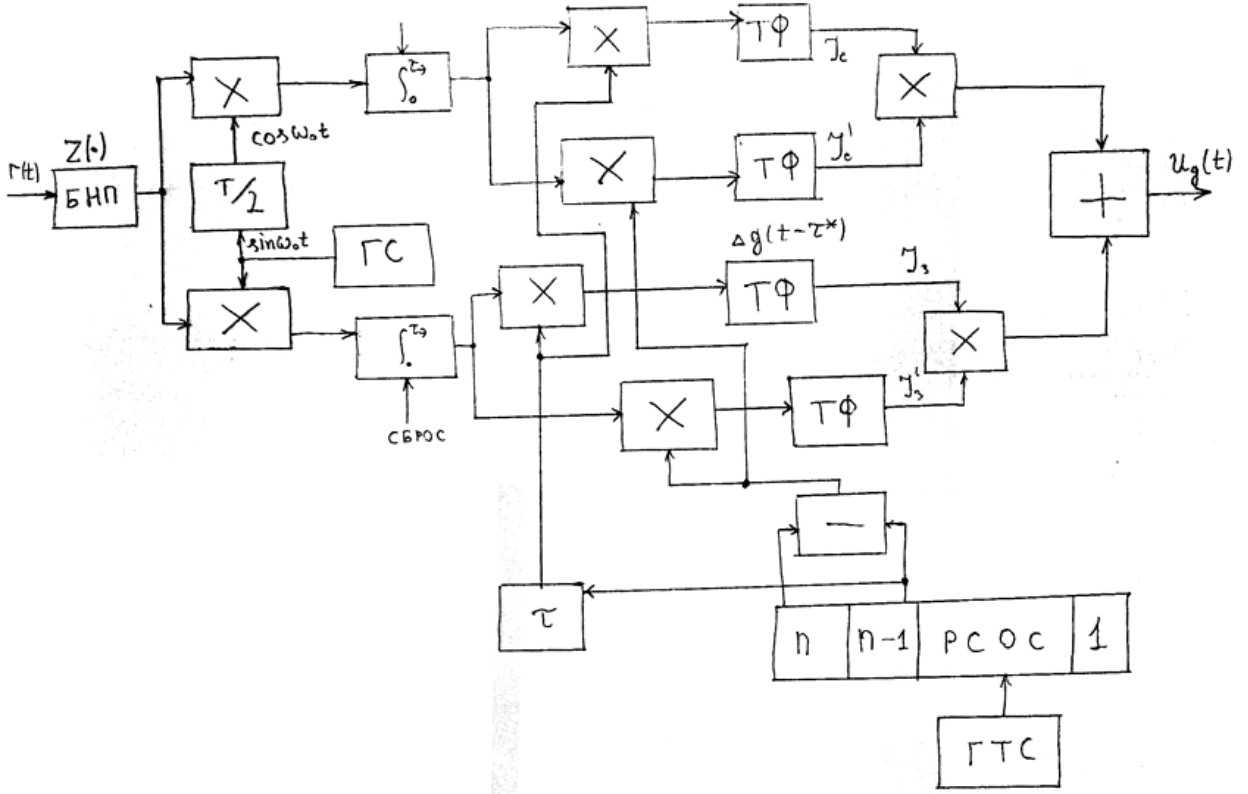
$$J_s'(\tau) = \frac{dJ_s(\tau)}{d\tau} = \int_0^T Z[r(t)] \frac{1}{\tau_3} \cdot \left[ g\left(t-\tau_3 + \frac{\tau_3}{2}\right) - g\left(t-\tau_3 - \frac{\tau_3}{2}\right) \right] \cdot \sin \omega_0 t dt$$

$$J_c(\tau^*) \cdot J_c'(\tau^*) + J_s(\tau^*) \cdot J_s'(\tau^*) = u_d(\varepsilon)$$

Алгоритм формирования напряжения дискриминатора, которое зависит от рассогласования

$$\varepsilon = \tau - \tau^*$$

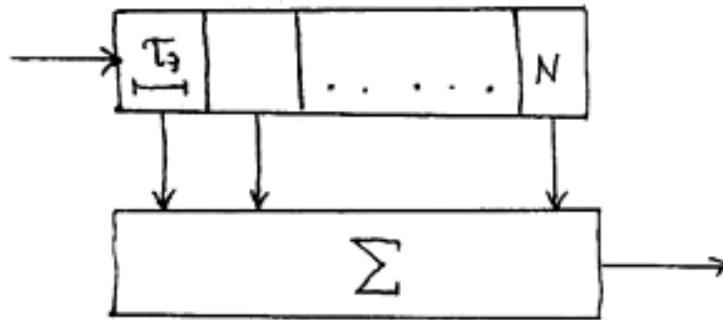
Схема дискриминатора задержки фазоманипулированного сигнала:



$$J_c(\tau) = \sum_{k=1}^N J_{ck} \cdot g_k(t - \tau)$$

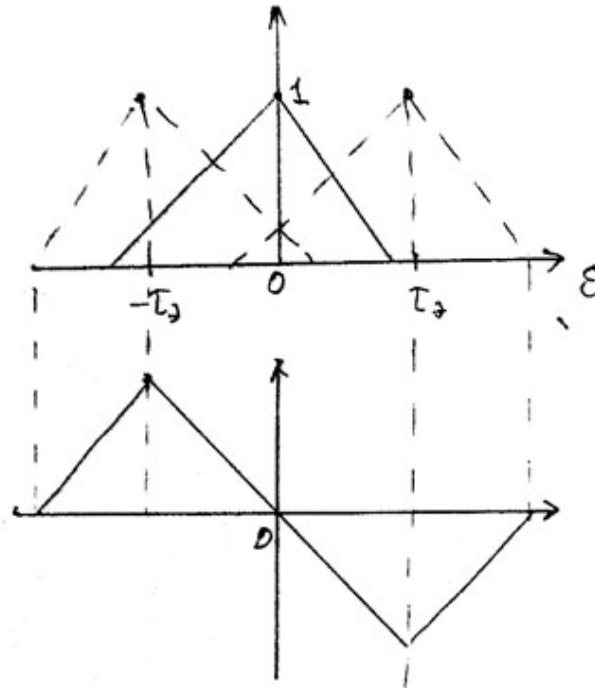
$$J_{ck}(\tau) = \int_{(k-1)\tau_0}^{k\tau_0} Z[r(t)] \cos \omega_0 t dt$$

ТФ – трансверсальный фильтр



Зависимость среднего значения напряжения на выходе дискриминатора от рассогласования – дискриминационная характеристика

$$\langle u_d(\varepsilon) \rangle \equiv ДХ$$



## 8. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

### 8.3. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

#### 8.3.1. Постановка и методика решения задачи фильтрации

В общем случае задача фильтрации формулируется следующим образом. Наблюдается процесс  $r(t)$ , являющийся известной детерминированной функцией от полезного сигнала  $s(t, \vec{\lambda})$  и некоторой помехи  $n(t)$ .

Полезный сигнал  $s(t, \vec{\lambda})$  есть функция времени  $t$  и многокомпонентного параметра (сообщения)  $\vec{\lambda}(t) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n(t)\}$ , представляющего векторный случайный процесс. Сигнал является известной функцией аргументов  $t$  и  $\vec{\lambda}$ ,



известными считаются все необходимые вероятностные характеристики случайного процесса  $\bar{\lambda}(t)$  и помехи  $n(t)$ .

Общая задача заключается в том, чтобы на основании априорных сведений и по наблюдаемой реализации процесса  $r(t)$  для каждого момента времени  $t$  сформировать апостериорную плотность вероятности сообщения  $\bar{\lambda}(t)$ . В большинстве случаев требуется получить текущую оценку  $\bar{\lambda}^*(t)$ , наилучшую в смысле критерия минимума среднего риска. Различают несколько модификаций задачи построения оценок. При наблюдении процесса  $r(t)$  на текущем интервале времени  $[0, t]$  ищется оценка  $\bar{\lambda}^*(t+\tau)$ : если  $\tau=0$  имеет место задача **текущей фильтрации**; если  $\tau>0$  – задача фильтрации с предсказанием, или задача **экстраполяции**; при  $\tau<0$  – задача фильтрации с запаздыванием, или задача **интерполяции**.

Критерии оптимальности, используемые в теории фильтрации, при фиксированном значении  $t$  совпадают с критериями теории оценок, рассмотренными в § 6.1.

Априорные сведения о вероятностных характеристиках параметра  $\bar{\lambda}^*(t)$  и помехи  $n(t)$  задаются либо в форме многомерных плотностей вероятности, либо в виде дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

При дальнейшем рассмотрении полагаем наблюдение  $r(t)$  в виде

$$r(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \quad (6.29)$$

где  $n(t)$  – гауссовский белый шум с нулевым средним значением и  $\delta$ -функцией корреляции:

$$\langle n(t) \rangle = 0; \quad \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2). \quad (6.30)$$

Считаем, что информационный параметр  $\lambda(t)$  представляет однокомпонентный случайный процесс и формируется из белого гауссовского шума  $n_\lambda(t)$ , имеющего характеристики:

$$\langle n_\lambda(t) \rangle = 0; \quad \langle n_\lambda(t_1)n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2} \delta(t_1 - t_2).$$

Формирование сообщения  $\lambda(t)$  определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = K_1(t, \lambda) + n_\lambda(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (6.31)$$

где  $K_1(t, \lambda)$  – известная функция аргументов  $t$  и  $\lambda$ .

В зависимости от вида уравнения наблюдения (6.29) и уравнений сообщения (6.31) различаются два класса задач фильтрации: **линейная фильтрация**, если уравнение (6.29) и (6.31) являются линейными относительно  $\lambda$ ; **нелинейная фильтрация**, если уравнение (6.29) или (6.31) содержит нелинейные функции сообщения  $\lambda$ .

Полагая  $\lambda(t)$  однокомпонентным случайным процессом, описываемым уравнением (6.31), получим алгоритм для задачи фильтрации. Случайный процесс  $\lambda(t)$  является диффузионным **марковским** процессом, априорная

плотность вероятности  $W(t, \lambda)$  которого определяется **уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова**

$$\frac{\partial W(t, \lambda)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ K_1(t, \lambda)W(t, \lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (N_\lambda W(t, \lambda)) \right] \equiv L[W(t, \lambda)]. \quad (6.32)$$

Здесь через  $L(\cdot)$  обозначен **оператор Фоккера-Планка-Колмогорова**. Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место однозначное соответствие между описаниями процесса  $\lambda(t)$  в виде уравнения (6.31) или (6.32).

Апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  параметра  $\lambda(t)$  удовлетворяет уравнению, впервые полученному Р. Л. Стратоновичем. Для рассматриваемого однокомпонентного марковского процесса  $\lambda(t)$  это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \lambda)}{\partial t} = L\{W_{ps}(t, \lambda)\} + [F(t, \lambda) - \langle F(t, \lambda) \rangle] W_{ps}(t, \lambda), \quad (6.33)$$

где

$$F(t, \lambda) = -\frac{1}{N_0} [r(t) - s(t, \lambda)]^2 \quad (6.34)$$

есть производная по времени от логарифма функции правдоподобия [см. формулу (6.7) при  $T = t$ ];

$$\langle F(t, \lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \lambda) W_{ps}(t, \lambda) d\lambda. \quad (6.35)$$

Начальные условия для уравнения (6.34) определяются априорной плотностью вероятности  $W(0, \lambda)$  начальной координаты сообщения  $\lambda(0) = \lambda_0$ .

Апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  содержит всю доступную информации о параметре  $\lambda(t)$ , которую можно извлечь из наблюдения  $r(t)$  на интервале  $[0, t]$  и из априорных сведений о  $\lambda(t)$ . Определив апостериорную плотность  $W_{ps}(t, \lambda)$  можно получить другие требуемые характеристики, например условное математическое ожидание  $\lambda^*(t)$ , представляющее оптимальную оценку сообщения по критерию минимума среднего квадрата ошибки или оценку, оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности.

Для реализации оптимальных алгоритмов используют различные упрощающие предположения, которые будут рассмотрены далее.

### 6.3.2. Линейная фильтрация

Частным случаем рассмотренных выше общих соотношений является линейная фильтрация сообщения  $\lambda(t)$ . Пусть наблюдаемая смесь

$$r(t) = \lambda(t) + n(t), \quad (6.36)$$

где шум имеет характеристики (6.30), а процесс  $\lambda(t)$  задан линейным уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t). \quad (6.37)$$

Здесь  $\alpha$  – постоянный коэффициент, определяющий ширину спектра сообщения  $\lambda(t)$ . Процесс  $\lambda(t)$ , заданный уравнением (6.37), может быть сформирован из белого шума  $n_\lambda(t)$ , характеристики которого известны

$\langle n_\lambda(t) \rangle = 0$ ;  $\langle n_\lambda(t_1)n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2}\delta(t_1 - t_2)$ , где  $\frac{N_\lambda}{2}$  – спектральная плотность шума  $n_\lambda(t)$ . В качестве формирующего фильтра можно использовать RC-фильтр нижних частот с постоянной времени  $T_{RC} = 1/\alpha$ .

