

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

**М.П. Батура, А.А. Кураев, А.К. Сеницын**

**Основы теории, расчета и  
оптимизации современных электронных  
приборов СВЧ**

Минск 2007

УДК 621.85

Батура М.П. Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ / М.П. Батура, А.А. Кураев, А.К. Сеницын. – Мн.: БГУИР, 2007. – 245 с.

ISBN 985-444-933-5

Изложены методы исследования и оптимизации процессов взаимодействия электронных потоков с электромагнитными полями в современных электронных приборах СВЧ: гиротронах, релятивистских лампах бегущей и обратной волны сверхвысокой мощности, микровакуумных генераторах СВЧ с автоэмиссионными катодами, лазерах на циклотронном авторезонансе, пениотроне. Сформулированы строгие уравнения возбуждения произвольно-нерегулярных волноводов и резонаторов с учетом конечной проводимости стенок. Развита метод блочной матричной прогонки для решения возникающих в теории электронных приборов двухточечных краевых задач.

Для научных работников, аспирантов, магистрантов, специализирующихся в области радиофизики, электроники СВЧ, прикладной математики.

Ил.: Библиогр.: назв.

Рекомендована Советом БГУИР, протокол № от

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор Ю.П. Воропаев

доктор физико-математических наук, профессор А.С. Рудницкий

ISBN 985-444-933-5

©Батура М.П., Кураев А.А.,  
Сеницын А.К., 2007  
©БГУИР, 2007

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы интерес к электровакуумным приборам СВЧ, особенно к приборам большой мощности, неуклонно возрастает. Во всем мире увеличивается производство этих приборов, расширяются исследовательские и конструкторские работы, направленные на создание электровакуумных приборов СВЧ повышенной мощности с улучшенными выходными параметрами (КПД, коэффициент усиления, полоса, чистота спектра и т.д.). С одной стороны, возросший интерес к этим приборам связан с тем, что стала очевидной монополия электровакуумных приборов СВЧ в области больших мощностей, и, с другой стороны, с тем, что появились (и появляются) новые широкие области применения мощных приборов: в технологических процессах (промышленный нагрев и обработка материалов), в биофизических и медицинских исследованиях, в термоядерной энергетике, в системах передачи энергии по радиолучу. Новые области применения требуют дальнейшего улучшения тех или других выходных параметров приборов. Например, в системах передачи энергии по радиолучу нецелесообразно применять приборы с КПД, меньшим 80 %. Развитие техники в традиционных областях применения электровакуумных приборов (радиолокация, радионавигация, связь, ускорители) также требует существенного улучшения их параметров. При этом не исключается и такой радикальный путь, как использование новых механизмов генерации и усиления электромагнитных волн электронными потоками, в частности релятивистскими электронными потоками (РЭП), мощность которых достигает десятков гигаватт.

Современное состояние и развитие вакуумной электроники СВЧ требует новых подходов к исследованию и оптимизации процессов взаимодействия электронных потоков с электромагнитными полями в электронных приборах СВЧ. Это касается прежде всего организации расчета параметров приборов на ЭВМ, привлечения методов численного эксперимента для поиска новых эффективных механизмов взаимодействия. При численном моделировании процессов взаимодействия очевидным необходимым условием является обеспечение достоверности модели в исследуемой области параметров. А это требует использования современных математических методов при формулировке модели, современных вычислительных методов при организации расчетов, проверочных соотношений типа законов сохранения, позволяющих контролировать точность расчетов.

Оптимизация характеристик приборов делает необходимым применение эффективных поисковых методов, обеспечивающих сходимость поисковой процедуры за минимальное число итераций. Последнее требование весьма существенно, если учесть, что полная, т.е. обеспечивающая достоверность расчетов, математическая модель процесса взаимодействия в электронных приборах оказывается весьма сложной, что требует значительных затрат машинного времени. В этом отношении перспективным представляется привлечение к решению задач оптимизации характеристик электронных

приборов теории и методов оптимального управления – взаимопроникновение идей различных областей науки, как правило, оказывается весьма плодотворным.

Таким образом, на современном уровне развития электроники СВЧ больших мощностей при разработке математической базы систем автоматизации проектирования электронных приборов СВЧ необходимы создание строгих математических моделей электронных приборов различных типов, разработка эффективных методов оптимизации на основе методов оптимального управления, формулировка законов сохранения, широкое использование методов численного эксперимента. Естественно, результатом такого подхода к решению задач электроники СВЧ должны быть более глубокое изучение нелинейных процессов в электровакуумных приборах СВЧ большой мощности, в частности особенностей оптимальных процессов, оценка предельных значений выходных параметров приборов различных типов и, наконец, выработка рекомендаций по выбору оптимальных параметров конструкции конкретных приборов СВЧ. Решению перечисленных проблем и посвящена эта монография. Она не претендует на исчерпывающее изложение всех вопросов. Ее содержание ограничено тематикой работ, опубликованных авторами в разные годы.

Предлагаемая читателю монография является развитием ранее изданной нами монографии «Моделирование и оптимизация мощных приборов СВЧ». В нее вошли новые разделы, посвященные современным методам решения краевых задач для приборов с нерегулярными электро-динамическими системами, впервые даны основы теории, расчета и оптимизации наиболее перспективных в настоящее время гирорезонансных приборов. Освещены достижения в области создания этих приборов и перспективы. Одна из глав посвящена развивающейся в настоящее время области электроники СВЧ – микровакуумным генераторам СВЧ с автоэмиссионными катодами. Новые технологии создания управляемых автоэмиссионных катодов, основанных на формировании гексагональных опорных диэлектрических трубок из  $Al_2O_3$ , позволяет эффективно использовать такие катоды в диапазоне СВЧ и КВЧ для создания технологичных генераторов и усилителей средне мощности с уникальными характеристиками.

# ГЛАВА I

## ГИРОРЕЗОНАНСНЫЕ ПРИБОРЫ

### Введение

Создание гирорезонансных приборов, и особенно гиротрона, является одним из важнейших событий в области вакуумной электроники СВЧ. Этот прибор как по принципу действия, так и по уникальности характеристик и перспективам развития остается наиболее привлекательным для разработчиков, исследователей и пользователей в широкой области техники миллиметровых и субмиллиметровых волн. Заслуги в создании гиротрона всецело принадлежат академику А.В. Гапонову и его сотрудникам из ИПФАН СССР и Горьковского госуниверситета: В.К. Юлпатову, В.А. Флягину, И.И. Антакову, Ш.Е. Цимрингу и многим другим [1..14]. Часто обсуждается вопрос: кому принадлежит приоритет в открытии релятивистского индуцированного циклотронного излучения электронов: Твиссу [15], Гапонову [2], Железнякову, Шнейдеру [16] или Пантеллу [17, 18]? Эту цепочку вопросов можно продолжить, если вспомнить синхротронное излучение и, наконец, источник всего – релятивистское уравнение движения материальной точки, принадлежащее Г. Минковскому. На наш взгляд, этот вопрос не имеет отношения к созданию гиротрона: работы Твисса и Шнейдера не направлены на реализацию индуцированного циклотронного излучения в каком-либо устройстве, Пантелл же проводил эксперименты при таких низких токах и напряжениях, когда гиротронный механизм крайне неэффективен. Он в определенной степени дискредитировал идею генератора на циклотронном резонансе, тем более, что сам неправильно понимал механизм работы прибора (основной фактор – релятивистской азимутальной группировки – им игнорировался). О всем этом, а также об истории становления гиротрона прекрасно написано в работе Хиршфилда и Гранатштейна [19]. Поэтому мы далее на истории гиротрона не останавливаемся.

Название прибору – "гиротрон" также было дано Гапоновым с сотрудниками. Вначале это название было узко специализированным: под гиротроном понимался монотрон-генератор на циклотронном резонансе с  $H_{011}$  ( $H_{0in}$ ) колебанием в слабонерегулярном резонаторе. В настоящее время под классом приборов "гиротроны" понимают более широкий набор типов гирорезонансных приборов: монотрон с колебаниями  $H_{ni1}$  ( $n \gg 1, i \gg 1$ ) слабонерегулярного полого или коаксиального резонатора,  $E_{ni1}$  и т.д.; гироклистрон (многорезонаторный гиротрон); гиро-ЛБВ, гиро-ЛОВ, гиротвистрон. К настоящему времени по теме "гиротрон" насчитывается около 900 публикаций (не считая отчетов). Мы, конечно, ограничились гораздо меньшим числом, обращая внимание читателя только на основные, представляющие интерес не только для узких специалистов, вопросы. Среди гирорезонансных приборов особняком стоит пениотрон. Он не относится к

классу гиротронов по принципу действия: фазовая группировка в нем не орбитальная, а дрейфовая (перемещается ведущий центр вращения электрона). Но пениотрон в определенных условиях является "конкурентом" гиротрона, поэтому ему тоже уделено внимание.

## **1.1. Физические основы гирорезонансного взаимодействия электронов с электромагнитными волнами**

### **1.1.1. Циклотронный резонанс**

Механизм взаимодействия в гирорезонансных приборах обеспечивается рядом условий и физических явлений. Среди них одним из основных является циклотронный резонанс. Рассмотрим это явление в простейшем случае, когда электроны движутся в однородном магнитном поле  $\mathbf{B} = z_0 B_0$ , а волна, с которой они взаимодействуют, имеет постоянную фазовую скорость  $U_\phi$ . В этом случае условие циклотронного резонанса имеет вид

$$\omega(1 \mp v_{\parallel} / v_\phi) = k\Omega. \quad (1.1)$$

Здесь  $\Omega = eB_0 / m$  - циклотронная частота вращения электрона в магнитном поле  $B_0$ ;  $e, m$  - соответственно заряд и масса электрона,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  - частота электромагнитного поля,  $v_{\parallel}$  - скорость дрейфа электрона в направлении  $z_0$  (предполагается, что и волна распространяется в  $+z_0$  или  $-z_0$  направлении; верхний знак в (1.1) относится к первому случаю, нижний ко второму),  $k$  - целое число;  $k\Omega$  -  $k$ -я гармоника циклотронной частоты  $\Omega$ . Выполнение условия (1.1) приводит либо к орбитальному, либо дрейфовому синхронизму электронов с полем волны и вследствие этого к возникновению синхронных сил поля на первой и высших гармониках циклотронной частоты, действующих на электрон.

### **1.1.2. Синхронизм и синхронные силы на первой и высших гармониках циклотронной частоты**

Анализ синхронизма начнем с поперечных синхронных сил. Рассмотрим по возможности простейший случай для такого анализа: поперечное взаимодействие винтового электронного пучка с Т полем резонатора Фабри-Перо (рис. 1.1). Плоские зеркала резонатора параллельны друг другу и плоскости  $xz$ . Ось  $z$  направлена за чертеж. Таким же образом направлено и однородное магнитостатическое поле:  $\mathbf{B}_0 = z_0 B_0$ . Электрическое поле плоской стоячей волны ориентировано по  $x$ :  $\mathbf{E} = \dot{A} x_0 \sin \frac{n\pi y}{L} \cdot \cos \omega t, L$  - расстояние между зеркалами. Распределение этого поля изображено на рис. 1.1. Здесь же указаны характерные сечения

1, 2, в которых могут располагаться центры вращения электронов (ведущие центры электронной орбиты). Орбиты вращения электронов (по часовой стрелке) указаны здесь же. Поскольку  $E \neq f(z)$ , в условии (1.1)  $v_\phi \rightarrow \infty$ , и оно приобретает простейший вид

$$\omega = k\Omega. \quad (1.2)$$

По этой же причине продольное смещение электронов не меняет их фазы относительно  $E_x$  и поэтому взаимодействие в рассматриваемой идеализированной схеме является чисто поперечным. Проанализируем различные ситуации, возникающие при движении электронов в поле резонатора (см. рис. 1.1) при выполнении (1.2).

*1. Первая гармоника циклотронной частоты,  $k=1$ ; сечение 1.*

На рис. 1.2 изображены поля  $E_x$  и силы  $F_x = -eE_x$ , действующие на вращающиеся электроны в моменты времени  $t = 0, \frac{T}{4}, T/2$  при выполнении (1.2) (при  $k=1$ ,  $T$  - период колебаний). В момент  $t=0$  на электрон *a* действует тормозящая сила  $F_x$  (она направлена против направления скорости вращающегося электрона), на электрон *b* соответственно действует ускоряющая сила. Электроны *c* и *d* находятся в нейтральных фазах (силы  $F_x$  нормальны к скорости их движения). При  $t = T/4$   $E_x = 0$  и  $F_x = 0$ . В момент  $t = T/2$  картина оказывается перевернутой относительно той, что была при  $t=0$ , на  $\pi$ , но характер сил остался точно таким же: электрон *a* тормозится, электрон *b* ускоряется, электроны *c, d* - в нейтральных фазах поля. Далее картина периодически повторяется. Такая ситуация и называется синхронизмом: силы поля, действующие на электрон, если он не меняет фазы вращения, в среднем сохраняются неизменными. В рассматриваемом случае сохраняются орбитальные силы. Иначе говоря, при условии (1.2),  $k=1$  в сечении 1 возникают синхронные орбитальные силы  $F_0$ , действующие на электрон. Это явление - орбитальный резонанс.

*2. Первая гармоника циклотронной частоты,  $k=1$ ; сечения 2.*

На рис. 1.3 изображены, как и на рис. 1.2, три момента действия поперечных сил на электрон, но в сечении 2, на котором распределение  $E_x$  меняет знак. Теперь в среднем за период колебаний сохраняется направление действующих на электроны *a, b* сил: электрон *a* независимо от фазы вращения смещается вниз, *b* - вверх. Иначе говоря, возникают синхронные дрейфовые силы  $F_g$ , смещающие центр вращения электрона 1 вниз, электрона 2 - вверх. В рассматриваемой схеме такое смещение ведущего центра не приводит к фазовой сортировке электронных ротаторов, поскольку  $E_x \neq f(x)$ . Однако в более сложных полях дрейфовое смещение электронных ротаторов приводит к их фазировке в действующих на них

полях. Такой эффект используется в пениотронах и будет подробно описан в соответствующих разделах. Пока установим главный итог: при  $k=1$  в сечении 2 возникают синхронные дрейфовые силы  $\mathbf{F}_g$ , смещающие ведущий центр электронных ротаторов.

### 3. $k=2$ , сечение 1.

На рис. 1.4 изображены фазы движения электронов и действующих на них сил в моменты  $t=0, T/2, T, 3/2 T$  в этом случае. Из анализа представленных состояний следует: 1) в рассматриваемом случае возникают синхронные дрейфовые силы  $\mathbf{F}_g$ ; 2) такие силы действуют теперь не только на электроны  $a, b$ , но на  $c, d$  (эти силы противоположно направлены).

### 4. $k=2$ , сечение 2.

Фазы движения электронов и действующие на них силы в этом случае изображены на рис. 1.5. Из их анализа можно сделать следующие выводы: 1) в сечении 2 при  $k=2$  возникают синхронные орбитальные силы  $\mathbf{F}_0$ , 2) эти силы имеют двойной период по орбите электронов: они существуют как для электронов  $a, b$ , так и для  $c, d$ . Последнее означает, что при  $k=2$  на орбите будут формироваться два противофазных электронных сгустка в отличие от случая  $k=1$ . Противофазное в пределах орбиты распределение  $E_x$  в сечении 2 как раз благоприятно для возбуждения этого типа колебаний противофазными по орбите вращения электронов сгустками. Следует также обратить внимание на то, что и в промежуточных сечениях из-за неоднородности распределения  $E_x(y)$  по орбите будет существовать тот же эффект, обращаясь в нуль только в сечении 1. Обобщая проведенный анализ на любые  $k$  и любые сечения, приходим к диаграммам для  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}_g$  при четных и нечетных  $k$ , изображенным на рис. 1.6. Практически более интересны случаи  $H_{ni}$  или  $E_{ni}$  полей круглого волновода. Теория, развитая далее в разделе 3, дает следующие зависимости  $\mathbf{F}_g$  и  $\mathbf{F}_0$  от радиуса ведущего центра  $r_0$ :

$$\mathbf{F}_g \sim J_{n-1-k} \left( \frac{\omega}{c} r_0 \right), \mathbf{F}_0 \sim J_{n-k} \left( \frac{\omega}{c} r_0 \right), \quad (1.3)$$

где  $J_m(x)$  - функция Бесселя 1 рода  $m$ -го порядка,  $m=n-1-k$  для  $\mathbf{F}_g$  и  $m=n-k$  для  $\mathbf{F}_0$ .

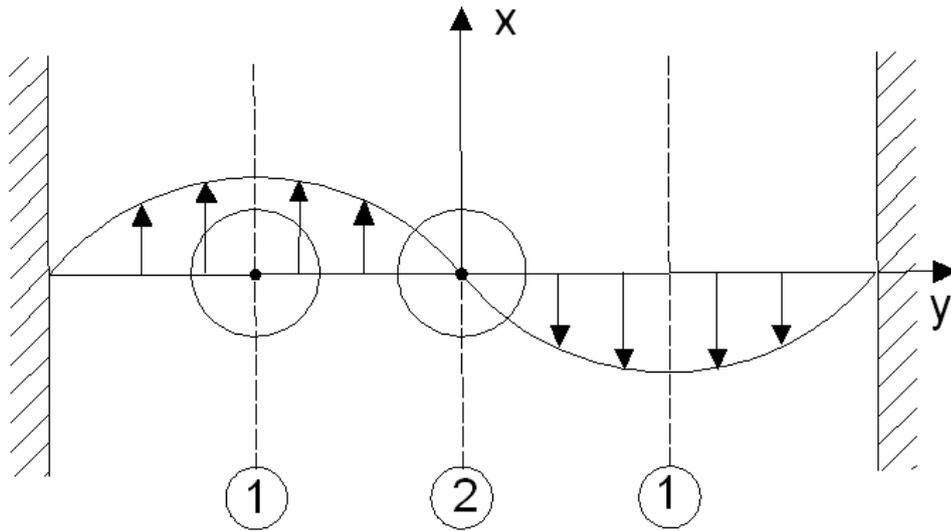


Рис. 1.1. Поперечное взаимодействие винтового электронного пучка с Т полем резонатора Фабри-Перо.

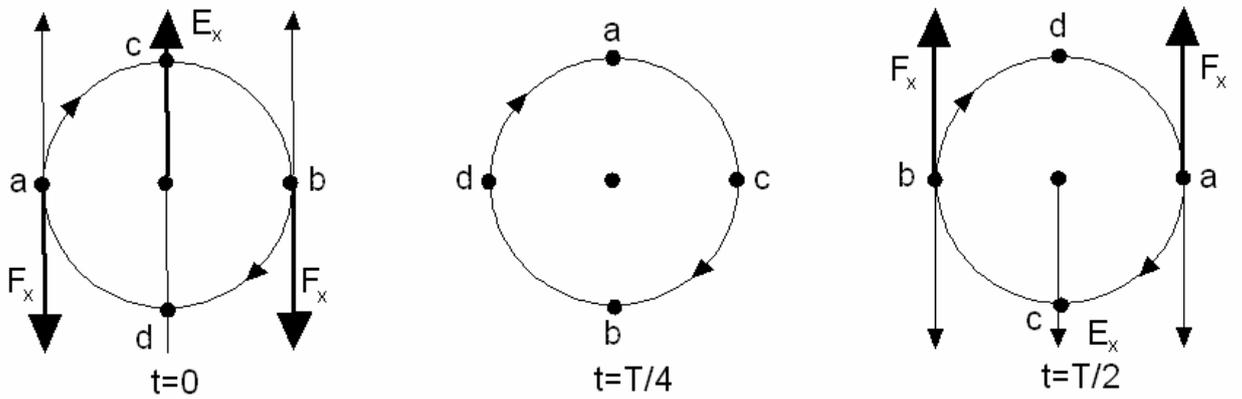


Рис. 1.2. Поведение поля  $E_x$  и силы  $F_x = -eE_x$ , действующих на вращающиеся электроны в моменты времени  $t = 0, t = T/4, t = T/2$ .

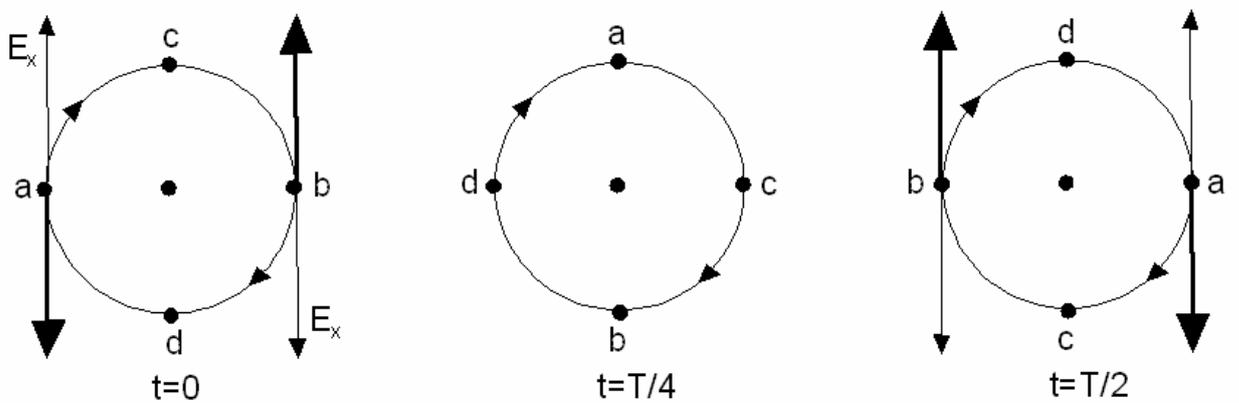


Рис. 1.3. Три момента действия поперечных сил на электрон (в сечении 2), на котором распределение  $E_x$  меняет знак.

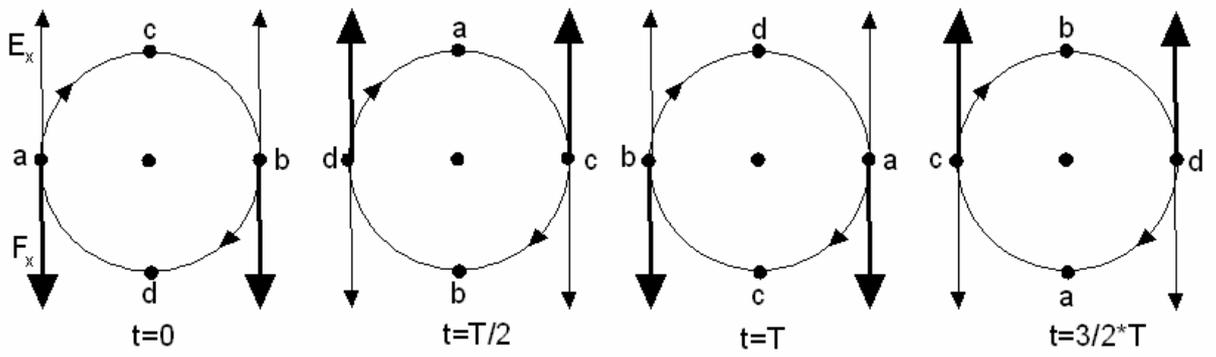


Рис. 1.4. Поведение фазы движения электронов и действующих на них сил в моменты  $t = 0, t = T/2, t = T, t = 3/2 T$ .

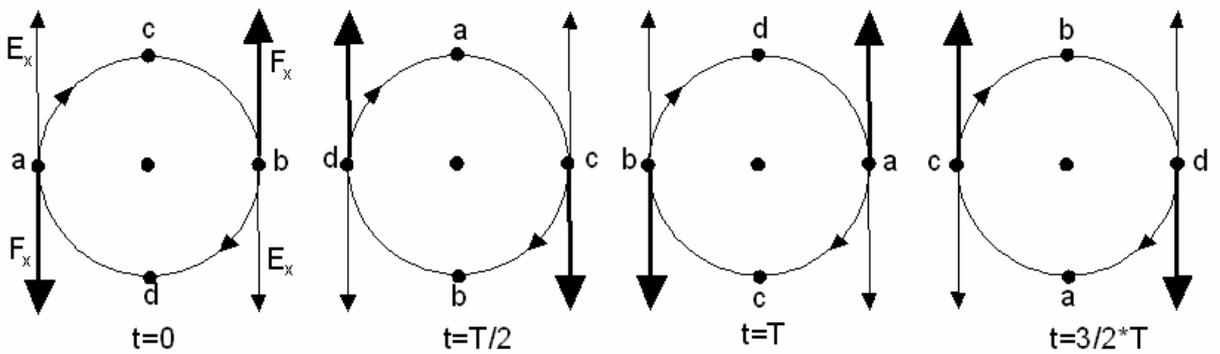


Рис. 1.5. Фазы движения электронов и действующие на них силы (в сечении 2 при  $k=2$ ).

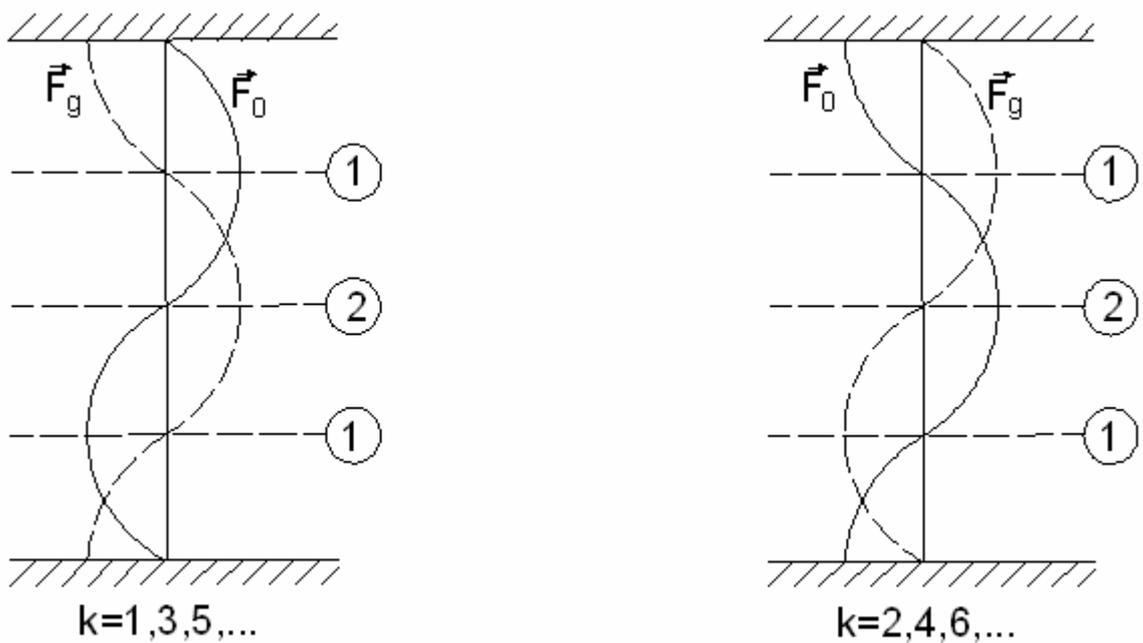


Рис. 1.6. Диаграммы для  $F_0$  и  $F_g$  при четных и нечетных  $k$ .

Из (1.3), в частности, следует, что при условии  $n = k$  при  $r_0 = 0$  имеет место чисто орбитальный резонанс ( $\mathbf{F}_g = 0, \mathbf{F}_0 \Rightarrow \mathbf{max}$ ), а при условии  $n = k + 1$  - чисто дрейфовый резонанс ( $\mathbf{F}_g \Rightarrow \mathbf{max}, \mathbf{F}_0 = 0$ ). Первое условие соответствует механизму гиротронов, второе – пениотронов.

### 1.1.3. Орбитальная релятивистская группировка электронов

Определив синхронные поперечные силы, действующие на электроны при циклотронном резонансе, обратимся к изучению процессов группировки электронов под действием этих сил. Воспользуемся для этого интегралами движения электрона в полях с различными типами симметрии [20-27]. Начнем с простейших случаев, когда поля имеют трансляционную симметрию, т.е.  $\mathbf{A}, \phi \neq f(z)$  [20-22, 25-27]. Такому условию приближенно удовлетворяют волны Н-типа вблизи частоты отсечки и точно – поля  $E_{mn0}$ . В этих случаях имеет место интеграл движения

$$m\dot{Z} - eA_z = const, \quad (1.4)$$

где  $m = m_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  - масса электрона, движущегося в неподвижной системе отсчета, связанной со стенками волновода, со скоростью  $v$ ,  $m_0$  - масса покоя электрона,  $A_z$  -  $z$ -составляющая векторного потенциала. Рассмотрим Н-волны вблизи частоты отсечки. В этом случае  $A_z = A_z^0 + \tilde{A}_z^0 = 0$ , если магнитостатическое поле  $B_0$  азимутально-симметричное. Тогда из (1.4) следует

$$m\dot{Z} = const, \quad (1.5)$$

т.е. продольный механический импульс сохраняется.

Обратимся к рис. 1.7, поясняющему механизм взаимодействия в рассматриваемом случае. На рис. 1.7, а изображен участок круглого волновода на частоте отсечки для волны  $H_{01}$ . В этом случае фазовая скорость  $v_\phi \rightarrow \infty$  и распределение компонентов поля не зависит от  $z$ . Винтовой электронный поток, формируемый продольным магнитостатическим полем с индукцией  $B_0$ , взаимодействует с компонентами поля  $H_{01}$ . Траектория электрона в однородном продольном магнитном поле с индукцией  $B^0$  имеет вид спирали, как это изображено на рис. 1.7, а. На рис. 1.7, б изображено поперечное вращение электрона в однородном магнитном поле.

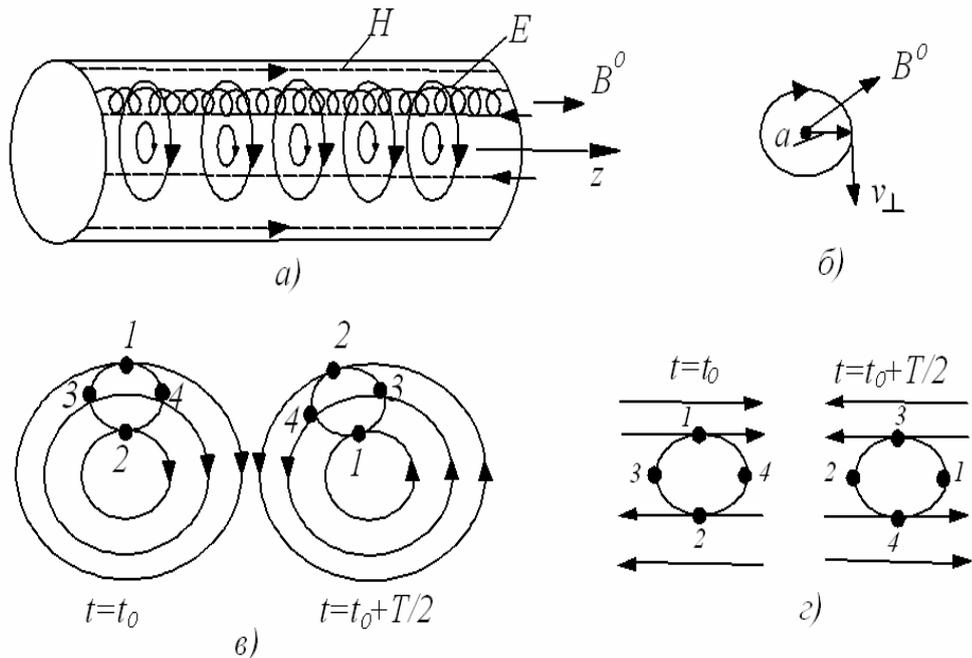


Рис. 1.7. Взаимодействия винтового электронного потока с волной  $H_{01}$  круглого волновода вблизи критической частоты.  $a$  – участок волновода;  $b$  – орбита электрона;  $в, з$  – различные фазы взаимодействия при  $k=1$  и  $k=2$ .