При линейной фильтрации гауссовских процессов, каким является рассматриваемое сообщение  $\lambda(t)$ , апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  представляется гауссовским законом. Параметрами такой плотности вероятности служат математическое ожидание  $\lambda^*(t)$  и дисперсия  $\sigma_\lambda^2(t)$ . Подставляя гауссовскую плотность вероятности в уравнение Р. Л. Стратоновича (6.33), можно прийти к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}; \quad (6.38)$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2(t) + \sigma_\lambda^4(t) \frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (6.39)$$

Уравнение (6.38) определяет алгоритм формирования оптимальной оценки, а уравнение (6.39) – эволюцию апостериорной дисперсии. Эти уравнения можно преобразовать с учетом соотношений (6.34) и (6.36). На основе этих соотношений функция  $F(t, \lambda^*)$  и ее производные принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F(t, \lambda^*) &= -\frac{1}{N_0} [r(t) - \lambda^*(t)]^2; \\ \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} &= -\frac{2}{N_0} [r(t) - \lambda^*(t)]; \\ \frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} &= -\frac{2}{N_0}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Подставив выражения (6.40) в уравнения (6.38) и (6.39), получим

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{2}{N_0} [r(t) - \lambda^*(t)]; \quad (6.41)$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2(t) + \sigma_\lambda^4(t) \frac{2}{N_0}. \quad (6.42)$$

Уравнения (6.41) и (6.42) описывают так называемый фильтр **Калмана** для непрерывного времени.

Рассмотрим задачу фильтрации в дискретном времени. Наблюдение и сообщение задаются скалярными разностными уравнениями:  $r_v = H_v\lambda_v + n_v$ ;  $\lambda_v = \beta_{v-1}\lambda_{v-1} + n_{\lambda v}$ , где  $n_v$ ,  $n_{\lambda v}$  – гауссовские шумы с нулевыми средними значениями и дисперсиями  $D_\lambda$  и  $D_{\lambda v}$  соответственно;  $H_v = H(t_v)$ ,  $\beta_v = \beta(t_v)$  – заданные функции времени; интервал времени  $t_v - t_{v-1} = \Delta t$  определяется временем дискретизации процессов.

Результирующие уравнения для оценки  $\lambda_v$  и дисперсии  $\sigma_{\lambda v}^2$  определяют **дискретный фильтр Калмана**. Они носят рекуррентный характер и имеют следующий вид:

$$\lambda_v^* = \beta_{v-1}\lambda_{v-1}^* + H_v \frac{\sigma_{\lambda v}^2}{D_v} (r_v - H_v\beta_{v-1}\lambda_{v-1}^*); \quad (6.43)$$

$$\frac{1}{\sigma_{\lambda_v}^2} = [\beta_{v-1}^2 \sigma_{\lambda_{v-1}}^2 + D_{\lambda_v}]^{-1} + \frac{H_v^2}{D_v}. \quad (6.44)$$

Схема, реализующая алгоритм (6.43, 6.44), приведена на рис. 6.10, где  $K_v = H_v(\sigma_{\lambda_v}^2/D_v)$ . Заметим, что уравнение для дисперсии (3.44), так же как и (6.42), не зависит от наблюдения  $r$ , поэтому коэффициент  $K(t_v) \equiv K_v$  может быть заранее вычислен, т. е. представляет известную функцию времени. При постоянных величинах  $\beta_v$ ,  $D_v$ ,  $D_{\lambda_v}$ ,  $H_v$  и при условии существования установившегося значения дисперсии  $\sigma_{\lambda_\infty}^2 = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_{\lambda_v}^2$  оценка  $\lambda_v^*$  может формироваться в соответствии с уравнением

$$\lambda_v^* = \beta \lambda_{v-1}^* + H \frac{\sigma_{\lambda_\infty}^2}{D_v} (r_v - H \beta \lambda_{v-1}^*). \quad (6.45)$$

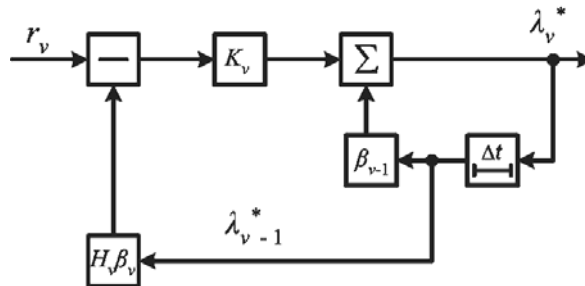


Рис. 6.10. Дискретный фильтр Калмана

Оценка в этом случае является асимптотически оптимальной (при  $t \rightarrow \infty$ ), а фильтр, описываемый уравнением (6.45), – стационарным. Такой фильтр проще в реализации, чем нестационарный, однако в течение переходного процесса дисперсия оценки в нем больше, чем в нестационарном оптимальном фильтре.

Приведенные результаты линейной фильтрации обобщаются на многомерный случай. При этом априорные сведения о передаваемых сообщениях задаются системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \alpha_{i1}(t)\lambda_1 + \alpha_{i2}(t)\lambda_2 + \dots + \alpha_{in}(t)\lambda_n + n_{\lambda_i}(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.46)$$

Эти уравнения удобно записать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \mathbf{B}(t)\vec{\lambda} + \mathbf{n}_\lambda(t), \quad (6.47)$$

где  $\vec{\lambda}$  – вектор-столбец сообщения размерности  $n$ , который для удобства можно записать в виде транспонированной вектор-строки:  $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ ;  $\mathbf{A}(t)$  –  $n \times n$  матрица коэффициентов системы (6.46);  $\mathbf{n}_\lambda = [n_{\lambda_1}, \dots, n_{\lambda_n}]^T$  – вектор-столбец формирующих белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и матричной корреляционной функцией  $\langle \mathbf{n}_\lambda(t) \mathbf{n}_\lambda^T(t+\tau) \rangle = \mathbf{N}_\lambda(t) \delta(\tau)$ ;

$\mathbf{N}_\lambda(t)$  – симметрическая матрица деленных пополам спектральных плотностей. Наблюдаемое колебание записывается в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}(t)\vec{\lambda}(t) + \mathbf{n}(t),$$

где  $\mathbf{r}(t)$  – вектор-столбец наблюдений размерности  $m$  ( $m$  – число каналов наблюдения);  $\mathbf{H}(t)$  – матрица наблюдений размерности  $m \times n$ ;  $\mathbf{n}(t)$  – вектор-столбец аддитивных белых шумов размерности  $m$  с характеристиками  $\langle \mathbf{n}(t) \rangle = 0$ ;  $\langle \mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau) \rangle = \mathbf{N}_0(t)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{N}_0(t)$  – симметрическая  $m \times n$  матрица спектральных плотностей, деленных пополам.

Уравнения оптимальной линейной фильтрации имеют вид:

$$\frac{d\vec{\lambda}^*(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{\lambda}^* + \mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\vec{\lambda}^*); \quad (6.48)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R} + \mathbf{N}_\lambda, \quad (6.49)$$

где  $\mathbf{R}$  – корреляционная матрица ошибок фильтрации.

Пусть, например,  $\lambda$  представляет случайную, но постоянную скалярную величину, заданную уравнением  $d\lambda/dt = 0$ . Это частный случай уравнения (6.47) при  $\mathbf{A} \equiv 0$  и  $n_\lambda = 0$ .

Имеются два канала с независимыми белыми шумами:  $r_1 = \lambda + n_1$ ;  $r_2 = \lambda + n_2$ . В данном случае справедливы следующие соотношения:

$$\vec{\lambda} = \lambda; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} N_{01}/2 & 0 \\ 0 & N_{02}/2 \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

Матрица дисперсий одномерна:  $\mathbf{R} = R \equiv \sigma_\lambda^2$ . На основании соотношений (6.50) запишем матрицу

$$\mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1} = R \begin{bmatrix} \frac{2}{N_{01}} & \frac{2}{N_{02}} \end{bmatrix}.$$

Уравнение оптимальной фильтрации (6.48) примет вид

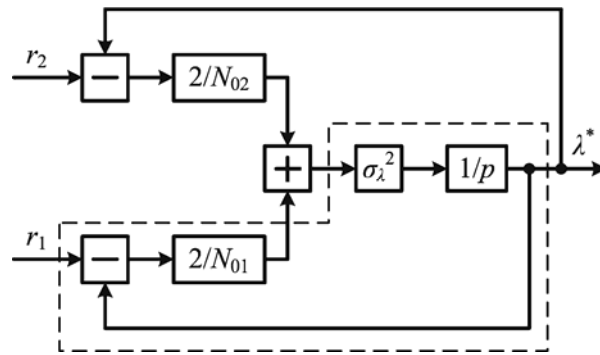
$$\frac{d\lambda^*}{dt} = \sigma_\lambda^2 \left[ \frac{2}{N_{01}}(r_1 - \lambda^*) + \frac{2}{N_{02}}(r_2 - \lambda^*) \right]. \quad (6.51)$$

Схема, соответствующая уравнению (6.51), приведена на рис. 6.11, где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования. Усложнение схемы по сравнению с одномерным случаем (ему соответствует обведенная штриховой линией схемы) повышает точность фильтрации. В соответствии с уравнением (6.49)

$$\frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} = - \left( \frac{2}{N_{01}} + \frac{2}{N_{02}} \right) \sigma_\lambda^4.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $\sigma_\lambda^2(0) = \sigma_{\lambda 0}^2$  можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} = \frac{\sigma_{\lambda 0}^2}{1 + \sigma_{\lambda 0}^2(2/N_{01} + 2/N_{02})t}. \quad (6.52)$$



**Рис. 6.11.** Линейный фильтр

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $\sigma_\lambda^2 \rightarrow 0$ . По сравнению с одномерным случаем, соответствующим одноканальной обработке, в данном примере слагаемое в знаменателе дроби (6.52) содержит больший по величине коэффициент, поэтому текущие значения  $\sigma_\lambda^2(t)$  меньше.

Важным вопросом при решении задач фильтрации является определение **чувствительности характеристик** полученного фильтра к отклонению его параметров от номинальных значений, определяемых решением задачи синтеза. Требуется выяснить влияние отклонений параметров фильтра на точность фильтрации. Рассмотрим этот вопрос на примере линейной фильтрации процесса, заданного уравнением (6.37).

Уравнение для оценки (6.50) перепишем в виде

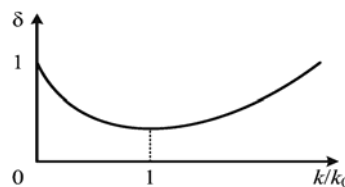
$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -\alpha\lambda^* + k[r(t) - \lambda^*], \quad (6.53)$$

где  $k = 2\sigma_\lambda^2/N_0$  – коэффициент, постоянный в стационарном режиме. Вычтем априорное уравнение (6.37) из уравнения (6.53) и, обозначив разность  $\lambda^* - \lambda = \varepsilon$ , найдем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha\varepsilon - n_\lambda + k(n - \varepsilon) = -(\alpha + k)\varepsilon + (kn - n_\lambda).$$

Отсюда определим дисперсию оценки:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{k^2 N_0 + N_\lambda}{4(n + k)}. \quad (6.54)$$



**Рис. 6.12.** Чувствительность характеристик фильтрации

На основании формулы (6.54) можно указать допустимые пределы изменения коэффициента  $k$ . Характер зависимости  $\sigma_\varepsilon^2$  от  $k$  показан на рис. 6.12. Минимальная дисперсия соответствует значению  $k_0 = \alpha(\sqrt{1 + N_0/\alpha^2 N_\lambda} - 1)$ . При этом относительная ошибка фильтрации  $\delta^2 = \sigma_\varepsilon^2/D_\lambda = (1/(2q))(\sqrt{1+4q} - 1)$ , где  $D_\lambda = N_\lambda/(4\alpha)$  – дисперсия сообщения  $\lambda(t)$ ;  $q = D_\lambda/(\alpha N_0)$  – отношение сигнал/шум.

Фильтры Калмана применяются при вторичной обработке радиолокационной и радионавигационной информации, в устройствах систем радиоуправления.

## 6.4. НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

### 6.4.1. Общие соотношения

Задача нелинейной фильтрации параметров (сообщения) возникает, если уравнение, описывающее сообщение, нелинейно или уравнения наблюдения содержат нелинейные функции. На практике радиосигналы являются нелинейными функциями сообщений  $\lambda(t)$ , содержащихся, например, в фазе, задержке или частоте сигнала  $s(t, \lambda)$ .

Рассмотрим наблюдение  $r(t)$ , заданное соотношением (6.29), где сообщение  $\lambda(t)$  считаем случайным процессом, определяемым уравнением (6.31). Уравнения нелинейной фильтрации Р. Л. Стратоновича, характеризующие эволюцию апостериорной плотности вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$ , определяются соотношениями (6.33)-(6.35). Интегро-дифференциальное уравнение (6.33) в частных производных не имеет в общем случае точного решения (за исключением линейной фильтрации). Однако существуют пути, позволяющие найти приближенные решения его. Наибольшее распространение получил способ решения, основанный на аппроксимации апостериорной плотности  $W_{ps}(t, \lambda)$  гауссовской плотностью вероятности, – **гауссовское приближение**. Это приближение тем точнее, чем больше отношение сигнал/шум и чем меньше ошибки фильтрации. При этом алгоритмы, основанные на гауссовской аппроксимации, являются оптимальными.

Уравнения гауссовского приближения имеют вид, представленный соотношениями (6.38), (6.39). В отличие от уравнений линейной фильтрации (6.41), (6.42) в уравнение дисперсии (3.39) входит текущая реализация  $r(t)$  и текущая оценка  $\lambda^*(t)$  (см. выражение для  $\partial^2 F/\partial \lambda^{*2}$ ), поэтому уравнение (6.39) необходимо решать совместно с уравнением (6.38) в текущем времени, что усложняет построение нелинейного фильтра.

Для упрощения нелинейного фильтра прибегают к осреднению зависящих от времени членов в уравнении (6.39), в частности к замене

$$\frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} \cong -\frac{2}{N_0} \left[ \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \right]^2. \quad (6.55)$$

После осреднения можно определить стационарное значение дисперсии, полагая  $d\sigma_\lambda^2/dt=0$ . При этом с учетом соотношения (6.55) дифференциальное уравнение (6.48) переходами алгебраическое:

$$0 = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2 - \alpha_\lambda^2 \left[ \frac{2}{N_0} \left( \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \right)^2 \right]. \quad (6.56)$$

Считая справедливым принятые приближения, уравнение (6.38) для оценок фильтруемого параметра можно записать в виде

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2 \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}, \quad (6.57)$$

где производная  $\partial F(t, \lambda^*)/\partial \lambda^*$  определяется соотношением

$$\frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \frac{2}{N_0} [r(t) - s(t, \lambda^*)] \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}. \quad (6.58)$$

Для неэнергетического параметра  $\lambda$  выражение (6.58) можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \frac{2}{N_0} r(t) \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}. \quad (6.59)$$

Таким образом, приведенные уравнения позволяют осуществить структурный синтез устройств нелинейной фильтрации и определить стационарные значения для дисперсий ошибок фильтрации. Получаемые в результате синтеза устройства относятся к квазиоптимальным, поскольку в переходном режиме они обладают большими ошибками, чем оптимальные устройства.

Уравнения квазиоптимальной нелинейной фильтрации обобщить на многомерный случай, представляя сообщение в виде векторно-матричного уравнения (6.47) и имея в виду, что  $\mathbf{A}(t, \vec{\lambda})$  – вектор-функция, зависящая от  $\vec{\lambda}$  и  $\mathbf{N}_\lambda$ . Результирующие уравнения гауссовского приближения имеют вид:

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = \alpha_i(t, \vec{\lambda}^*) + \sum_{j=1}^n R_{ij}(t) \frac{\partial F(t, \vec{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j}; \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_{ij}}{dt} = & \frac{N_{\lambda_{ij}}(t, \vec{\lambda}^*)}{2} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \alpha_j(t, \vec{\lambda}^*)}{\partial \lambda_\mu} R_{i\mu}(t) + \\ & + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \alpha_i(t, \vec{\lambda}^*)}{\partial \lambda_\nu} R_{\nu j}(t) + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n R_{i\mu}(t) R_{\nu j}(t) \frac{\partial^2 F(t, \vec{\lambda}^*)}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

В стационарном (установившемся) режиме  $dR_{ij}/dt=0$  и уравнения (6.61) для элементов корреляционной матрицы ошибок фильтрации после осреднения функций  $\frac{\partial^2 F(t, \vec{\lambda}^*)}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}$  переходят в систему алгебраических уравнений.

Ниже рассматриваются примеры применения алгоритмов нелинейной фильтрации.

#### 6.4.2. Фильтрация фазы узкополосного радиосигнала



В радиосвязи возникает задача синхронизации генераторов колебаний. Представим, что на передающей стороне вырабатывается колебание

$$s(t, \varphi) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi],$$

где фаза  $\varphi \equiv \varphi(t)$  представляет **винеровский процесс**, заданный уравнением

$$d\varphi(t)/dt = n_\varphi(t), \quad (6.62)$$

которое представляет частный случай уравнения (6.46) при  $\alpha = 0$ . Гауссовский белый шум  $n_\varphi(t)$ , из которого формируется процесс  $\varphi(t)$ , имеет характеристики:  $\langle n_\varphi(t) \rangle = 0$ ;  $\langle n_\varphi(t_1)n_\varphi(t_2) \rangle = \frac{N_\varphi}{2} \delta(t_1 - t_2)$ .

На приемной стороне колебание имеет вид

$$r(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi] + n(t),$$

где  $n(t)$  – аддитивная помеха, представляющая белый шум с характеристиками (6.30).

В соответствии с формулой (6.57), имея в виду  $\alpha = 0$ , а также соотношения (6.59) и (6.62), запишем уравнение для оценки фазы  $\varphi^*(t)$ :

$$\frac{d\varphi^*(t)}{dt} = -\frac{2}{N_0} \sigma_\varphi^2 r(t) a_0 \sin[\omega_0 t + \varphi^*]. \quad (6.63)$$

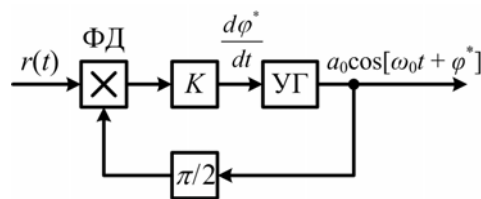


Рис. 6.13. Фильтр фазы узкополосного колебания

Согласно уравнению (6.63), принимая  $K = -(2/N_0)\sigma_\varphi^2 a_0$ , где  $\sigma_\varphi^2$  – стационарное значение дисперсии ошибки оценивания фазы, можно построить структурную схему фильтрации. На рис. 6.13 представлена схема фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), реализующая алгоритм (6.63). Перемножитель в схеме выполняет роль фазового дискриминатора (ФД), который осуществляет подстройку управляемого генератора (УГ).

Определим дисперсию  $\sigma_\varphi^2$ , полагая в уравнении (6.56)  $\alpha = 0$  и имея в виду равенство  $\overline{(\partial s(t, \varphi^*)/\partial \varphi^*)^2} = a_0^2 \sin^2[\omega_0 t + \varphi^*] \cong a_0^2/2$ , где черта сверху означает операцию временного усреднения и учитывая, что осциллирующий член  $\cos 2\omega_0 t$  при интегрировании дает нуль, получим:

$$\sigma_\varphi^2 = \sqrt{\frac{N_\varphi N_0}{2a_0^2}}. \quad (6.64)$$

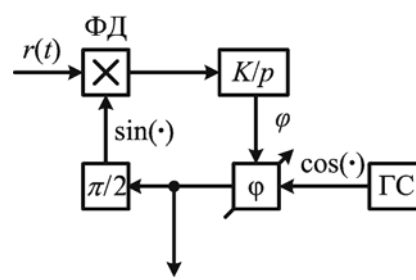


Рис. 6.14. Схема ФАП с управляемым фазовращателем

Соотношение (6.64) для стационарной дисперсии можно преобразовать. Для этого введем дисперсию набега фазы сигнала за время  $T$ , т. е. определим априорную дисперсию фазы:  $D_\varphi = N_\varphi T/2$ . Тогда, обозначив отношение сигнал/шум  $q = 2a_0^2 T/N_0$ , получим  $\sigma_\varphi^2 = \sqrt{2D_\varphi/q}$ . По уравнению (6.63) возможно другое построение схемы фазовой автоподстройки, показанное на рис. 6.14, где используется управляемый фазовращатель, изменяющий фазу сигнала генератора (ГС) в соответствии с оценкой  $\varphi^*$ . Управляющее напряжение вырабатывается на выходе интегратора.

#### 6.4.3. Фильтрация задержки псевдослучайного сигнала

Рассмотрим фильтрацию времени задержки псевдослучайного сигнала  $s(t, \tau) = a_0 g(t - \tau)$ .

Запаздывание  $\tau$  представляет винеровский процесс:

$$d\tau(t)/dt = n_\tau(t), \quad (6.65)$$

где формирующий белый шум  $n_\tau(t)$  имеет характеристики:  $\langle n_\tau(t) \rangle = 0$ ;

$$\langle n_\tau(t_1) n_\tau(t_2) \rangle = \frac{N_\tau}{2} \delta(t_1 - t_2).$$

Принимаемое колебание представляет аддитивную смесь сигнала и белого шума с характеристиками (3.30):  $r(t) = a_0 g(t - \tau) + n(t)$ . Задача состоит в оценке параметра  $\tau$ .

Отметим некоторые особенности сигнала. На передающей стороне сигнал  $a_0 g(t)$  может формироваться с помощью генератора псевдослучайной последовательности (ПСИ). Такой генератор в частном случае строится на основе регистра сдвига с обратными логическими связями (РСОС). Случайная задержка сигнала может быть обусловлена нестабильностью генератора тактовой частоты (ГТЧ), обеспечивающего работу РСОС. Формирователь сигнала показан на рис. 6.15, а. Формируемая ПСП представляет периодическую функцию знакопеременных прямоугольных импульсов. Длительность элементарного импульса  $\tau_3 = 1/f_\tau$ , где  $f_\tau$  – тактовая частота колебаний ГТЧ. Период ПСП определяется величиной  $T = N\tau_3$ , причем для РСОС справедливо соотношение  $N = 2^n - 1$ , где  $n$  – число разрядов РСОС.

В пределах одного периода ПСП можно представить в виде

$$a_0 g(t) = a_0 \sum_{i=1}^N v_i \operatorname{rect} \left[ \frac{t - (i-1)\tau_3}{\tau_3} \right], \quad (6.66)$$

где  $a_0$  – амплитуда ПСП;  $v_i$  – коэффициент, принимающий значения  $\pm 1$  в соответствии с законом формирования ПСП.

Уравнение для оценки задержки  $\tau^*$  в соответствии с формулами (6.57), (6.59) и (6.65) можно записать в виде

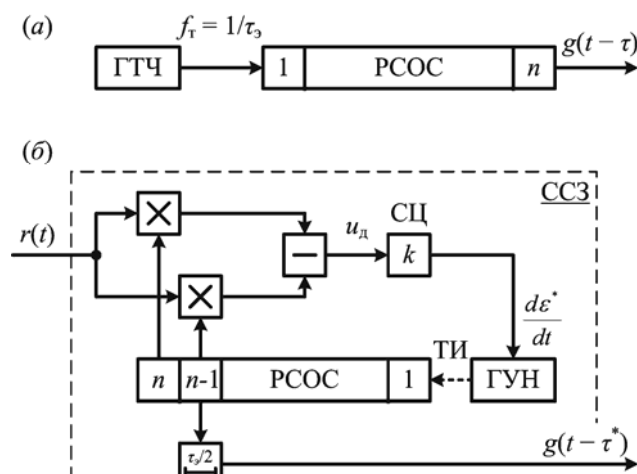
$$\frac{\partial \tau^*(t)}{\partial t} = \frac{2\sigma_\tau^2 a_0}{N_0} r(t) \frac{\partial g(t - \tau^*)}{\partial \tau^*}. \quad (6.67)$$

Операцию дифференцирования  $\partial/\partial \tau^*$  разрывной функции, каковой является ПСП  $g(t - \tau^*)$ , с учетом реализации квазиоптимального устройства заменим операцией вычисления конечной разности, т. е. примем

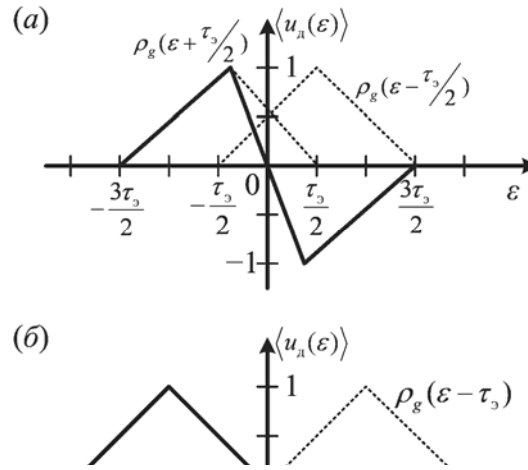
$$\frac{\partial g(t - \tau^*)}{\partial \tau^*} \cong \frac{1}{\Delta \tau} [g(t - \tau^* + \Delta \tau/2) - g(t - \tau^* - \Delta \tau/2)], \quad (6.68)$$

где величина  $\Delta \tau$  выбирается из условия обеспечения наибольшей точности оценивания и удобства реализации схемы. Учитывая выражение (6.68) и введя обозначение  $k = 2\sigma_\tau^2 / (N_0 \Delta \tau)$ , где  $\sigma_\tau^2$  – стационарное значение дисперсии ошибки фильтрации, запишем уравнение (6.67) в виде

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = k a_0 r(t) [g(t - \tau^* + \Delta \tau/2) - g(t - \tau^* - \Delta \tau/2)]. \quad (6.69)$$



В соответствии с уравнением (6.69) можно представить несколько вариантов построения устройства фильтрации. Один из вариантов схемы приведен на рис. 6.15, б. Устройство содержит схему слежения за задержкой ПСП (ССЗ), в которую включены: дискриминатор в виде умножителей и разностного устройства; сглаживающая цепь (СЦ); генератор тактовой частоты, управляемый напряжением (ГУН). Последовательность тактовых импульсов, вырабатываемых в ГУН, обеспечивает работу PCOC. Заметим, что согласно формуле (6.69), в рассматриваемом случае интегратор считается включенным в ГУН, а СЦ представляет усилитель с коэффициентом передачи. Дискриминатор следящего фильтра может быть реализован иначе, на основе одного умножителя, опорным сигналом которого служит разность ПСП, определяемая правой частью выражения (6.68).