Здесь  $a$  - радиус вращения электрона (радиус ларморовской орбиты);  $v_{\perp}$  - поперечная скорость электрона. Центробежная сила  $mv_{\perp}/a$  уравнивается центростремительной, в качестве которой выступает магнитная составляющая силы Лоренца  $eB^0v_{\perp}$ . Если считать, что круговое движение электрона не возмущается, то  $v_{\perp} = a\Omega$ , где  $\Omega$  - угловая частота вращения электрона в магнитном поле  $B_0$ . Из баланса сил следует:  $\Omega = B^0 e/m$ . Эта формула показывает, что вращение электрона в постоянном магнитном поле неизохронно, т.е. угловая частота вращения  $\Omega$  зависит от массы электрона  $m$ : с ростом массы при ускорении электрона его частота вращения уменьшается; а частота вращения тормозящегося электрона возрастает. За счет этого возможна релятивистская фазовая группировка электронов, лежащая в основе механизма взаимодействия в гирорезонансных приборах. Для накопления эффектов взаимодействия необходимо, чтобы фаза средней за период вращения силы электромагнитного поля, действующей на электрон, изменялась медленно во времени. Такое условие (называемое условием синхронизма) обеспечивается при  $k\Omega \approx \omega$ , где  $k$  - целое число.

На рис. 1.7,  $в$  показан случай для  $k=1$ . В момент  $t_0$  электрическое поле достигает максимального значения: при этом электрон 1 оказывается в максимально тормозящей фазе поля (электрическая сила  $F=-eE$  направлена противоположно вектору его скорости), электрон 2 - в максимальной ускоряющей фазе, электроны 3 и 4 "нейтральны": действующие на них силы нормальны к траектории. Через полупериод в момент  $t = t_0 + T/2$ , как

видно из рис. 1.7, в, относительные фазы электронов во внешнем поле не меняются: электрон 1 опять оказывается в тормозящей фазе, 2 - в ускоряющей, электроны 3 и 4 остаются "нейтральными". Очевидно, что с течением времени масса электрона 1 уменьшится, а электрона 2 увеличится. Изменение же частоты вращения будет обратным, за счет этого изменения электроны 1 и 2 сблизятся с электроном 4; произойдет, следовательно, фазовая группировка.

На рис. 1.7, г иллюстрируется случай, когда  $\omega = 2\Omega$ . При этом наиболее выгодным является положение ведущего центра орбиты электрона в узле распределения поперечной составляющей  $E$ . Теперь электроны 1, 2 - тормозящиеся, 3, 4 - ускоряющиеся. Очевидно, что если электронный поток на входе области взаимодействия имеет равномерное по фазам вращения распределение электронов, то за счет фазовой группировки при  $k=2$  возникают два фазовых сгустка: тормозящиеся электроны 1 сблизятся с ускоряющимися электронами 4, а электроны 2 - с электронами 3. Вернемся теперь к интегралу движения (1.5). Как видно из структуры поля на рис 1.7, а, осевые составляющие сил поля равны нулю, т.е.  $d(mz)/dt = F_z = 0$ , что соответствует интегралу (1.5). Интеграл (1.5) приводит к очевидному, но интересному с физической точки зрения выводу: тормозящийся электрон (масса которого уменьшается) ускоряется по направлению  $z$  (релятивистское ускорение).

2. Случай  $E_{mn0}$  полей ( $E_{mn}$  - волны на частоте отсечки). При этом условие  $L \neq f(z)$  выполняется точно. Тогда получаем  $A_z^0 = 0$ , а

$$m\dot{z} - e\tilde{A}_z = const. \quad (1.6)$$

Рассмотрим опять случай гирорезонансного взаимодействия электронов, теперь уже с полем  $E_{mn0}$ . На рис. 1.8, а рассмотрено взаимодействие винтового электронного потока с полем  $E_{110}$  круглого резонатора. В отличие от предыдущего случая имеются синхронные составляющие как продольной магнитной, так и продольной электрической сил Лоренца. Образование синхронной составляющей силы  $F_{ez} = -eE_z$  иллюстрирует рис. 1.8,б. Для существования этой составляющей достаточно поперечной неоднородности в распределении  $E_z$ . Наиболее ясна ситуация, когда ведущий центр электронной орбиты совпадает с узлом распределения  $E_z$ , как показано на рис. 1.8,б.

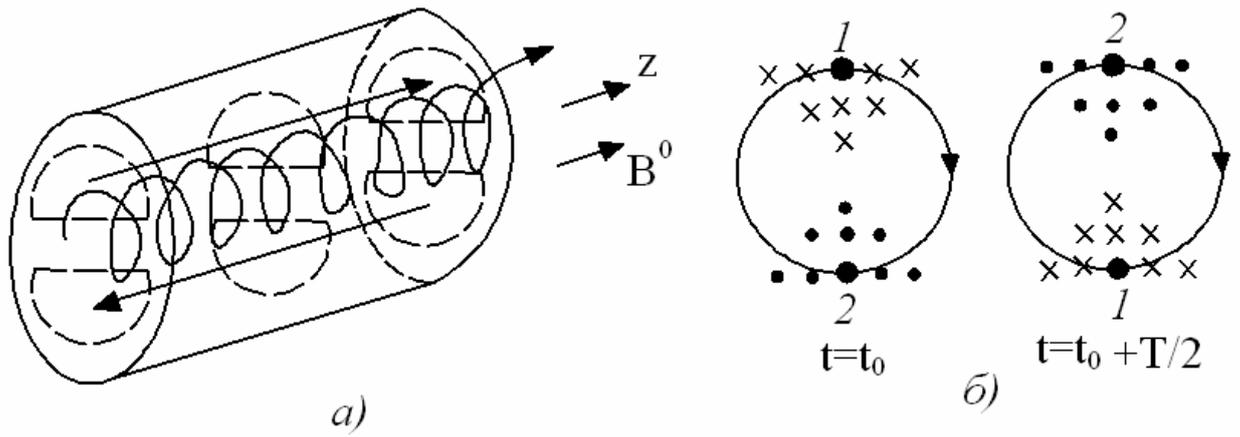


Рис. 1.8. Взаимодействие винтового электронного потока с полем  $E_{110}$  круглого резонатора:  
*a* – структура поля в резонаторе; *б* – механизм образования синхронной составляющей продольной силы.

Обратимся теперь к интегралу (1.6). Положим, что выполняются условия резонансного взаимодействия на  $k$ -ой гармонике циклотронной частоты (т.е.  $\omega \approx k\Omega$ ). В этом случае эффекты взаимодействия носят кумулятивный характер и значительные изменения параметров движения электрона возможны в относительно слабом ВЧ поле (в отличие от нерезонансного случая, когда для значительного изменения траектории электрона нужны сильные поля). Поэтому можно считать, что  $|\overline{m\dot{z}}|^T \gg \tilde{A}_z^T$ .

При таком условии в первом приближении (1.7) дает  $\overline{m\dot{z}}^T \approx const$ . Последнее обстоятельство приводит к далеко не очевидному заранее выводу: действие продольных магнитной и электрической сил в поле  $E_{mn0}$  при условии гирорезонанса взаимно компенсируется. Отбор энергии электрона в рассматриваемой схеме происходит весьма своеобразно: поперечная скорость ВЧ магнитным полем преобразуется в продольную, причем так, что торможение электрона продольным электрическим полем компенсируется. Более того, с уменьшением энергии электрона (с уменьшением  $m$ )  $\dot{z}$  возрастает, поскольку  $\overline{m\dot{z}} \approx const$ . Отсюда, в частности, приходим к выводу, что прямолинейный на входе в поле  $E_{mn0}$  пучок при условии гирорезонанса может только отбирать энергию поля, но не отдавать ее.

#### 1.1.4. Взаимосвязь орбитальной релятивистской группировки электронов с продольной группировкой в бегущей волне. Гиротрон

Механизм взаимодействия в гирорезонансных приборах обеспечивается рядом условий и явлений. Рассмотрим основные из них.

Взаимодействие электронов с полем волны рабочего типа электродинамической системы осуществляется при условии циклотронного резонанса (1.1).

Основной вклад в фазовую группировку дает поперечная релятивистская группировка электронов, обусловленная релятивистской зависимостью массы электрона (следовательно, и  $\Omega$ ) от его полной скорости.

Частота  $\omega$  близка к критической частоте  $\omega_s$  волны рабочего (Н) типа. В том случае, когда  $v_\phi \rightarrow \infty$ , условие (1.1) выполняется как для попутной, так и для встречной волн. Возбуждаемое в электродинамической системе поле представляет собой суперпозицию указанных волн. Поэтому далее при построении уравнений возбуждения поле с заданными поперечными индексами  $n, i$  не разделяется на попутную и встречную волны, а рассматривается как единый тип поля данной системы.

Благодаря условию  $\omega \approx \omega_s$  достигаются сразу три цели: ослабляется (из-за уменьшения продольных сил) мешающая (противофазная поперечной) продольная группировка, повышается добротность рабочего типа колебаний и появляется возможность резко понизить добротность волн мешающих типов (слабые неоднородности волноводной системы на входе и выходе не препятствуют прохождению волн мешающих типов с низкими критическими частотами, но одновременно эффективно запирают рабочую волну на частоте, близкой к ее критической); благодаря слабой неоднородности рабочего типа в продольном направлении снижается критичность эффективности взаимодействия к угловому разбросу скоростей электронов в пучке.

Механизм поперечной релятивистской группировки электронов винтового пучка в Н-волне на частоте отсечки ( $v_\phi \rightarrow \infty$ ) при  $k=1, 2$  описан в п. 1.3. Остановимся на взаимосвязи поперечной и продольной инерционных группировок в случае  $v_{\phi s} < c^2/v_{||}$  (напомним, что при  $v_{\phi s} = c^2/v_{||}$  продольная группировка в попутной волне отсутствует, [25-27]). Как и ранее, считаем, что взаимодействие осуществляется с попутной Н-волной, поэтому инерциальные поперечная и продольная группировки связаны соответственно с составляющими  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{H}_\perp$  (дрейфовую группировку, связанную со смещением ведущего центра вращения электрона, рассматривать не будем).

На рис. 1.9 изображена схема области взаимодействия гирорезонансного прибора, где А-трубчатый пучок, направляемый однородным магнитным полем  $\mathbf{B}_0$ ; В-электродинамическая система (круглый волновод); С-ларморовская электронная трубка, состоящая из электронов, имеющих одинаковую траекторию ведущего центра и одинаковый радиус ларморовской орбиты (а) на входе области взаимодействия. Предполагается, что на входе ларморовской трубки электроны распределены равномерно по фазам вращения (равноперемешанный поток).

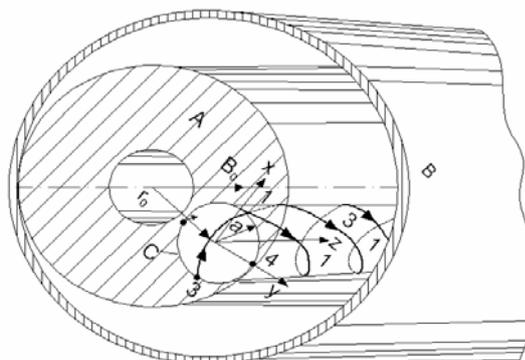


Рис. 1.9. Поперечное сечение области взаимодействия гирорезонансного прибора.

Индивидуальная траектория электрона в пучке представляет собой спиральную линию; траектории характерных электронов 1, 3 ларморовской трубки указаны на рис. 1.9. На рисунке показаны сопровождаемая система координат  $x, y, z$ , связанная с ведущим центром электронной орбиты, а также расстояние этого центра от оси системы  $r_0$ . Проведем анализ инерциальной группировки входящих в ларморовскую электронную трубку электронов при следующих упрощающих условиях: 1) предполагаем точный синхронизм (т.е. (1.1) удовлетворяется точно); 2) пренебрегаем неоднородностью поля в пределах ларморовской орбиты, а в условии (1.1) полагаем  $k=1$  (взаимодействие на первой пространственной гармонике поля); 3) не будем учитывать силовую группировку; 4) пренебрегаем несинхронными составляющими поля.

Обратимся к рис. 1.10. В связи с последним условием, а также вторым условием, в качестве поперечного поля, воздействующего в данном сечении трубки на электроны, можно взять только левополяризованную составляющую полного поля  $\mathbf{E}_{\perp l}$ , и  $\mathbf{H}_{\perp l}$  (рис. 1.10, а). Эта составляющая в неподвижном сечении  $z=\text{const}$  вращается в указанном на рисунке направлении с частотой  $\omega$ , а в движущемся вдоль  $z$  со скоростью дрейфа электронов  $v_{\parallel}$  сечении - со скоростью  $\omega'_s = \omega(1 - v_{\parallel}/v_{\phi s}) = \Omega$ . Поэтому действие сил этой составляющей поля для электронов 1-4 (рис. 1.10) остается однонаправленным, пока они не изменят своих скоростей и координат. Составляющие электрических ( $\mathbf{F}_e$ ) и магнитных ( $\mathbf{F}_M$ ) сил указаны на рис. 1.10, б стрелками. Электрические силы не зависят от скорости электронов, и поэтому для всех электронов (1-4) величина и направление электрической силы  $\mathbf{F}_e$  одинаковы. Магнитные же силы зависят от величины и направления скорости электрона:  $\mathbf{F}_M = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ . Поскольку поперечные скорости электронов 1-4 имеют различное направление (продольные скорости всех электронов одинаковы в начальный момент),  $\mathbf{F}_M$  для всех электронов различны. Однако различие это касается продольных составляющих  $\mathbf{F}_M$ ,

поперечные же составляющие  $F_{\perp M}$  для всех электронов одинаковы, причем  $F_{\perp M}$  и  $F_e$  для рассматриваемого случая попутной волны складываются.

В соответствии со схемой рис. 1.2,б (при принятых условиях 1-4) для электронов 1, 3 силы  $F_e + F_{\parallel M}$  направлены всегда нормально к траектории и не меняют их энергии. Они должны привести к изменению радиуса орбиты и частоты вращения электронов 1, 3 (у электрона 1 радиус должен уменьшиться, а частота возрасти, у электрона 2 - наоборот). В результате этого произойдут и фазовые перемещения: электрон 1 будет перемещаться вперед (по направлению вращения), 3 - назад. Для упрощения последующего изложения не будем учитывать этот эффект, т.е. электроны 1, 3 считаем несмещающимися, "нейтральными" (это допустимо только тогда, когда  $|F_e + F_{\perp M}|$  существенно малы по сравнению со статической центробежной силой  $e v_{\perp} B$ ). Электрон 2 тормозится как поперечными, так и продольными силами, а электрон 4 ускоряется. За счет действия указанных сил электроны получают смещения  $s_{\perp}$  и  $s_{\parallel}$ , как это изображено на рис. 1.10,в: тормозящийся электрон 2 вследствие уменьшения массы начинает вращаться быстрее и "догоняет" по азимуту электрон 1; ускоряющийся электрон 4 "отстает" и, увеличивая радиус орбиты вращения, также перемещается к электрону 1. Таким образом, смещения  $s_{\perp}$  потенциально могут привести к азимутальной группировке. Однако одновременно электроны расходятся из первоначального поперечного сечения (смещения  $s_{\parallel}$ ), что ведет к продольной группировке.

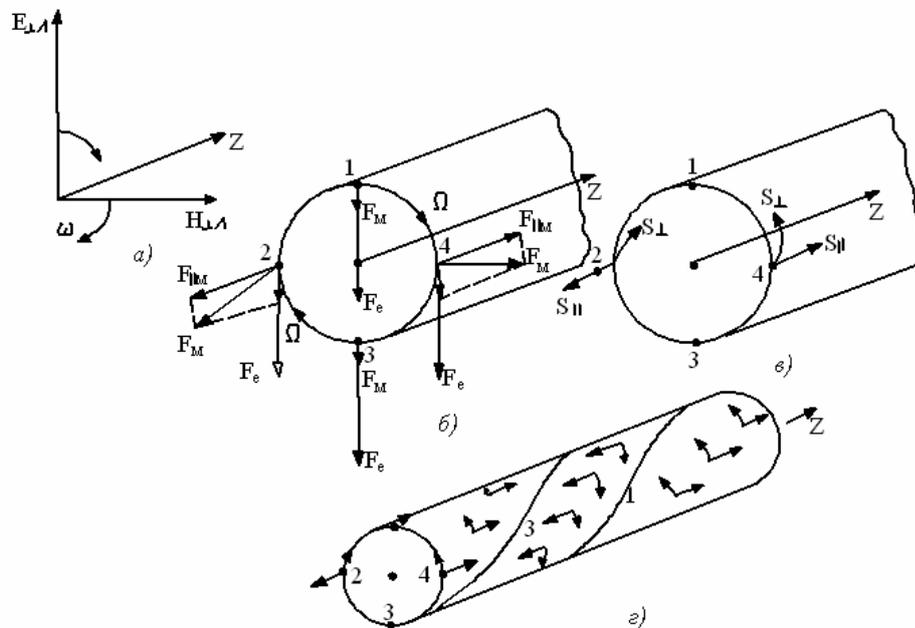


Рис. 1.10. Взаимосвязь поперечной и продольной группировок электронов в гирорезонансных приборах.

Взаимосвязь поперечной и продольной группировок поясняет рис. 1.10, г. Здесь изображены отрезок электронной трубки длиной  $\Lambda$  ( $\Lambda$  - длина волны в волноводе), указаны мгновенные распределения фаз поля (винтовые линии) и электронных смещений. Поскольку волна вдоль направления  $z$  распространяется не мгновенно ( $v_\phi \neq \infty$ ), определенным направлениям векторов  $\mathbf{E}_{\perp\Lambda}$  и  $\mathbf{H}_{\perp\Lambda}$  (и фазам электронов) будут соответствовать винтовые линии на поверхности электронной трубки. На рис. 1.10, г изображены две характерные винтовые линии: 1 соответствует электронам фазы 1; 3 - соответствует электронам фазы 3. Одновременно показаны направления смещений группирующихся электронов по всей поверхности трубки. Как видно из рисунка, поперечная (азимутальная) группировка стремится образовать сгусток вдоль линии 1, продольная - вдоль линии 2, т.е. поперечная и продольная группировки противофазны. Нетрудно предвидеть ситуацию, когда оба механизма группировки будут взаимно нейтрализованы. В этом случае электроны 2, 4 смещаются строго вдоль винтовых линий 1, 3. При их смещении фаза сохраняется. Это имеет место для Т-волны, когда  $v_\phi = c$ . В волноводе же  $v_\phi > c$ . Обычно в гирорезонансных приборах  $v_\phi \gg c$ . Тогда роль продольной группировки мала.

На рис.1.11 представлены принципиальная схема гиротрона - гирорезонансного монотрона и распределение продольной составляющей магнитостатического поля  $B_z^0$  по оси прибора. Здесь 1 - кольцевой эмитирующий пояска катода, 2 - первый анод, 3 - второй анод, 4 - резонатор, 5 - основной соленоид, 6 - выходной волновод, 7 - вакуумно-плотное окно вывода энергии, 8, 9 - водяная рубашка соответственно коллектора электронов и резонатора, 10 - корректирующий соленоид. Электроны, эмитируемые с пояска 1, под действием суперпозиции электрического поля первого анода и магнитостатического поля (и то, и другое имеют продольные и радиальные составляющие) движутся по квазивинтовым траекториям, вращаясь поперечно к силовым магнитным линиям и дрейфуя вдоль них. В области нарастания магнитного поля и дрейфовая скорость ускоренных полей второго анода электронов преобразуется в осцилляторную.

В области взаимодействия (открытый резонатор 4) магнитное поле достигает синхронного значения; здесь осуществляется взаимодействие трубчатого винтового потока электронов с колебаниями рабочих типов. Колебания рабочего типа образуются в результате отражений одной из  $H_{ni}$ -волн круглого волновода на частоте, близкой к частоте отсечки в центральной части трубки резонатора, от закритических концевых сужений этой трубки. Паразитные типы волн имеют меньшие критические частоты, и поэтому в рабочем частотном диапазоне беспрепятственно распространяются через концевые сужения трубки резонатора, не образуя высокооборотных колебаний.

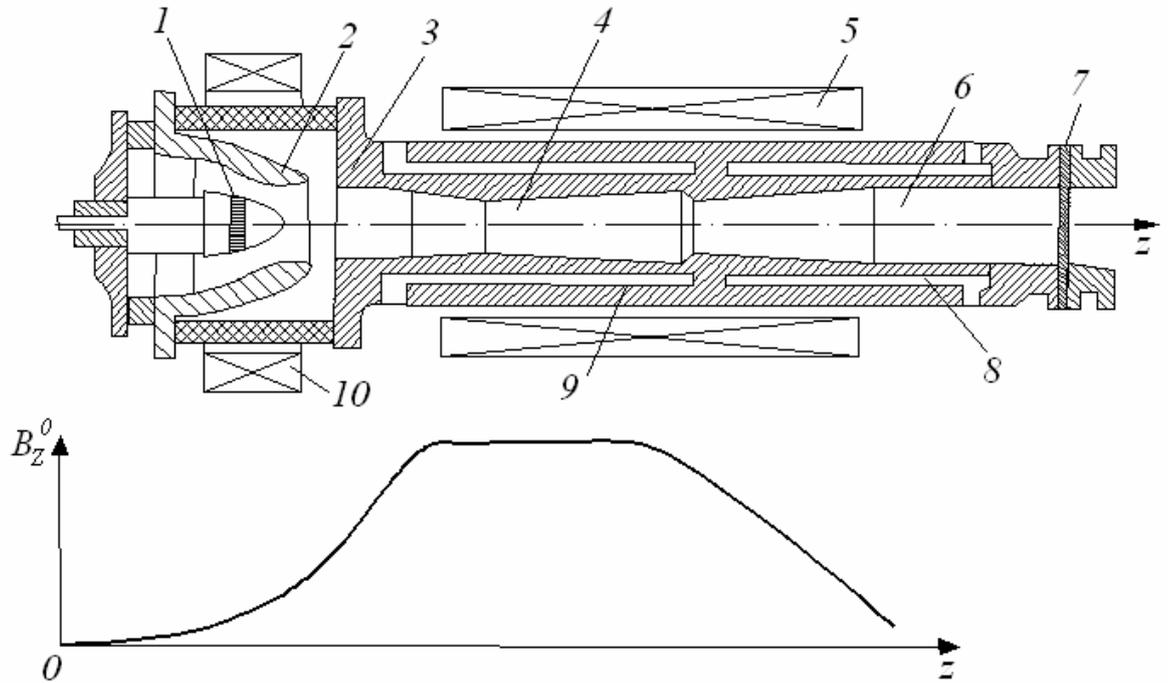


Рис. 1.11. Принципиальная схема гиротрона и распределение магнитостатического поля вдоль оси прибора.

Специальный профиль трубки резонатора обеспечивает распределение ВЧ поля, близкое к оптимальному по КПД взаимодействия: на протяженном начальном закритическом участке поле медленно нарастает (участок группировки), в центральной части оно достигает максимума (участок отбора энергии), на коротком выходном участке (дифракционный вывод энергии) поле резко ослабляется, что приводит к прекращению взаимодействия отработавших электронов с электромагнитным полем. Далее ВЧ энергия поступает в выходной волновод, служащий одновременно коллектором электронов: в понижающемся магнитном поле электроны, перемещаясь вдоль силовых магнитных линий, осаживаются на боковых стенках волновода.

Структура полей наиболее распространенных колебаний рабочих типов в гиротронах приведены на рис. 1.12:  $H_{01}$ ,  $H_{n1}$  - вращающееся поле в полном резонаторе,  $H_{n1}$  - вращающееся поле в коаксиальном открытом резонаторе. В последнем случае из-за аномальной дисперсии приграничного типа волн  $H_{n1}$  закритические сечения для него образуются в областях сужения внутреннего проводника. Таким образом, волновод, образующий высокодобротный открытый резонатор для волн  $H_{n1}$ , расширяется на концах и благодаря этому все мешающие объемные типы волн излучаются. Такой резонатор оказывается уникальным по своим селективным свойствам.

Для повышения эффективности гирорезонансных приборов успешно используются методы, основанные на оптимизации профиля нерегулярной электродинамической системы и распределения магнитного поля в области

взаимодействия. При относительно невысоких токах электронного пучка и соответственно выходной мощности поле электродинамической системы может быть задано в одномодовом приближении (резонансный тип колебаний фиксированной структуры).

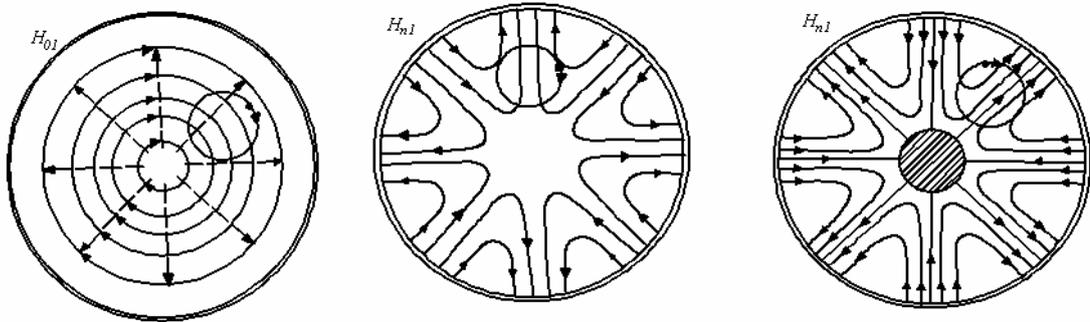


Рис. 1.12. Структура электрического поля некоторых рабочих типов колебаний в гиротронах.

При повышенных мощностях необходимо использовать многомодовое приближение (имеются в виду волноводные моды с различной поперечной структурой, представляющие собой суперпозицию попутных и встречных волн волноводной системы), описывающее сложное распределение поля, меняющееся с изменением генерируемой мощности и уровня модуляции электронного пучка (поле нефиксированной структуры). Различные моды в этом случае оказываются связанными через электронный поток. В нерегулярной электродинамической системе дополнительная связь мод появляется на нерегулярностях. Таким образом, в общем случае (низкодобротные и нерегулярные электродинамические системы) необходимо использовать многомодовое приближение и самосогласованное решение задачи о взаимодействии электронного потока с возбуждаемым им электромагнитным полем.

При повышенных напряжениях пучка ( $U_0 > 30$  кВ) резко возрастают амплитуды высших пространственных гармоник (гармоник циклотронной частоты) действующих на электрон сил поля и поэтому их слабoreлятивистские представления становятся неверными. Кроме того, возникает возможность достаточно интенсивного возбуждения высших временных гармоник поля.

В настоящее время в связи с тенденцией повышения мощности гирорезонансных приборов повышаются как токи пучка ( $I_0$  до  $\sim 40$  А), так и ускоряющие напряжения ( $U_0 \approx 70-90$  кВ), а электродинамические системы этих приборов приближаются к нерезонансным (резонаторы с низкими дифракционными добротностями либо согласованные с одного конца отрезки волновода). Поэтому перечисленные факторы начинают проявляться, и их следует учитывать. По крайней мере, необходимо иметь

возможность оценить их влияние на процессы взаимодействия в конкретных конструкциях гирорезонансных приборов.

Таким образом, общая формулировка нелинейной теории гирорезонансных приборов должна базироваться на волноводных уравнениях возбуждения, когда электродинамическая система прибора представляется в виде отрезка нерегулярного волновода с нефиксированным распределением электромагнитного поля, определяемым согласованием тока и поля. Частный случай фиксированного распределения поля может быть рассмотрен отдельно (в упрощенной форме) либо как предел в общей задаче, когда коэффициенты отражения в волноводном отрезке на одном типе волны приближаются к 1 по модулю.

Кроме того, желательно получить и релятивистские выражения для силовых составляющих поля в усредненных уравнениях движения электрона и уравнений возбуждения. С учетом перечисленных требований далее развита нелинейная теория гирорезонансных приборов с нерегулярной волноводной системой кругового сечения.

### 1.1.5 Дрейфовая группировка электронных ротаторов. Пениотрон

Среди многообразия циклотронного взаимодействия электронов с электромагнитными полями особый интерес представляет взаимодействие электронов с вращающимися электромагнитными полями в условиях резонанса на одной из гармоник циклотронной частоты. К приборам, в которых осуществляются подобные виды взаимодействия, относятся гиротрон и его модификации (гироклистрон, гиро-ЛБВ), пениотрон и гиротон. В гиротронах высокая эффективность взаимодействия обусловлена релятивистским механизмом орбитальной группировки; в двух последних схемах идеальные условия фазовой группировки достигаются благодаря дрейфовой группировке электронных ротаторов, обусловленной специальными механизмами перемещения (дрейфа) ведущих центров электронных ротаторов во вращающихся электромагнитных полях. Во всех перечисленных случаях для правильного описания взаимодействия (и тем более для количественных оценок) необходимо корректное выделение уравнения дрейфа ведущего центра. Такое выделение может быть осуществлено в форме орбитально-дрейфового интеграла движения [23], который получается ввиду пространственно-временной симметрии вращающегося электромагнитного поля. Обратимся к формулировке уравнений движения электрона в форме Лагранжа [22,25-27].

$$\begin{aligned} dp_i / dt &= \partial L / \partial q_i, \\ p_i &= \partial L / \partial \dot{q}_i, \quad \dot{q}_i = dq_i / dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь  $p_i$  - обобщенный импульс;  $q_i$  - соответствующая обобщенная координата;  $L$  - функция Лагранжа, которая для электрона имеет вид

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - e\mathbf{v}\mathbf{A} + e\Phi, \quad (1.8)$$

где  $m_0, e$  - масса покоя и заряд электрона;  $\mathbf{v}$  - его скорость;  $\mathbf{A}, \Phi$  - векторный и скалярный потенциалы полного поля. Полная энергия электрона в электромагнитном поле выражается как

$$\varepsilon = mc^2 - e\Phi = \sum_i q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (1.9)$$

$$\text{где } m = m_0\gamma = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Используя (1.7) - (1.9), получаем необходимое для дальнейших преобразований тождество. Для этого продифференцируем (1.9) по времени  $t$  и учтем в соответствии с (1.7), что  $\partial L/\partial q_i = p_i$  и  $\partial L/\partial \dot{q}_i = \dot{p}_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = \\ &= \sum_i \ddot{q}_i p_i + \sum_i \dot{q}_i \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следствие (1.7), (1.9) вида

$$d\varepsilon/dt = -\partial L/\partial t. \quad (1.10)$$

Рассмотрим случай вращающегося электромагнитного поля, которое в частном случае может быть задано функцией Герца вида

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{e,m} &= A_m J_n(\aleph^{e,m} r) e^{j(\omega t \mp n\varphi)}, \\ \aleph^e &= \frac{V_{ni}}{b} [J_n(v_{ni}) = 0], \quad \aleph^m = \frac{\mu_{ni}}{b} [J'_n(\mu_{ni}) = 0], \end{aligned}$$

где  $b$  - радиус волновода.