Для описания дискриминатора введем **дискриминационную характеристику** (ДХ), под которой понимают зависимость среднего значения напряжения на выходе дискриминатора от рассогласования  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$ . В рассматриваемом примере  $\varepsilon = \tau - \tau^*$  и ДХ представляет функцию  $\overline{u_n(t, \varepsilon)}$ . С учетом выражения (3.77) запишем:

$$\begin{aligned} \overline{u_n(t, \varepsilon)} &= \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) [g(t-\tau^* + \Delta\tau/2) - g(t-\tau^* - \Delta\tau/2)] dt = \\ &= \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) g(t-\tau^* + \Delta\tau/2) dt - \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) g(t-\tau^* - \Delta\tau/2) dt = \\ &= \frac{a_0^2 T}{N_0} [\rho_g(\varepsilon + \Delta\tau/2) - \rho_g(\varepsilon - \Delta\tau/2)]. \end{aligned}$$

Нормированные ДХ, построенные на основе полученного выражения, приведены на рис. 6.16 для двух значений  $\Delta\tau$ :  $\Delta\tau = \tau_3$  (а) и  $\Delta\tau = \tau_3$  (б). Здесь  $\rho_g(\varepsilon)$  – автокорреляционная функция ПСП, определяемая при  $N \gg 1$  выражением

$$\rho_g(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - |\varepsilon|/\tau_3, & \text{если } |\varepsilon| < \tau_3; \\ 1/N \cong 0, & \text{если } |\varepsilon| > \tau_3. \end{cases} \quad (6.70)$$

Дисперсия  $\sigma_\lambda^2$  определяется из уравнения (6.57) при  $\alpha = 0$  и с учетом вычисления конечных разностей (6.77) принимает вид

$$\sigma_\tau^2 = \sqrt{\frac{N_\tau N_0 (\Delta\tau)^2}{(4a_0^2)^2}}$$

или

$$\sigma_\tau^2 = \sqrt{\frac{D_\tau (\Delta\tau)^2}{q}}, \quad (6.71)$$

где  $D_\tau = N_\tau T/2$  – дисперсия набега задержки за время  $T$  (априорная дисперсия задержки);  $q$  – отношение сигнал/шум.

Как видно из выражения (6.71), точность фильтрации задержки зависит от выбора величины  $\Delta\tau$ . Уменьшение  $\Delta\tau$  приводит, согласно выражению (6.71), к уменьшению дисперсии. Однако при сокращении разность сдвинутых друг относительно друга ПСП в формуле (6.77) превращается в последовательность знакопеременных импульсов короткой длительности, которые выполняют роль стробирующих импульсов, обеспечивая подавление шума. Вместе с тем при уменьшении длительности стробирующих

импульсов возрастает вероятность срыва слежения в ССЗ. Можно показать, что наилучшие характеристики ССЗ достигаются при  $\Delta\tau = \tau_3$ .

#### 6.4.4. Некогерентная фильтрация

Во многих задачах сигнал, помимо измеряемых параметров, содержит случайные параметры, которые являются для потребителя несущественными (например, начальная фаза или амплитуда сигнала). В связи с этим возникает необходимость фильтрации параметра сигнала в условиях, когда наблюдаемая смесь представляется в виде  $r(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t)$ , где  $\lambda \equiv \lambda(t)$  – фильтруемый параметр, представляющий случайный процесс. Полагаем, что процесс  $\lambda(t)$  задан уравнением (6.37). Несущественный параметр не подвергается измерению и представляет случайную величину с заданной априорной плотностью вероятности  $W(\beta)$ .

При решении задача фильтрации параметр  $\beta$  может быть включен в число оцениваемых, в результате чего увеличивается размерность вектора фильтруемых параметров. Для апостериорной плотности вероятности расширенного вектора параметров можно записать уравнение Р. Л. Стратоновича. Модифицированный вид этого уравнения следующий:

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \lambda, \beta)}{\partial t} = L[W_{ps}(t, \lambda, \beta)] + (V - \gamma)W_{ps}(t, \lambda, \beta). \quad (6.72)$$

Здесь при условии  $\tau_{кор} \gg \Delta T$ , где  $\tau_{кор}$  – время корреляции процесса  $\lambda(t)$ ;  $\Delta T$  – заданный интервал; функция  $V \equiv V(t, \lambda, \beta)$  определяется функцией правдоподобия:

$$V = \frac{1}{\Delta T} \left\{ \exp \left[ \int_{t-\Delta T}^t F(t, \lambda, \beta) dt \right] - 1 \right\}; \quad (6.73)$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, \lambda, \beta) W_{ps}(t, \lambda, \beta) d\lambda. \quad (6.74)$$

Учитывая независимость параметров  $\beta$  и  $\lambda$ , можно принять  $W_{ps}(t, \lambda, \beta) = W(\beta)W_{ps}(t, \lambda)$ . Произведя осреднение левой и правой частей уравнения (6.72) по всем возможным значениям  $\beta$  получим

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \lambda)}{\partial t} = L[W_{ps}(t, \lambda)] + (\langle V \rangle_{\beta} - \gamma)W_{ps}(t, \lambda),$$

где

$$\langle V \rangle_{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, \lambda, \beta) W(\beta) d\beta. \quad (6.75)$$

При дальнейшем рассмотрении можно аппроксимировать апостериорную плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  гауссовской плотностью. В результате уравнения гауссовского приближения можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_{\lambda}^2(t) \frac{\partial \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial \lambda^*}; \quad (6.76)$$

$$\frac{d\sigma_{\lambda}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha\sigma_{\lambda}^2(t) + \sigma_{\lambda}^4(t) \frac{\partial^2 \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (6.77)$$

При построении структурных схем фильтрации уравнение (6.77) можно исключить, считая дисперсию  $\sigma_{\lambda}^2$  в установившемся режиме постоянной

величиной, которая вычисляется из алгебраического уравнения, соответствующего (6.77)  $d\sigma_\lambda^2/dt = 0$ .

Рассмотрим пример фильтрации частоты сигнала, имеющего случайную начальную фазу. Принимаемое колебание имеет вид

$$r(t) = a_0 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi] + n(t). \quad (6.78)$$

Сигнал, входящий в смесь (6.78), зависит от изменяющейся частоты  $\Omega$  и случайной фазы  $\varphi$ , равномерно распределенной на интервале  $[\pi, \pi]$ . Представление сигнала в виде (6.78) справедливо при относительно малой скорости измерения частоты  $\Omega$ , т. е. при  $(d\Omega/dt)t \rightarrow 0$  и  $t < \Delta T$ . В качестве модели  $\Omega(t)$  примем винеровский процесс

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = n_\Omega(t), \quad (6.79)$$

$n_\Omega(t)$  – формирующий белый шум со спектральной плотностью  $N_\Omega/2$ . Амплитуда  $a_0$  и частота  $\omega_0$  сигнала считаются известными. Аддитивный белый шум  $n(t)$  имеет характеристики, определяемые (6.30).

Учитывая выражение для сигнала, соотношения (6.73) и (6.75), а также то, что параметр  $\Omega$  неэнергетический, после ряда преобразований, аналогичных описанным в п. 5.3.3, получаем

$$\langle V \rangle_\beta^* = \frac{1}{\Delta T} \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^*)}{N_0} \right) - 1 \right], \quad (6.80)$$

$$Z(\Omega^*) = \frac{a_0}{2} \left| \int_{t-\Delta T}^t \bar{R}(t) \exp[-j(\omega_0 + \Omega^*)t] dt \right|; \quad (6.81)$$

где  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Функция  $Z(\Omega^*)$ , определяемая соотношением (6.81), может быть получена с помощью устройства, состоящего из согласованного фильтра и детектора огибающей. Согласованный фильтр представляет узкополосный фильтр, настроенный на частоту  $(\omega_0 + \Omega^*)$  и имеющий полосу  $\Delta f \approx 1/\Delta T$ .

Для упрощения реализации фильтра производную  $\partial \langle V \rangle_\beta^* / \partial \Omega^*$  удобно представить конечной разностью:

$$\frac{\partial \langle V \rangle_\beta^*}{\partial \Omega^*} \cong \frac{1}{\Delta \omega \Delta T} \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* + \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) - I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* - \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) \right].$$

На основании этого выражения и общего уравнения (6.76), учитывая априорное уравнение (3.79), получим следующий алгоритм формирования оценки сдвига частоты некогерентного сигнала:

$$\frac{d\Omega^*(t)}{dt} = k \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* + \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) - I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* - \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) \right], \quad (6.82)$$

где  $k = \sigma_\Omega^2 / (\Delta \omega \Delta T)$ .

Уравнению (3.82) соответствует схема измерения частоты, представляющая следящее устройство частотной автоподстройки (ЧАП) (рис. 6.17). Частотный дискриминатор (ЧД) выполняет функцию вычисления конечной разности протектированных колебаний. Подстройка согласованных узкополосных фильтров (УФ) осуществляется с помощью управляющего элемента (УЭ) в соответствии со значениями оценки  $\Omega^*$ . Нелинейные характеристики детекторов огибающей определяются функциями Бесселя.

Дисперсия ошибок фильтрации  $\sigma_\Omega^2$  вычисляется по формуле

$$\sigma_\Omega^2 = \sqrt{\frac{N_\Omega}{2(\partial^2 \langle V \rangle_\beta^* / \partial \Omega^{*2})}}, \quad (6.83)$$

которая следует из уравнения (6.77) при  $\alpha = 0$  и  $d\sigma_\Omega^2/dt = 0$ . С учетом

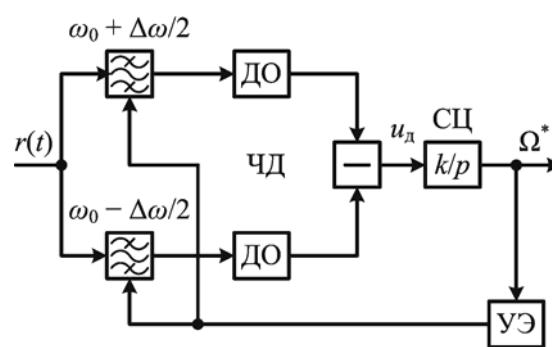


Рис. 6.17. Схема частотной автоподстройки

вычисления конечной разности вместо производной  $\partial^2 Z / \partial \Omega^{*2}$ , образующейся в соотношении (6.83), получим приближенное выражение  $\sigma_\Omega^2 \cong \sqrt{N_\Omega \Delta T (\Delta \omega)^2 / 2q^2}$ ; где  $q = 2a_0^2 \Delta T / N_0$  – отношение сигнал/шум;  $\Delta \omega$  – расстройка узкополосных фильтров в частотном дискриминаторе, которая выбирается из условия обеспечения наибольшей крутизны дискриминационной характеристики и примерно равна  $\Delta \omega \cong 2\pi / \Delta T$ .

При модуляции параметров сигнала  $s(t)$  непрерывными сообщениями информационный параметр  $\lambda(t)$  входит в сигнальную функцию, как правило, нелинейно:  $s(t, \lambda)$ . Это имеет место при угловых методах модуляции. Задача приема сообщения  $\lambda(t)$  в таких случаях заключается в наилучшем воспроизведении сообщения из смеси  $r(t)$  сигнала и шума:

$$r(t) = s(t, \lambda) + n(t). \quad (6.1)$$

Шум считается белым и гауссовским с характеристиками  $\langle n(t) \rangle = 0$  и  $\langle n(t_1)n(t_2) \rangle = 0.5N_0\delta(t_1 - t_2)$ . Процесс  $\lambda(t)$  в теории нелинейной фильтрации



полагается марковским и описывается дифференциальным уравнением (5,6), а функция  $s(t, \lambda)$  при фиксированных значениях  $\lambda$  считается известной.

По наблюдению  $r(t)$  в интервале  $(0, T)$  требуется сформировать наилучшую оценку  $\lambda(t)$ , обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки  $\langle \varepsilon^2(t) \rangle_m$ .

Оптимальный приемник по наблюдению  $r(t) = r'_0$  формирует апостериорную плотность распределения вероятности  $w(\lambda|r'_0)$ , которая в соответствии с формулой Байеса выражается следующим образом:

$$w(\lambda|r'_0) = k_n w(\lambda) w(r'_0|\lambda), \quad (6.2)$$

где  $k_n$  - коэффициент, не зависящий от  $\lambda$ , то  $w(r'_0|\lambda)$  — плотность распределения реализации при фиксированном значении параметра  $\lambda$  или функция правдоподобия, определяемая выражением

$$w(r'_0|\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^t [r(t) - s(t, \lambda)]^2 dt\right\}. \quad (6.3)$$

Р.Л. Стратоновичем получено уравнение для апостериорной плотности  $w(\lambda|r'_0)$ , которое в случае описания параметра  $\lambda(t)$  дифференциальным уравнением (5.6) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\lambda|r'_0)}{\partial t} &\equiv \\ &\equiv -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(\lambda, t) w(\lambda|r'_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(\lambda, t) w(\lambda|r'_0)] + [F(\lambda, t) - \langle F \rangle] w(\lambda|r'_0) \equiv \\ &\equiv L_{pr} w(\lambda|r'_0) + [F(\lambda, t) - \langle F \rangle] w(\lambda|r'_0) \end{aligned}$$

где  $L_{pr}$  - оператор Фоккера-Планка-Колмогорова;  $F(\lambda, t)$  - производная по времени от логарифма функции правдоподобия (6.3):

$$F(\lambda, t) = -(1/N_0)[r(t) - s(t, \lambda)]^2; \quad (6.5)$$

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, t) w(\lambda|r'_0) d\lambda; \quad (6.6)$$

Уравнение (6.4) описывает эволюцию апостериорного закона распределения сообщения  $\lambda(t)$ . Устройство, моделирующее это уравнение, является остаточным приемником, поскольку в апостериорной плотности  $w(\lambda|r'_0)$  содержится вся доступная информация о переданном сообщении  $\lambda(t)$ . Для формирования наилучшей оценки  $\lambda^*(t)$  необходимо воспользоваться критерием оптимальности. Выбрав квадратичную функцию потерь  $C_{II} = (\lambda - \lambda^*)^2$  и минимизируя средний риск, можно при известной апостериорной плотности прийти к критерию минимума среднего квадрата ошибки.

Интегродифференциальное уравнение (6.4) в общем случае не решается, поэтому для получения достаточно простых реализуемых устройств приема прибегают к различным упрощающим предположениям. В качестве первого такого предположения принимается, что апостериорная плотность распределения является гауссовской:

$$w(\lambda|r_0^t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda(t)} \exp\left\{-\frac{[\lambda(t) - \lambda^*(t)]^2}{2\sigma_\lambda^2(t)}\right\}, \quad (6.7)$$

где  $\sigma_\lambda^2(t)$  - дисперсия апостериорного распределения, характеризующая точность воспроизведения сообщения  $\lambda(t)$ ; математическое ожидание  $\lambda(t)$  соответствует максимуму апостериорной - вероятности и определяет оптимальную оценку по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

Подставляя выражение (6.7) в уравнение (6.4), после преобразований получим следующую систему уравнений нелинейной фильтрации в гауссовом приближении:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = K_1(\lambda^*, t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{\partial F(\lambda^*, t)}{\partial \lambda^*}; \quad (6.8)$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt} = K_2(\lambda^*, t) + 2\sigma_\lambda^2(t) \frac{\partial K_1(\lambda^*, t)}{\partial \lambda^*} + \sigma_\lambda^4(t) \frac{\partial^2 F(\lambda^*, t)}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (6.9)$$

В общем случае нелинейный фильтр, описываемый уравнениями (6.8) и (6.9), является нестационарным из-за изменения во времени коэффициентов  $K_1(\lambda^*, t)$  и  $K_2(\lambda^*, t)$ , а также дисперсии  $\sigma_\lambda^2$ . Фильтр можно представить в виде двух взаимосвязанных устройств: устройство оценки функционирует в соответствии с уравнением (6.8), устройство точности вырабатывает текущее значение дисперсии  $\sigma_\lambda^2$  в соответствии с уравнением (6.9). В частном случае, если фильтруемый параметр является гауссовским случайным процессом, аддитивно входящим в смесь с шумом, уравнения фильтрации принимают следующий вид:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{2}{N_0} [r(t) - \lambda^*(t)]; \quad (6.10)$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} + \sigma_\lambda^4(t) \frac{2}{N_0} - \sigma_\lambda^2(t) 2\alpha. \quad (6.11)$$

Эти уравнения описывают работу линейного фильтра Калмана-Бьюси, структурная схема которого приведена на рис. 6.1, где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования. Текущее значение дисперсии вырабатывается в устройстве точности (УТ) согласно уравнению (6.11).

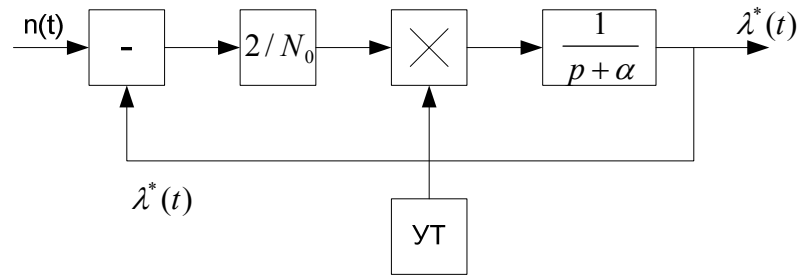


Рис. 6.1.

Если сообщение  $\lambda(t)$  моделирует неэнергетический параметр сигнала, то функция  $F(\lambda, t)$ , входящая в уравнения фильтрации (6.8), (6.9), выражается более простым соотношением, чем (6.5):

$$F(\lambda, t) = (2/N_0)r(t)s(t, \lambda). \quad (6.12)$$

Для гауссовского процесса  $\lambda(t)$  уравнения фильтрации приводятся с учетом (6.12) к виду

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \frac{2}{N_0}\sigma_\lambda^2(t)r(t)\frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}; \quad (6.13)$$

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2(t) + \frac{2}{N_0}\sigma_\lambda^4(t)r(t)\frac{\partial^2 s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (6.14)$$

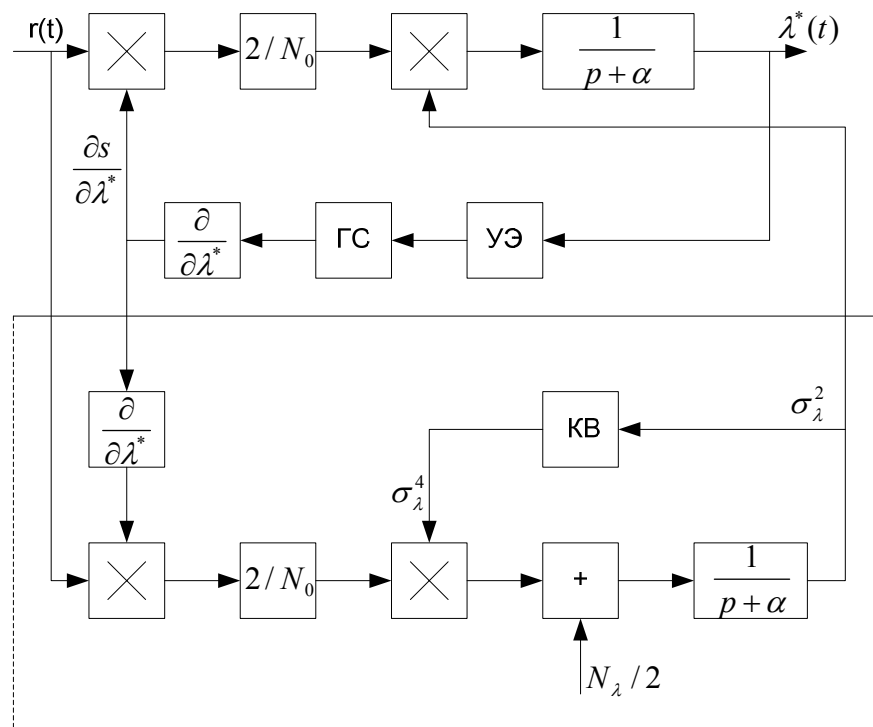


Рис. 6.2.

Согласно этим уравнениям, на рис. 6.2 построена структурная схема фильтра, содержащего генератор сигнала (ГС)  $s(t, \lambda^*)$  с управляющим

элементом (УЭ), обеспечивающим изменение параметра сигнала в соответствии с оцененными значениями  $\lambda^*(t)$ . Устройство точности, обведенное на рис. 6.2 пунктиром, формирует текущее значение дисперсии, которое вводится в устройство оценки и перестраивает коэффициент передачи. Этим достигается оптимальность оценки  $\lambda^*(t)$  в переходном режиме работы фильтра. В стационарном установившемся режиме значение дисперсии постоянно, поэтому отпадает необходимость перестройки коэффициента передачи устройства оценки. Для стационарного режима значение дисперсии можно заранее вычислить и за счет исключения из схемы устройства точности существенно упростить реализацию фильтра.

Стационарное значение дисперсии  $\sigma_\lambda^2$  вычисляется из уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (6.14), при условии равенства нулю производной  $d\sigma_\lambda^2(t)/dt = 0$ :

$$0 = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2 + \sigma_\lambda^4 \frac{2}{N_0} r(t) \frac{\partial^2 s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (6.15)$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо предварительно усреднить по времени член, содержащий случайную реализацию  $r(t)$ :

$$\frac{2}{N_0 T} \int_0^T r(t) \frac{\partial^2 s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} dt \cong \frac{2a_0^2}{N_0 E_0} \int_0^T s(t, \lambda) \frac{\partial^2 s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} dt; \quad (6.16)$$

где  $a_0$  — амплитуда сигнала  $s(t, \lambda)$ ;  $E = a_0^2 T$  — энергия сигнала в интервале  $(0, T)$ . Интеграл в правой части (6.16) определяет вторую производную по  $\lambda$  от автокорреляционной функции сигнала:

$$\rho''(\varepsilon) = \frac{1}{E} \int_0^T s(t, \lambda) \frac{\partial^2 s(t, \lambda^2)}{\partial \lambda^{*2}} dt. \quad (6.17)$$

При высоком качестве фильтрации, когда ошибки  $\varepsilon = \lambda^* - \lambda$  близки к нулю, в выражении (6.17) можно принять  $\varepsilon = 0$  и  $s(t, \lambda) \cong s(t, \lambda^*)$ . Тогда уравнение (6.15) переписется с учетом усреднения по времени в следующем виде:

$$0 = 0.5N_\lambda - 2a\sigma_\lambda^2 + \sigma_\lambda^4 q(1/T)\rho''(0); \quad (6.18)$$

где  $q = 2a_0^2 T / N_0$  — отношение энергии сигнала в интервале  $(0, T)$  к спектральной плотности шума.

Решение алгебраического уравнения (6.18) можно записать в виде

$$\sigma_\lambda^2 = \left[ \sqrt{1 - qN_\lambda \rho''(0) / (2a^2 T)} - 1 \right] \frac{q\rho''(0)}{aT}. \quad (6.19)$$

В частном случае, если фильтруемый параметр  $\lambda(t)$  представляет винеровский процесс, он описывается дифференциальным уравнением

$$d\lambda(t)/dt = n_\lambda(t), \quad (6.20)$$

где  $n_\lambda(t)$  — белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью  $N_\lambda$ . При этом в вышеприведенных уравнениях достаточно положить  $a = 0$ . Дисперсия ошибок фильтрации в стационарном режиме равна

$$\sigma_\lambda^2 = (N_\lambda T / q)^{1/2}. \quad (6.21)$$

Величину  $N_\lambda T$  можно рассматривать как дисперсию набега процесса  $\lambda(t)$  за время  $T$ .

Анализируя выражения (6.19) и (6.21) для дисперсии, можно сделать вывод о зависимости дисперсии от структуры сообщения  $\lambda(t)$  (дифференциального уравнения, описывающего процесс  $\lambda(t)$ ) и от отношения сигнал/шум.