Положим, что магнитостатическое поле направлено вдоль оси вращения поля, т.е. вдоль  $z$ . Тогда функция Лагранжа  $L = L(r, z, \theta, \dot{r}, \dot{z}, \dot{\theta})$ , где  $\theta = \omega t \mp n\varphi$ . Далее для упрощения записи положим  $\theta = \omega t - n\varphi$ , приписав знак числу  $n$ . Определим  $\partial L/\partial t$  и  $\partial L/\partial \varphi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \frac{\partial L}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -n \frac{\partial L}{\partial \theta}. \quad (1.11)$$

Из (1.11) получаем

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\omega}{n} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\omega}{n} \frac{dp_\varphi}{dt} = 0. \quad (1.12)$$

Заменяя в (1.12)  $\partial L/\partial t$  на  $d\varepsilon/dt$  в соответствии с (1.10), приходим к следующему интегралу движения:

$$\varepsilon - \frac{\omega}{n} (mr^2\dot{\varphi} - erA_\varphi) = const$$

или

$$mc^2 - e\Phi - \frac{\omega}{n} r^2 m\dot{\varphi} + e \frac{\omega}{n} rA_\varphi = const. \quad (1.13)$$

Здесь  $A_\varphi = A_\varphi^0 + \tilde{A}_\varphi$ , причем, в случае слабонеоднородного магнитостатического поля, направленного по  $\vec{z}_0$ , приближенно запишем

$$A_\varphi^0 = \frac{r}{2} \left[ B_0^n(z) - \frac{r^2 B_0^n}{8} + \dots \right] \approx \frac{r B_0^n(z)}{2}. \quad (1.14)$$

Предположим, что  $\tilde{A}_\varphi \ll A_\varphi^0$  ( $\tilde{H}_z$  можно пренебречь). Тогда, используя (1.14), вместо (1.13) получим

$$mc^2 - e\Phi - \frac{\omega}{n} r^2 m\dot{\varphi} + e \frac{\omega r^2}{n} B_0(z) = const. \quad (1.15)$$

Проведем в (1.15) усреднение по периоду вращения электрона. Введем обозначения  $a, r_0, \Phi$ , как показано на рис. 1.13. Тогда

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + r_0^2 + 2ar_0 \cos \Phi; \\ r^2 \dot{\varphi} &= \dot{\Phi} \left[ r^2 - (r^2 + r_0^2 - a^2) / 2 \right], \quad \dot{\Phi} = \Omega. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Усредним величины  $r^2$  и  $r^2 \dot{\varphi}$  по периоду вращения электрона:

$$\begin{aligned} \overline{r^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\Phi = a^2 + r_0^2; \\ \overline{r^2 \dot{\varphi}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \dot{\varphi} d\Phi = \Omega a^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

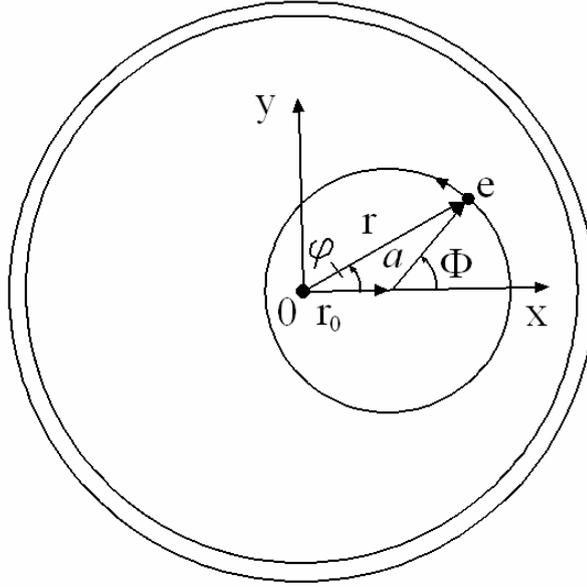


Рис. 1.13. Схема движения электрона в поперечной плоскости  $XY$ .

Учитывая (1.16), (1.17), а также то, что  $\Omega = B^0 e / m$ , из (1.15) получаем

$$nmc^2 / e\omega - (B_0(z)/2)(a^2 - r_0^2) = const. \quad (1.18)$$

Преобразуем (1.18) к более удобному виду, выделив переменные одного порядка

$$2n(m - m_0)c^2 / m_0\Omega_0\omega - F(z)(a^2 - r_0^2) = const. \quad (1.19)$$

Здесь  $m_0$  - масса покоя электрона;  $F = B_0(z) / B_0^0$ ;  $B_0^0 = B_0(0)$ ;  $\Omega_0 = (e/m_0)B_0^0$ . Выражение (1.19) является общей формой усредненного орбитально-дрейфового интеграла движения, связывающего параметры орбитального движения  $m, a$  с изменением радиуса ведущего центра  $r_0$ . Рассмотрим некоторые модификации полученного интеграла движения. В случае постоянного магнитного поля ( $F = 1$ ) положим, что в начальном сечении области взаимодействия ( $z = 0$ ) выполняются условия синхронизма с попутной парциальной волной электромагнитного поля на  $k$ -ой гармонике циклотронной частоты

$$\omega = k \frac{\Omega_I}{1 - \beta_{\parallel} / \beta_{\Phi}}$$

Здесь

$$\beta_{\parallel} = v_{\parallel} / c; \quad \beta_{\Phi} = v_{\Phi} / c; \quad \Omega_I = \Omega_0 R_1; \quad R_1 = \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2}; \quad \beta_{\perp} = v_{\perp} / c;$$

$v_{\parallel}, v_{\perp}$  - значения  $v_z$  и  $v_t$  при  $z = 0$ . При перечисленных условиях из (1.19) получаем

$$r_0^2 + a^2 \left[ \frac{2n}{k} \frac{1 - \beta_{\parallel}/\beta_{\Phi}}{R_1} \frac{R(1-R)}{\beta_t^2} - 1 \right] = const,$$

где  $R = \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}$ ;  $\beta_z^2 = v_z^2/c^2$ ;  $\beta_t^2 = a^2 \Omega_0^2 R^2/c^2$ .

Запишем также слаборелятивистское приближение интеграла:

$$r_0^2 + a^2 \left\{ \frac{n}{k} \frac{(1 - \beta_{\parallel}/\beta_{\Phi})^2}{R_1} \left[ 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} - \frac{1}{4} \beta_z^2 \left( 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} \right)^2 \right] - 1 \right\} = const. \quad (1.20)$$

Используя (1.20), получаем нерелятивистское приближение орбитально-дрейфового интеграла для ТЕ- и Т-полей. В этом случае:  $\beta_z = \beta_{\parallel} \rightarrow 0$ ;  $\beta_t = \beta_{\perp} \rightarrow 0$ ;  $\beta_z^2/\beta_t^2 = \beta_{\parallel}^2 c^2/a^2 \Omega^2 = const/a^2$ , и из (1.20) следует

$$r_0^2 + a^2 [n/k - 1] = const. \quad (1.21)$$

Рассмотрим теперь случай слабонеоднородного магнитостатического поля, причем на  $F(z)$  наложим условие сохранения синхронизма по всей области взаимодействия для изофазной электронной трубки

$$F(z)/m(1 - \beta_z/\beta_{\Phi}) = const. \quad (1.22)$$

Тогда комбинируя (1.19), (1.22), получаем

$$\frac{\beta_{\Phi} - \beta_z}{\beta_{\Phi} R} \left\{ r_0^2 + a^2 \left[ \frac{2n}{k} \left( 1 - \frac{\beta_z}{\beta_{\Phi}} \right) \frac{1-R}{\beta_t^2} - 1 \right] \right\} = const. \quad (1.23)$$

В слаборелятивистском приближении (1.23) дает

$$\frac{\beta_{\Phi} - \beta_z}{\beta_{\Phi} R} \left\{ r_0^2 + a^2 \left[ \frac{n}{k} \left( 1 - \frac{\beta_z}{\beta_{\Phi}} \right) \left( 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} \right) - 1 \right] \right\} = const.$$

Остановимся на анализе нерелятивистского орбитально-дрейфового интеграла, воспользовавшись приведенными в п. 1.2 данными о характере синхронных дрейфовых сил в полях  $H_{n1}$  круглого волновода. Представим,

что спирализованный электронный поток, направляемый однородным магнитным полем при  $F=1$ , входит в область взаимодействия так, что  $r_0(0) = 0$  (спирализованный электронный поток соосен с волноводом). Тогда, как следует из (1.3), при  $n=k+1$  дрейфовая сила  $\overline{F}_g$ , действующая на каждый электрон, максимальна, а орбитальная равна нулю. При том же условии  $n=k+1$  из интеграла движения (1.21) следует

$$r_0^2 + a^2/k = const. \quad (1.24)$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

1. На все электроны, независимо от их фазы влета, действует одинаковая и максимальная по величине дрейфовая сила, сдвигающая ведущий центр электронов с оси. При этом согласно (1.3) возникает орбитальная резонансная сила (напомним, что речь идет о средних по периоду вращения электрона силах).

2. В соответствии с (1.24) увеличение  $r_0^2$  может происходить только при таком же по величине уменьшении  $a^2/k$ , т.е. все электроны спирализованного пучка электронов, соосного с волноводом, независимо от фазы влета в область взаимодействия, отдают энергию вращающемуся  $H_{ni}$  полю круглого волновода.

Таким образом, просматривается идеальный механизм фазировки и энергообмена спирализованного электронного потока с вращающимися компонентами  $H_{n1}$  и  $T_{ni}$  полей круглых или азимутально-гофрированных волноводов, при котором принципиально возможно приближение КПД к 100%. Такой механизм взаимодействия используется в приборах миллиметрового диапазона: пениотронах, усилителях и генераторах.

Однако существует ряд факторов, разрушающих или осложняющих этот идеальный механизм, к которому мы пришли, вообще говоря, на основе упрощенного анализа.

Этот механизм становится идеальным только в нерелятивистском случае (интеграл (1.21) справедлив только в этом случае) и, кроме того, только для Т-волн. В других случаях конгруэнтность фазовых траекторий электронов, имеющих разные фазы влета, нарушается, а идеальный режим невозможен.

К такому же результату приводит гиротронный механизм с  $n=k$  на встречной компоненте поля резонатора. В этом случае происходит селекция электронов по входным фазам (фазовая группировка), и конгруэнтность фазовых траекторий нарушается.

Взаимодействие электронов (силы пространственного заряда) также нарушают указанную конгруэнтность.

Эти и другие факторы рассматриваются далее в разделе 4.5, посвященном пениотрону.

## 1.2. Нелинейная теория гирорезонансного взаимодействия электронов с полями нерегулярных волноводов

Основы нелинейной теории гиротрона в простейшей постановке (заданное поле, одномодовый режим, кинематическое приближение) были заложены В.К. Юлпатовым [8] и В.А. Жураховским [28]. Существенным моментом в этих работах является использование метода усреднения для интегрирования уравнения движения релятивистского электрона в однородном магнитном поле и возмущающем это движение заданном высокочастотном поле.

Дальнейшее развитие нелинейной теории гирорезонансного взаимодействия электронов с полями нерегулярных электродинамических систем содержится в [21-26, 29-47]. Нелинейная теория гирорезонансных приборов рассматривается на основе [22, 25, 26, 29, 44-47].

### 1.2.1. Общая постановка и схема решения задачи возбуждения нерегулярного волновода

Рассмотрим задачу возбуждения однородно заполненного нерегулярного волновода, боковая поверхность которого  $S_b$  отличается от регулярной цилиндрической поверхности, но является идеально проводящей. Эта задача сводится к решению системы уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

с граничными условиями

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{S_b} = 0 \quad (1.26)$$

и условиями излучения в начальном и конечном сечениях волновода.

Плотность электрического тока  $\mathbf{J}$  определяется электронным потоком в приборе. Теория возбуждения нерегулярного волновода строится на основе метода преобразования координат. Для решения задачи введем криволинейную систему координат  $(r, \varphi, s)$ , связанную с геометрией волновода ( $r, \varphi$  - полярные координаты в плоскости поперечного сечения волновода,  $s$  - длина дуги оси волновода). Схема нерегулярного волновода приведена на рис. 1.14. Здесь  $\mathbf{t} = \mathbf{r}' / |\mathbf{r}'|$  - единичный вектор касательной к оси волновода,  $(\mathbf{x}' = dx/ds); \mathbf{n} = \mathbf{r}'' / |\mathbf{r}''| = \frac{1}{k} \mathbf{r}''$  - единичная нормаль к поверхности;

$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  - бинормаль к оси волновода. Эти три величины связаны с помощью формул Френа-Серре.

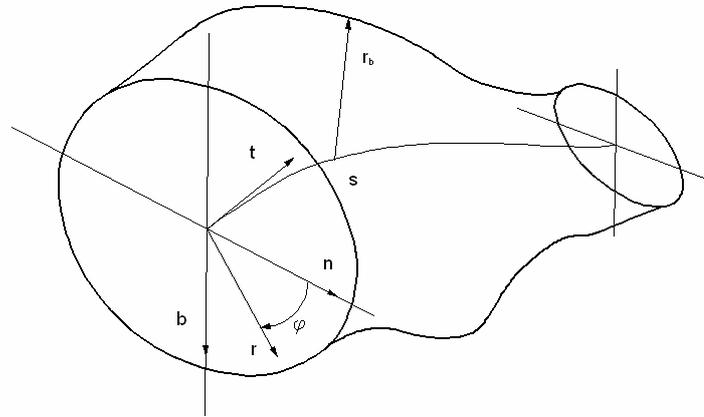


Рис. 1.14. Геометрия нерегулярного волновода.

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}; \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}; \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \quad (1.27)$$

где  $k = 1/\rho_k = |\mathbf{r}''|$  - угловая скорость вращения касательной вокруг бинормали;  $\rho_k$  - радиус кривизны;  $\tau = 1/\rho_\tau = \frac{1}{k} \mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''$  - угловая скорость вращения бинормали вокруг касательной;  $\rho_\tau$  - радиус кручения. Декартовы прямоугольные координаты произвольной точки  $(x, y, z)$  внутри волновода связаны с введенными координатами  $(\rho, \varphi, s)$  соотношением

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, s) = \mathbf{R}(s) + \rho r_b(\varphi, s) \{ \mathbf{n}(s) \cos(\varphi) + \mathbf{b}(s) \sin(\varphi) \}, \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор произвольной точки внутри волновода;  $\mathbf{R}(s)$  - уравнение оси волновода в декартовой системе координат;  $\mathbf{n}(s)$  и  $\mathbf{b}(s)$  - единичные векторы главной нормали и бинормали оси волновода, определенные как функции ее длины:

$$\rho = r/r_b(\varphi, s); \quad (1.29)$$

$r = r_b(\varphi, s)$  - уравнение контура поперечного сечения волновода в системе координат  $(r, \varphi, s)$ . Тогда в системе координат  $(\rho, \varphi, s)$  уравнение боковой поверхности рассматриваемого волновода принимает вид

$$\rho = 1. \quad (1.30)$$

В новой неортогональной системе координат выражение для первого уравнения оператора  $\mathbf{H}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \left\{ \left( \frac{\partial H'_s}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial s} \right) \mathbf{a}_\rho + \left( \frac{\partial H'_\rho}{\partial s} - \frac{\partial H'_s}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\varphi + \left( \frac{\partial H'_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H'_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{a}_s \right\} = \\ & = \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial E'_\rho}{\partial t} \mathbf{a}^\rho + \frac{\partial E'_\varphi}{\partial t} \mathbf{a}^\varphi + \frac{\partial E'_s}{\partial t} \mathbf{a}^s \right\} + \left\{ J'_\rho{}^E \mathbf{a}^\rho + J'_\varphi{}^E \mathbf{a}^\varphi + J'_s{}^E \mathbf{a}^s \right\}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где  $(E'_\rho, E'_\varphi, E'_s), (H'_\rho, H'_\varphi, H'_s), (J'_\rho{}^E, J'_\varphi{}^E, J'_s{}^E)$  - ковариантные компоненты векторов  $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$  и  $\mathbf{J}'$  в данной системе координат, пропорциональные проекциям этих векторов на основные координатные векторы  $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_s$ . Контравариантные вектора  $\mathbf{a}^\rho, \mathbf{a}^\varphi, \mathbf{a}^s$  образуют взаимную систему. Аналогичным образом записывается и второе уравнение (1.25). Умножив (1.31) на взаимные векторы, получим ковариантную форму записи уравнений Максвелла в новой системе координат. Например, первое из уравнений запишется в виде:

$$\frac{\partial H'_s}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial s} = \varepsilon_0 \sqrt{g} \left\{ g^{11} \frac{\partial E'_\rho}{\partial t} + g^{12} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial t} + g^3 \frac{\partial E'_s}{\partial t} \right\} + \left\{ g^{11} J'_\rho{}^E + g^{12} J'_\varphi{}^E + g^3 J'_s{}^E \right\}, \quad (1.32)$$

где  $g^{ik}$  - метрические коэффициенты.

Аналогичный вид будут иметь и остальные пять уравнений. Граничные условия (1.26) в новой системе координат имеют вид

$$E'_\varphi|_{\rho=1} = 0; E'_s|_{\rho=1} = 0. \quad (1.33)$$

Это позволяет искать решение волновых уравнений (1.32) в виде разложений по системе базисных функций регулярного цилиндрического волновода. Например, можно искать решение (1.32) для электрической и магнитной напряженностей полей в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'_{1t} &= \mathbf{Re} \sum_m \dot{E}'_{1tm} e^{jm\omega t}; \\ \mathbf{E}'_{1t} &= \mathbf{Re} \sum_m \dot{E}'_{1tm} e^{jm\omega t}; \end{aligned} \right\}, \quad (1.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'_{l'm} &= \sum_{i=1}^l \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^E \mathbf{e}_{ni}^E + \dot{A}_{mni}^M \mathbf{e}_{ni}^M \right); \\ \mathbf{E}'_{l'sm} &= \sum_{i=1}^l \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni} \varphi_{ni}; \\ \mathbf{H}_{1m} &= \frac{j}{m\omega\mu_0} g^{-1} \text{rot} \mathbf{E}_{1m}, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

а собственные функции регулярного волновода выражены следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_{rni}^E &= J'_n(\nu_m \rho) e^{-jn\varphi}; e_{rni}^M = -\frac{n}{\mu_{ni}\rho} J_n(\mu_m \rho) e^{-jn\varphi}; \\ e_{\varphi ni}^E &= -\frac{jn}{\nu_{ni}\rho} J_n(\nu_{ni} \rho) e^{-jn\varphi}; e_{rni}^M = jJ'_n(\mu_m \rho) e^{-jn\varphi}; \\ \varphi_m &= J_n(\nu_m \rho) e^{-jn\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Здесь  $m$  - номер гармоники основной частоты  $\omega$ ;  $n$  - азимутальный индекс;  $i$  - радиальный индекс;  $j$  - мнимая единица;  $\nu_{ni}$  - корни функции Бесселя ( $J_n(\nu_{ni}) = 0$ );  $\mu_{ni}$  - корни производной от функции Бесселя ( $J'_n(\mu_{ni}) = 0$ ). Направляющие векторы новой (косоугольной) системы координат  $(\rho, \varphi, s)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = r_b(\varphi, s) (\mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi) = r_b \mathbf{r}_0; \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_s &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \rho \frac{\partial r_b}{\partial s} (\mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi) + \rho r_b \tau + (-\mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi) + \\ &+ \mathbf{t}(1 - k\rho r_b) = \rho \frac{\partial r_b}{\partial s} \mathbf{r}_0 + \rho r_b \tau \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{t}(1 - k\rho r_b \cos \varphi). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Взаимная система контравариантных векторов записывается через основную:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= [\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_{i+2}] / \mathbf{a}_i [\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_{i+2}]; \\ \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^\rho &= \frac{1}{r_b} \mathbf{r}_0 - \frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{r_b^2 \partial \varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{\rho}{r_b h_4} \left( \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \tau - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right) \mathbf{t}; \\ \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^\varphi &= \frac{1}{\rho r_b} \boldsymbol{\varphi}_0 - \frac{\tau}{h_4} \mathbf{t}; \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^s = \mathbf{t} / h_4. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Уравнения Максвелла (1.25) в новых координатах  $(\rho, \varphi, s)$  в ковариантной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{H}' &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \hat{g} \mathbf{J}'; \\ \text{rot}\mathbf{E}' &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь метрический тензор  $\hat{g}$  записывается как

$$\hat{g} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} g^{11}/\rho, g^{12}, g^{13}/\rho \\ g^{21}, \rho g^{22}, g^{23} \\ g^{31}/\rho, g^{32}, g^{33}/\rho \end{vmatrix}, \quad (1.40)$$

где  $g^{ij} = (\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)$ ;  $\sqrt{g} = \mathbf{a}^1 [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3] = \rho r_b^2 h_4$ .

Составляющие метрического тензора следующие:

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_b^4} \left( \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r_b^2 h_4} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]^2; \quad g^{22} = \frac{1}{r_b^2 \rho^2} + \frac{\tau^2(s)}{h_4^2}; \\ g^{12} &= -\frac{1}{r_b^3 \rho} \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\rho \tau(s)}{r_b h_4^2} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]; \quad g^{23} = -\frac{\tau(s)}{h_4^2}; \\ g^{13} &= \frac{\rho}{r_b h_4^2} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]; \quad g^{33} = \frac{1}{h_4^2}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где  $h_4 = 1 - \rho r_b(\varphi, s) k(s) \cos \varphi$ ;  $k(s)$  и  $\tau(s)$  - соответственно кривизна и кручение оси волновода. Реальные физические векторы определяются через расчетные (штрихованные) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E'_\rho \mathbf{a}^1 + E'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + E'_s \mathbf{a}^3; \\ \mathbf{H} &= H'_\rho \mathbf{a}^1 + H'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + H'_s \mathbf{a}^3; \\ \mathbf{J} &= J'_\rho \mathbf{a}^1 + J'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + J'_s \mathbf{a}^3. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Для улучшения сходимости решения уравнения (1.39) следует выделить отдельно электростатическую часть поля, содержащую разрыв  $E'$ . Общая задача решения (1.39) разделяется на две – электростатическую и динамическую. Представим напряженность электрического поля в виде двух

слагаемых, определяющих соответственно электростатическую и динамическую части поля

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (1.43)$$

где  $\mathbf{E}'_2 = -grad\Phi'$ , причем  $div\mathbf{E}'_1 = 0$  и  $rot\mathbf{E}'_2 = 0$ . Тогда электростатическая задача имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\Phi' &= -\rho_l/\varepsilon_0; \\ \Phi'|_{\rho=1} &= 0; \frac{\partial\rho'_l}{\partial t} = -div\mathbf{J}', \end{aligned} \right\}, \quad (1.44)$$

а динамическая

$$\left. \begin{aligned} rot\mathbf{H}' &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}'_1}{\partial t} + \hat{g}\mathbf{J}''; \\ rot\mathbf{E}'_1 &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}; \\ \mathbf{E}'_{1\varphi} &= \mathbf{E}'_{1s}|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \right\}. \quad (1.45)$$

Здесь  $\mathbf{J}'' = \mathbf{J}' - grad\frac{\partial\Phi'}{\partial t}$ . Отметим, что  $\vec{E}'_1$  - непрерывный на границе источников вектор. Решение задачи (1.44) для цилиндрической области известно. Ниже рассмотрим решение динамической задачи (1.45).

### 1.2.2. Решение динамической задачи

Для решения (1.45) воспользуемся методом Галеркина, который также называется методом ортогонализации и заключается в том, что коэффициенты разложений (1.35) определяются из условия ортогональности невязок уравнения (1.45) собственным векторам разложения (1.11) при любом  $s$ ,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ rot\left(\bar{g}^{-1}rot\mathbf{E}'_1\right) + \mu_0 \hat{g} \left[ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}''}{\partial t} \right] \right\}_{\perp} \bar{e}_{ni}^{E,M*} \rho d\varphi d\rho e^{-im\omega t} d\omega t &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ rot\left(\bar{g}^{-1}rot\mathbf{E}'_1\right) + \mu_0 \hat{g} \left[ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}''}{\partial t} \right] \right\}_s \varphi_{ni} \rho d\varphi d\rho e^{-im\omega t} d\omega t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Это наиболее общее решение задачи возбуждения волновода произвольной формы имеет очень громоздкий вид. Для рассматриваемых осесимметричных волноводов с прямолинейной осью радиус кривизны  $\rho_k$  и радиус кручения оси волновода  $\rho_\tau$  стремятся к  $\infty$ , а угловая частота

вращения касательной вокруг бинормали  $k$  и угловая частота вращения бинормали вокруг касательной  $\tau$  стремятся к нулю. Соответственно изменятся выражения для направляющих ковариантных и контравариантных векторов (1.37), (1.38). Выражения для метрических тензоров принимают вид

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 + \rho^2 \left( \frac{\partial r_b}{\partial z} \right)^2 & 0 & -\rho r_b \frac{\partial r_b}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\rho r_b \frac{\partial r_b}{\partial z} & 0 & r_b^2 \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

$$\hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\rho}{r_b} \frac{\partial r_b}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho}{r_b} \frac{\partial r_b}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r_b^2} + \frac{\rho^2}{r_b^2} \left( \frac{\partial r_b}{\partial z} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Для коэффициентов разложения (1.35) решение уравнения (1.46) имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{d\dot{A}_{mnp}^E}{dz} v_{np} e_{npp} + \dot{C}_{mnp} (v_{np}^2 - m^2 k^2 r_b^2) e_{npp} - \dot{A}_{mnp}^E m^2 k^2 \frac{e_{npp}}{v_{np}} r_b \frac{dr_b}{dz} + \\ & + \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \sum_i \left\{ \dot{A}_{mni}^M \left( -1 + m^2 k^2 \frac{r_b^2}{\mu_{ni}^2} \right) v_{np} \gamma_{nip}^1 + \dot{A}_{mni}^E m^2 k^2 r_b^2 \frac{v_{np}}{v_{ni}} \gamma_{nip}^7 \right\} = \\ & = -jm\omega\mu_0 \int_0^1 \left( \hat{g} J_m'' \right)_z J_n(v_{np}\rho) \rho d\rho; \\ & \frac{d^2 \dot{A}_{mnp}^E}{dz^2} e_{npp} + \dot{A}_{mnp}^E m^2 k^2 \left\{ e_{npp} + \left( \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{npp}^2 \right\} - \frac{d\dot{C}_{mnp}}{dz} v_{np} e_{npp} + \\ & \dot{C}_{mnp} m^2 k^2 \frac{e_{npp}}{v_{np}} r_b \frac{dr_b}{dz} + \sum_i \left\{ \dot{A}_{mni}^E \left( mk \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{nip}^7 + \frac{d\dot{A}_{mni}^M}{dz} \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \gamma_{nip}^1 + \right. \\ & \left. + \dot{C}_{mni} m^2 k^2 r_b \frac{dr_b}{dz} \gamma_{nip}^7 + \dot{A}_{mni}^M \left\{ \gamma_{nip}^1 \left( \frac{1}{r_b} \frac{d^2 r_b}{dz^2} - \left( \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \right) - m^2 k^2 \frac{n}{\mu_{ni}} \gamma_{nip}^\rho \left( \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \right\} \right\} = \\ & jm\omega\mu_0 \int_0^1 \left[ \left( \hat{g} J_m'' \right)_\rho J_n'(v_{np}\rho) + j \frac{n}{v_{np}\rho} \left( \hat{g} J_m'' \right)_\varphi J_n(v_{np}\rho) \right] \rho d\rho; \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \dot{A}_{mnp}^E}{dz^2} h_{npp} + \dot{A}_{mnp}^E m^2 k^2 \left\{ e_{npp} + \left( \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{npp}^2 \right\} - \frac{d\dot{C}_{mnp}}{dz} v_{np} e_{npp} + \\
& \dot{C}_{mnp} m^2 k^2 \frac{e_{npp}}{v_{np}} r_b \frac{dr_b}{dz} + \sum_i \left\{ \dot{A}_{mni}^E \left( mk \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{i \neq p}^7 + \frac{d\dot{A}_{mni}^M}{dz} \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \gamma_{i \neq p}^1 + \right. \\
& \left. \frac{d^2 \dot{A}_{mnp}^M}{dz^2} h_{npp} + \dot{A}_{mnp}^M \left\{ h_{npp} \left[ m^2 k^2 \cdot \left( 1 + \left( \frac{dr_b}{dz} \frac{n}{\mu_{np}} \right)^2 - \frac{\mu_{np}^2}{r_b^2} \right) \right] - \left( \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{npp}^5 + \frac{1}{r_b} \frac{d^2 r_b}{dz^2} \gamma_{npp}^5 \right\} - \right. \\
& \left. \sum_i \left\{ \dot{C}_{mni} \left[ 1 - \left( \frac{mkr_b}{\mu_{np}} \right)^2 \right] \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \gamma_{i \neq p}^3 + \frac{d\dot{A}_{mni}^E}{dz} \frac{1}{v_{ni}} \gamma_{i \neq p}^3 \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} + \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \frac{d\dot{A}_{mni}^M}{dz} \gamma_{i \neq p}^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{A}_{mni}^M \left[ \left( \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \right)^2 \gamma_{i \neq p}^5 - \frac{1}{r_b} \frac{d^2 r_b}{dz^2} \gamma_{i \neq p}^6 \right] - \dot{A}_{mni}^E \left( \frac{dr_b}{dz} \right)^2 m^2 k^2 \gamma_{i \neq p}^2 \cdot \frac{2v_{ni}}{(v_{ni}^2 - \mu_{ni}^2) \mu_{np}^2} \right\} = \\
& = -jm\omega\mu_0 \int_0^1 \left[ \left( \hat{g} J_m'' \right)_p \frac{n}{\mu_{np}} J_n(\mu_{np} p) + jp \left( \hat{g} J_m'' \right)_\varphi J_n'(\mu_{np} p) \right] dp.
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
h_{np} &= \frac{1}{2} J_n^2(\mu_{np}) \left[ 1 - \left( \frac{n}{\mu_{np}} \right)^2 \right]; \quad e_{npp} = \frac{1}{2} J_{n-1}^2(v_{np}); \\
\lambda'_{np} &= \frac{n\mu_{ni}}{v_{np}^2 - \mu_{ni}^2} J_{n-1}(v_{np}) J_n(\mu_{ni}); \quad \gamma_{npp}^2 = \frac{2(v_{ni}^2 + v_{np}^2)}{(v_{ni}^2 - v_{np}^2)^2} J_{n-1}(v_{ni}) J_{n-1}(v_{np}); \\
\gamma_{npp}^2 &= \frac{1}{6} J_{n-1}^2(v_{np}) \left[ 1 + \frac{(4-n^2)}{v_{np}^2} \right]; \quad \gamma_{npp}^3 = \frac{n\mu_{np} v_{ni}}{v_{ni}^2 - \mu_{np}^2} J_{n-1}(v_{ni}) J_n(\mu_{np}); \\
\gamma_{npp}^4 &= \frac{\left[ 2\mu_{ni}\mu_{np} - n^2 \left( \frac{\mu_{np}}{\mu_{ni}} + \frac{\mu_{ni}}{\mu_{np}} \right) \right]}{\mu_{ni}^2 - \mu_{np}^2} J_n(\mu_{ni}) J_n(\mu_{np}); \quad \gamma_{npp}^4 = 0; \quad (1.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nip}^5 &= \left[ 3\mu_{ni}\mu_{np} \left( \frac{n^2}{\mu_{np}^2} - 1 \right) + \frac{2\mu_{ni}^2\mu_{np}}{(\mu_{ni}^2 - \mu_{np}^2)^2} \left[ 2 - \frac{n^2}{\mu_{np}^2} - \frac{n^2}{\mu_{ni}^2} \right] \right] J_n(\mu_{ni})J_n(\mu_{np}); \\ \gamma_{npp}^5 &= \left[ \mu_{np}^2 + n^2 \left( 1 - \frac{2n^2}{\mu_{np}^2} + \frac{5}{\mu_{np}^2} \right) \right] J_n^2(\mu_{np}) / 6; \\ \gamma_{nip}^6 &= \frac{\mu_{ni}\mu_{np}}{\mu_{ni}^2 - \mu_{np}^2} \left( \frac{n^2}{\mu_{np}^2} - 1 \right) J_n(\mu_{ni})J_n(\mu_{np}); \quad \gamma_{npp}^6 = \frac{n^2}{2\mu_{np}^2} J_n^2(\mu_{np}); \\ \gamma_{nip}^7 &= \frac{v_{ni}J_{n-1}(v_{ni}) \cdot J_{n-1}(v_{np})}{v_{ni}^2 - v_{np}^2}; \quad \gamma_{npp}^7 = e_{npp} / v_{np}; \\ \gamma_{nip}^8 &= \frac{2v_{np}^2}{\mu_{ni}^2 - v_{np}^2} J_n(\mu_{ni})J_{n-1}(v_{np}). \end{aligned}$$

Для получения выражений для коэффициентов (1.50) были использованы специальные (не табличные) интегралы от функций Бесселя. Система уравнений (1.49) является решением задачи возбуждения продольно-нерегулярного волновода сторонними источниками. В этой системе оказываются связанными Е- и Н- типы волн с одинаковым азимутальным индексом  $n$ , что обусловлено азимутальной симметрией волновода вдоль оси  $z$ . Следует, однако, иметь в виду, что все типы волн связаны через плотность стороннего потока  $\mathbf{J}''$ , поскольку  $\mathbf{J}''$  и  $\rho'$  формируются под действием суперпозиции всех волн.