Рассмотрим наиболее характерные конкретные примеры.

В системе передачи непрерывных сообщений, использующей сигналы  $s(t, \lambda)$ , модулированные по фазе, принимаемая смесь записывается в виде

$$r(t) = a_0 \cos[w_0 t + \mu \lambda(t)] + n(t); \quad (6.22)$$

где  $\mu$  — коэффициент, определяющий индекс фазовой модуляции.

Пусть передаваемое сообщение  $\lambda(t)$  задано винеровским процессом (6.20). Для построения схемы оптимального демодулятора сигнала запишем выражение функции  $\partial s(t, \lambda^*) / \partial \lambda^*$  с учетом сигнала в (6.22):

$$\partial s(t, \lambda^*) / \partial \lambda^* = -a_0 \mu \sin[w_0 t + \mu \lambda^*(t)]; \quad (6.23)$$

На основании (3.72) определяем производную

$$\partial^2 s(t, \lambda^*) / \partial \lambda^{*2} = -a_0 \mu^2 \cos[w_0 t + \mu \lambda^*(t)]. \quad (6.24)$$

Конкретизируем уравнение (6.13), описывающее оптимальный демодулятор - фильтр в стационарном режиме. Учитывая (6.23) и  $a = 0$ , имеем

$$d\lambda^*(t) / dt = -(2 / N_0) \sigma_\lambda^2 a_0 \mu r(t) \sin[w_0 t + \mu \lambda^*(t)]. \quad (6.25)$$

Обозначив произведение постоянных коэффициентов при функции  $r(t) \sin[*]$  в (6.25) через  $k_0$ , уравнение оптимального демодулятора приведем к виду

$$\lambda^*(t) = (k_0 / \rho) r(t) \sin[w_0 t + \mu \lambda^*(t)]. \quad (6.26)$$

Этому уравнению можно поставить в соответствие схему, приведенную на рис.6.3. Генератор сигнала (ГС) вырабатывает гармоническое колебание, которое модулируется по фазе в фазовом модуляторе (ФМ) управляющим сигналом  $\mu \lambda^*(t)$ , пропорциональным текущему значению оценки сообщения  $\lambda^*(t)$ .

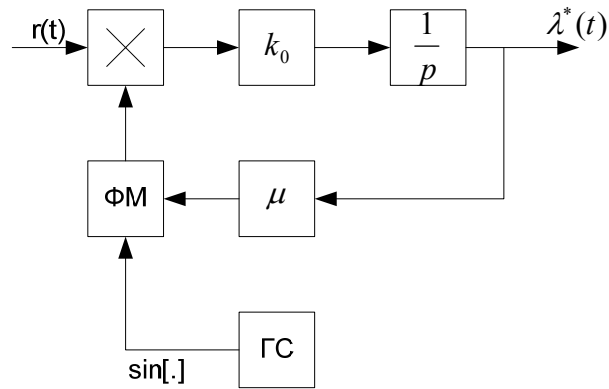


Рис. 6.3

Другой вариант реализации оптимального демодулятора ФМ сигнала строится на основе фазовой автоподстройки частоты (рис. 6.4). Операция интегрирования  $1/p$  в данном случае реализуется в устройстве управления частотой ГС (управляющем элементе УЭ).

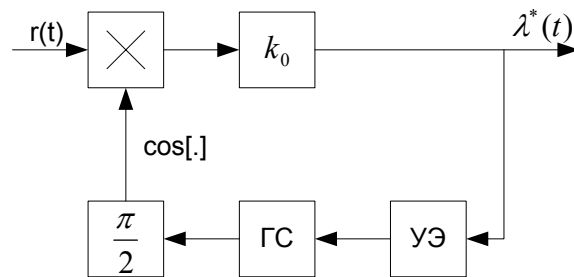


Рис. 6.4.

Дисперсия ошибки воспроизведения сообщения в стационарном режиме определяется на основе выражений (6.21) и (6.24):

$$\sigma_{\lambda}^2 = [N_{\lambda} T / (q \mu^2)]^{1/2}. \quad (6.27)$$

Как видно из (6.27), увеличение отношения сигнал/шум  $q$  приводит к уменьшению дисперсии ошибок. Аналогичное влияние оказывает коэффициент  $\mu$ . Заметим, что при определении  $\rho''(0)$  в рассматриваемом случае считается справедливым равенство

$$\int_0^T \cos[2w_0 t + 2\mu \lambda^*(t)] dt = 0. \quad (6.28)$$

Если сообщение представляет гауссовский марковский процесс, то в схеме рис.6.4 вместо интегратора включается фильтр с коэффициентом передачи  $1/(p + \alpha)$ .

Рассмотрим систему передачи непрерывных сообщений сигналами с амплитудной модуляцией. Принимаемая смесь сигнала и шума в этом случае записывается в виде

$$r(t) = a_0 [1 + \mu_a \lambda(t)] \cos(w_0 t + \varphi_0) + n(t), \quad (6.29)$$

где  $a_0, w_0, \varphi_0$  - известные величины;  $\mu_a$  — коэффициент амплитудной модуляции.

Сообщение  $\lambda(t)$  считаем гауссовским процессом, заданным уравнением

$$d\lambda(t)/dt = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t). \quad (6.30)$$

Аддитивную помеху  $n(t)$  полагаем белым шумом со спектральной плотностью  $N_0$ .

В данном случае сообщение  $\lambda(t)$  модулирует энергетический параметр сигнала, поэтому уравнение для оценки сообщения  $\lambda^*(t)$  в стационарном режиме принимает следующий вид:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2 \frac{\partial F(\lambda^*, t)}{\partial \lambda^*}, \quad (6.31)$$

где функция  $F(\lambda, t)$  определяется выражением (6.5). С учетом записи сигнала в (6.29) производная  $\partial F / \partial \lambda^*$  записывается следующим образом:

$$\frac{\partial F(\lambda^*, t)}{\partial \lambda^*} = \frac{2a_0}{N_0} \{r(t) - a_0 [1 + \mu_a \lambda^*(t)] \cos(w_0 t + \varphi_0)\} \cos(w_0 t + \varphi_0). \quad (6.32)$$

В соответствии с (6.31) и (6.32) строится структурная схема приемника амплитудно-модулированных сигналов, представленная на рис. 6.5. Формируемая на выходе амплитудного модулятора копия сигнала вычитается из принимаемой смеси  $r(t)$  (так называемый компенсационный прием), а результат подвергается синхронному детектированию в СД. Коэффициент передачи усилителя выбирается равным  $k_a = 2a_0\mu_a\sigma_\lambda^2 / N_0$ . За счет вычитания копии сигнала из смеси обеспечивается автоматическое регулирование уровня сигнала на входе синхронного демодулятора СД. Синхронный прием АМ сигналов характеризуется следующей точностью воспроизведения сообщения.

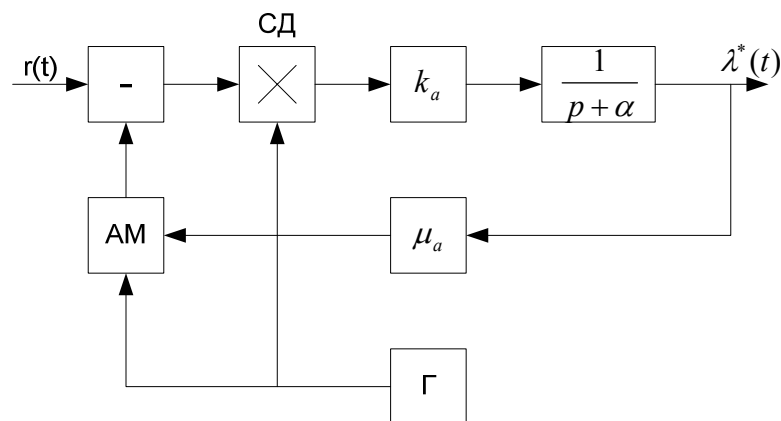


Рис. 6.5.

Учтем выражение для второй производной  $\partial^2 F(\lambda^*, t) / \partial \lambda^{*2}$ , усредненной по времени:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 F(\lambda^*, T)}{\partial \lambda^{*2}} dt = -a_0^2 \mu_a^2 / N_0. \quad (6.33)$$

Тогда дисперсия ошибки  $\sigma_\lambda^2$  определяется по формуле

$$\sigma_{\lambda}^2 = (\sqrt{1 + q\mu_a^2 N_{\lambda} / (2a^2 T)} - 1) / \frac{q\mu_a^2}{aT}. \quad (6.34)$$

При отсутствии модуляции ( $\lambda = const, N_{\lambda} = 0$ ) дисперсия оценки постоянной амплитуды сигнала равна нулю.

## Раздел 9. ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ.

### Постановка задачи:

На полуоткрытом интервале  $[0, t]$  наблюдаем

$$(1) \quad r(t) = s(t, \vec{\lambda}) + y(t)$$

$$W_{\Pi}(y) = W_{\Pi}(\vec{y})$$

отсчеты  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  независимы:

$$W_{\Pi}(\vec{y}) = \prod_{i=1}^N W_{\Pi}(y_i)$$

Если  $\Delta = \frac{T}{N}$ , то можем получить функционал:

$$W_{\Pi}(y(t))$$

Сигнал  $s(t, \vec{\lambda})$  является детерминированной функцией, а вектор параметров:

$$\vec{\lambda} \equiv \vec{\lambda}(t) = \{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}$$

По наблюдаемому процессу необходимо сформировать оценку вектора параметров, эта оценка должна быть оптимальной.

$$\vec{\lambda}^*(t) = \{\lambda_1^*(t), \dots, \lambda_n^*(t)\}$$

$W(\vec{\lambda}) = W_{pr}(\vec{\lambda})$  - априорная ПРВ (доопытная).

$W_{pr}(\vec{\lambda})$  - апостериорная ПРВ (послеопытная).

Можем искать оценку исходя из критериев

$$\left| \begin{array}{cccc} \sigma_{\lambda_1}^2 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \dots & \dots & \sigma_{\lambda_n}^2 \end{array} \right|$$

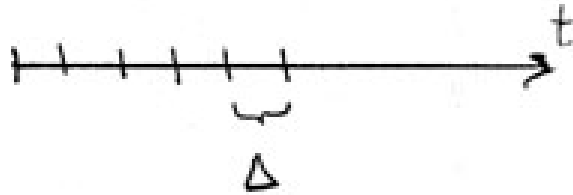


$$W_{ps}(\vec{\lambda} | r_0^T) = N(\vec{\lambda}^*, \vec{R})$$

Апостериорную ПРВ можем получить на основе функции правдоподобия

$$W_{ps}(\vec{\lambda} | r_0^T) = W_{pr}(\vec{\lambda}) \cdot W(r | \vec{\lambda})$$

Необходимо реализовать такой механизм получения АПРВ



На интервале,  $\Delta$  известны какие-то определенные данные, для этого интервала формируем функцию правдоподобия, следовательно далее получаем АПРВ, далее данная АПРВ может выступать в качестве ОПРВ для следующего отрезка  $\Delta$ .

Т.о. при  $\Delta \rightarrow 0$  получим текущее время и сформируем:

$$W(\vec{\lambda} | r_0^T)$$

Стратонович получил свое уравнение полагаясь, что шум является БГШ  $r(t)$ .

Мы рассматриваем случай когда сигнал наблюдается на фоне БГШ.

$$r(t) = s(t, \vec{\lambda}) + n(t)$$

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = K\lambda_i(t) + n_{\lambda_i}(t)$$

$i = \overline{1, n}$

Стохастическое ДУ, оно описывает стохастический Марковский процесс.

Для БГШ:

$$\langle n(t) \rangle = 0$$

$$\langle n_1(t) \cdot n_2(t) \rangle = \frac{N_0}{2} (t_2 - t_1)$$

Для формирующего шума :

$$\langle n_{\lambda_i}(t) \rangle = 0$$

$$\langle n_{\lambda_i}(t_1) \cdot n_{\lambda_i}(t_2) \rangle = \frac{N_{\lambda_i}}{2} (t_2 - t_1)$$

Для подобного вида фильтрующих процессов получено уравнение Стратоновича для АПРВ

$$\frac{\partial W(\vec{\lambda} | r_0^T)}{\partial t} = L_{pr} \{W(\vec{\lambda} | r_0^T)\} + [F(t, \vec{\lambda}) + \langle F \rangle] W(\vec{\lambda} | r_0^T)$$

$n(t)$  – БГШ, следовательно:

$F(t, \vec{\lambda})$  - производная по  $t$  от логарифма функции правдоподобия

,а для БГШ  $F(t, \bar{\lambda})$  известна:

$$F(t, \bar{\lambda}) = -\frac{1}{N_0} \left[ r(t) - s(t, \bar{\lambda}) \right]^2$$

Функционал ПРВ для БГШ:

$$W[n(t)] \sim h \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^t n^2(t) dt \right\}$$

Функционал задан, если множеству функций задано множество значений функционала.  $t$ - текущее время.