### 1.2.3. Физические векторы электромагнитных полей

Физические векторы электромагнитных полей определяются по (1.42). В случае азимутальной симметрии выражения для компонент электрического и магнитного полей в системе координат  $r_0, \varphi_0, z_0$  имеют вид

$$\dot{E}_{1rm} = \frac{\dot{E}_{pm}}{r_b}; \quad \dot{E}_{1\varphi m} = \frac{\dot{E}_{\varphi m}}{r_b}; \quad \dot{E}_{1zm} = \dot{E}'_{1sm} - \dot{E}'_{1zm} \frac{p}{r_b} \frac{dr_b}{dz}; \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \frac{j}{m\omega\mu_0} \text{rot} \dot{\mathbf{E}}_{1m}. \quad (1.51)$$

С учетом (1.10)-(1.12) выражения (1.51) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1m} = E_{xm} + jE_{ym} = \frac{1}{2r_b} \sum_{i=1}^1 \sum_{n=-N}^N \left\{ \dot{A}_{mni}^E J_{n-1}(p_{Eni}) e^{-j[(n-1)\varphi - mT]} - \dot{A}_{mni}^{*E} J_{n-1}(p_{Eni}) e^{j[(n+1)\varphi - mT]} - \right. \\ \left. - \dot{A}_{mni}^M J_{n-1}(p_{Mni}) e^{-j[(n-1)\varphi - mT]} + \dot{A}_{mni}^{*M} J_{n-1}(p_{Mni}) e^{j[(n+1)\varphi - mT]} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{zm} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \sum_{n=-N}^N \left\{ -J_n(p_{Eni}) \left[ \dot{C}_{mni} e^{-j(n\varphi-mT)} + \dot{C}_{mni}^* e^{j(n\varphi-mT)} \right] - \frac{p}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \left[ J'_n(p_{Eni}) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left[ \dot{A}_{mni}^E e^{-j(n\varphi-mT)} + \dot{A}_{mni}^{*E} e^{j(n\varphi-mT)} \right] - \frac{n}{p_{Mni}} J_n(p_{Mni}) \left[ \dot{A}_{mni}^M e^{-j(n\varphi-mT)} + \dot{A}_{mni}^{*M} e^{j(n\varphi-mT)} \right] \right] \right\}; \\
\dot{H}_{tm} = H_{xm} + jH_{ym} = & \frac{1}{2r_b m \omega \mu_0} \sum_{i=1}^1 \sum_{n=-N}^N \left\{ v_{ni} \left[ \dot{C}_{mni} J_{n-1}(p_{Eni}) e^{-j[(n-1)\varphi-mT]} + \right. \right. \\
& + \dot{C}_{mni}^* J_{n-1}(p_{Eni}) e^{j[(n+1)\varphi-mT]} \left. \right] - \frac{d\dot{A}_{mni}^E}{dz} J_{n-1}(p_{Eni}) e^{-j[(n-1)\varphi-mT]} - \frac{d\dot{A}_{mni}^{*E}}{dz} J_{n-1}(p_{Eni}) \times \\
& e^{j[(n+1)\varphi-mT]} + \frac{d\dot{A}_{mni}^M}{dz} J_{n-1}(p_{Mni}) e^{-j[(n-1)\varphi-mT]} - \frac{d\dot{A}_{mni}^{*M}}{dz} J_{n-1}(p_{Mni}) e^{j[(n+1)\varphi-mT]} + \\
& \left. + \frac{1}{r_b} \frac{dr_b}{dz} p_{Mni} J_n(p_{Mni}) \left[ \dot{A}_{mni}^M e^{-j[(n-1)\varphi-mT]} + \dot{A}_{mni}^{*M} e^{j[(n+1)\varphi-mT]} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{1.52}$$

$$H_{zm} = \frac{1}{2r_b m \omega \mu_0} \sum_{i=1}^1 \sum_{n=-N}^N \left\{ \mu_{ni} J_n(p_{Mni}) \left[ \dot{A}_{mni}^M e^{-j(n\varphi-mT)} + \dot{A}_{mni}^{*M} e^{j(n\varphi-mT)} \right] \right\}.$$

$$\text{Здесь } p_{Eni} = v_{ni} \frac{r}{r_b}; \quad p_{Mni} = \mu_{ni} \frac{r}{r_b}.$$

Выражения (1.52) совместно с уравнениями возбуждения (1.49) определяют динамическую часть электрического поля, возбуждаемого заданной плотностью потока  $J''$ . Полное же электрическое поле  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2$  определяется по (1.43), где  $\mathbf{E}_2$  является решением электростатической задачи (1.44) и выражается через потенциал

$$E_{2r} = -\frac{1}{r_b} \frac{\partial \Phi'}{\partial r}; \quad E_{2\varphi} = -\frac{1}{rr_b} \frac{\partial \Phi'}{\partial \varphi}; \quad E_{2z} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial \varphi} + \frac{p}{r_b} \frac{dr_b}{dz} \frac{\partial \Phi'}{\partial r}. \tag{1.53}$$

В общем случае уравнения движения электронов в заданном электромагнитном поле имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{V}}{dt} = & -\eta_0 R \left\{ \mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{E}) \right\}; \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} = & \mathbf{V},
\end{aligned}$$

где  $\eta_0 = e/m_0$ ;  $e$  – модуль заряда электрона;  $m_0$  – масса покоя электрона;  $c$  – скорость света;

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad R = \sqrt{1 - V^2/c^2} = \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \beta = |\mathbf{V}|/c.$$

Поперечное движение электрона будем рассматривать в комплексной плоскости X, Y, т.е.  $\dot{r} = x + jy$  (рис. 1.15).

Введем нормированные параметры

$$\dot{\Pi} = (V_x + jV_y)/c; w = V_z/c; T = \omega t; r = \frac{r[M]\omega}{c}; z = \frac{z[M]\omega}{c}. \quad (1.55)$$

Тогда (1.54) запишем как

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\Pi}}{dT} = & -\frac{\eta_0 R}{\omega c} \left\{ (E_x + jE_y) - j\dot{\Pi}c\mu_0 H_z + jwc\mu_0 (H_x + jH_y) - \right. \\ & \left. -\dot{\Pi} \left\{ \text{Re} \left[ (E_x + E_y) \dot{\Pi}^* \right] + wE_z \right\} \right\} = f; \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dT} = \dot{\Pi}; \quad \frac{dz}{dT} = w.$$

#### 1.2.4. Разделение движения электрона на дрейфовое и орбитальное

При движении электрона в продольном слабонеоднородном магнитостатическом поле можно произвести разделение полного движения на дрейфовое и орбитальное. Пусть радиус  $r_0$  определяет относительно начала координат расстояние и азимут ведущего центра электронной орбиты, а  $a$  - орбитальное движение электрона, т.е.

$$\dot{r} = re^{j\varphi} = \dot{r}_0 + \dot{a} = r_0 e^{j\varepsilon} + ae^{j\Phi} + O(e^{j2\Phi}). \quad (1.57)$$

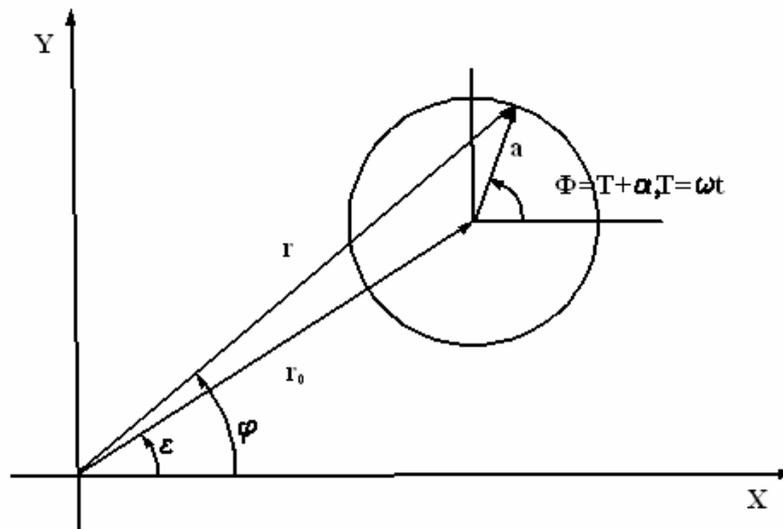


Рис. 1.15. Поперечное движение электрона в комплексной плоскости X, Y.

Фазу орбитального движения  $\Phi$  будем рассматривать как сумму  $\Phi = T + \alpha$ , где  $T$  – временная фаза, а  $\alpha$  - медленно изменяющееся во времени

приращение фазы (см. рис. 1.15). Разделение движения электрона на дрейфовое и орбитальное приводит к увеличению числа уравнений почти в два раза, но позволяет осуществить усреднение уравнений по времени, исключить в правой части уравнений быстро осциллирующие члены и, как следствие, уменьшить численные ошибки при интегрировании дифференциальных уравнений движения электрона. Для нормированных скоростей электрона разделение движения может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{r}}{dT} &= \dot{\Pi} = \frac{d\dot{a}}{dT} + \frac{d\dot{r}_0}{dT} = \dot{\Pi}_1 + \dot{\Pi}_2; \\
\dot{\Pi}_1 &= \frac{d\dot{a}}{dT} = \dot{a} \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dT} + j \frac{d\Phi}{dT} \right) = \dot{\gamma}_1 e^{jT} = \hat{\gamma}_1 e^{j\Phi} = \hat{\gamma}_1 e^{j(T+a)}; \\
\dot{\Pi}_2 &= \frac{d\dot{r}_0}{dT} = \dot{r}_0 \left( \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dT} + j \frac{d\varepsilon}{dT} \right) = \dot{\gamma}_2 e^{j\varepsilon}; \\
\dot{\Pi} &= \hat{\gamma}_1 e^{j(T+a)} + \dot{\gamma}_2 e^{j\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

### 1.2.5. Усредненные уравнения движения

Введенные выше новые фазовые переменные  $r_0, \varepsilon, a, \alpha, \hat{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ , а также  $\frac{d\hat{\gamma}_1}{dT}, \frac{d\alpha}{dT}, \frac{d\dot{\gamma}_2}{dT}, \frac{d\varepsilon}{dT}$  считаем медленно изменяющимися во времени. Это позволит записать усредненные уравнения движения электрона в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\gamma}_1}{dT}, \frac{d\alpha}{dT}, \frac{d\dot{\gamma}_2}{dT}, \frac{d\varepsilon}{dT} \\
\frac{d\hat{\gamma}_1}{dT} = -j\hat{\gamma}_1 \frac{\mathbf{Im} \hat{\gamma}_1}{a} + \dot{F}_1; \quad \frac{d\alpha}{dT} = \mathbf{Re} \hat{\gamma}_1; \quad \frac{d\dot{\gamma}_2}{dT} = -j\dot{\gamma}_2 \frac{\mathbf{Im} \dot{\gamma}_2}{r_0} + \dot{F}_2; \quad \frac{dr_0}{dT} = \mathbf{Re} \dot{\gamma}_2; \quad \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{\mathbf{Im} \dot{\gamma}_2}{r_0}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\dot{F}_1 = \dot{f} e^{-j\Phi T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{f} e^{-j(T+\alpha)} dT; \quad \dot{F}_2 = \dot{f} e^{-j\varepsilon T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{f} e^{-j\varepsilon} dT; \\
\dot{F}_3 = \dot{f}_1^T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{f}_1 dT.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Вычисление интегралов (1.60) будем проводить в предположении, что магнитостатическое поле осесимметрично и слабо меняется вдоль продольной координаты  $z$ , т.е.

$$H_{z0}(r, z) \approx H_{z0}(0, z) = H_{s0}F; H_{r0}(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dH_{z0}(0, z)}{dz} = -\frac{r}{2} H_{s0} \frac{dF}{dz}, \quad (1.61)$$

где  $F = H_{z0}(0, z)/H_{s0}$ ;  $H_{s0} = \frac{\omega \cdot m}{\eta_0 \mu_0}$ ;  $m$  - номер гармоники гирочастоты.

Высокочастотные электромагнитные поля в (1.60) представим в виде (1.44). При вычислении интегралов в (1.60) используем теорему сложения, записав ее в принятых здесь обозначениях в виде

$$e^{-jn\varphi} J_n(r_{E.M}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_l(a_{E.M}) J_{n-l}(r_{0E.M}) e^{-j[\varepsilon(l-n) - j\Phi]}. \quad (1.62)$$

Окончательно выражения (1.60) после усреднения по времени примут вид

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 = & -R \left\{ \frac{1}{2r'_b} \sum_{m,i,n} \left\{ \dot{\Phi}_l - j\hat{\gamma}_1 \frac{\mu_{ni}}{Mmr'_b} J_m(a_{Mni}) J_{n-m}(r_{Mni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{M0} e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}_{mni}^{M0*} e^{j\psi_{mn}} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + j \frac{w}{mM} \dot{\Phi}_2 - \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1^*}{2} \dot{\Phi}_1 - \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1}{2} \dot{\Phi}_1^* - \hat{\gamma}_1 w r'_b \dot{\Phi}_4 \right\} + jFR \left\{ \hat{\gamma}_1 + \frac{wa'}{2F} \frac{dF}{dz'} \right\} \right\}; \\ \dot{F}_2 = & -R \left\{ \frac{1}{2r'_b} \sum_{m,i,n} \left\{ \left[ \dot{\Phi}_5^+ \left( \dot{A}_{mni}^{E0}, r_{Eni}^0, a_{Eni} \right) - \dot{\Phi}_5^+ \left( \dot{A}_{mni}^{M0}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) \right] \left( 1 - \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1^*}{2} \right) - \right. \right. \\ & - j\hat{\gamma} \frac{\mu_{nni}}{mr'_b} \dot{\Phi}_6 \left( \dot{A}_{mni}^{M0}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) + j \frac{w}{m} \left[ v_{ni} \dot{\Phi}_5^+ \left( \dot{C}_{mni}^0, r_{Eni}^0, a_{Eni} \right) - \dot{\Phi}_5^+ \left( \frac{\partial A_{mni}^{E0}}{\partial z'}, r_{Eni}^0, a_{Eni} \right) \right] - \\ & - \dot{\Phi}_5^+ \left( \frac{\partial A_{mni}^{M0}}{\partial z'}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) + \frac{1}{r'_b} \frac{dr'_b}{dz'} \left[ a_{Mni} \dot{\Phi}_6 \left( A_{mni}^{M0}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) + \right. \\ & \left. \left. + r_{Mni}^0 J_m(a_{Mni}) J_{n-m}(r_{Mni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{M0} e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}_{mni}^{M0*} e^{j\psi_{mn}} \right] \right] \right\} - \left\{ \frac{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1}{2} \left[ \dot{\Phi}_7^+ \left( \dot{A}_{mni}^{E0}, r_{Eni}^0, a_{Eni} \right) - \right. \right. \\ & - \dot{\Phi}_7^+ \left( \dot{A}_{mni}^{M0}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) \left. \right] + \hat{\gamma}_1 w r'_b \left[ \dot{\Phi}_6 \left( \dot{C}_{mni}^0, r_{Eni}^0, a_{Eni} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{r'_b} \frac{dr'_b}{dz'} \left[ \dot{\Phi}_8 - \frac{n}{\mu_{mi}} \dot{\Phi}_6 \left( A_{mni}^{M0}, r_{Mni}^0, a_{Mni} \right) \right] \right] \right\} \right\} + jFR \left( \dot{\gamma}_2 + \frac{w r'_b}{2F} \frac{dF}{dz'} \right). \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & -R \left\{ \frac{1}{2r'_b} \sum_{m,n,i} \left\{ r'_b \dot{\Phi}_4 (1 - w^2) - \frac{j}{2} \left( \hat{\gamma}_1^* \dot{\Phi}_2 - \hat{\gamma}_1 \dot{\Phi}_2^* \right) - \frac{w}{2} \left( \hat{\gamma}_1^* \dot{\Phi}_1 - \hat{\gamma}_1 \dot{\Phi}_1^* \right) \right\} \right\} - \\ & - j \frac{R}{4} \frac{dF}{dz'} \left[ r'_0 \left( \dot{\gamma}_2^* - \dot{\gamma}_2 \right) + \dot{a} \left( \dot{\gamma}_1^* - \dot{\gamma}_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\psi_{mn} &= \varepsilon(n-m) + \alpha m; \quad \dot{\Phi}_1 = J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{E0} J_{m-1}(a_{Eni}) e^{-j\psi_{mn}} - \dot{A}_{mni}^{E0*} J_{m+1}(a_{Eni}) e^{j\psi_{mn}} \right] - \\
&- J_{n-m}(r_{mni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{M0} J_{m-1}(a_{Mni}) e^{-j\psi_{mn}} - \dot{A}_{mni}^{M0*} J_{m+1}(a_{Mni}) e^{j\psi_{mn}} \right]; \\
\dot{\Phi}_2 &= \nu_{ni} J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \dot{C}_{mni}^0 J_{m-1}(a_{Eni}) e^{-j\psi_{mn}} + \dot{C}_{mni}^{0*} J_{m+1}(a_{Eni}) e^{j\psi_{mn}} \right] - \\
&- J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \frac{\partial \dot{A}_{mni}^{E0}}{\partial z'} J_{m-1}(a_{Eni}) e^{-j\psi_{mn}} + \frac{\partial \dot{A}_{mni}^{E0*}}{\partial z'} J_{m-1}(a_{Eni}) e^{j\psi_{mn}} \right] + \\
&+ J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \frac{\partial \dot{A}_{mni}^{M0}}{\partial z'} J_{m-1}(a_{Mni}) e^{-j\psi_{mn}} + \frac{\partial \dot{A}_{mni}^{M0*}}{\partial z'} J_{m-1}(a_{Mni}) e^{j\psi_{mn}} \right] + \\
&+ \frac{1}{r_b'} \frac{dr_b'}{dz'} \left\{ a_{Mni} J_m(a_{Mni}) J_{n-m}(r_{Mni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{M0} e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}_{mni}^{M0*} e^{j\psi_{mn}} \right] + \right. \\
&\left. + r_{Mni}^0 \left[ \dot{A}_{mni}^{M0} J_{m-1}(a_{Mni}) J_{n+1-m}(r_{Mni}^0) e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}_{mni}^{M0*} J_{m+1}(a_{Mni}) J_{n-1-m}(r_{Mni}^0) e^{j\psi_{mn}} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\Phi_3 = J_{n-m}(r_{Eni}^0) J_m(a_{Eni}) \left[ \dot{C}_{mni}^0 e^{-j\psi_{mn}} + \dot{C}_{mni}^{0*} e^{j\psi_{mn}} \right];$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4 &= \Phi_3 - \frac{1}{r_b'} \frac{dr_b'}{dz'} \left\{ \dot{A}_{mni}^{E0} e^{-j\psi_{mn}} \left[ J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \frac{a_{Eni}}{\nu_{ni}} J_{m-1}(a_{Eni}) - \frac{n}{\nu_{ni}} J_m(a_{Eni}) \right] + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{r_{Eni}^0}{\nu_{ni}} J_m(a_{Eni}) J_{n+1-m}(r_{Eni}^0) \right] + \right. \\
&\left. + \dot{A}_{mni}^{E0*} e^{j\psi_{mn}} \left[ J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \frac{a_{Eni}}{\nu_{ni}} J_{m-1}(a_{Eni}) - \frac{n}{\nu_{ni}} J_m(a_{Eni}) \right] + \frac{r_{Eni}^0}{\nu_{ni}} J_m(a_{Eni}) J_{n+1-m}(r_{Eni}^0) \right] - \right. \\
&\left. - \frac{n}{\mu_{ni}} J_m(a_{Eni}) J_{n-m}(r_{Eni}^0) \left[ \dot{A}_{mni}^{E0} e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}_{mni}^{E0*} e^{j\psi_{mn}} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\dot{\Phi}_5^\pm(\dot{A}, r, a) = J_m(a) \left[ \dot{A} \cdot J_{n-1-m}(r) e^{-j\psi_{mn}} \pm \dot{A}^* \cdot J_{n+1-m}(r) e^{j\psi_{mn}} \right];$$

$$\dot{\Phi}_6(\dot{A}, r, a) = \dot{A} J_{m-1}(a) J_{n-m-1}(a) e^{-j\psi_{mn}} + \dot{A}^* \cdot J_{m-1}(a) J_{n-m-1}(r) e^{j\psi_{mn}};$$

$$\dot{\Phi}_7^\pm(\dot{A}, r, a) = \dot{A}^* J_{m-2}(a) J_{n-m+1}(r) e^{j\psi_{mn}} \pm \dot{A} \cdot J_{m+2}(a) J_{n-m-1}(r) e^{-j\psi_{mn}};$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_8 &= \frac{1}{v_{ni}} \left\{ \dot{A}_{mni}^{E0} e^{-j\psi_{mn}} \left[ -J_{n-m-1}(r_{Eni}^0) (a_{Eni} J_{m-2}(a_{Eni}) - n J_{m+1}(a_{Eni})) + r_{Eni}^0 J_{m+1}(a_{Eni}) J_{n-m}(r_{Eni}^0) \right] + \right. \\ &+ \dot{A}_{mni}^{E0*} e^{j\psi_{mn}} \left[ J_{n-m-1}(r_{Eni}^0) (a_{Eni} J_{m-2}(a_{Eni}) - n J_{m-1}(a_{Eni})) + r_{Eni}^0 J_{m-1}(a_{Eni}) J_{n-m}(r_{Eni}^0) \right] \left. \right\}; \\ \dot{A}_{mni}^{E0} &= \frac{\eta_0 \dot{A}_{mni}^E}{c^2}; \quad \dot{A}_{mni}^{M0} = \frac{\eta_0 \dot{A}_{mni}^M}{c^2}; \quad \dot{C}_{mni}^0 = \frac{\eta_0 \dot{C}_{mni}}{\omega c}; \quad r_{Mni}^0 = \frac{\mu_{ni} r_0}{r_b}; \quad a_{Mni} = \frac{\mu_{ni} a}{r_b}; \\ r_{Eni}^0 &= \frac{v_{ni} r_0}{r_b}; \quad a_{Eni} = \frac{v_{ni} a}{r_b}; \quad r_b' = r_b \frac{\omega}{c}; \quad z' = z \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

Совокупность этих уравнений движения электронов с уравнениями возбуждения образует самосогласованную нелинейную теорию гирорезонансных приборов с нерегулярной электродинамической системой.

### 1.2.6. Трехмерные поля пространственного заряда для гирорезонансных приборов с трубчатыми равноперемешанными спирализованными электронными потоками и азимутально-симметричными рабочими типами волн

В [35,36,39] построены двумерные нелинейные уравнения с учетом сил пространственного заряда для осесимметричных гирорезонансных приборов с трубчатыми равноперемешанными на входе в область взаимодействия электронными потоками. Эти уравнения могут быть использованы в случае, когда фазовая скорость рабочего вида поля заметно выше скорости света  $c$ , режим близок к синхронному, а магнитостатическое поле строго однородно, т.е. в случае, когда эффектами продольного группирования электронов можно пренебречь. Во многих случаях, однако, этого сделать нельзя, например, при взаимодействии электронного потока с полями волновода с сечением, не близким к критическому, в схемах с неоднородным магнитостатическим полем. В последнем случае в связи с трансформацией поперечной модуляции в продольную, эффекты продольной группировки приобретают важное значение, и продольная составляющая поля пространственного заряда может оказывать большое влияние на процесс взаимодействия, чем поперечная.

В настоящем разделе с использованием уравнений возбуждения, сформулированных в работе [36], получены выражения для полного поля пространственного заряда в осесимметричных гирорезонансных приборах с равноперемешанными трубчатыми потоками и на их основе построены соответствующие трехмерные нелинейные уравнения. Как и в предыдущих разделах, особое внимание уделялось операции выделения разрывной части поля, позволяющей, с одной стороны, резко ускорить сходимость рядов, представляющих решение, а, с другой стороны, избавляющей от необходимости оперировать с неравномерно сходящимися рядами, к которым неприменима операция почленного дифференцирования.

### Расчет полного поля пространственного заряда

Для расчета полного поля пространственного заряда воспользуемся уравнениями возбуждения, полученными для скалярного  $\hat{\varphi}$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов при кулоновской калибровке

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (1.64)$$

В этом случае  $\mathbf{A}$ ,  $\hat{\varphi}$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\varphi} &= -\rho_{CT}^e / \varepsilon_0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \left( \vec{J}_{CT}^e - \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}', \end{aligned} \quad (1.65)$$

где  $\rho_{CT}^e$ ,  $\mathbf{J}_{CT}^e$  - сторонние плотность пространственного заряда и плотность электрического тока. Граничные условия для  $\mathbf{A}$  и  $\hat{\varphi}$  на боковой поверхности  $S$  волновода в пренебрежении потерями могут быть записаны как

$$\hat{\varphi}|_S = 0, [\mathbf{n}, \mathbf{A}]|_S = 0. \quad (1.66)$$

При такой постановке задачи поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  определяются так:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 = -\nabla \hat{\varphi}, \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.67)$$

Показано, что решение задачи (1.25), (1.26) может быть представлено в следующем виде (используем сразу цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ ):

$$\hat{\varphi} = \sum_{S=1}^{\infty} \varphi_S(z, t) \Phi_S^e(r, \varphi), \quad (1.68)$$

$$\varphi_S(z, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0 \aleph_S^e N_S^e} \int_{-\infty}^{+\infty} R_S(z') e^{-\aleph_S^e |z-z'|} dz', \quad (1.69)$$

$$N_S^e = \int_{S_{\perp}} \left( \Phi_S^e \right)^2 dS_{\perp}, R_S = \int_{S_{\perp}} \rho_{CT}^e(z') \Phi_S^e dS_{\perp},$$

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^3 \sum_{S=1}^{\infty} a_{sn}^{(q)}(z) \mathbf{A}_S^{(q)}(r, \varphi) e^{jn\omega t}, \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_s^{(1)} &= (r, \varphi) = z^0 \Phi_s^e(r, \varphi), \\
\mathbf{A}_s^{(2)} &= (r, \varphi) = \nabla_{\perp} \Phi_s^e(r, \varphi) / \aleph_s^e, \\
\mathbf{A}_s^{(3)} &= (r, \varphi) = [\nabla_{\perp} \Phi_s^m, z^0] / \aleph_s^m, \\
\frac{d^2 a_{sn}^{(1)}}{dz^2} + h_{sn}^2 a_{sn}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{N_s^e} \Pi_{sn}^{(1)} - \varepsilon_0 \mu_0 j n \omega \frac{d\varphi_{sn}}{dz}, \\
\frac{d^2 a_{sn}^{(2)}}{dz^2} + h_{sn}^2 a_{sn}^{(2)} &= \frac{\mu_0}{N_s^e} \Pi_{sn}^{(2)} - \varepsilon_0 \mu_0 j n \omega \aleph_s^e \varphi_{sn},
\end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\Pi_s = \int_{S_{\perp}} \vec{J}_{CT}^e \vec{A}_s^{(q)} dS_{\perp}, \quad \Pi_{sn}^{(q)} = \int_0^{2\pi} \Pi_s^{(q)} e^{-jn\omega t} d\omega t,$$

$$\varphi_{sn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_s e^{-jn\omega t} d\omega t,$$

$$h_{sn}^2 = (n\omega)^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (\aleph_s^e)^2, \quad \gamma_{sn}^2 = (n\omega)^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (\aleph_s^m)^2,$$

$$N_s^e = \int_{S_{\perp}} |\vec{A}_s^{(2)}|^2 dS_{\perp}, \quad N_s^m = \int_{S_{\perp}} |\vec{A}_s^{(3)}|^2 dS_{\perp}.$$

В рассматриваемом случае круглого волновода и азимутальной симметрии источников  $\Phi_s^e = J_0((\nu_s/b)r)$ ,  $\aleph_s^e = \nu_s/b$ ,  $\nu_s$  - s-й корень функции  $J_0(x)$ ,  $\Phi_s^m = J_0((\mu_s/b)r)$ ,  $\aleph_s^m = \mu_s/b$ ,  $\mu_s$  - s-й корень функции  $J_0(x)$ ,  $b$  - радиус волновода.