Для получения функционала ПРВ можем рассматривать  $\Delta$ , при  $\Delta \rightarrow 0$  переходим от многомерной ПРВ к функционалу.

$$W[r(t) | \bar{\lambda}]$$

В сигнале действует набор параметров  $\bar{\lambda}$  :

$$W[r(t) | \bar{\lambda}] \sim h \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^t [r(t) - s(t, \bar{\lambda})]^2 dt \right\}$$

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \bar{\lambda}) \cdot W(\bar{\lambda} | r_0^t) d\bar{\lambda}$$

Получаем интегро-дифференциальное уравнение (нелинейное ИДУ)

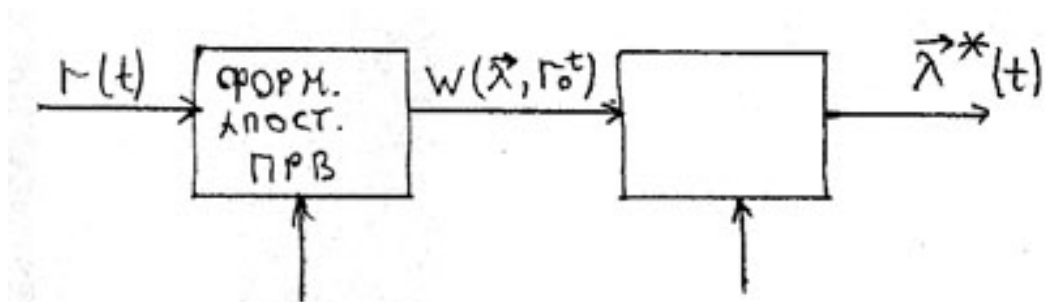
Оператор Фокера-Планка-Колмогорова:

$$L_p \{ \cdot \} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_i} K_i \{ \cdot \} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{N_{\lambda_{ij}}}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \cdot \partial \lambda_j} \{ \cdot \}$$

$K_i$  - коэффициент сноса .

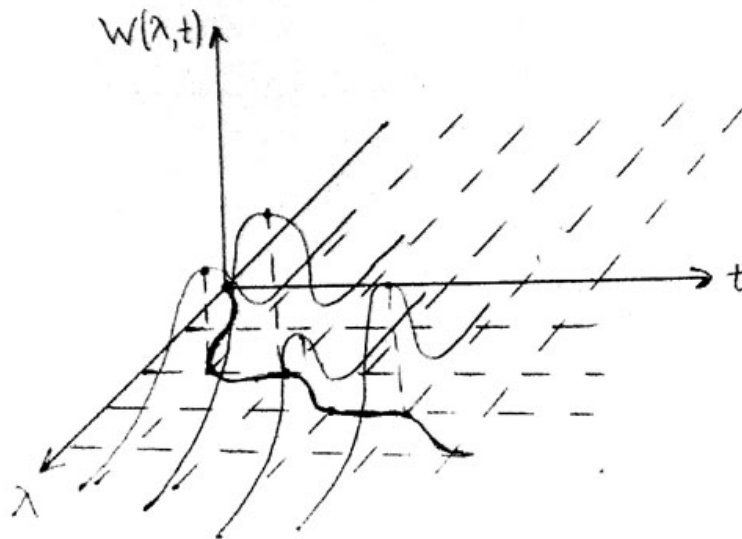
Уравнение многомерное,  $n$ -го порядка , решается не всегда.

В общем случае уравнение Стратоновича не решается.



Уравнение Стратоновича можем решить при следующих условиях:

1.  $W(\bar{\lambda} | r_0^t) = N(\bar{\lambda}^*, \bar{R})$  гауссовская аппроксимация АПРВ.



2. Стационарный режим.

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = 0 \quad R_{ij} = const$$

$$\sigma_{\lambda_i}^2 = const$$

, тогда получим систему алгебраических уравнений.

Алгебраические уравнения могут быть решены.

При условии выполнения 1 и 2 условий получим выражения для оценок.

$$(**) \quad \frac{d\lambda_i^*(t)}{dt} = K_i(\bar{\lambda}^*, t) + \sum_{i=1}^n R_{ij} \frac{\partial F(t, \bar{\lambda}^*)}{\partial \lambda_i^*(t)}$$

$$R_{ij} = \sigma_i^2$$

Задача:

$$r(t) = s(t, \tau, \varphi) + n(t)$$

$$s(t, \tau, \varphi) = a_0 g(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = n_\varphi(t) \frac{N_\varphi}{2}$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = n_\tau(t) \frac{N_\tau}{2}$$

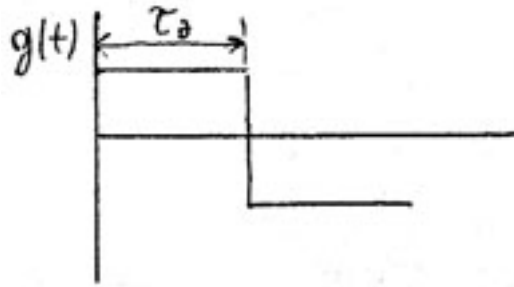
$$\begin{cases} \frac{d\varphi^*(t)}{dt} = \sigma_\varphi^2 \cdot \frac{2}{N_0} \cdot r(t) \frac{\partial s(t, \tau^*, \varphi^*)}{\partial \varphi^*} \\ \frac{d\tau^*(t)}{dt} = \sigma_\tau^2 \cdot \frac{2}{N_0} \cdot r(t) \frac{\partial s(t, \tau^*, \varphi^*)}{\partial \tau^*} \end{cases}$$

Уравнения фильтрации для стационарного режима.

Производную будем вычислять приближенно.

$$\frac{\partial g(t - \tau^*)}{\partial \tau^*} \cong \frac{1}{\tau_3} \left[ g\left(t - \tau^* + \frac{\tau_3}{2}\right) - g\left(t - \tau^* - \frac{\tau_3}{2}\right) \right]$$

Это и закладываем далее в схему:



$$f_T = \frac{1}{\tau_d} - \text{тактовая частота.}$$

В окончательном виде:

$$p\varphi^*(t) = K_1 r(t) g(t - \tau^*) \sin(\omega_0 t + \varphi^*(t))$$

$$p\tau^*(t) = K_2 r(t) \left[ g(t - \tau^* + \frac{\tau_d}{2}) - g(t - \tau^* - \frac{\tau_d}{2}) \right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi^*(t))$$

$$K_1 = \sigma_\varphi^2 \frac{(-2a_0)}{N_0}$$

$$K_2 = \sigma_\tau^2 \frac{2a_0}{N_0 \tau_d}$$

$$q = \frac{2E}{N_0}$$

$$\sigma_\tau^2 = \sqrt{\frac{N_r T \tau_d^2}{2 \cdot 2q}}$$

Дисперсия набега за время T.

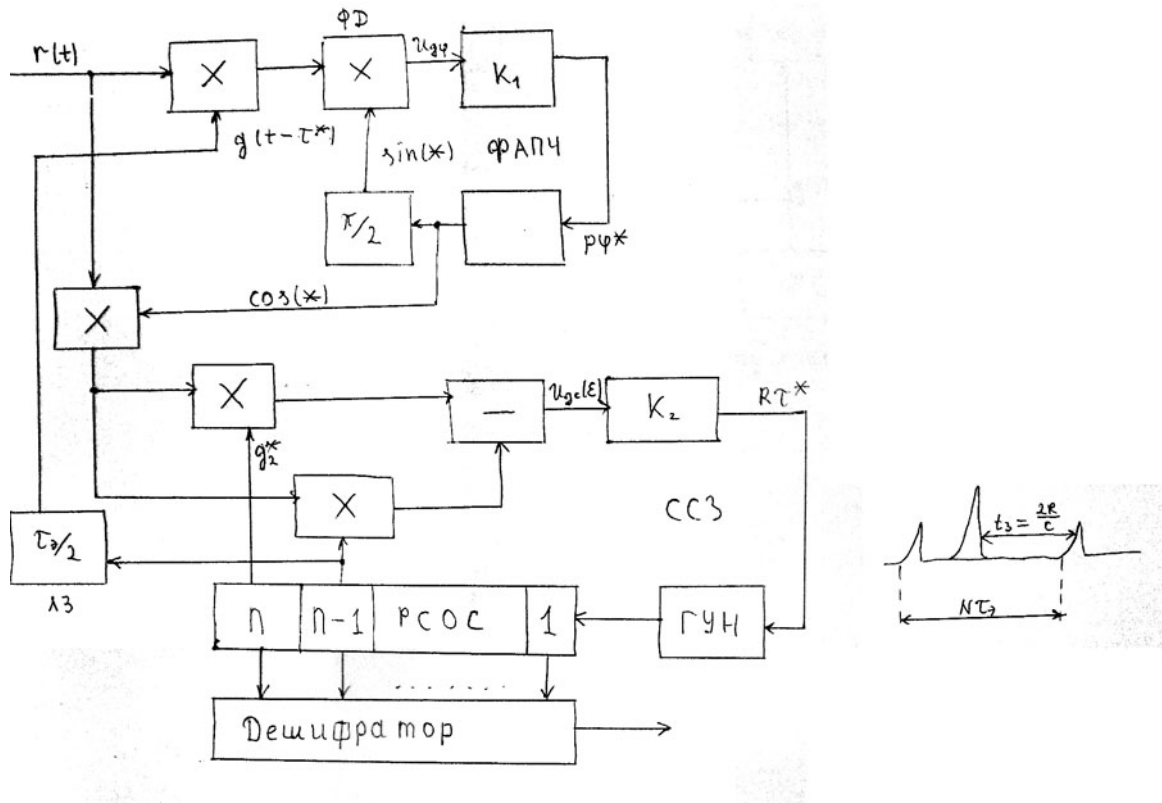
$$D_\tau = \frac{N_0 \cdot T}{2}$$

аналогично:

$$D_\varphi = \frac{N_\varphi \cdot T}{2}$$

Дисперсия набега фазы за время T.

Строим структурную схему:



$$N = 2^n - 1$$

Если передаваемый сигнал формируется за счет ФМн, то после схемы мы получаем отметки которые отстают от исходных на время запаздывания.

### Некогерентная фильтрация сообщений.

$$(1) s(t, \vec{\lambda}, \beta) = A(t, \vec{\lambda}) \cos[\omega_0 t + \psi(t, \lambda) + \beta]$$

$\beta$  -случайная фаза.

$$\vec{\lambda} \equiv \vec{\lambda}(t)$$

ПРВ  $\beta$ :

$$W(\beta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \beta \in [0, 2\pi]$$

на входе имеем:

$$r(t) = s(t, \vec{\lambda}, \beta) + n(t), [0, t]$$

$$\text{БГШ: } \frac{N_0}{2}$$

На рассматриваемом интервале считаем фазу постоянной (неизменной) хотя и случайной.

Инвариантность к начальной фазе соотносим с термином некогерентность, т.е. рассматриваемые методы не должны зависеть от начальной фазы.

Если фаза изменяется быстро то происходит частотный сдвиг, который будет отслежен системой, т.е. осуществляется ФАПЧ.

Все методы детерминирования являются относительными, т.е. происходит сравнение параметра с каким-то опорным значением.

Сигнал (1) может представляться в виде компонент которые не зависят от случайной начальной фазы, т.е.

$$(1^*) \quad s(t, \vec{\lambda}, \beta) = s_c(t, \vec{\lambda}) \cos \beta + s_s(t, \vec{\lambda}) \sin \beta$$

,где

$$s_c(t, \vec{\lambda}) = A(t, \vec{\lambda}) \cos [\omega_0 t + \psi(t, \vec{\lambda})]$$

они соединяют все известные компоненты .

Зададимся Марковскими случайными процессами, тогда:

$$(2) \quad \frac{d\lambda_i(t)}{dt} = -\alpha_i \lambda_i(t) + n_{\lambda_i}(t)$$

$$i = \overline{1, 2}$$

$$\text{БГШ: } \frac{N_{\lambda_i}}{2}$$

Стохастическое ДУ(2) можем представить в виде разностного ДУ при условии

$$\Delta = t_{k+1} - t_k; \lambda_{i(k)} = \beta_i \lambda_{i(k-1)} + n_{\kappa_i}$$

$$\beta_i = 1 - \lambda_{i\Delta}$$

$$\beta_i = \exp[-\lambda_{i\Delta}]$$

Функция правдоподобия

$$W[\vec{r} | \vec{\lambda}]$$

,где  $\vec{r} = \{r_1, \dots, r_N\}$  -отсчеты на каком-то интервале.

$$N = \frac{T}{\Delta}$$

Для получения функции правдоподобия мы должны подвергнуть усреднению условную функцию правдоподобия с учетом априорной ПРВ  $\beta$ , что и будет обеспечивать инвариантность к  $\beta$

$$W(\vec{r} | \vec{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(\vec{r} | \vec{\lambda}, \beta) d\beta$$

Для нахождения интеграла от функции условного правдоподобия мы применяли соответствующие операции чтобы получить явную функцию независимую от  $\beta$ .