В случае приборов с незамедленными волнами и равноперемешанными потоками, взаимодействие в которых протекает при условиях, близких к синхронному на одной их гармоник циклотронной частоты, функции  $R_s(t, z')$  и  $\Pi_s^{(q)}(t, z')$  являются медленно изменяющимися по координате  $z'$ . В интегралах типа (1.69) их можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в точке наблюдения  $z$  и ограничиться первыми членами, учитывая быструю сходимость интеграла по  $z'$ , обусловленную множителем типа  $e^{-\aleph_s^e |z-z'|}$ . Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
R_s(z', t) &\cong R_s^0(t) + \left. \frac{\partial R_s}{\partial z'} \right|_{z=z'} (z - z') + O\left[(z' - z)^2\right], \\
\Pi_s^{(q)}(z', t) &\cong \Pi_s^{(q)0}(t) + \left. \frac{\partial \Pi_s^{(q)}}{\partial z'} \right|_{z=z'} (z' - z) + O\left[(z' - z)^2\right].
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Используя (1.72), закон сохранения заряда и, предполагая электронный поток тонким по радиусам ведущего центра, из (1.69) и (1.70) получим для электрических полей

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \frac{I_0}{2\pi^2 \varepsilon_0 v_s^2 J_1^2(v_s)} \int_0^{2\pi} \frac{J_1\left(\frac{v_s}{b} r'\right)}{v_s} d\alpha_0, \\ \mathbf{A}_n &= \mathbf{r}_0 A_{rn} + \boldsymbol{\varphi}_0 A_{\varphi n} + \mathbf{z}_0 A_{zn}, \\ A_{rn} &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{v_s}{b} r\right)}{\left[v_s^2 - (nkb)^2\right] J_1^2(v_s)} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v_r}{v_z} J_1\left(\frac{v_s}{b} r'\right) e^{-jn\omega t} d\alpha_0 d\omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{jn\omega b}{v} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\left(\frac{v_s}{b} r'\right) e^{-jn\omega t} d\alpha_0 d\omega \right\} e^{jn\omega t},\end{aligned}\tag{1.73}$$

$$A_{\varphi n} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi^3} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{J_1(\mu_s r/b)}{\left[\mu_s^2 - (nkb)^2\right] J_0^2(\mu_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v_\varphi}{v_z} J_1\left(\frac{\mu_s}{b} r'\right) e^{-jn\omega t} d\alpha_0 d\omega t e^{jn\omega t},\tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}A_{zn} &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi^3} \sum_{s=i}^{\infty} \frac{J_0(v_s r/b)}{\left[v_s^2 - (nkb)^2\right] J_1^2(v_s)} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v_r}{v_z} J_0\left(\frac{v_s}{b} r'\right) e^{-jn\omega t} d\alpha_0 d\omega t + \frac{jn\omega b b^2}{v_s^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{v_z^2} \frac{dv_z}{dz} J_0\left(\frac{v_s}{b} r'\right) + \frac{v_s}{b} \frac{1}{v_z} \frac{dr'}{dz} J_1\left(\frac{v_s}{b} r'\right) e^{-jn\omega t} d\alpha_0 d\omega \right\} e^{jn\omega t}.\end{aligned}$$

Здесь  $I_p$  - ток пучка,  $v_r(t, \alpha_0)$ ,  $v_\varphi(t, \alpha_0)$ ,  $v_z(t, \alpha_0)$  - составляющие скорости электрона в плоскости  $z = z'$ ;  $r' = r'(t, \alpha_0)$  - радиус электрона в той же плоскости,  $\alpha_0 = \alpha - \omega t_0$  - относительная фаза вращения электрона в начальной плоскости (напомним, что  $dt/dt_0|_{\alpha_0=const} = 1$ ),  $\alpha$  - абсолютная фаза вращения электрона (геометрический угол, определяющий положение электрона на орбите) в начальной плоскости в момент  $t = t_0$ ;  $i(n)$  соответствует  $v_i$ , при котором  $v_i^2 - (nkb)^2 > 0$ ,  $m(n)$  соответствует  $\mu_m$ , а  $\mu_m^2 - (nkb)^2 > 0$ . Распространяющиеся волны соответствуют  $s < i(n)$  (ТМ-волны) и  $s < m(n)$  (ТЕ-волны) и описываются общими уравнениями возбуждения (1.71). Используя (1.63), определим поля пространственного заряда, выделяя в явном виде разрывные части  $E_p$  и  $H_p$ :

$$\begin{aligned}
E_p &= r_0 (E_{1r} + E_{2r}) + z_0 (E_{1z} + E_{2z}), \\
E_{1r} &= -\frac{I_0}{8\pi^2 \varepsilon_0 r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{v} [1 + \text{sign}(r - r')] d\alpha_0, \\
E_{1z} &= -\frac{I_0}{8\pi^2 \varepsilon_0 r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{v_z} \left\{ \frac{dv_z}{dz} \left[ \ln \frac{rr'}{b^2} + \text{sign}(r - r') \ln \frac{r}{r'} \right] - \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dz} [1 - \text{sign}(r - r')] \right\} d\alpha_0, \\
E_{2r} &= \frac{I_0 W^0 k}{2\pi^3} \sum_{s=S_0}^{\infty} \left\{ \frac{J_1\left(\frac{v_s r}{b}\right)}{\left[v_s^2 - (kb)^2\right] J_1^2(v_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\omega t} \left[ -j \frac{v_r}{v_z} J_1\left(\frac{v_s r'}{b}\right) + c(kb) \frac{1}{v_s v_z} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times J_0\left(\frac{v_s r'}{b}\right) \right] d\alpha_0 d\omega t \right\} e^{j\omega t}, \tag{1.75} \\
E_{2\varphi} &= \frac{I_0 W^0 k}{2\pi^3} \sum_{s=S_0}^{\infty} \left[ \frac{J_1\left(\frac{\mu_s r}{b}\right)}{\left[\mu_s^2 - (kb)^2\right] J_0^2(\mu_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\omega t} j \frac{v_\varphi}{v_z} J_1\left(\frac{\mu_s r'}{b}\right) d\alpha_0 d\omega t \right] e^{j\omega t}, \\
E_{2z} &= \frac{I_0 W^0 k}{2\pi^3} \sum_{s=S_0}^{\infty} \left\{ \frac{J_0\left(\frac{v_s r}{b}\right)}{\left[v_s^2 - (kb)^2\right] J_1^2(v_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\omega t} \left\{ j J_1\left(\frac{v_s r'}{b}\right) - \frac{\omega b^2}{v_s^2} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[ \frac{1}{v_s^2} \frac{dv_z}{dz} J_0\left(\frac{v_s r}{b}\right) + \frac{v_s}{b} \frac{1}{v_z} \frac{dr'}{dz} J_1\left(\frac{v_s r'}{b}\right) \right] \right\} d\alpha_0 d\omega t \right\} e^{j\omega t}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, k = \omega/c,$$

$$H_{pt} = r_0 (H_{1r} + H_{2r}) + \varphi_0 (H_{1\varphi} + H_{2\varphi})$$

$$\begin{aligned}
H_{1\varphi} &= \frac{I_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{r'}{r} + \frac{r}{r'} + \text{sign}(r - r') \left( \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} \right) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_r}{v_z} \right) - \frac{v_r}{v_z} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dz} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{v_r}{v_z} \frac{dr'}{dz} \right) [1 - \text{sign}(r - r')] \right\} d\alpha_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1T} &= \frac{I_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_\varphi}{v_z} \right) - \frac{v_\varphi}{v_z} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dz} \right] \left[ \frac{r'}{r} + \frac{r}{r'} - 2 \frac{rr'}{b^2} - \text{sign}(r-r') \left( \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b} \frac{dr'}{dz} \frac{v_\varphi}{v_z} \left( \frac{b}{r} - \frac{2r}{b} + \text{sign}(r-r') \frac{b}{r} \right) \right\} d\alpha_0, \\
H_{2\varphi} &= \frac{I_0}{2\pi^3} \sum_{s=S_0}^{\infty} \left[ \frac{(kb)^2 J_1 \left( \frac{v_s r}{b} \right)}{\left[ v_s^2 - (kb)^2 \right] J_1^2(v_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\omega t} \left\{ \frac{1}{v_s^2} J_1 \left( \frac{v_s r'}{b} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_r}{v_z} \right) - \frac{v_r}{v_z} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dz} \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{v_s b} J_0 \left( \frac{v_s r'}{b} \right) \left( 1 + \frac{v_r}{v_z} \frac{dr'}{dz} \right) \right\} d\alpha_0 d\omega t \right] e^{j\omega t}, \\
H_{2r} &= \frac{I_0}{2\pi^3} \sum_{s=S_1}^{\infty} \left[ \frac{(kb)^2 J_1 \left( \frac{v_s r}{b} \right)}{\left[ \mu_s^2 - (kb)^2 \right] J_0^2(\mu_s)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\omega t} \left\{ \frac{1}{\mu_s^2} J_1 \left( \frac{\mu_s r'}{b} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_\varphi}{v_z} \right) - \frac{v_\varphi}{v_z} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dz} \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_s b} J_0 \left( \frac{\mu_s r'}{b} \right) \left( 1 + \frac{v_\varphi}{v_z} \frac{dr'}{dz} \right) \right\} d\alpha_0 d\omega t \right] e^{j\omega t}. \tag{1.76}
\end{aligned}$$

При записи выражений для полей (1.75) и (1.76) использовались следующие формулы суммирования рядов:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( v_s \frac{r}{b} \right) J_0 \left( v_s \frac{r'}{b} \right)}{v_s J_1^2(v_s)} &= \frac{b}{4r} [1 + \text{sign}(r-r')], \\
\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( v_s \frac{r'}{b} \right) J_0 \left( v_s \frac{v_s}{b} \right)}{v_s J_1^2(v_s)} &= \frac{b}{4r'} [1 - \text{sign}(r-r')], \\
\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0 \left( \frac{v_s r}{b} \right) J_0 \left( \frac{v_s r'}{b} \right)}{v_s^2 J_1^2(v_s)} &= -\frac{1}{4} \left\{ \ln \frac{rr'}{b^2} + \text{sign}(r-r') \ln \frac{r}{r'} \right\}, \\
\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( \frac{v_s r'}{b} \right) J_1 \left( \frac{v_s r}{b} \right)}{v_s^2 J_1^2(v_s)} &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{r}{r'} + \frac{r'}{r} + \text{sign}(r-r') \left[ \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} \right] \right\}, \tag{1.77}
\end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_s r'}{b}\right) J_1\left(\frac{\mu_s r'}{b}\right)}{\mu_s^2 J_1^2(\mu_s)} = \frac{1}{4} \left[ \frac{b}{r} - \frac{2r}{b} + \text{sign}(r-r') \frac{b}{r} \right],$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\mu_s \frac{r}{b}\right) J_1\left(\mu_s \frac{r'}{b}\right)}{\mu_s^2 J_1^2(\mu_s)} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{r}{r'} - 2 \frac{rr'}{b^2} + \frac{r'}{r} + \text{sign}(r-r') \left[ \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} \right] \right\}.$$

Напомним, что в (1.75) и (1.76) индекс 1 соответствует потенциальной части поля, индекс 2 – вихревой. В быстро сходящихся рядах, представляющих вихревую часть поля пространственного заряда, удержана только первая гармоника частоты  $\omega$ , поскольку при построении усредненных уравнений движения вклад высших гармоник  $n\omega$  имеет более высокий порядок по  $\beta^2 = (v/c)^2$ . В отличие от этого потенциальные члены поля, включающие разрывные части, содержат бесконечный ряд гармоник частоты  $\omega$ .

*Усредненные уравнения движения электрона в трубке дрейфа под действием полей пространственного заряда пучка*

Положим, что  $i = m = 1$  при  $n = 1$ , т.е. промодулированный электронный поток движется в трубке, закритической для полей ТЕ и ТМ частоты  $\omega$ . Будем также считать, что сечение трубки дрейфа не близко к критическому для ТЕ-волн на частоте  $2\omega$  ( $n\omega$ ), и возбуждением распространяющихся полей на гармониках  $\omega$  можно пренебречь. В таком случае поле, действующее на электрон в дрейфующем потоке, определяется выражениями (1.75), (1.76). Используя методику, развитую в п. 2.5, запишем усредненные уравнения движения электрона в слабонеоднородном магнитоэстатическом поле в следующей форме ( $\omega \cong \Omega$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\gamma}}{dt} &= j(\Omega - \omega)\gamma + \frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} (jE_x - E_y - \mu_0 v_z H_x - j\mu_0 v_z H_y) e^{-j\omega t} d\omega t + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \frac{dF}{dt} / F - j\Omega \frac{\gamma\gamma^* + v_z^2}{2c^2} \gamma, \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_z d\omega t - \frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_x H_y - v_y H_x) d\omega t - \frac{1}{2} \frac{1}{v_z} \gamma\gamma^* \frac{dF}{dt} / F.$$

Здесь

$$F = B^0(z, 0) / B_s^0, \quad \gamma = \omega e^{-j\omega t} (x + jy), \quad F$$

$$\begin{aligned}
E_x &\cong -E_\varphi + E_r \frac{x}{r}, E_y \cong -E_r + E_\varphi \frac{x}{r}, H_x \cong -H_\varphi H_r \frac{x}{r}, \\
H_y &\cong -H_r + H_\varphi \frac{x}{r}, v_x \cong -v_\varphi + v_r \frac{x}{r}, v_y \cong v_r + v_\varphi \frac{x}{r}, \\
v_x &= \frac{\gamma^* e^{-j\omega t} - \gamma e^{j\omega t}}{2j}, v_y = \frac{\gamma e^{j\omega t} - \gamma^* e^{-j\omega t}}{2}, x = \frac{\gamma e^{j\omega t} + \gamma^* e^{-j\omega t}}{2\omega F}, \\
y &= \frac{\gamma e^{j\omega t} - \gamma^* e^{-j\omega t}}{2j\omega F}, \Omega = \eta_0 \mu_0 H_z^0.
\end{aligned}$$

Подставив в (1.78) выражения для  $E_p, H_p$  (1.75), (1.76) и произведя интегрирование, получим в безразмерных переменных следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
W_m \frac{du_m}{dT} &= \frac{S}{R} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N \frac{v_m - v_k}{\sqrt{(u_m - u_k)^2 + (v_m - v_k)^2}} \frac{1}{W_k} + \frac{D_1(R)}{N} \sum_{k=1}^N \frac{v_k}{W_k} + \frac{D_2(R)W_m}{N} \times \\
&\times \sum_{k=1}^N \frac{1}{W_k} \frac{du_k}{dT} + \frac{1}{2} \frac{dF}{dT} \frac{u_m W_m}{F} + v_m \left[ -\Phi + \frac{2\mu}{\beta_\perp^2} (1-F) + \mu (u_m^2 + v_m^2 + W_m^2 q^{-2}) F \right] = f_{um}, \\
W_m \frac{dv_m}{dT} &= -\frac{S}{R} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N \frac{u_m - u_k}{\sqrt{(u_m - u_k)^2 + (v_m - v_k)^2}} \frac{1}{W_k} - \frac{D_1(R)}{N} \sum_{k=1}^N \frac{u_k}{W_k} + \frac{D_2(R)W_m}{N} \times \\
&\times \sum_{k=1}^N \frac{1}{W_k} \frac{dv_k}{dT} + \frac{1}{2} \frac{dF}{dT} \frac{v_m W_m}{F} - u_m \left[ -\Phi + \frac{2\mu}{\beta_\perp^2} (1-F) + \mu (u_m^2 + v_m^2 + W_m^2 q^{-2}) F \right] = f_{vm}, \\
W_m \frac{dW_m}{dT} &= -(S_0 InR + S_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{W_k^2} \frac{dW_k}{dT} + \frac{1}{RN} \sum_{k \neq m}^N \frac{\frac{S_2}{W_k^2} (v_m u_k - u_m v_k)}{\sqrt{(u_m - u_k)^2 + (v_m - v_k)^2}} + \\
&+ D_3(R) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{W_k} \left[ u_m \frac{du_k}{dT} + v_m \frac{dv_k}{dT} \right] - \frac{1}{2} q^2 \frac{dF/dT}{F} (u_m^2 + v_m^2) = f_{Wm}, \\
\frac{dR}{dT} &= -\frac{1}{2} \frac{dF/dT}{F} R, R(0) = 1, m = 1, 2, \dots, N. \tag{1.79}
\end{aligned}$$

Здесь  $u_m + jv_m = \gamma_m / v_\perp$ ,  $W_m = v_m / v_\parallel$ ,  $v_\perp, v_\parallel$  - поперечная и продольная скорости электронов в начальной плоскости,  $T = z/L$ ,

$$\Phi = \frac{\Omega - \omega}{v_\parallel} L, \mu = \frac{1}{2} \Omega \beta_\perp^2 \frac{L}{v_\parallel},$$

$S = \frac{I_0 W^0}{4\pi^2 V_{\parallel} \beta_{\perp}} \frac{L}{r_0^0}$  – главный параметр пространственного заряда,

$W^0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ ,  $r_0^0$  – радиус ведущего центра электронной орбиты при

$B_0(z) = B_s^0$ ,  $V_{\parallel} = v_{\parallel}^2/2\eta_0$ ,

$$S_0 = S\pi q \frac{r_0^0}{L}, S_1 = S\pi q \frac{r_0^0}{L} \ln \frac{r_0^0}{b}, S_2 = S\beta_{\parallel} \frac{1}{kL}, S_3 = S\beta_{\perp}^2,$$

$$D_1 = S\pi\beta_{\perp} k r_0^0 \Sigma_1, D_2 = S\pi\beta_{\parallel} \beta_{\perp} \frac{r_0^0}{L} (kb)^2 [\Sigma_2 + \Sigma_3],$$

$$D_3 = S\pi q \beta_{\perp}^2 \frac{r_0^0}{L} \left\{ \Sigma_4 - (kb)^2 [\Sigma_2 + \Sigma_3] \right\},$$

$$\Sigma_1 = \sum_S \frac{J_1^2\left(\frac{\mu_s}{b} r_0^0 R\right)}{\left[\mu_s^2 - (kb)^2\right] J_0^2(\mu_s)}.$$

$$\Sigma_2 = \sum_S \frac{J_1^2\left(\frac{v_s}{b} r_0^0 R\right)}{v_s^2 \left[v_s^2 - (kb)^2\right] J_1^2(v_s)}, \Sigma_3 = \sum_S \frac{J_1^2\left(\frac{\mu_s}{b} r_0^0 R\right)}{\mu_s \left[\mu_s^2 - (kb)^2\right] J_0^2(\mu_s)},$$

$$\Sigma_4 = \sum_S \frac{J_1^2\left(\frac{v_s}{b} r_0^0 R\right)}{\left[v_s^2 - (kb)^2\right] J_1^2(v_s)},$$

$b$  – радиус трубки дрейфа.

В полученных уравнениях коэффициенты  $S_i$  определяют потенциальную часть сил пространственного заряда,  $D_i$  – вихревую часть. Главными коэффициентами являются  $S$  и  $D_1$ , остальные отличаются от них малыми множителями типа  $r_0^0/L$ ,  $\beta_{\perp}$ ,  $\beta_{\perp}^2$ ,  $\beta_{\parallel}\beta_{\perp}$  и их комбинациями. При определенных условиях ( $r_0^0/L \ll 1$ ,  $\beta^2 \ll 1$ ,  $dF/dT = 0$ ,  $W$ ,  $|dv/dT|$ ,  $|du/dT| \sim 1$ ) в (1.79) можно положить равными нулю все коэффициенты  $S_i$ ,  $D_i$  кроме  $S$  и  $D_1$ . В этом случае получим упрощенную систему уравнений. Проанализируем более подробно условия такого перехода. Одновременное выполнение условий ( $r_0^0/L \ll 1$ ,  $|dv/dT|$ ,  $|du/dT| \sim 1$ ) означает, что длина трубки велика по сравнению с поперечными размерами пучка, а фазовая скорость процессов группировки вдоль  $z$  достаточно большая (условия синхронизма  $\omega \cong \Omega$  почти точно выполняются). Кроме того,  $dF/dT = 0$ , т.е. магнитостатическое поле везде однородно и, следовательно, упомянутые условия синхронизма

выполняются по всей длине трубки дрейфа. При таких условиях элементарные электронные трубки ( $\alpha_0 = const$ ) имеют малую деформацию вдоль  $z$ . Здесь  $z$ -группировка отсутствует. Продольное поле пространственного заряда, равно как и коррекция поперечного поля за счет деформации электронной трубки, становятся очень малыми. Достаточно предположить, что  $dF/dT \neq 0$ , чтобы ситуация изменилась: тогда малые коэффициенты  $S_i$ ,  $D_i$  умножаются на большие величины  $dv/dT$ ,  $du/dT$  и т.д., поскольку в определяющих эти величины уравнениях появляются большие коэффициенты  $(2\mu/\beta_{\perp}^2)(F-1)$ . С физической точки зрения даже слабая неоднородность магнитостатического поля сильно меняет фазовую скорость процесса группировки по  $z$  (из-за нарушения условия  $\Omega = \omega$ ). В результате возникает существенная деформация элементарных трубок, приводящая к появлению заметных продольных сил пространственного заряда и коррекции поперечных сил. Таким образом, при  $dF/dT \neq 0$  следует использовать полную систему уравнений (1.79).

*Нелинейные уравнения для гирорезонансных приборов со слабо нерегулярным волноводом*

Используя уравнения (1.79), а также результаты слаборелятивистской кинематической теории гирорезонансных приборов со слабо нерегулярными волноводами, нетрудно записать нелинейные уравнения волноводных гирорезонансных приборов с рабочей волной  $H_{01}$ , которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_m}{dT} + j \frac{d\nu_m}{dT} &= \left\{ \Pi(g, F) \frac{j\dot{B} + W_m \dot{d}}{g} + f_{mu} + jf_{mv} \right\} \frac{1}{W_m}, \\ \frac{dW_m}{dT} &= -\frac{q^2}{dT} \left\{ \Pi(g, F) \frac{\mathbf{Re}(u_m + j\nu_m) \dot{d}}{\sigma} + f_{mW} \right\}, \\ \frac{d\dot{B}}{dT} &= \frac{2\mu}{\beta_{\perp}^2} \dot{d}, \\ \frac{d\dot{d}}{dT} &= -\frac{2\mu}{q^2} \left[ 1 - \frac{1 + \frac{\mu_1^2 g^2}{6\mu} \left( \frac{dg}{dT} \right)^2}{g^2} \right] B + \Pi(g, F) \frac{A}{gN} \sum_{m=1}^N \frac{u_m + j\nu_m}{W_m}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

$0 \leq T \leq 1, m = 1, 2, \dots, N,$   
где

$$\Pi(g, F) = J_1\left(\frac{\mu_1 r_0^0}{b_{кр} g \sqrt{F}}\right) / J_1\left(\frac{\mu_1 r_0^0}{b_{кр}}\right),$$

$b_{кр}$  - критический радиус волновода для волны  $H_{01}$ ,

$$A = I_0 W^0 I_1^2 \left(\frac{\mu_1 r_0^0}{b_{кр}}\right) \frac{\beta_{\perp}}{2\mu} \left(\frac{L}{b_{кр}}\right)^2 \frac{L}{\lambda} / 2J_0^2(\mu_1) V_{\parallel}.$$

Следует учесть, что в коэффициентах  $D_i$  суммирование по  $S$  должно проводиться, в отличие от трубки дрейфа, начиная с  $S=2$ . Начальные условия для  $u_m, v_m, W_m$  зададим в следующей форме:

$$W_m(0) = 1, u_m(0) + jv_m(0) = \rho(0) e^{j\vartheta_m(0)} \quad \text{при линейной однокаскадной предварительной модуляции} \quad \rho(0) = 1, \quad \vartheta_m(0) = \frac{2\pi m}{N} - X \cos \frac{2\pi m}{N}.$$

При  $dh_1/dT|_{T=0,1} = 0$  краевая задача для  $\dot{d}, \dot{B}$  может быть поставлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{\beta_{\perp}^2} (1 + \dot{\Gamma}_1) \dot{d}(0) - j\theta(0)(1 - \dot{\Gamma}_1) \dot{B}(0) &= -j2\theta(0) \dot{a}_{10} g(0), \\ \frac{2\mu}{\beta_{\perp}^2} (1 + \dot{\Gamma}_2) \dot{d}(1) + j\theta(0)(1 - \dot{\Gamma}_2) \dot{B}(1) &= -j2\theta(1) \dot{a}_{20} g(1). \end{aligned} \tag{1.81}$$

Здесь  $\dot{\Gamma}_1$  - коэффициент отражения  $E_t$  при  $T=0$ ,  $\dot{\Gamma}_2$  - коэффициент отражения при  $T=1$ ;  $\theta(T) = h_1(T)L$ ,  $\dot{a}_{10} = 2v_{\perp} v_{\parallel} \dot{A}_{10} / \eta_0 L J_1(\mu_1 r_0^0 / b_{кр})$ ,  $\dot{A}_{10}$  - амплитуда волны, проходящей через сечение  $T=0$  слева,  $\dot{A}_{20}$  - амплитуда волны, проходящей через сечение  $T=1$  справа.

При решении краевой задачи (1.81)  $\dot{d}(0)$  и  $\dot{B}(0)$  можно рассматривать как поисковые параметры, при оптимальных значениях которых удовлетворяются условия ( $T=1$ ). В случае оптимизации выходной мощности физические параметры выбираются из условия максимума выходной мощности, которая рассчитывается по формуле

$$P_{вых} = \mathbf{Re} \left\{ \frac{j \dot{d}(1) \dot{B}(1) 8\mu v_{\perp}^2 v_{\parallel}^2 \pi b^2 J_0^2(\mu_1)}{2 \beta_{\perp}^2 \eta_0^2 J_1^2(\mu_1 r_0^0 / b_{кр}) L^2} \right\}.$$

Оптимальный коэффициент  $((\dot{a}_{20})=0)$  выражения  $\dot{\Gamma}_2$  определяется следующим соотношением: 
$$\dot{\Gamma}_2 = -\frac{2\mu\dot{d}(1) + j\beta_{\perp}^2\theta(1)\dot{B}(1)}{2\mu\dot{d}(1) - j\beta_{\perp}^2\theta(1)\dot{B}(1)}$$
.

### 1.2.7. Силы пространственного заряда при азимутально-несимметричных рабочих типах волн

Вычисление квазистатической части поля пространственного заряда в гирорезонансных приборах проведено выше для азимутально-симметричных рабочих типов волн. В этом случае квазистатические силы пространственного заряда приводят к ускорению и некоторому улучшению группировки благодаря фазовому перемещению электронов против направления сил поля пространственного заряда фазового сгустка к его центру. Такой характер фазового смещения электронов называют эффектом «отрицательной» массы. Он обусловлен тем, что тормозящиеся электроны (вращающиеся вслед за сгустком) увеличивают частоту вращения  $\Omega = (e/m)B^0$  ( $e$  - заряд,  $m$  - масса электрона,  $B^0$  - индукция магнитостатического поля) из-за уменьшения  $m$ , а ускоряющиеся электроны (вращающиеся впереди сгустка) уменьшают  $\Omega$  вследствие роста  $m$ . Такой простой физический механизм влияния квазистатического поля пространственного заряда имеет место только в случае азимутально-симметричных рабочих типов волн и соосных с металлическим экраном (боковой стенкой волновода или трубкой дрейфа) трубчатых электронных потоков, когда изофазные электроны образуют заряженные трубки, также соосные с экраном. Следовательно, их поле экраном не искажается. В случае несимметричных типов волн (например,  $H_{11}$ ) изофазные электроны образуют заряженные трубки, смещенные относительно оси волновода или трубки дрейфа. В этом случае за счет несимметрии наведенных на экране зарядов возникает дополнительный дипольный момент, существенно изменяющий механизм влияния пространственного заряда. Как показано ниже, это влияние в практических случаях существенно снижается по сравнению с тем, которое имеет место при азимутально-симметричных рабочих типах волн.

Здесь сформулирована нелинейная математическая модель физического процесса взаимодействия в гирорезонансных усилителях для несимметричного рабочего типа волн с учетом квазистатических сил поля пространственного заряда.

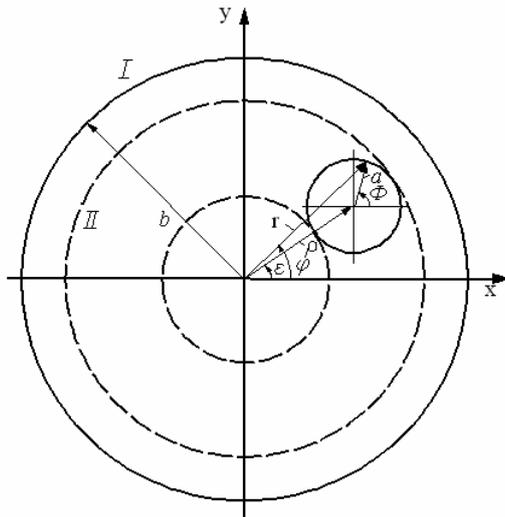


Рис. 1.16. Поперечное сечение области взаимодействия

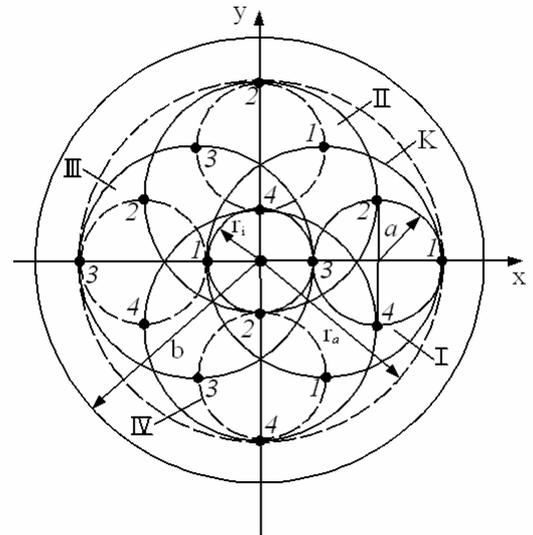


Рис. 1.17. Схема формирования четырех изофазных трубок.

На рис. 1.16 представлена конфигурация области взаимодействия. Здесь I -металлический экран (боковая стенка волновода или трубки дрейфа), II - соосный с экраном трубчатый электронный поток. Движение отдельного электрона в поперечном сечении волновода можно представить в любой момент как вращение с мгновенными радиусом  $a$  и фазой  $\Phi$  относительно ведущего центра с мгновенными координатами  $\rho, \varepsilon$  или, используя комплексную форму записи поперечных координат электрона:

$$\dot{r} = r e^{j\varphi} = \rho e^{j\varepsilon} + a e^{j\Phi}.$$

Здесь  $r, \varphi, \Phi$  - быстро изменяющиеся функции времени, а  $\rho, \varepsilon, a$  - медленно изменяющиеся функции. Введем следующие упрощающие предположения.

Электронный поток равномерно перемешанный, т.е. плотность распределения электронов по фазам вращения  $\Phi$  в начальный момент равномерна.

Разброс радиусов ведущих центров  $\rho$  в потоке очень мал.

Модуляция электронов (пусть в частном случае) осуществляется вращающимся полем  $H_{11}$  при условии основного циклотронного резонанса ( $\omega \approx \Omega$ ), причем магнитостатическое поле будем считать однородным ( $B^0 = const$ ).

В связи с последним предположением представим  $\Phi = \omega t + \alpha$ , где  $\alpha$  - медленная функция  $t$ . При  $\omega \approx \Omega$  и  $B^0 = const$  фазовая скорость процесса группирования по  $z$  близка к бесконечности, поэтому деформация изофазных электронных трубок в  $z$ -направлении происходит медленно. В связи с этим без большой погрешности задачу расчета квазистатического (соответствующего мгновенному положению зарядов) поля изофазных

электронных трубок можно поставить как двумерную (в текущем поперечном сечении).

Рассмотрим схему объединения электронов в изофазные трубки. На рис. 1.17 приведены четыре орбиты электронов (I...IV). На них указаны положения электронов (1...4) с фазами вращения  $\Phi$ : 1 – 0, 2 –  $\pi/2$ , 3 –  $\pi$ , 4 –  $3\pi/2$ . Изофазную трубку составляют электроны, имеющие одинаковую фазу вращения  $\Phi$ . Таким образом, объединяя электроны с номерами 1 на всех орбитах, получаем изофазную трубку с  $\Phi=0$ , электроны разных орбит с номерами 2 образуют изофазную трубку с  $\Phi = \pi/2$  и т.д. Важным моментом является предположение 1, из которого следует, что заряды всех трубок одинаковы, а распределение заряда по азимуту в трубке равномерно. С учетом предположения 2 изофазную трубку в пределе (разброс  $\rho$  равен нулю) можно рассматривать как заряженную поверхность с постоянной по азимуту поверхностной плотностью заряда  $\sigma = -\tau/2\pi\rho$ ,  $\tau = I_{10}/v_z$  – линейная плотность заряда трубки,  $I_{10} = I_0/N$ , N – число введенных в рассмотрение фазовых трубок.

Следовательно, для расчета квазистатического поля изофазных электронных трубок необходимо решить следующую двумерную электростатическую задачу:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = -(\tau/2\pi\rho)\delta(r_0 - r), \\ \left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{r=b} = 0, U|_{r=0} = \infty, \end{cases} \quad (1.82)$$

где  $r_0$  – координаты контура сечения изофазной трубки (окружность K на рис. 1.17),  $r$  – координаты точки наблюдения. Для решения краевой задачи (1.82) достаточно построить, используя метод функции Грина, потенциал заряженной нити в экране радиусом  $b$ . Это решение имеет вид:

$$\hat{U} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \begin{cases} -\ln(r/b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos[n(\varphi - \varphi_0)] \left[ \left(\frac{r_0}{r}\right)^n - \left(\frac{r_0 r}{b^2}\right)^n \right], & r > r_0 \\ -\ln(r_0/b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos[n(\varphi - \varphi_0)] \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \left(\frac{r_0 r}{b^2}\right)^n \right], & r < r_0 \end{cases} \quad (1.83)$$

Здесь  $q$  – линейная плотность заряда нити  $r_0, \varphi_0$  и  $r, \varphi$  соответственно полярные координаты источника и точки наблюдения ( $r \leq b$ ). Используя (1.83), решение задачи (1.82) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \widehat{U} r_0 \frac{d\varphi_1}{d\varphi_0} d\varphi_0, \quad (1.84)$$

где  $\varphi_1$  - азимут нити - источника в полярной системе координат, начало которой совпадает с осью изофазной трубки. Тогда

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_0} = \frac{r_0^2 + ar_0 \cos \varphi_0}{r_0^2 - 2r_0 a \cos \varphi_0 + a^2}, \\ r_0 = \rho - \frac{a^2}{2\rho^2} \sin^2 \varphi_0 + a \cos \varphi_0. \end{cases} \quad (1.85)$$

Для упрощения дальнейших расчетов положим, что  $\rho \gg a, n=1$  в (1.83). Используя (1.83)-(1.85), получим

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \begin{cases} -\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b^2}\right) \frac{3}{2} a \cos \varphi, & r > r_0 \\ -\ln\left(\frac{\rho}{b}\right) + \left(\frac{a}{2\rho^2} - \frac{3}{2} \frac{a}{b^2}\right) r \cos \varphi, & r < r_0 \end{cases} \quad (1.86)$$

Рассчитывая  $E = -g \operatorname{rad} U$ , запишем напряженность поперечного квазистатического электрического поля в комплексной форме следующим образом:

$$\dot{E}_{t_{пз}} = E_x + jE_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2r} [1 + \operatorname{sign}(r - r_0)] \left( e^{j\varphi} + \frac{a}{r} e^{j^2\varphi} \right) + \frac{3}{2} \frac{a}{b^2} \right\}. \quad (1.87)$$

Подставляя полученные выражения (1.87) для  $\dot{E}_{t_{пз}}$  в релятивистское уравнение движения электрона и, приводя усреднение правой части по периоду рабочей частоты  $2\pi/\omega$ , получаем после соответствующей нормировки переменных следующее уравнение для орбитального движения электрона:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\gamma}_i}{dz_0} &= \left( -j\dot{\gamma}_i \frac{\mathbf{Im}(\dot{\gamma}_i)}{a_{0i}} + \dot{F}_{1i} \right) / \Delta W_i, \quad \frac{dW_i}{dz_i} = F_{3i}/W_i, \\ \frac{da_{0i}}{dz_0} &= \mathbf{Re}(\dot{\gamma}_i)/W_i, \quad \frac{d\alpha_i}{dz_0} = \left( \frac{\mathbf{Im}(\dot{\gamma})}{a_{0i}} - 1 \right) / \Delta W_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Начальные условия к системе (1.88) в отсутствие модуляции ( $z_0 = 0$ ) задается в виде

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i(0) = j\beta_{\perp 0}, W_i(0) = \beta_{z0}, a_{0i}(0) = \beta_{\perp 0}/F_0 R_i(0), \\ \alpha_i(0) = 2\pi i/N. \end{cases} \quad (1.89)$$

При записи (1.88) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= (\beta_{xi} + j\beta_{yi}) e^{-j(T+\alpha_i)}, W_i = \beta_{zi}, a_{0i} = 2\pi a_i/\lambda = \frac{\omega a_i}{c}, \\ R_i &= \sqrt{1 - (\dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i^* + W_i^2)}, z_0 = \omega z/c, \alpha_i = \Phi_i - T, \\ T &= \omega t, F_0 = \eta B_z^0/\omega c, \\ \dot{F}_{1i} &= -R_i \left\{ \frac{1}{2g} \left[ \dot{\Phi}_{1i} \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i^*}{2} \right) + \dot{\Phi}_{1i} \frac{\dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i^*}{2} - jW_i \dot{\Phi}_{2i} + j\dot{\gamma}_i \frac{J_1(a_{Hi}) J_0(r_H^0)}{g} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times (\dot{C}_0 e^{-j\alpha_i} + \dot{C}_0^* e^{j\alpha_i}) \right] - jF_0 \dot{\gamma}_i \} + \dot{F}_{1\Pi 3i}, \\ \dot{F}_{3i} &= R_i \left\{ \frac{1}{2g} \left[ (\dot{\gamma}_i^* \dot{\Phi}_{2i} - \dot{\gamma}_i \dot{\Phi}_{2i}^*) + \frac{W_i}{2} (\dot{\gamma}_i^* \dot{\Phi}_{1i} - \dot{\gamma}_i \dot{\Phi}_{1i}^*) \right] \right\} + \dot{F}_{3\Pi 3}, \\ \dot{\Phi}_{1i} &= -J_0(r_H^0) \left[ \dot{C}_0 e^{-j\alpha_i} J_0(a_{Hi}) + \dot{C}_0^* e^{j\alpha_i} J_2(a_{Hi}) \right], \\ \dot{\Phi}_{2i} &= J_0(r_H^0) \left[ \frac{d\dot{C}_0}{dz_0} e^{-j\alpha_i} J_0(a_{Hi}) - \frac{d\dot{C}_0^*}{dz_0} e^{j\alpha_i} J_2(a_{Hi}) \right], \\ \dot{F}_{1\Pi 3i} &= \frac{R_i}{\rho_0} S \left[ \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i^*}{2} \right) e^{-j\alpha_i} \dot{f}_{\Pi 3i} - \frac{\dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i^*}{2} e^{j\alpha_i} \dot{f}_{\Pi 3i}^* \right], \\ F_{3\Pi 3i} &= -\frac{R_i W_i S}{2\rho_0} (\dot{\gamma}_i^* \dot{f}_{\Pi 3i} + \dot{\gamma}_i \dot{f}_{\Pi 3i}^*), \\ \dot{f}_{\Pi 3i} &= \frac{j}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N e^{j\psi_{ij}} / W_j + \frac{3}{2} \frac{\pi \rho_0}{b_0^2} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{0j} e^{j\alpha_j} / W_j, \\ e^{j\psi_{ij}} &= \frac{B_{ij} + jA_{ij}}{\sqrt{B_{ij}^2 + jA_{ij}^2}}, A_{ij} = a_{0j} \cos \alpha_i - a_{0i} \cos \alpha_j, \\ B_{ij} &= -a_{0j} \sin \alpha_j + a_{0i} \sin \alpha_i, \rho_0 = \omega \rho/c, b_0 = \omega b/c, \\ a_{Hi} &= a_{0i}/g, r_H^0 = \rho_0/g, g = 1/\sqrt{1 - (\pi c/\omega L_M)^2}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$S = \eta_0 I_0 / \left( 2\pi^2 \varepsilon_0 c^3, \dot{c}_0 \frac{\eta_0 \dot{E}_m(z_0)}{\omega c} \right),$$

$\dot{E}_m(z_0)$  - распределение поперечной электрической составляющей электромагнитного поля волновода или резонатора. В трубке дрейфа  $\dot{C}_0 = 0$ ; в коротком модулирующем резонаторе  $\dot{C}_0 = \dot{C}_m^0 \sin(\pi z_0 / L_M)$ , где  $L_M$  - нормированная длина области взаимодействия.

Остановимся на анализе силовой функции, определяемой полем пространственного заряда  $\dot{f}_{ПЗ}$ . Первый член в ней по структуре тождествен с силовой функцией для азимутально-симметричного и плоского случаев, когда металлический экран не изменяет поля изофазных электронных трубок. В рассматриваемом несимметричном случае поле смещенной относительно оси экрана изофазной заряженной трубки существенно им искажается. В результате в силовой функции появляется второй член, который, как будет показано ниже, в определенной степени компенсирует действие первого. Из полученной формулы следует, что возможна даже перекомпенсация при  $\bar{a}_{0i}/b_0 \geq 0,3$  (если принять, что  $\rho_0 = b_0 - \bar{a}_{0i}$ ). Однако, случай перекомпенсации выходит далеко за пределы основного приближения, в котором рассчитана  $\dot{f}_{ПЗ}(a_{0i} \ll \rho_0)$ . Таким образом, в пределах применимости полученных уравнений перекомпенсация невозможна. Следует отметить, что в типичном случае, когда  $b_0 = 1,7$ ,  $\rho_0 \sim b_0 - a_0$ , влияние второго члена в  $\dot{f}_{ПЗ}$  начинает сказываться при  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c \sim 0,1$ . При этом он может достигать значения 0,4 от величины первого члена в  $\dot{f}_{ПЗ}$ . В общем случае для волны типа  $H_{ni}$  второй член в выражении для  $\dot{f}_{ПЗ}$  в (1.90) имеет вид

$$\dot{f}_{ПЗ2} = \frac{n+2}{2} \pi \left( \frac{\rho_0}{b_0} \right)^{2n} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{a_{0j}}{\rho_0} e^{j\alpha_j} / w_j.$$

При больших  $n$  (моды шепчущей галереи) в предположении, что  $\rho_0 \sim b_0 - a_0$ ,  $R_0 F_0 \sim 1$ ,  $n \sim 2\pi b/\lambda$ , можно считать  $a_0 \sim \beta_{\perp}$ ,  $a_0/\rho_0 \approx \beta_{\perp}/n$ ,  $\rho_0/b_0 \approx 1 - \beta_{\perp}/n$ . Тогда максимальное значение составляющей  $\dot{f}_{ПЗ2}$  при идеальной группировке запишем как

$$|\dot{f}_{ПЗ2\text{макс}}| = \frac{\pi}{2} (1 - 2\beta_{\perp}) \beta_{\perp} / \beta_{\parallel}.$$

Из этого следует, что максимальное компенсирующее действие второй составляющей  $\dot{f}_{ПЗ2}$  квазистатического поля пространственного заряда

достигается при  $\beta_{\perp} \sim 0,25$ . В этом случае  $|\dot{f}_{ПЗ2}|$  составляет  $\sim 1/3$  основной составляющей  $|\dot{f}_{ПЗ1}|$ .

### 1.3. Некоторые результаты нелинейной теории и оптимизации гирорезонансных приборов

#### 1.3.1. Оптимальное распределение полей в резонаторах гиротронов и гироклистронов. Синтез профиля резонатора для осесимметричных ТЕ мод

Указанные оптимальные распределения полей и соответствующие им профили резонаторов найдены с использованием АУС-метода решения задач оптимального управления нелинейным динамическим процессом [48] в [37]. Искомое оптимальное распределение поля, одновременно определяющее и профиль резонатора для азимутально-симметричных ТЕ полей, задавалось в [37] следующим образом.

Рассмотрим взаимодействие трубчатого электронного потока с азимутально-симметричными ТЕ-полями круглого резонатора. В этом случае электрическое поле в цилиндрической системе координат имеет одну составляющую  $E_{\varphi}(r, z)$ , удовлетворяющую следующему уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_{\varphi} + \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} + k^2 E_{\varphi} = 0, \quad (1.91)$$

$$k = \omega / c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega.$$

Если область, занятая полем (область взаимодействия), имеет границы  $0, l$  по оси  $z$ , то граничные условия к (1.91) могут быть заданы в виде

$$E_{\varphi}(r, 0) = E_{\varphi}(r, l) = 0. \quad (1.92)$$

Кроме того, поле на оси должно быть конечным:

$$E_{\varphi}(0, z) \neq \infty. \quad (1.93)$$

Решение (1.91) при граничных условиях (1.92), (1.93) имеет вид

$$E_{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\aleph_n r) \sin \pi n T, \quad T = z/l, \quad \aleph_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/l)^2}, \quad (1.94)$$

Амплитудные коэффициенты в (1.94) легко определяются, если на некотором уровне  $r_0$  (в дальнейшем  $r_0$  будем считать радиусом ведущего

центра электронной орбиты в трубчатом пучке) задано распределение либо  $E_\varphi(r_0, z) = E_\varphi(r_0, T) = E_m g(T)$ , либо  $r_0 \left[ \partial E_\varphi(r_0, z) / \partial r_0 \right] - E_\varphi(r_0, z) = E_m G(T)$ . Действительно, используя ортогональность членов ряда (1.94), найдем

$$C_n = \frac{2E_m}{J_1(\aleph_n r_0)} \int_0^1 g(T) \sin \pi n T dT, \quad (1.95)$$

или

$$C_n = -\frac{2E_m}{\aleph_n r_0 J_2(\aleph_n r_0)} \int_0^1 G(T) \sin \pi n T dT. \quad (1.96)$$

Профиль резонатора  $r = b(z)$ , в котором реализуется поле вида (1.94), определяется решением уравнения  $E_\varphi(r, z) = 0$ , что не представляет каких-либо трудностей при использовании простейших итерационных процедур. В дальнейшем будем считать, что  $b(z)$  задан, если определены:  $g(T)$  или  $G(T)$ . Оптимальные распределения  $Ag(T)$  (взаимодействие на первой гармонике циклотронной частоты) и  $AG(T)$  (взаимодействие на второй гармонике,  $A$  – безразмерная амплитуда поля), найденные в [37], приведены соответственно на рис. 1.18 и рис. 1.19 для гиротрона и отбирателя гироклистрона.

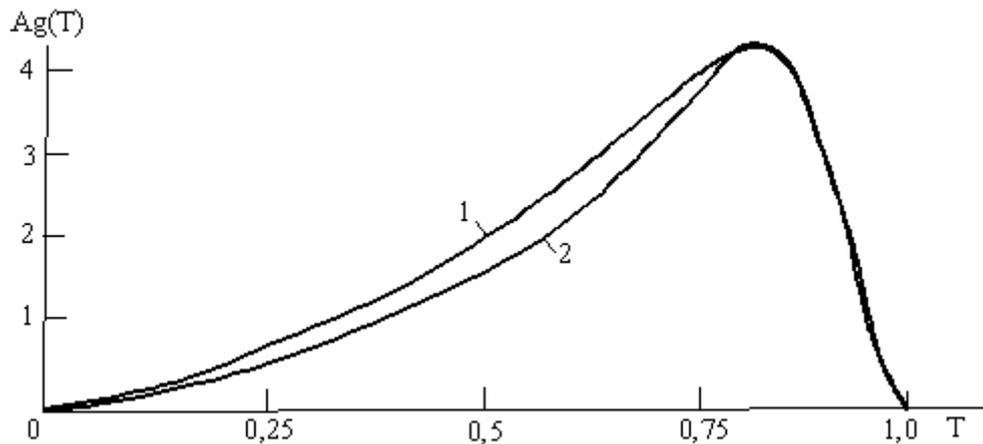


Рис. 1.18. Оптимальные распределения ВЧ-поля при взаимодействии на первой гармонике:  
1 –  $Ag^{opt}(T)$  для гиротрона; 2 –  $Ag^{opt}(T)$  для отбирателя гироклистрона.

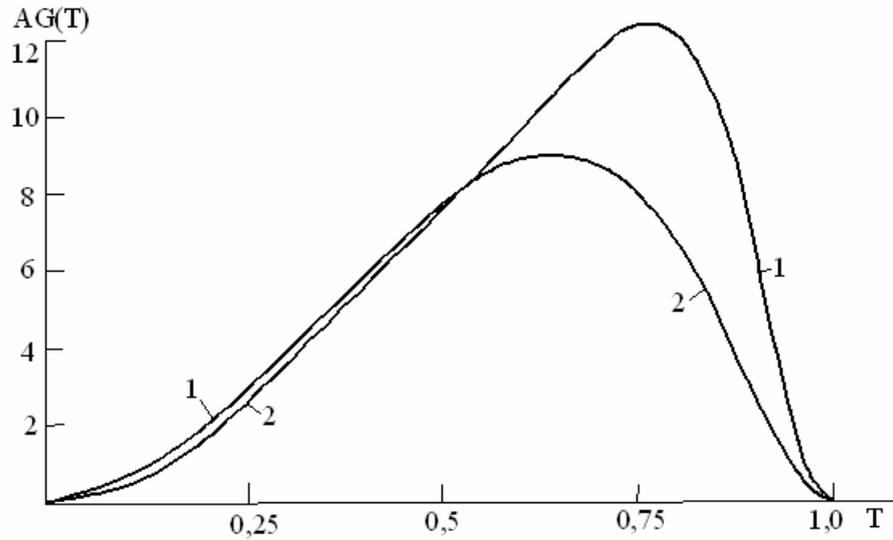


Рис. 1.19. Оптимальные распределения поля для взаимодействия на второй гармонике:

1 –  $AG^{\text{опт}}(T)$  для гиротрона; 2 -  $AG^{\text{опт}}(T)$  для отбирателя гироклистрона.

Следует заметить, что задолго до выхода статьи [37] В.К. Юлпатов высказал мнение, что оптимальное распределение поля в гиротроне должно быть близко к треугольному. Строгое решение задачи оптимизации распределения поля в резонаторах слаборелятивистских гиротронов и гороклистронов подтвердило его гипотезу. Такое распределение отвечает достаточно простым физическим представлениям об оптимальном механизме взаимодействия: группировка должна происходить в относительно слабом поле с малым модуляционным разбросом энергий электронных ротаторов. Напротив, отбор энергии должен производиться интенсивно в относительно малый интервал времени, пока фазовый электронный пакет не распадется и не выйдет из тормозящей фазы поля. В [37] найдены следующие, близкие к предельным, оптимальные по «поперечному» КПД параметры гиротронов.

1. Взаимодействие на первой гармонике гирочастоты  $\Omega$ ,  $\omega \approx \Omega$ :

$$\eta_{\perp}^{\max} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{v_{im}^2(l)}{v_{\perp}^2} = 0,881, \quad \mu = \frac{\beta_{\perp}^2 \Omega_0 l}{2v_{\parallel}} = 28,55, \quad A = \frac{\eta_0 E_m l}{2v_{\perp} v_{\parallel}} = 4,25.$$

2. Взаимодействие на второй гармонике,  $\omega \approx 2\Omega$ :

$$\eta_{\perp}^{\max} = 0,9, \quad \mu = 22,35, \quad A = \frac{\eta_0 E_m l}{2v_{\perp} v_{\parallel}} \left( \frac{\beta_{\perp}}{\kappa r_0} \right) = 12,49.$$

Здесь  $l$  - длина области взаимодействия,  $v_{\perp}$  - начальная поперечная скорость электронов;  $v_{im}(l)$  - та же скорость  $m$ -го электрона в конце области

взаимодействия,  $m = \overline{1, N}$ ,  $N = 64$ ;  $\beta_{\perp} = v_{\perp} / c$ ;  $\Omega_0 = \eta_0 B_0 (1 - \frac{v_{\parallel}^2}{2c^2})$ ;  $\eta_0 = \frac{l}{m_0}$ ,  $l, m_0$  - соответственно заряд и масса покоя электрона,  $B_0$  - индукция магнитостатического поля;  $v_{\parallel}$  - начальная продольная составляющая скорости электрона;  $r_0$  - радиус ведущего центра электронов трубчатого пучка;  $E_m$  - максимальное значение  $E_{\varphi}$  в резонаторе;  $\kappa = \omega / c$ .

Таким образом, взаимодействие на второй гармонике циклотронной частоты оказывается более эффективным по  $\eta_{\perp}^{\text{макс}}$ , чем взаимодействие на первой гармонике. Это обусловлено более благоприятными условиями отбора энергии у электронов на второй гармонике: силовое воздействие поля пропорционально радиусу ларморовской орбиты электрона. Поэтому эффект «обратного ускорения» отдавших энергию электронов при отборе энергии от ускоренных («неправильнофазных») электронов в конце области взаимодействия выражен намного слабее, чем при взаимодействии на первой гармонике. В этом отношении энергетическая избирательность взаимодействия на гармониках циклотронной частоты представляется весьма ценным качеством гирорезонансных приборов, не имеющих аналога в классических приборах лучевого типа. Заметим также, что указанное свойство определило более простую форму  $G^{\text{опт}}$  по сравнению с  $g^{\text{опт}}$ . В последнем случае необходим более резкий выход электронов из взаимодействия для предотвращения «обратного ускорения» отдавших энергию электронов.

Конечно, это относится только к «электронному» КПД, то есть относительной энергии, отдаваемой электронным потоком. Полный (или «технический» КПД) требует еще умножения электронного КПД на «КПД контура». Если это учесть, то полный КПД гиротрона на второй гармонике окажется ниже, чем на первой. Для достижения оптимальной по КПД амплитуды поля на второй гармонике нагруженная добротность резонатора должна быть намного больше при равной мощности, чем на первой (в  $(12,49/4,25) \cdot (\frac{\kappa r_0}{\beta_{\perp}})$  раз). КПД контура будет меньше, что заметно понизит технический КПД.

В [38] найдены оптимальные профили выходных резонаторов гироклистронов, обеспечивающих повышенный запас устойчивости к самовозбуждению. На рис. 1.20 приведен один из вариантов профиля резонатора слаборелятивистского гироклистронов с  $\eta_{\perp} = 90\%$ .

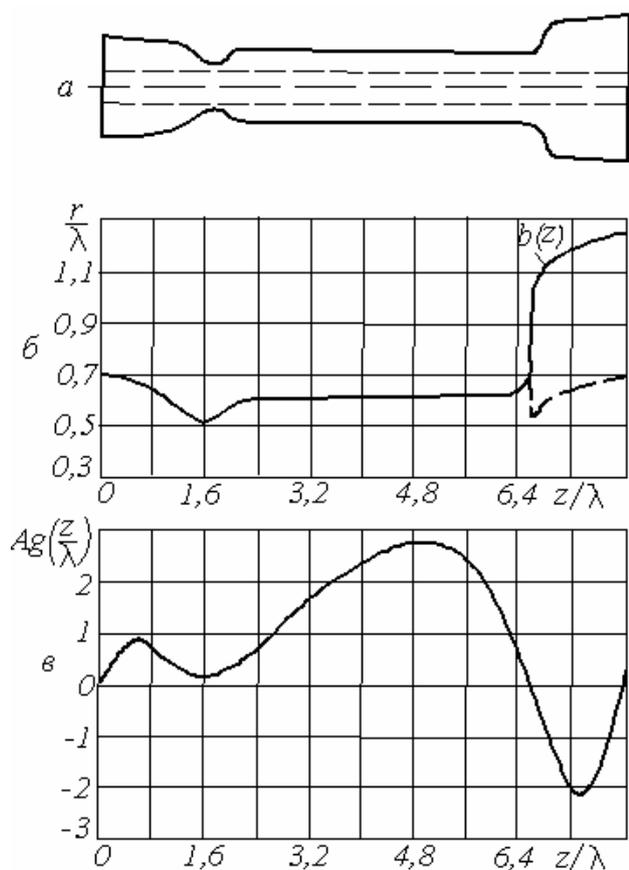


Рис. 1.20. Оптимизированные по КПД профили выходного резонатора:  
 а) общий вид одного из вариантов профиля резонатора; штриховые линии – уровень ведущего центра в пучке  $r_0=0,3 \lambda$  ;  
 б) два варианта профилей резонатора: сплошная кривая – гладкий профиль, пунктир – профиль с углами;  
 в) распределение  $A_g(z/\lambda)$  при  $r = r_0=0,3 \lambda$  , реализуемое в резонаторе.

Как видно из рис. 1.20, оптимальный резонатор является секционированным: он состоит из секций разного диаметра. Этим решаются две задачи: увеличивается пусковой ток и достигается селекция паразитных мод (по оценкам [38] для профиля, изображенного на рис. 1.20, б (пунктирная кривая) ближайшие паразитные типы колебаний отстоят от основного по частоте более, чем на 20%). В [41] выполнена оптимизация профилей резонаторов и распределений магнитостатического поля в гиротронах по КПД при обеспечении условий мягкого самовозбуждения. На рис. 1.21 представлен один из профилей гиротрона на первой гармонике циклотронной частоты с поперечным электронным КПД 62,5% при отношении рабочего тока к пусковому  $I_0/I_{cm}=2,9$ . Длина критической части резонатора  $L_{zk}/\lambda = 3,75$ .

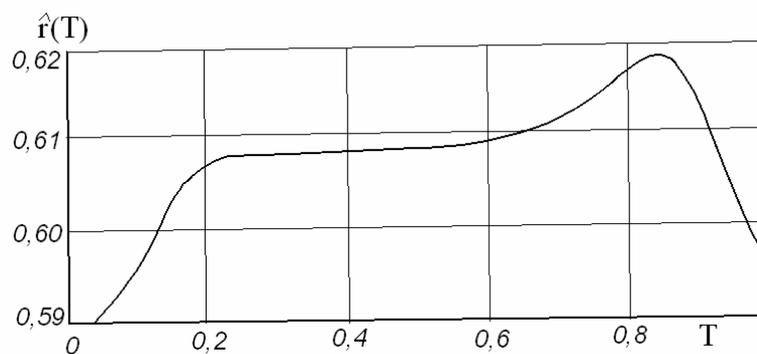


Рис. 1.21. Оптимизированный профиль резонатора гиротрона.

$$\hat{r}(T) = b(T) / \lambda, \quad T = Z / L.$$

Отметим, что в [49] представлены экспериментальные данные для гиротрона с профилем, идентичным изображенному на рис. 1.21. Параметры гиротрона:  $f = 110$  ГГц,  $P_{\text{вых}} = 1,67$  МВт,  $V_0 = 96,7$  кВ,  $I_0 = 41,3$  А, полный КПД – 42%. Если принять во внимание, что типичная магнетронно-инжекционная пушка гиротрона при указанных  $V_0, I_0$  формирует трубчатый поливинтовой электронный поток с  $q = v_{\perp} / v_{\parallel} = 1,3 \dots 1,5$ , то поперечный КПД гиротрона из [49]  $\eta_{\perp} = \eta(1 + 1/q^2) = 60 \dots 67\%$ , что вполне соответствует оценке  $\eta_{\perp}$  в [41]. Оптимальный профиль позволил существенно повысить КПД по сравнению с предыдущей конструкцией. Этот профиль в [49] назван «профилем 2005 года» (V-2005 cavity profile).

### 1.3.2. Влияние поля пространственного заряда в гиротронах, гироклистронах и гиро-ЛБВ

Действие пространственного заряда в гирорезонансных приборах в определенном смысле прямо противоположно его действию в приборах О-типа. Действительно, как показал качественный анализ поперечной (азимутальной) группировки в гиротроне в разделе 1, тормозящийся внешним полем электрон вращается быстрее, и по фазе вращения догоняет ускоренный тем же полем электрон, который вращается медленнее. Поэтому тормозящийся электрон, ускоряя своим электрическим полем вращающийся впереди ускоренный внешним ВЧ-полем электрон, тем самым приближает его к себе по азимуту; соответственно ускоренный электрон тормозит своим электрическим полем сзади вращающийся электрон, опять-таки приближая его к себе. Другими словами, электрические поля электронов в гиротронах приводят к усилению азимутальной группировки, сближая по азимуту электроны, а не расталкивая их, как это происходит при прямолинейной (трансляционной) группировке в приборах О-типа.

Влияние полного поля пространственного заряда (т.е. квазистатических и динамических составляющих) на процессы взаимодействия в гиротронах, гироклистронах и гиро-ЛБВ подробно представлено в [21, 22, 25, 26, 35-37,

39, 40, 44-46, 50-55]. Основные выводы этих исследований состоят в следующем.

#### А. Гиро-ЛБВ, гиротрон, волноводный отбиратель гироклистрона.

1. Поля пространственного заряда существенно улучшают  $\eta_{\perp}$  в схемах с недостаточной догруппировкой. Особенно большое влияние пространственного заряда обнаруживается в простейших, не оптимизированных по магнитному полю и профилю электродинамической системы. Здесь  $\eta_{\perp}$  повышается вдвое по сравнению с кинематическими оценками, а процессы группировки качественно изменяют свой характер за счет действия сил пространственного заряда. Увеличение КПД связано не только с улучшением группировки, но и с ее ускорением по сравнению с кинематической. Последнее эквивалентно увеличению длины области взаимодействия, что также благоприятно для повышения эффективности энергообмена.

2. Поскольку поля пространственного заряда ускоряют процессы группировки, при заданной длине области взаимодействия оптимальный ток должен быть понижен относительно значения, полученного по кинематической оценке, приблизительно на 30%.

3. Проявление эффектов, связанных с трехмерностью поля пространственного заряда, существенно зависит от параметра  $q$  и длины области взаимодействия. Так, при  $\mu=5$  эти эффекты заметны только при  $I_0 \sim 39$  А, а при  $\mu=8$  они сказываются уже при  $I_0=6,4$  А. Это же следует сказать и про влияние пространственного заряда вообще: с увеличением длины области взаимодействия (и углового параметра  $q$ ) оно резко возрастает и токи, при которых это влияние становится существенным, значительно понижаются.

4. Продольные силы пространственного заряда несколько улучшают  $\eta_{\perp}$  и ускоряют процессы группировки и энергообмена за счет торможения отдающих энергию электронов в осевом направлении; влияние продольных сил может проявляться уже при токах  $I_0 \sim 13$  А.

#### В. Трубка дрейфа гироклистрона.

В гироклистронах с рабочим типом волн  $H_{01}$  эта же волна является доминантной составляющей динамической части поля пространственного заряда. Поскольку она в закритической трубке имеет индуктивный характер импеданса, а квазистатическое поле – емкостный, их действие оказывается противофазным, и при определенном радиусе трубки дрейфа действие динамической составляющей может превосходить действие квазистатической, а фазовая группировка под действием поля пространственного заряда будет не улучшаться, а ухудшаться. Проведенное исследование влияния сил пространственного заряда на группирование электронов в трубке дрейфа гироклистрона позволяет сформулировать следующие выводы.

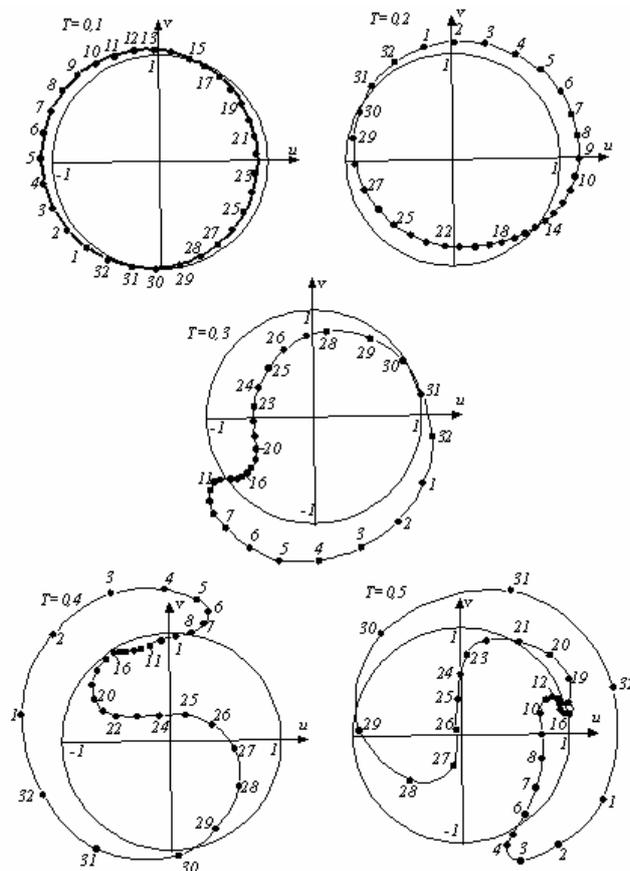
Важным фактором, определяющим уровень группировки электронов в трубке дрейфа, является правильный выбор геометрических размеров  $g=b/b_{кр}$  и  $r_0/b$ , обеспечивающий достаточное снижение влияния динамических составляющих поля пространственного заряда.

В случае однородного магнитостатического поля двумерная теория дает правильные результаты вплоть до токов  $I_0 \sim 13$  А.

В неоднородном магнитостатическом поле роль продольных сил пространственного заряда существенно усиливается и предельные токи, при которых еще может использоваться двумерная теория, значительно понижаются.

Фазовый сгусток электронов за счет действия сил пространственного заряда имеет сложную форму; существенно усиление динамического разброса скоростей электронов. В связи с этим при больших токах пучка аналитическая теория группирования оказывается неприменимой.

Для иллюстрации последнего на рис. 1.22 приведены фазовые диаграммы группировки в трубке дрейфа при  $g=b/b_{кр}=0,4$ ,  $r_0/b=0,4$ ,  $\beta_{\perp}=0,23$ ,  $\beta_{\parallel}=0,133$ ,  $I_0=10$  А для различных сечений трубки дрейфа  $T=0,1; 0,2; \dots 0,9; 1$ .  $T=0,4$  соответствует оптимальной группировке. При перегруппировке в области  $T=0,6 \dots 1$  образуется вихревой сгусток, благодаря чему даже при  $T=1$  сохраняется заметная группировка.



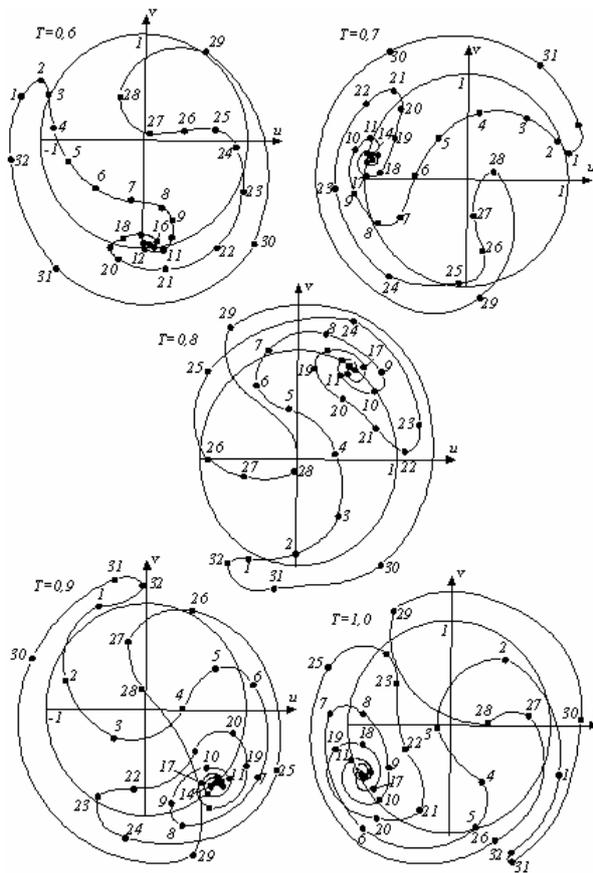


Рис. 1.22. Фазовые диаграммы группировки электронов в однородном магнитостатическом поле при различных значениях  $\Gamma$ ,  $u + jv = \dot{\Pi}$ .