Для помехи в виде БГШ функция правдоподобия будет определяться:

$$W(\vec{r} | \vec{\lambda}, \beta) = C \cdot \exp[J(\vec{\lambda}, \beta)] \quad (3)$$

Форма записи функции правдоподобия корреляционным интегралом

$J(\vec{\lambda}, \beta)$  в(3)записывается следующим образом:

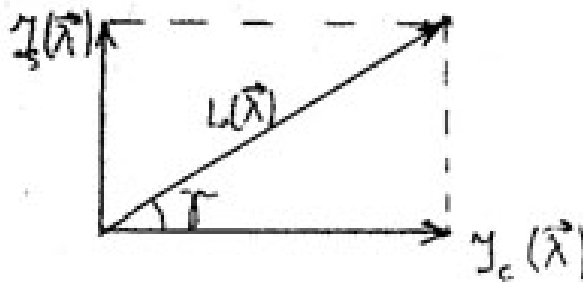
$$J(\vec{\lambda}, \beta) = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) s(t, \vec{\lambda}, \beta) dt \quad (4)$$

Представим сигнал в (4)в виде (1\*) мы приходим к следующему :

$$J(\vec{\lambda}, \beta) = J_c(\vec{\lambda}) \cos \beta + J_s(\vec{\lambda}) \sin \beta \quad (5)$$

, где

$$J(\vec{\lambda}) = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) s_c(t, \vec{\lambda}) dt \quad (4^*)$$



Учитывая рисунок  $\Rightarrow$

$$J_c(\vec{\lambda}) = L(\vec{\lambda}) \cos \gamma$$

$$J_s(\vec{\lambda}) = L(\vec{\lambda}) \sin \gamma$$

Теперь перейдем от декартовой системы координат к полярной, тогда (5) записывается в виде:

$$J(\vec{\lambda}, \beta) = L(\vec{\lambda}) [\cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta] = L(\vec{\lambda}) \cos(\gamma - \beta) \quad (6)$$

, тогда далее (учитываем (4))

$$W[r(t) | \vec{\lambda}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[L(\vec{\lambda}) \cos(\gamma - \beta)] d\beta = I_0[L(\vec{\lambda})] \quad (7)$$

Теперь возвратимся к задаче фильтрации. Все что заложено в (7) инвариантно (не зависит) относительно  $\beta$ .

Осуществляем переход к  $\Delta$ , следовательно все соответствующие интегралы будут представляться несколько иначе.

Теперь мы вправе записать уравнение для оценки.

Формирование интеграла (4), (4\*) содержит перемножение сигнала на его копию дает квадрат, следовательно раз есть  $\cos^2$ , то есть удвоенная и нулевая частота, т.е. осуществляется перенос спектра на нулевую частоту что удобно для дальнейшей обработки с помощью DSP.

Преобразование (4\*) может осуществляться до АЦП или после него, отсчеты  $\Delta$  - это отсчеты и корреляционных интегралов, следовательно все превращается в последовательность.

Записываем уравнение для оценки  $i$ -го параметра  $k$ -го отсчета:

$$\lambda_{i(k)}^* = \beta_i \cdot \lambda_{i(k-1)}^* + \sigma_{\lambda_i}^2 \cdot k \frac{\partial I_0[L_{(k)}(\vec{\lambda}^*)]}{\partial \lambda_{i(k)}^*},$$

$k$  – некий коэффициент (скорее всего, величина, обратно пропорциональная времени).

Функция Бесселя нулевого порядка может быть представлена в следующем виде:

$$I_0(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \dots$$

Используем это уравнение для оценок, тогда получим:

$$\lambda_{i(k)} = \beta_i \cdot \lambda_{i(k-1)}^* + k_{1i} \frac{1}{2} \frac{\partial L_{(k)}^2(\bar{\lambda}^*)}{\partial \lambda_{i(k)}^*}, \text{ где}$$

$$L_{(k)}^2(\bar{\lambda}^*) = J_{c(k)}^2(\bar{\lambda}^*) + J_{s(k)}^2(\bar{\lambda}^*)$$

$$J_{c(k)}(\bar{\lambda}^*) = \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} r(t) S_{c(k)}(t, \bar{\lambda}_k^*) dt$$

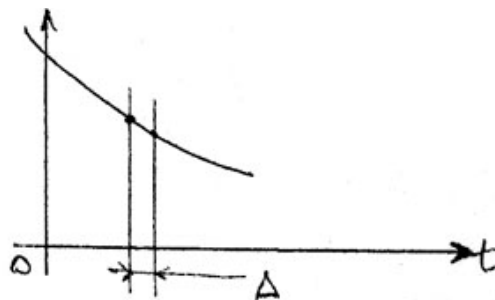
Можно реализовать 2 типа схем:

1. Опирающаяся на формирование вектора L (корреляционно-фильтрующая обработка)
2. Опирающаяся на формирование его синуса и косинуса (квадратурная обработка)

Приведенные выше уравнения необходимы для формирования схем.

Если  $\Delta \ll \tau_k$  - время корреляции.

Экстраполяционная оценка для (k) и (k+1) отличаются на незначительную величину.



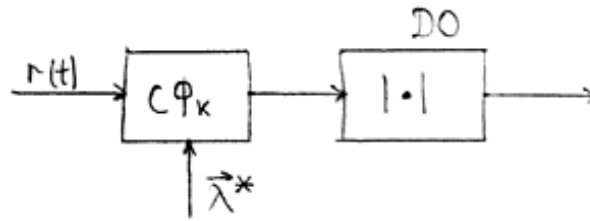
Для квазигармонического колебания справедливо:

$$L_k(\bar{\lambda}^*) = \frac{1}{2} \left| \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \widehat{r}(t) \cdot \widehat{S}^*(t, \bar{\lambda}^*) dt \right|$$

$$\widehat{S}(t, \bar{\lambda}^*) = A(t, \bar{\lambda}^*) \exp \left[ j\psi(t, \bar{\lambda}^*) \right]$$

$\beta$  и  $\omega_0$  не влияют на комплексную огибающую. Данные выражения можно трактовать с помощью следующей схемы:



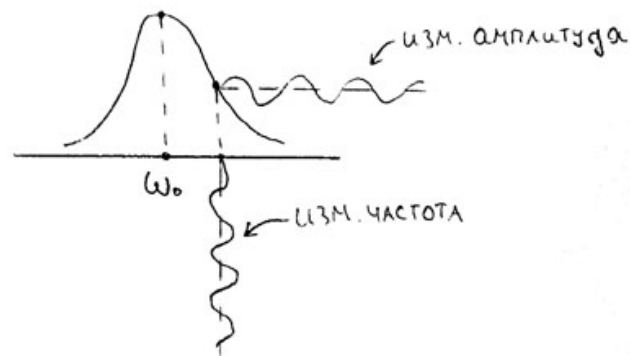


Память фильтра =  $\Delta$ , осуществляет фильтрацию на интервале  $[(k-1)\Delta, k\Delta]$

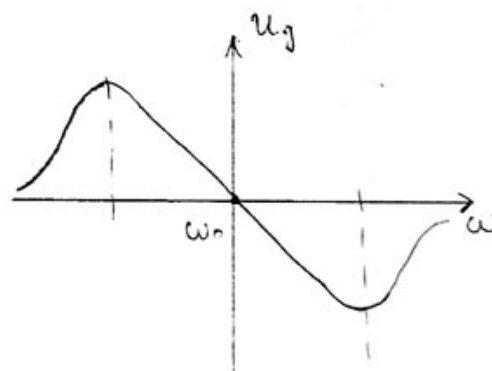
Здесь производную по  $\lambda_{ik}^*$  заменим конечными разностями

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L_k^2(\lambda_i^*)}{\partial \lambda_i^*} = L_k(\lambda_i^*) \cdot \frac{\partial L_k(\lambda_i^*)}{\partial \lambda_i^*} \cong L_k(\lambda_i^*) \cdot \frac{1}{\Delta \lambda} \left[ L_k\left(\lambda_i^* + \frac{\Delta}{2}\right) - L_k\left(\lambda_i^* - \frac{\Delta}{2}\right) \right]$$

Частотный детектор



Обычно используют два контура



- ДХ частотного дискриминатора

$$\lambda_{ik}^* = \beta \lambda_{i(k-1)}^* + k_1' \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \widehat{r(t)} \overline{S^*(t, \lambda^*)} dt \cdot \left[ \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \widehat{r(t)} \overline{s(t, \lambda^* + \frac{\Delta\lambda}{2})} dt - \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \widehat{r(t)} \overline{s(t, \lambda^* - \frac{\Delta\lambda}{2})} dt \right]$$

$$\Delta\lambda \quad k_1' = \frac{1}{2} k_1 \frac{1}{\Delta\lambda}$$

Сигнал в общем случае зависит от фазы. Рассмотрим сигнал:

$$S(t, \psi, \beta) = a_0 \cos([\omega_0 + \Omega]t + \beta)$$

тогда мгновенная частота:

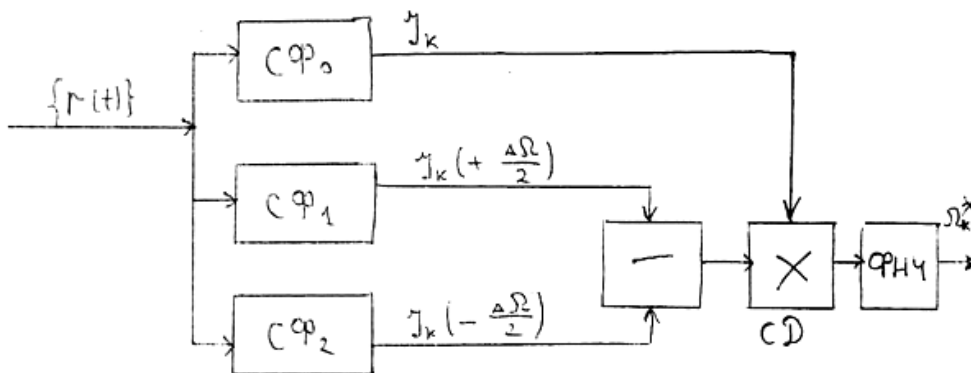
$$\omega(t) = \frac{d}{dt} [ ] = \omega_0 + \frac{d\Omega(t)}{dt} \cdot t + \Omega(t)$$

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} \ll \Omega(t)$$

Получим схему частотного дискриминатора:

$$\Delta\lambda \equiv \Delta\Omega$$

$$\Omega_k^* = \beta \cdot \Omega_{k-1}^* + k_1' \cdot J_k(\Omega_{k-1}^*) \cdot \left[ J_k\left(\Omega_{k-1}^* + \frac{\Delta\Omega}{2}\right) - J_k\left(\Omega_{k-1}^* - \frac{\Delta\Omega}{2}\right) \right]$$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационные технологии в радиотехнических системах. / Под ред. И. Б. Федорова – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 672 с.
2. **Прокис Дж.** Цифровая связь. Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
3. **Апорович А. Ф., Чердынцев В. А.** Радиотехнические системы передачи информации. – Мн.: Выш. шк., 1980. – 214 с.
4. **Варакин Л. Е.** Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
5. **Дымова А. И., Алабац М. Е., Бонч-Бруевич А. М.** Радиотехнические системы / Под ред. А. И. Дымовой. – М.: Сов. радио, 1970. – 440 с.
6. **Клюев Н. И.** Информационные основы передачи сообщений. – М.: Сов. радио, 1966. – 360 с.
7. **Лезин Ю. С.** Введение в теорию и технику радиотехнических систем. – М.: Радио и связь, 1986. – 280 с.
8. **Пенин П. И., Филиппов Л. И.** Радиотехнические системы передачи информации. – М.: Радио и связь, 1984. – 266 с.
9. **Пестряков В. Б., Кузенко В. Д.** Радиотехнические системы. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
10. Радиотехнические системы / Учебник для вузов по спец. «Радиотехника», **Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.;** Под ред. **Ю. М. Казаринова.** – М.: Высш. шк., 1990. – 496 с.
11. Радиолокационные устройства (теория и принципы построения) / **В. В. Васин, О. В. Шасов, В. Б. Григорин-Рябов и др.;** Под ред. **В. В. Григорина-Рябова.** – М.: Сов. радио, 1970. – 580 с.
12. **Тихонов В. И.** Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
13. **Чердынцев В. А.** Радиотехнические системы: Учебн. пособие для вузов. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 369 с.
14. **Шкирятов В. В.** Радионавигационные системы и устройства. – М.:

Радио и связь, 1984. – 160 с.

15. **Ярлыков М. С.** Статистическая теория радионавигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.