Как показано в [55], эффект перегруппировки фазового пакета в гироклистроне за счет действия квазистатической составляющей поля пространственного заряда может быть компенсирован путем замены последних резонаторов группирователя на основной частоте резонаторами на второй гармонике (при одновременной коррекции распределения магнитостатического поля). За счет действия поля на второй гармонике центр фазового пакета разгруппировывается, но одновременно фокусируются периферийные электроны сгустка, что в совокупности приводит к существенному улучшению группировки и КПД гироклистрона. В приведенном в [55] варианте трехрезонаторного гироклистрона при  $V_0 = 425$  кВ,  $I_0 = 160$  А,  $q = v_{\perp} / v_{\parallel} = 1$ ,  $\Delta v_{\perp} / v_{\parallel} = 6\%$  за счет замены второго резонатора на  $\omega$  резонатором на  $2\omega$  достигнуто улучшение КПД с 42% до 52%. Результаты [55] также показали возможность создания эффективного гироклистрона – удвоителя частоты. Авторами [55] по договоренности с сотрудниками Мэрилендского университета были выполнены в 1996 г. оптимизационные расчеты шестирезонаторного гироклистрона – удвоителя с параметрами пучка, приведенными выше [55]. Такой гироклистрон успешно реализован на  $f = 8,568$  ГГц и  $2f = 17,136$  ГГц с  $P = 50$  МВт (на  $2f$ ) при коэффициенте усиления 50 дБ [56].

## 1.4. Достижения в разработках гирорезонансных приборов

Как видно из последующих материалов, в разработках мощных гирорезонансных приборов по-прежнему лидирует ИПФ РАН-Gycom.

### 1.4.1 Гиротроны для промышленных применений

В таблице 1 сведены параметры промышленных гиротронов, разработанных в России, США и Японии [57].

Таблица 1. Параметры промышленных гиротронов.

Изготовитель	Gycom Россия	CPI США	Mitsubishi Япония
Частота, ГГц	30	28	28
Выходная мощность, кВт	12-15	10	10
Электронный КПД, %	30-32	30-33	30-38
Напряжение, кВ	25	30	30-31
Ток пучка, А	1,5-2	1,1	1,1-1,23
Мода резонатора	H <sub>02</sub>	H <sub>02</sub>	H <sub>02</sub>
Мощность питания магнита, кВт	13,7	5,0	0,05
КПД с учетом питания магнита, %	23	26-29	30-38
Длина гиротрона, мм	1000	630	1150
Диаметр магнита, мм	315	300	340
Вес гиротрона, кг	18	15,8	50
Вес магнита, кг	79	90	600

Как следует из приведенных данных, потенциал традиционной конструкции (рис. 1.11) в промышленных гиротронах далеко не исчерпан: частоты и выходные мощности далеки от предельных для такой конструкции; используется один из низших TE-колебаний, проблема селекции мод решается достаточно просто.

### 1.4.2. Супер-гиротроны для нагрева термоядерной плазмы

К гиротронам этого класса предъявляются экстремальные требования. Действительно, по данным ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) для разогрева термоядерной плазмы нужны частоты между 140 и 200 ГГц и импульс длительностью порядка 1000 с с пиковой мощностью 100 МВт. Достигнутые к 2002 году параметры супергиротронов для ITER приведены в таблице 2 [57].

Таблица 2. Параметры супергиротронов.

Изготовитель	Gusom Россия			JAERTI Япония	EUROCOM – FZK Германия - Франция	ИПФ РАН Россия	ИПФ РАН ИИМ Россия – Германия (проект)
Частота, ГГц	110	140	170	170	140	140	170
Выходная мощность, МВт	0,9	0,96	0,74	0,9	1,0	1,1	5
Электронный КПД, %	38...42	40...4 5	30...35	48	30	30	-
Технический КПД (с рекуперацией )	-	-	-	-	50	50	-
Напряжение, кВ	70...75	70...7 5	75...80	75	80	90	-
Ток пучка, А	25...40	28...4 0	30...40	22...26	40	42	-
Мода резонатора	H <sub>19,5,1</sub>	H <sub>22,6,1</sub>	H <sub>25,10,1</sub>	H <sub>31,8,1</sub>	H <sub>28,8</sub>	H <sub>28,16</sub>	-
Тип резонатора	полый	полый	полый	полый	коакси- альный	коакси- альный	коакси- альный
Длина импульса, с	2	1,2	3	9,2	10	2	-

Приведенные данные относятся к предшествующему периоду разработок супергиротронов. В этих разработках использованы все последние научные, технические и технологические достижения в области электронной оптики, элетродинамики и теплотехники. Электронная оптика позволяет формировать трубчатые электронные пучки с очень малой толщиной  $\Delta r_0$  по ведущим центрам электронных ротаторов ( $\Delta r_0 \ll \lambda$ ) и малым угловым разбросом скоростей электронов ( $\Delta v_{\perp} / v_{\parallel} \leq 5\%$ ) при  $V_0 = 70 \dots 90$  кВ и  $I_0 = 40 \dots 90$  А.

Выходной квазиоптический трансформатор позволяет преобразовать волноводную моду в гауссовы волновые пучки (обычно – два пучка). На рис. 1.23 изображена схема двухпучкового волнового вывода энергии из [58].

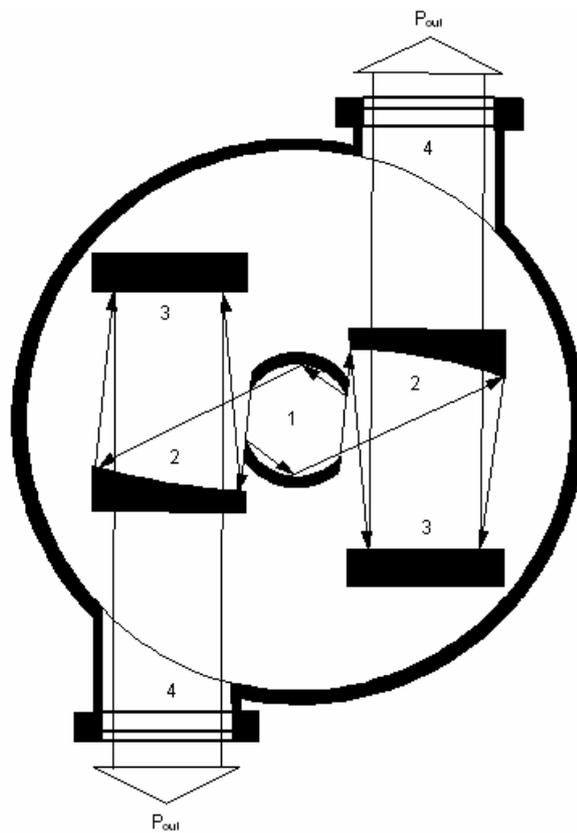


Рис. 1.23. Двухкаскадный трансформатор рабочей моды в два узко-направленных волновых пучка.

Здесь 1 – двухщелевой срез резонатора; 2 – квазипараболические зеркала с дополнительной коррекцией; 3 – плоские поворотные зеркала; 4 – выходные вакуумно-плотные окна выводов энергии, которые теперь изготавливаются из алмаза, что позволяет обеспечить высокий уровень плотности электромагнитной энергии, пропускаемой окном без разрушения в течение импульса. Наибольшие уровни достигнуты в коаксиальной конструкции гиротрона, схема которой представлена на рис. 1.24 [58].

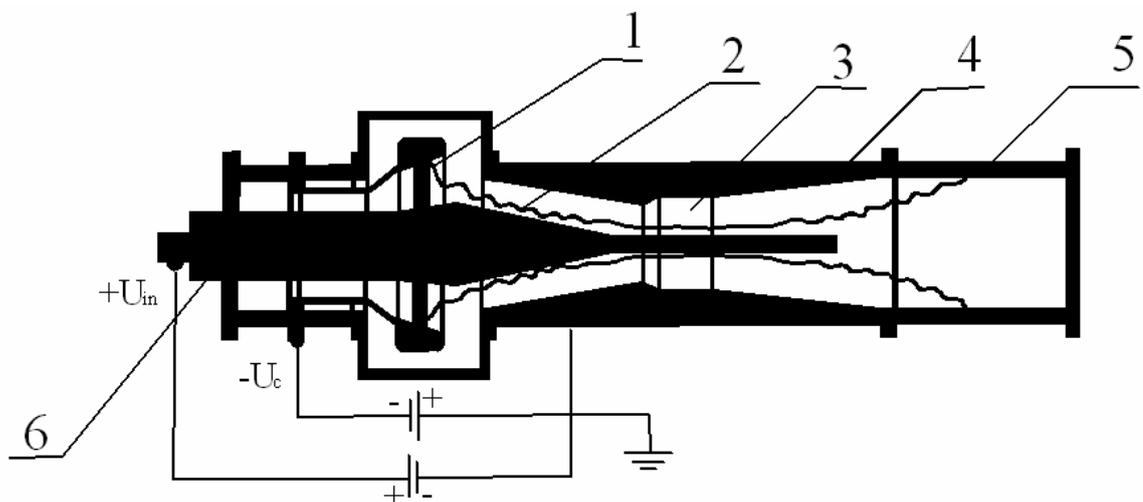


Рис. 1.24. Схема коаксиального гиротрона.

Здесь 1 – эмитирующий пояснок катода; 2 – трубчатый винтовой электронный поток; 3 – профилированный резонатор; 4 – анод; 5 – коллектор; 6 – внутренний проводник коаксиала. Благодаря отдельному питанию электродов 4 и 6 возможна эффективная рекуперация энергии электронов, повышающая полный КПД. Действительно, напряжение пучка  $U_0 = U_{in} + U_c = 90$  кВ при  $U_c = -90$  кВ (рекуперация отсутствует) КПД = 30% [58]. В конструкции используется «размазывание» электронного пучка по стенке коллектора за счет сканирующих вспомогательных магнитов, что позволяет значительно повысить уровень рассеиваемой на коллекторе энергии. Последние данные по супергиротронам, представленные на IVEC – 2005 (Sixth International Vacuum Electronics Conference, 2005), не сильно меняют картину, приведенную в таблице 2. В [59] приведены данные коаксиального супергиротрона на 170 ГГц: рабочая мода – TE<sub>34,19</sub>,  $U_0 = 90$  кВ,  $U_c = -55$  кВ, КПД = 45%,  $P = 1,2$  МВт. В [60] сообщается о супергиротроне на 110 ГГц: тип колебаний TE<sub>22,6,1</sub>,  $V_0 = 96$  кВ,  $I_0 = 41,3$  А,  $\eta = 42\%$ ,  $P = 1,67$  МВт. В [61] сообщается о супергиротронах с относительно большой длительностью импульса, испытанных в 2002-2004 годах:  $f = 140$  ГГц,  $P = 0,7$  МВт,  $\tau_u = 10$  с;  $f = 170$  ГГц,  $P = 0,7$  МВт при  $\tau_u = 40$  с,  $P = 0,9$  МВт при  $\tau_u = 20$  с;  $f = 105 - 140$  ГГц,  $P = 1$  МВт при  $\tau_u = 10$  с. Однако продвижение в область более высоких частот приводит к существенному ограничению мощности гиротрона традиционной конструкции [62]:  $f = 300$  ГГц, TE<sub>22,8</sub> мода,  $P = 3,5$  кВт. Здесь уже остро проявляется известное противоречие, обусловленное традиционной конструкцией гиротрона: для повышения мощности электронного пучка при заданном ускоряющем напряжении следует увеличивать площадь его поперечного сечения при одновременном сохранении равномерно эффективного взаимодействия всех его слоев, что достижимо при  $\Delta r_0 \ll \lambda$ . Однако при этом условии площадь сечения пучка можно увеличить только за счет дальнейшего увеличения  $r_0$ , что заставляет использовать очень высокие типы волн H<sub>ni</sub> с  $n \sim 30$ ,  $i \sim 10$ . Но использование таких высоких типов волн резко осложняет проблему селекции мод: для отстройки или подавления паразитных волн уже придется использовать составные резонаторы [33, 63] или холостые электронные пучки, нагружающие паразитные моды [63]. Данные в [62] указывают на то, что фактически потенциал традиционной конструкции гиротрона в отношении повышения рабочей частоты и выходной мощности исчерпан.

### 1.4.3. Супер-гироклистроны

Для ПВО и ПРО нового поколения наземного и морского базирования, для систем слежения за астероидами, а также для питания ускорителей разрабатываются релятивистские импульсные гироклистроны с пиковой мощностью в десятки МВт.

Типичные данные о параметрах разрабатываемых супергироклистронов приведены в таблице 3 [57].

Таблица 3. Параметры разрабатываемых супергироклистронов

Разработчик	University of Maryland (UM), U.S.A.			UM, CPI, U.S.A.
	1	1	2	1
Номер рабочей гармоник	1	1	2	1
Число резонаторов	2	3	2	4 (коаксиал)
Напряжение, кВ	425	425	457	500
Ток пучка, А	190	195	244	300
Частота, ГГц	9,88	9,87	19,76	30
Импульсная мощность, МВт	24	27	32	50
КПД, %	30	32	29	45
Усиление, Дб	33	36	27	45
Длительность импульса, мс	1,2	1,2	0,8	1,2

В последние годы наметилась тенденция использовать супергироклистроны-удвоители [56], на возможность создания которых указано в [55]. Данные [56] приведены в п. 3.2. Приведем также данные о разработке гироклистроны-удвоителя из [64]: рабочие моды  $TE_{01}$  и  $TE_{02}$ , частота входного сигнала 45,696 ГГц, выходного – 91,392 ГГц;  $V_0 = 500$  кВ;  $I_0 = 55$  А;  $q = 1,6$ ;  $\eta = 38\%$ , усиление – 58 дБ, выходная мощность 10,5 МВт.

#### 1.4.4. Гиро-ЛБВ

В [65] приведены данные для гиро-ЛБВ в диапазоне 30 ГГц:  $\frac{\Delta f}{f} = 3\%$ ,  $V_0 = 70$  кВ,  $I_0 = 3,5$  А,  $\eta = 20\%$ , рабочая мода в отбирателе -  $TE_{21}$  (работа на второй гармонике циклотронной частоты). В [66] приведены данные расчета для гиро-ЛБВ в диапазоне 94 ГГц:  $\frac{\Delta f}{f} = 5\%$ ;  $V_0 = 100$  кВ;  $I_0 = 10$  А;  $q = 1$ ;  $\eta = 25\%$ , усиление – 45 дБ, рабочая мода -  $TE_{01}$ . Эти данные достаточно хорошо коррелируют с данными расчета [44, 45] для регулярных гиро-ЛБВ.

#### 1.4.5 Пениотроны

В [67] приведены экспериментальные результаты для пениотрона на основной моде в диапазоне 34 ГГц с рекуперацией энергии на коллекторе (за

счет этого КПД повышен с 47% до 57%). Выходная мощность – 170 кВт. На IVEC-2005 теми же авторами доложены те же результаты – пока улучшения параметров даже на основном режиме не получено. Следует констатировать, что пениотрон как высокоэффективный генератор миллиметрового диапазона и успешный конкурент гиротрона не состоялся. Несмотря на возможный идеальный механизм передачи энергии электронов ВЧ-полю в квази-ТЕМ поле в пениотроне, потенциально обеспечивающий приближение к 100% КПД, этого не происходит по ряду причин, подробно описанных в [68-70]. К этим причинам относятся: релятивизм, циклотронный резонанс на встречной парциальной составляющей поля резонатора, силы взаимодействия электронов, отступление поля резонатора от структуры ТЕМ, присутствие высших азимутальных гармоник в поле магнетронного или многоламельного резонатора. Все эти причины приводят к нарушению конгруэнтности фазовых траекторий электронов, в результате чего КПД пениотрона далек от 100%. Основным же фактором, снижающим КПД пениотрона в миллиметровом диапазоне, является невозможность обеспечить необходимую величину тока моновинтового пучка при приемлемой нагруженной добротности резонатора (т.е. при приемлемом КПД контура) для достижения оптимального по КПД режима (оптимальной амплитуды поля в резонаторе). На частотах же порядка 1 -3 ГГц эти требования выполнимы, и при специальной форме ламелей резонатора КПД пениотрона может достигать (без рекуперации на коллекторе) величин порядка 80% [71], т.е. здесь пениотрон вполне конкурентоспособен, но не в сравнении с гиротроном, а с обычным магнетроном. При использовании рекуперации на коллекторе его КПД может быть выше, чем у лучших магнетронов при выходной мощности 10 кВт в непрерывном режиме и  $V_0=10$  кВ.

### **1.5. Перспективы повышения мощности коротковолновых гиротронов**

Одной из главных проблем при решении задачи повышения мощности гиротронов в коротковолновом диапазоне является динамическое расслоение широкого (для достижения высокой мощности) электронного потока (ЭП) в поперечно-неоднородном поле резонатора. Эта проблема может быть решена в гироклинотроне, предложенном в 1969 г. в [73]. В этом приборе широкий спирализованный ЭП проходит наклонно (под углом  $\alpha$ ) относительно плоскостей зеркал двухзеркального открытого резонатора. Благодаря этому, при оптимизированном  $\alpha$  каждый слой ЭП при достаточной протяженности резонатора имеет в среднем одинаковые условия взаимодействия и невзаимодействующих слоев (в узлах поля в обычном гиротроне) нет. Аналитический анализ и численные расчеты в [73] подтвердили это. Однако в [73] расчеты были проведены на основе упрощенной модели: 1) использовались усредненные слабoreлятивистские уравнения; 2) поле между зеркалами предполагалось плоско-параллельным, дифракция не учитывалась. В 1969 г. проблема повышения мощности гиротронов в коротковолновой

части миллиметрового диапазона не была столь актуальной, как в настоящее время. Поэтому необходимые уточнения модели и более тщательные исследования гироклиотрона в те годы не проводились. Теперь же они весьма актуальны, и здесь приведены их основные результаты.

В [74] предложено решение проблемы расслоения ЭП за счет использования резонаторов бегущей  $T$ -волны, образуемых четырехзеркальной (или более сложной) системой отражателей. В такой системе поперечная однородность поля в рабочей области обеспечивается независимостью компонент поля  $T$ -волны от поперечных (к направлению распространения) координат, а бегущая структура волны предопределяет независимость процесса фазовой группировки любого из слоев ЭП от места его входа в рабочую область резонатора. Там же показано, что в гиротроне с поляризацией  $T$ -волны, при которой  $E$  составляющая ортогональна направлению спирализованного ЭП (вертикальная поляризация), достигим электронный КПД порядка 30% на основной гармонике и 20% - на второй. Однако в таком приборе возможно использовать и  $T$ -волны с  $E$  параллельной направлению распространения ЭП (горизонтальная поляризация). В этом случае вектор  $E$  параллелен плоскости зеркал и допустимая напряженность поля (по ВЧ-пробоею в вакууме) значительно повышается, что существенно для мощных гиротронов в КВЧ-диапазоне. В [74] указывалось также на возможность наклонного прохождения ЭП через резонатор. Обе эти возможности представляются интересными для исследования.

Для повышения электронного КПД в рассматриваемых приборах эффективно использование каскадных схем генераторов типа гироклиотрона – генератора (первый каскад с самовозбуждением). Ниже показано, что в двухкаскадных схемах возможно повышение КПД вдвое – до 60% на первой и до 53% на второй гармониках циклотронной частоты.

Схема гироклиотрона представлена на рис. 1.25, где 1 – широкий спирализованный ЭП; 2 – плоские зеркала коробчатого резонатора; 3 – боковые неотражающие экраны;  $\alpha$  - угол наклона ЭП относительно плоскостей зеркал;  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$  - угол наклона ЭП относительно оси резонатора.

На рисунке указаны также размеры резонатора:  $2a$  по оси  $\xi$ ,  $2b$  по оси  $y$ ,  $2l$  по оси  $\zeta$ . Система координат  $x, y, z$  - расчетная для ЭП, система координат  $\xi, y, \zeta$  - расчетная для поля резонатора.

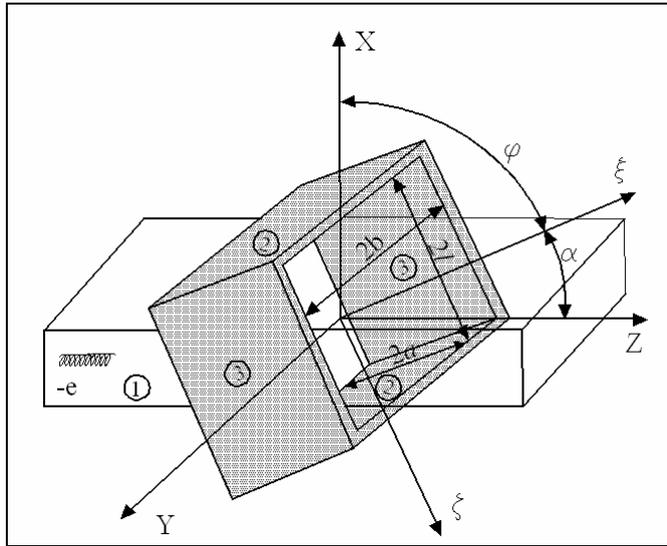


Рис. 1.25. Схема гироклинодрона.

Основное упрощение принятой в расчете математической модели – неучет сил пространственного заряда пучка. Как показано в [39], эти силы имеют по своей структуре граничный характер и внутри «толстого» ЭП практически не играют роли, проявляясь только на его границах.

Согласно теории, развитой в [75], поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$   $H_{10q}$  моды рассматриваемого резонатора в системе координат  $\xi, \eta, \zeta$  могут быть записаны в виде:

$$E_y = \text{Re} \left\{ E_0 \cos \left[ (A + jB)\xi' \right] \cos(C\zeta') e^{j\theta} \right\}$$

$$B_\xi = \text{Re} \left\{ (E_0/c) j \cos \left[ (A + jB)\xi' \right] \sin(C\zeta') e^{j\theta} \right\}$$

$$B_\zeta = \text{Re} \left\{ -(E_0/c) j (A + jB) \sin \left[ (A + jB)\xi' \right] \cos(C\zeta') e^{j\theta} \right\}$$

$$E_\xi, E_\zeta, B_y = 0,$$

$$\text{где } \theta = \omega t, \quad A + jB = \frac{\pi}{2a_r \left[ 1 + \beta_r (1 - j) / M_r \right]}, \quad C = \frac{\pi q}{2l_r}, \quad q=1,3,5,\dots, \quad \beta_r=0.824;$$

$a_r = \frac{\omega}{c} a, \quad b_r = \frac{\omega}{c} b, \quad l_r = \frac{\omega}{c} l, \quad (\xi', \zeta') = \frac{\omega}{c} (\xi, \zeta), \quad M_r = \sqrt{2a_r^2 / l_r}, \quad Q_D = qM_r^3 / 2\pi\beta_r$  - дифракционная добротность резонатора.

В системе  $x, y, z$  имеем

$$\xi = x \cos \varphi + (z - z_c) \sin \varphi, \quad \zeta = -x \sin \varphi + (z - z_c) \cos \varphi,$$

$z_c$  соответствует центру резонатора

$$E_y = E_y, \quad B_x = B_\xi \cos \varphi - B_\zeta \sin \varphi, \quad B_y = B_\xi \sin \varphi + B_\zeta \cos \varphi, \quad B_z = B_0 = \text{const}.$$

Для расчетов использовались неусредненные трехмерные релятивистские уравнения движения электрона в заданном ВЧ-поле с

граничными условиями, аналогичными [73]. Оптимизационные расчеты гироклиноотрона на основе сформулированной выше математической модели показали, что его средний по слоям оптимальный КПД  $\eta$  достигает 50% при следующих параметрах:  $\lambda=3$  мм,  $\beta_0=0,5$  ( $V_0=79$  кВ),  $I_0=100$  А, питч-фактор  $q_0 = v_{\perp} / v_{\parallel} = 1.4$ ,  $F = eB_0 / m_0\omega = 0,93$  ( $B_0$  - направляющее магнитное поле),  $A_0=0,0135$ , ( $E_{0\max} = 106$  кВ/см)  $a_r=50$ ;  $l_r = 80$ ;  $b_r = 12$ ;  $q=53$ ;  $M_r=8$ ;  $Q_D \cong 5000$ ; нагруженная добротность  $Q_n = 500$ ;  $\eta_{\max}=0.55$ .

Разброс КПД по слоям достигает 9%. На рис. 1.26 представлена зависимость среднего по слоям КПД от угла наклона  $\varphi$ . По виду она близка к рассчитанной в [73] по упрощенной модели для  $\beta_0=0,4$ .

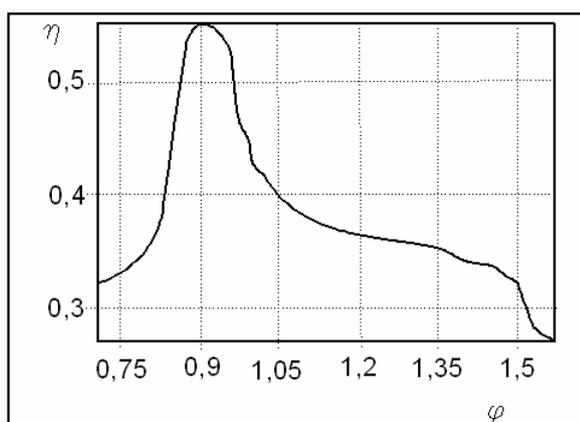


Рис. 1.26. Зависимость среднего по слоям КПД от угла наклона  $\varphi$ .

Конструкция гироклиноотрона может быть цилиндрической с толстым трубчатым поливинтовым пучком: азимутально-симметричной (рис. 1.27, а) или винтовой (рис. 1.27, б). Здесь 1 – рабочие зеркала резонатора, 2 – трубчатый электронный поток. Гироклиноотрон, изображенный на рис. 1.27, б, может использоваться как усилитель.

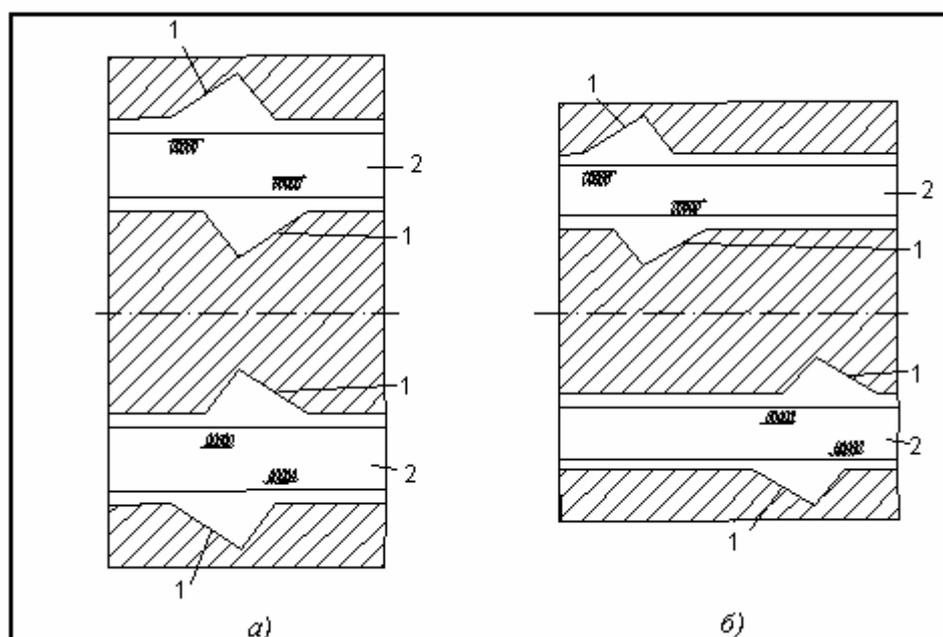


Рис. 1.27. Конструкция гироклиноотрона.

Схема двухпучкового гирорезонансного прибора с  $T$ -волной и ускоряющим электродом изображена на рис. 1.28:  $a$  – поперечное,  $b$  – продольное сечение прибора,  $в$  – наклонное прохождение пучка через поле резонатора в плоскости  $y=const$ .

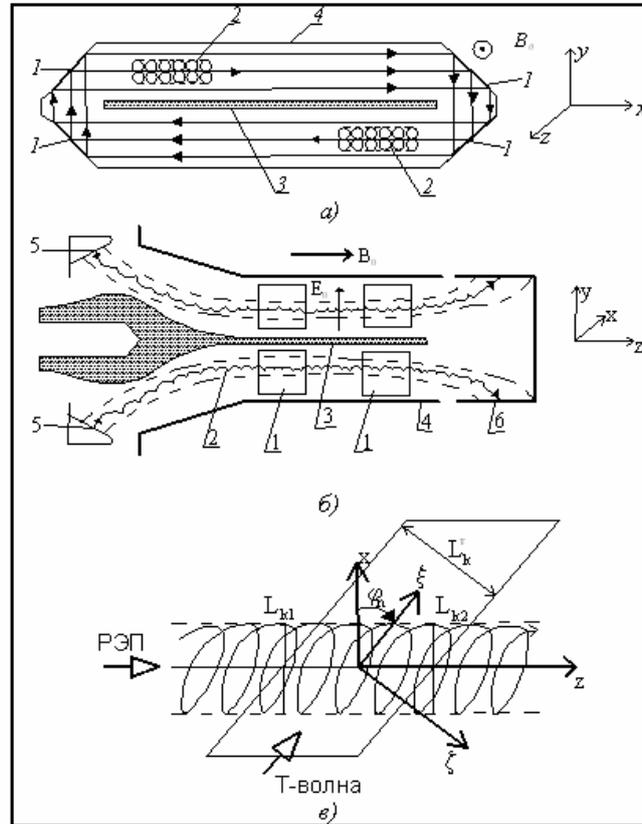


Рис. 1.28. Схема двухпучкового гирорезонансного прибора с  $T$ -волной и ускоряющим электродом.

Здесь  $1$  – плоские полированные зеркала;  $2$  – широкие спирализованные ЭП;  $3$  – ускоряющий электрод с не отражающей поверхностью (поглощающей или шероховатой рассеивающей);  $4$  – не отражающие металлические экраны;  $5$  – катод;  $6$  – коллектор. Внешний коробчатый электромагнит не показан.

Безразмерные трехмерные уравнения движения ансамбля из  $N_e$  крупных частиц, имитирующих поведение электронного потока в кинематическом приближении, имеют вид:

$$\frac{d\gamma_i \beta_i}{dz} = -(\mathbf{E} - [\beta_i \mathbf{B}]) / \beta_{zi}; \quad (1.97)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp i}}{dz} = \frac{\beta_{\perp i}}{\beta_{zi}}; \quad \frac{d\theta_i}{dz} = \frac{W}{\beta_{zi}}.$$

Начальные условия к (1.97) при  $z=0$  могут быть заданы в виде

$$\theta_i=0; \beta_{zi}=\beta_{z0}; \boldsymbol{\beta}_{\perp i} = \beta_{i0} \cdot \boldsymbol{\Psi}_0; \quad \mathbf{r}_{\perp i} = r_0 \cdot \mathbf{r}_0 + 2\pi(i-0,5)/N \cdot \boldsymbol{\Psi}_0 + y_0 \cdot \mathbf{y}_0.$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные:  $0 \leq T = z'/L'_0 \leq 1$  ( $L'_0$  - длина области взаимодействия,  $(x, y, z, L_0) = \omega_0/c(x', y', z', L'_0)$ ),  $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\Psi}_0)$  - орты цилиндрической системы координат;  $W = \omega/\omega_0$ ; ( $\omega$  - рабочая частота,  $\omega_0$  - опорная частота),  $\theta_i = \omega t_i$ ,  $\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{v}_i/c$ ;  $\mathbf{v}_i$  - скорость крупных частиц,  $\gamma_i = 1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}_i^2}$  - релятивистский фактор,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/E_m$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'/E_m/c$  - электрическая напряженность и магнитная индукция электромагнитного поля ( $E_m = m_0\omega c/e$ ).  $A = E_m^T/E_m$ ;  $E_m^T$  - амплитуда волны в каждом резонаторе. Статические поля задавались как  $\mathbf{B}^0 = F \cdot \mathbf{z}_0$ ;  $\mathbf{E}^0 = E_y^0 \cdot \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{B}^0 = \mathbf{B}'_0/E_m/c$ ,  $\mathbf{B}'_0$  - индукция продольного магнитоэстатического поля,  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}'_0/E_m$ ,  $\mathbf{E}'_0$  - напряженность электростатического поля.

Наклонное прохождение поливинтового электронного пучка в поле бегущей  $T$ -волны резонатора в плоскости  $y=\text{const}$  иллюстрирует рис. 1.28, в. Здесь на электронный поток, движущийся в направлении  $z$  падает под углом  $\varphi_n$   $T$ -волна, распространяющаяся в направлении  $\xi$ . Взаимодействие электронов-частиц с волной  $k$ -го резонатора, имеющего ширину  $L_k^T$ , происходит в области

$$L_{k1} + x_i(z) \operatorname{tg} \varphi_n < z < L_{k2} + x_i(z) \operatorname{tg} \varphi_n,$$

где  $L_k = L_{k2} - L_{k1} = L_k^T / \cos \varphi_n$ ,  $x_i(z)$  - координата  $i$ -го частицы в сечении  $z$ .

Для  $T$ -волны, распространяющейся в направлении  $\xi$ , будем рассматривать два варианта поляризации:

*Вертикальная поляризация.* В системе координат  $(\xi, y, \zeta)$

$$E_y^T = A \cos W(\theta - \xi), \quad B_\zeta^T = A \cos W(\theta - \xi).$$

В системе  $(x, y, z)$ ,  $\xi = x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n$

$$B_x^T = -A \cos W(\theta - \xi) \cdot \sin \varphi_n;$$

$$B_z^T = A \cos W(\theta - \xi) \cdot \cos \varphi_n; \quad (1.98)$$

$$E_y^T = A \cos W(\theta - \xi).$$

*Горизонтальная поляризация:* В системе координат  $(\xi, y, \zeta)$

$$B_y^T = A \cos W(\theta - \xi), \quad E_\zeta^T = -A \cos W(\theta - \xi).$$

В системе  $(x, y, z)$ ,  $\xi = x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n$

$$\begin{aligned}
B_y^T &= A \cos W(\theta - \xi); \\
E_x^T &= A \cos W(\theta - \xi) \sin \varphi_n; \\
E_z^T &= -A \cos W(\theta - \xi) \cos \varphi_n.
\end{aligned}
\tag{1.99}$$

Статические поля задавались как  $\mathbf{B}^0 = F \cdot \mathbf{z}_0$ ;  $\mathbf{E}^0 = E_y^0 \cdot \mathbf{y}_0$ . Параметры пучка на входе задавались следующие: величина полной скорости  $\beta_0 = \sqrt{\beta_{z0}^2 + \beta_{t0}^2}$ , питч-фактор  $q_0 = \beta_{t0} / \beta_{z0}$ , радиус  $r_0 = \gamma_0 \beta_{t0} / F$ , значение  $y_0$  выбиралось равным 0 ввиду независимости процесса от  $y$ ,  $\beta_{t0} = \sqrt{\beta_{x0}^2 + \beta_{y0}^2}$ .

Для оценки эффективности взаимодействия используем волновой КПД, представляющий отношение ВЧ мощности к сумме мощности пучка на входе и мощности переданной пучку из электростатического поля

$$\eta = \frac{P_v}{P_0 + P_E} = \frac{\eta_v}{1 - \eta_E}
\tag{1.100}$$

$P_E > 0$  соответствует накачке энергии в электронный поток.

$$\begin{aligned}
\eta_v &= \frac{A}{\gamma_0 - 1} \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \int_0^z (\vec{\beta}_i \cdot \vec{E}^T) / \beta_{zi} = \frac{P_v}{P_0}, \\
\eta_E &= \frac{1}{\gamma_0 - 1} \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \int_0^z (\vec{\beta}_i \cdot \vec{E}^0) / \beta_{zi} = -\frac{P_E}{P_0}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с законом сохранения  $\eta_v + \eta_E = \eta_e$ ,

где  $\eta_e = \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\gamma_0 - \gamma_i(z)}{\gamma_0 - 1}$  - величина электронного КПД, который

используется для контроля точности расчетов.

Оценку величины рабочего тока получаем из соотношения:

$$\eta_{vk} \cdot \dot{I}_0 U_0 = \frac{\omega_0 \cdot \varepsilon_k}{Q_k} = \frac{\omega_0 \varepsilon_0 c^3}{Q_k 2 \omega_0^3} E_m^2 \cdot A_k^2 \cdot V_k,$$

$\varepsilon_k$  - запасенная энергия каждого резонатора,  $Q_k$  - его добротность,  $V_k = V' \cdot (2\pi/\lambda)^3$  - безразмерный объем, занятый Т-волной,  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная  $\eta_{vk} = \eta_v(z_{k2}) - \eta_v(z_{k1})$ . После несложных преобразований имеем:

$$I_0 \cong \frac{A_k^2}{\eta_{vk}} \frac{V_k \cdot 679}{Q_k \cdot (\gamma_0 - 1)} \quad (1.101)$$

*Гиромонотрон с вертикальной поляризацией Т-волны.* Детальные расчеты такого гиромонотрона ( $\varphi_n=0$ , вертикальная поляризация, отсутствует электростатическое поле  $E^0=0$ ) показали, что максимальная его эффективность с КПД  $\approx 30\%$  достигается при скоростях электронов  $\beta \approx 0.45 \div 0.6$  и  $q_0 \approx 1.8 \div 2.3$ . увеличение (уменьшение)  $\beta_0$  приводит к снижению КПД, например для  $\beta_0 = 0.8$  величина КПД не превосходит 24%. Приведем характерные значения параметров оптимального варианта гиромонотрона на основной гармонике:

Вариант 1:

$$\beta_0 = 0.5 (U_0=79\text{кв}), q_0=2, F=1.13, L_0=L_1=20.23, A_1=0.015, \eta=0.33.$$

На рис. 1.29а. представлены  $1 - \beta_t(T)$ ,  $\beta_z(T)$ ,  $\eta(T)$ ,  $T = z/L'_0$  этого варианта. Отбор энергии происходит за счет понижения поперечной составляющей скорости электронного потока. Оценки для рабочей частоты, соответствующей  $\lambda=6$  мм и добротности  $Q=200$ , показали, что рабочий режим с КПД 30% достигается при  $B'_0 \approx 2\text{Тл}$ ,  $I_0 \approx 60\text{А}$ ,  $E_m^T \approx 120\text{кв/см}$ , ширина луча Т-волны  $L'_1 \approx 2$  см. Заметим, что значение  $E_m^T$  может быть понижено до любого требуемого уровня за счет увеличения  $L'_1$ . При этом, однако, понижается предельно достижимый КПД. Например, в рассматриваемом варианте снижение  $E_m^T$  вдвое за счет соответствующего увеличения  $L'_1$  до 4см. приводит к уменьшению предельного КПД до .21%

Зависимость  $A^2/\eta(A)$ , определяющая, в соответствии с (1.101), согласованный с А и Q ток, представлена на рис. 1.29б. Характер этой зависимости указывает на «мягкий» режим возбуждения колебаний:

$$\frac{dI_0}{dA} \text{ везде положительна}$$

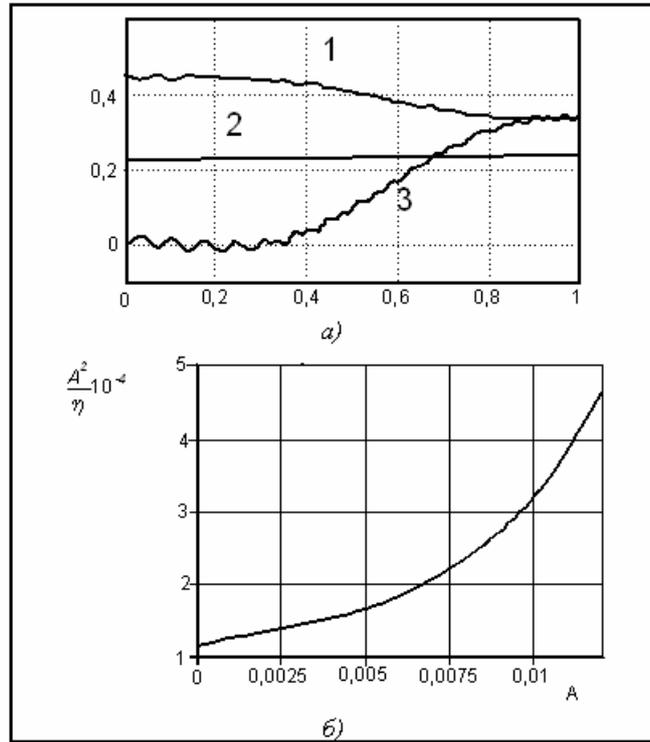


Рис. 1.29. Зависимости: а) 1.  $\beta_t(T)$ , 2.  $\beta_z(T)$ , 3.  $\eta(T)$ ; б)  $\frac{A^2}{\eta}(A)$ .

Вариант 2:  $\beta_0 = 0.8$  ( $U_0=340\text{кв}$ ),  $q_0=1.7$ ,  $F=1.51$ ,  $L_0=20$ ,  $A_l=0,047$ ,  $\eta=0.25$ .

Вариант 3:  $\beta_0 = 0.25$  ( $U_0=20\text{кв}$ ),  $q_0=2$ ,  $F=1.00$ ,  $L_0=14.0$ ,  $A_l=0,005$ ,  $\eta=0.248$ .

*Наклонное прохождение пучка в гиромонотроне с вертикальной поляризацией (однопучковая конструкция).*

В рассматриваемых выше схемах ( $\varphi_n=0$ ) условие синхронизма на  $p$ -й гармонике  $\gamma(1 \mp \beta_z/\beta_{\phi z}) = pF$  реализуется при  $pF=\gamma$ , т.к.  $\beta_{\phi z}=\infty$ . При  $\varphi_n \neq 0$  величина продольной фазовой скорости принимает конечные значения  $\beta_{\phi z} = 1/\sin \varphi_n$  и, если учесть, что для парциальной Н-волны имеет место интеграл движения  $\gamma(1 \mp \beta_{\phi z}\beta_z) = const$  то можно ожидать некоторого увеличения эффективности взаимодействия при одновременном выполнении условия синхронизма с попутной волной и условия полного отбора  $\gamma(1 - \beta_z\beta_{\phi z}) = 1$ . Несложный анализ показывает, что оба условия выполняются при  $q_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} \beta_{\phi z}^2} - 1$  и  $F = \gamma - \frac{\gamma - 1}{\beta_{\phi}^2}$ . В настоящее время

начаты исследования такого варианта. Полученные пока результаты свидетельствуют об увеличении КПД при  $\varphi_n=0.6-1$  лишь на 4÷6%, что объясняется недостаточно хорошей группировкой в коротком резонаторе.

Возможно, оптимизация всех параметров гиротрона приведет к существенному улучшению КПД.

*Гиромонотрон с горизонтальной поляризацией Т-волны*

Вариант 4:

$$\left( E_y^0 = 0, \quad \varphi_n = 0 \right) \beta_0 = 0.5, q_0=2, L_0=18.29, F=1.09, A=0,055, \eta=0.32.$$

Вариант 5:

$$\left( \varphi_n = 0, \quad E_y^0 \neq 0.05 \right) \beta_0 = 0.5, q=2, L_0=19.2, F=1, A=0,053, \eta=0.33.$$

В рассматриваемом случае составляющая  $\vec{E}$  Т-волны параллельна направлению дрейфа электронов спирализованного ЭП и, следовательно, непосредственно осуществляется продольный энергообмен. Однако одновременно за счет действия поперечной составляющей  $\vec{H}$  происходит преобразование энергии поперечного движения электронов в продольную, т.е. поперечная энергия электронов также меняется. Подробно этот механизм описан в [4].

Как показывают данные варианта 4, для осуществления оптимального режима при таком взаимодействии необходима в несколько раз большая амплитуда ВЧ поля А, чем при вертикальной поляризации Т-волны. Однако следует учесть, что уровень пробивной напряженности в случае горизонтальной поляризации повышается еще более значительно. Кроме того, А можно понизить за счет увеличения  $L_0$ .

Расчеты показали, что в каскадной схеме генератора, в котором первый резонатор работает в режиме автогенерации, эффективность можно увеличить вдвое по сравнению со схемой гиромонотрона. В оптимальных вариантах двухкаскадной схемы значения КПД достигает 60-62%. Интересно отметить, что в рассматриваемых вариантах в области дрейфа азимутальная группировка отсутствует. Действительно, приращение азимута  $i$ -го электрона  $\Delta\varphi_i = \Omega_i \tau_i$ . При этом  $\Omega_i = \frac{e}{m_i} B_0 = \frac{e}{m_0} B_0 \frac{1}{\gamma_i}$ ,  $\tau_i = \frac{L'_d}{v_{zi}}$ , где  $L'_d$  – длина области дрейфа. В соответствии с интегралом движения электрона в поле с трансляционной симметрией [4] (такое поле в первом каскаде)  $v_{zi} m_i = v_{\parallel} m_0 \gamma_0$ .

Таким образом,  $v_{zi} = \frac{v_{\parallel} \gamma_0}{\gamma_i}$ . Соответственно  $\Delta\varphi_i = \frac{L'_d}{v_{\parallel}} \frac{e}{m_0} \frac{B_0}{\gamma_0} \neq f(i)$ .

Продольная же группировка имеет место:  $\frac{d\theta_i}{dz} = 1 / \beta_{zi} = \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \frac{1}{\beta_{\parallel}}$ . В ниже

приведенных вариантах при оптимизации параметров амплитуды волн  $A_k$  и сдвиг фаз  $\Delta\varphi_k$  в резонаторах ( $\Delta\varphi_1=0$ ) и их ширина  $L_k$  подбирались так, чтобы обеспечивался примерно одинаковый отбор мощности. Рассматривалась вертикальная поляризация.

Вариант 6: (основная гармоника, двухкаскадная схема)

$$\beta_0 = 0.5, q_0=2, F=1.013, L_1=9, A_1=0,015, L_{d1}=7.6, L_2=9, A_2=0.032, \Delta\varphi_2=-0.023, \eta_{\Sigma}=0.6.$$

Вариант 7: (вторая гармоника, двухкаскадная схема)

$\beta_0 = 0.5$ ,  $q_0=2$ ,  $F=0.498$ ,  $L_1=8$ ,  $A_1=0,048$ ,  $L_{d1}=6.95$ ,  $L_2=8$ ,  $A_2=0.068$ ,  $\Delta\varphi_2=-0.62$ ,  $\eta_\Sigma=0.5$ .

Вариант 8: (основная гармоника, трехкаскадная схема)

$\beta_0 = 0.485$ ,  $q_0=2$ ,  $F=1.021$ ,  $L_1 \div L_3=9$ ,  $A_1=0,021$ ,  $L_{d1} \div L_{d2}=5$ ,  $A_2=0.02$ ,  $\Delta\varphi_2=2.36$ ,  $A_3=0.02$ ,  $\Delta\varphi_3=2.6$ ,  $\eta_\Sigma=0.636$ .

Материалы данной главы соответствуют обзору по гирорезонансным приборам [76].

## Литература

1. Гапонов А.В. Возбуждение линии передачи непрямолинейным электронным потоком. – Изв. вузов. Радиофизика, 1959, Т.2, №3, с.443-450.
2. Гапонов А.В. К статье: «Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи». Письмо в редакцию. – Изв. вузов. Радиофизика, 1959, Т.2, №5, с.836-843.
3. Гапонов А.В. О неустойчивости системы возбужденных осцилляторов по отношению к электромагнитным возмущениям. – ЖЭТФ, 1960, Т.39, №2, с.326-331.
4. Гапонов А.В. Релятивистские дисперсионные уравнения для волноводных систем с винтовыми и трохоидальными электронными потоками. – Изв. вузов. Радиофизика, 1961, Т.4, №3, с.547-560.
5. Гапонов А.В., Юлпатов В.К. Взаимодействие замкнутых электронных пучков с электромагнитным полем в полых резонаторах. – Радиотехника и электроника, 1962, Т.7, №4, с.631-642.
6. Юлпатов В.К. О дисперсионном уравнении для волноводов с непрямолинейными электронными потоками. – Изв. вузов. Радиофизика, 1963, Т.6, №1, с.104-111.
7. Антаков И.И., Гапонов А.В., Юлпатов В.К. Некоторые особенности взаимодействия винтовых электронных пучков, направляемых однородным магнитным полем, с электромагнитным полем волноводов. – Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника, 1965, №12, с.33-42.
8. Юлпатов В.К. Нелинейная теория взаимодействия непрямолинейного периодического электронного пучка с электромагнитным полем. Часть I. Вывод основных уравнений. – Вопросы Радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника, 1965, №12, с.15-23.
9. Антаков И.И., Гапонов А.В., Малыгин О.В., Флягин В.А. Применение индуцированного циклотронного излучения электронов для

- генерирования и усиления электромагнитных колебаний большой мощности. – Радиотехника и электроника, 1966, т.11, №12, с.2254-2267.
10. Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике. – Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т.10, №9-10, с.1414-1453.
  11. Гапонов А.В., Юлпатов В.К. Некоторые особенности взаимодействия винтовых электронных пучков с электромагнитным полем волноводов. – Радиотехника и электроника, 1967, Т. 12, №4, с. 627-633.
  12. Юлпатов В.К. Нелинейная теория взаимодействия периодического электронного пучка с электромагнитной волной. – Изв. вузов. Радиофизика, 1967, Т.10, №6, с.846-856.
  13. Лыгин В.К., Цимринг Ш.Е. Расчет электронных траекторий в винтовых пучках. – ЖТФ, 1971, т.41, №11, с.2278-2287.
  14. Лыгин В.К., Цимринг Ш.Е. Формирование винтовых электронных пучков. – Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1971, №6, с.59-77
  15. Twiss R.Q. Radiation transfer and the possibility of negative absorption in radio astronomy. – Austral. J. Phys., 1958, V.11, №4, p.567-579.
  16. Schneider J. Stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a magnetic field. – Phys. Rev. Lett., 1959, V.2, №12, p.504-505.
  17. Pantell R.H. Backward-wave oscillations in an unloaded waveguide. – Proc. IRE, 1959, V.47, № 6, p. 1146.
  18. Chow K.K., Pantell R.H. The cyclotron resonance backward wave oscillator. – Proc. IRE, 1960, V.48, №11, p.1865-1870.
  19. Hirshfield J.L., Granatstein V.L. The electron cyclotron maser – a historical survey. – IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1977, MTT-25, №6, p.522-527.
  20. Ковалев И.С., Кураев А.А., Колосов С.В. Законы сохранения в приложении к теории и расчету электронных приборов. – ДАН БССР, 1973, Т.17, №7, с.621-624.
  21. Кураев А.А., Ковалев И.С., Колосов С.В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. – Мн.: Наука и техника, 1975.
  22. Кураев А.А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. Мн.: Наука и техника, 1979.
  23. Кураев А.А. Релятивистский орбитально-дрейфовый интеграл движения электрона во вращающемся электромагнитном поле. – Радиотехника и электроника, 1982, Т. 27, №4, с.794-798.
  24. Жураховский В.А., Кураев А.А. О точных и усредненных интегралах движения электронов в полях бегущих волн. – Радиотехника и электроника, 1984, Т.29, №7, с. 1427-1429.
  25. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ: Методы анализа и оптимизации параметров. М.: Радио и связь, 1986.

26. Кураев А.А., Байбурин В.Б., Ильин Е.М. Математическое моделирование и методы оптимального проектирования СВЧ приборов. Мн.: Наука и техника. 1990.
27. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. Мн.: Бестпринт, 2004.
28. Жураховский В.А. Об использовании метода усреднения при интегрировании релятивистских нелинейных уравнений фазохронных приборов. – Радиотехника и электроника, 1964, т.9, №8, с. 1527-1530.
29. Кураев А.А. Возбуждение продольно-нерегулярных волноводов с круглым сечением. – Известия АН БССР, сер. ФТН, 1979, №1, с.121-127.
30. Кураев А.А., Степухович В.А., Жураховский В.А. Индуцированное синхротронное излучение электронов в кусочно-однородном магнитном поле. – Письма в ЖЭТФ, 1970, Т.11, №9, с.429-431.
31. Ковалев И.С., Кураев А.А., Демидович Е.М., Шевченко Ф.Г. Нелинейная теория синхротронного излучения трубчатого электронного потока в цилиндрическом волноводе. – ДАН БССР, 1971, Т.15, №8, с.692-694.
32. Ковалев И.С., Кураев А.А., Демидович Е.М., Шевченко Ф.Г. Гирорезонансные приборы с неоднородным магнитостатическим полем в пространстве взаимодействия. – ДАН БССР, 1971, т.15, №10, с.896-899.
33. Ковалев И.С., Кураев А.А., Демидович Е.М., Шевченко Ф.Г. Оптимизированные по КПД секционированные гироусилители резонаторного типа. – ДАН БССР, 1971, т.15, №12, с.1082-1084.
34. Кураев А.А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Мн.: Наука и техника, 1971.
35. Ковалев И.С., Колосов С.В., Кураев А.А. К расчету поперечных электрических полей пространственного заряда в осесимметричных гирорезонансных приборах с трубчатым электронным потоком. – Радиотехника и электроника, 1973, Т.18, №7, с.1525-1528.
36. Ковалев И.С., Кураев А.А., Слепян Г.Я. Поля пространственного заряда в приборах с незамедленными волнами. Формулировка уравнений возбуждения. – Изв. АН БССР, сер. ФТН, 1973, №4, с.87-93.
37. Колосов С.В., Кураев А.А. Сравнительный анализ взаимодействия на первой и второй гармониках циклотронной частоты в гирорезонансных приборах. – Радиотехника и электроника, 1974, т.19, №10, с. 2105-2115.
38. Кураев А.А., Шевченко Ф.Г., Шестакович В.П. Оптимизированные по КПД профили выходных резонаторов, обеспечивающие повышенный запас устойчивости гироклистронов. – Радиотехника и электроника, 1974, Т.19, №5, с.1046-1055.
39. Кураев А.А., Слепян Г.Я. К расчету влияния сил пространственного заряда в осесимметричных гирорезонансных приборах с равноперемешанными трубчатыми потоками конечной толщины. – Радиотехника и электроника. 1975, т.20, №1, с.202-206.

40. Кураев А.А., Слепян Г.Я., Стекольников А.Ф. Трехмерные нелинейные уравнения с учетом сил пространственного заряда для осесимметричных гирорезонансных приборов с трубчатыми равноперемешанными электронными потоками. – Радиотехника и электроника, 1976, т.21, №4, с.802-812.
41. Кураев А.А., Шестакович В.П. Оптимизация профилей резонаторов и распределений магнитостатического поля в гиromонотронах по КПД при условии мягкого самовозбуждения. – Радиотехника и электроника, 1977, т.22, №2, с.415-417.
42. Жураховский В.А. Нелинейные колебания электронов в магнитонаправляемых потоках. – Киев: Наукова думка, 1972.
43. Жураховский В.А. К теории релятивистского гироприбора (Последовательный учет и некоторые возможности корректного исключения уравнений поперечного дрейфа ведущих центров электронных ротаторов). – Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т.21, №12, с. 1847-1852.
44. Колосов С.В., Кураев А.А., Шакирин А.И. Влияние квазистатической части поля пространственного заряда на процесс группирования в гирорезонансных усилителях с рабочим типом волн  $H_{ni}$ . – Радиотехника и электроника, 1987, т.32, №11, с.2420-2447.
45. Колосов С.В., Кураев А.А., Шакирин А.И. Сравнительные характеристики оптимизированных по КПД в полосе частот гирорезонансных ламп с бегущей волной с рабочими видами волн круглого волновода  $H_{oi}$  и  $H_{ii}$ . – Радиотехника и электроника, 1989, т.34, №3, с.562-570.
46. Kurayev A.A., Kolosov S.V., Stekolnikov A.F., Slepyan A.Ya. and Slepyan G.Ya. TWT-Gyrotrons: Non-linear Theory, Optimization and Analysis. Int. J. Electronics. 1988. vol. 65, no. 3, pp. 437-462.
47. Колосов С.В., Кураев А.А. Нелинейная теория гирорезонансных приборов с нерегулярной электродинамической системой. – ЭВ и ЭС, 1998, т.3, №4, с.35-44.
48. Кураев А.А., Колосов С.В. АУС-метод для оптимизации электронных приборов. – Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974, вып.2. с. 45-58.
49. Choi E.M., Sirigiri J.R., Shapiro M.A., Tetkin R.J. Recent Results from the 1,5 MW, 110 GHz Gyrotron Experiment at MIT. – Proceedings WPP 246 “Sixth International Vacuum Electronics Conference IVEC 2005”, 20-22 April 2005, The Netherlands, pp.115-116.
50. Ковалев И.С., Кураев А.А., Демидович Е.М., Шевченко Ф.Г. Влияние полей пространственного заряда на КПД циклотронного взаимодействия трубчатого электронного потока с полем  $H_{oi}$  круглого волновода. – ДАН БССР, 1972, т.16, №9, с.791-794.
51. Ковалев И.С., Кураев А.А., Колосов С.В., Слепян Г.Я. Влияние пространственного заряда в гирорезонансных приборах с тонкими

- равноперемешанными и аксиально-симметричными электронными потоками. – Радиотехника и электроника, 1974, т.19, №5, с.1112-1115.
52. Кураев А.А., Стекольников А.Ф. Влияние пространственного заряда в гирорезонансных приборах волноводного типа. – Радиотехника и электроника, 1978, т.23, с.1668-1677.
53. Кураев А.А., Стекольников А.Ф. Исследование полосовых свойств гирорезонансных приборов волноводного типа. – Радиотехника и электроника, 1979, т.24, №2, с.362-370.
54. Кураев А.А., Стекольников А.Ф. Исследование влияния сил пространственного заряда на группирование электронов в трубке дрейфа гироклистрона. – Радиотехника и электроника, 1980, т.25, №9, с.1928-1935.
55. Kolosov S.V. and Kuraev A.A. Gyroklystron with a Cavity Operating at the Second Harmonic of Working Frequency in Buncher. – IEEE Electron Device letters, 1997, vol. 18, no. 6, p. 254-257.
56. Lawson W., Hogan B., Stamation I.G., Tiwari S., and Krumrine M. Experimental testing of a high-gain, high power gyroklystron. – Proceedings WPP 246 “Sixth International Vacuum Electronics Conference IVEC-2005”, 20-22 April 2005, The Netherlands, pp. 419-420.
57. Еремка В.Д., Кураев А.А., Сеницын А.К. Состояние и перспективы развития мощных коротковолновых гирорезонансных приборов. – Материалы 13-й Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» - КрыМиКо-203, 8-12 сентября 2003 г., Севастополь, с.6-10.
58. Pavelyev A.B., Flyagin V.A., Khizhnyak V.I., Manuilov V.N., Zapevalov V.E. Investigations of Advanced Coaxial Gyrotrons at IAP RAS. MS MW’2001 Symposium, Proceedings, Kharkov, Ukraine, June 4-9, 2001, pp. 507-512.
59. Lievin C., Alberti S., Arnold A. et.al. Development of a 2-MW, CW Coaxial Gyrotron at 170 GHz for Electron – Cyclotron – Resonance – Heating in ITER. Proceedings of IVEC-2005, pp. 21-24.
60. Chu T.S., Blank M., Cahalan P., Cauffman S., Felch K., Jory H. High Power Testing of a 110 GHz Gyrotron with a Single-Stage Depressed Collector. Proceedings of IVEC-2005, pp.117-118.
61. Denisov G.G., Litvak A.G., Myasikov V.E., and Tai E.M. Recent Results in GYCOM/IAP Development of High-Power Gyrotrons for Fusion Installation. Proceedings of IVEC-2005, pp. 497-500.
62. Zapevalov V.E., Lygin V.K., Malygin O.V. et.al. Development of the 300 GHz/4 kW/CW Gyrotron. Proceedings of IVEC-2005, pp. 121-122.
63. Zapevalov V.E. Problems and Advanced of High Power Gyrotrons. MSMW’201 Symposium Proceedings, Kharkov, Ukraine, June 4-9, 2001, pp. 117-122.
64. Neilson J.M., Ives R.L., Read M. et. al. Development Update of 10 MW, 91 GHz Gyroklystron. Proceedings of IVEC-2002, April 23-25, 2002, Monterey, USA, pp. 89-90.

65. Harriet S.B., Mc Dermott D.B. and Luhmann N.C. Construction of a Large-Orbit Second-Harmonic TE<sub>21</sub> Gyro-TWT Amplifier. Proceedings of IVEC-2005, pp. 279-280.
66. Guo-Jun Lai, Pu-Kun Liu, Yun-Feng Jia and Rui-Jian, Yin. The preliminary Design of a W-Band Gyrotron Travelling Wave Amplifier. Proceedings of IVEC-2005, pp. 293-296.
67. Dressman L.I., Mc Dermott D.B., Luhmann N.C., Gallagher D.A., Spenser T.A. K-Band Fundamental – Made Peniotron with High Device Efficiency. Proceedings of IVEC-2002, pp. 194-195.
68. Кураев А.А., Матвеевко А.В., Сеницын А.К. Влияние циклотронного взаимодействия электронного потока со встречной волной в резонансных пениотронах. – Радиотехника и электроника, 1994, т.39, №10, с.1661-1666.
69. Кураев А.А., Парамонов Б.М., Сеницын А.К. Влияние поля пространственного заряда на процесс взаимодействия в пениотроне. – Радиотехника и электроника, 1995, т.40, №1, с.102-107.
70. Кураев А.А., Сеницын А.К. Пениотрон: Факторы, ограничивающие максимально достижимые КПД в оптимальных режимах. Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар. Книга 1(II). Саратов. Из-во ГУНЦ «Колледж».1996, с.115-131.
71. Kuraev A.A., Sinitsyn A.K., Sherbakov A.V. Optimization Peniotron in View of Features of the T-Wave Near to Oscillator Wires. Proceedings of IVEC-2005, pp. 287-289.
72. Кураев А.А., Сеницын А.К. Перспективы повышения мощности коротковолновых гиротронов. – Радиотехника, 2004, №9, с.48-53.
73. Кураев А.А. МЦР – монотрон с широким электронным потоком и наклонным относительно оси резонатора магнитным полем. – Радиотехника и электроника, 1969, т.14, №9, с.1614-1622.
74. Кураев А.А. Гирорезонансные приборы с четырехзеркальными резонаторами бегущей волны. – Доклады АН БССР, 1990, т.34, №7, с. 610-612.
75. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966.
76. Кравченко В.Ф., Кураев А.А. Гирорезонансные приборы: принцип действия, нелинейная теория, достижения и перспективы. – Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники, 2006, №9, с. 13-60.

## ГЛАВА 2

# ПОЛОСА И КРИТИЧНОСТЬ УСЛОВИЙ ЦИКЛОТРОННОГО АВТОРЕЗОНАНСА [1]

### Введение.

Явление циклотронного авторезонансного движения заряженной частицы в поле Т-волны, распространяющейся вдоль направления постоянного магнитного поля, впервые описано и исследовано в работах [2, 3]. Это явление заключается в том, что заряженная частица независимо от ускорения или торможения полем перемещается строго вдоль винтовой линии постоянной фазы резонансной циркулярно-поляризованной составляющей Т-волны. Иначе говоря, относительная фаза заряженной частицы (далее – электрона) в поле Т-волны остается постоянной, несмотря на изменение ее энергии. Следовательно, те электроны, которые попадают в начале области взаимодействия в «тормозящую» фазу поля волны, непрерывно тормозятся до полной остановки на некотором протяженном участке, длина которого определяется только начальной фазой, энергией электрона и амплитудой Т-волны. Эти особенности циклотронного авторезонанса оказались весьма привлекательными для использования такого режима в приборах релятивистской электроники: мазерах на циклотронном резонансе [4-11], пениомагнетроне [12], гиротоне [16, 17, 4]. Предполагается, что режим авторезонанса позволит существенно повысить КПД релятивистских генераторов и усилителей и даже приблизить его к предельно достижимому и одновременно повысить рабочую частоту.

Эксперименты с мазерами на циклотронном авторезонансе (МЦАР) с протяженным взаимодействием [13-115] обнаружили сильное расхождение с предсказаниями теории [4-11]: вместо прогнозируемых КПД 20 – 40 % реально получены 2 – 4 %. Заметим попутно, что в упомянутых теоретических работах [4-11] использовано неверное выражение для «одночастичного» КПД: оно противоречит интегралу движения электрона в бегущей волне при  $v_{\phi} \neq c$  [18]. Однако главная причина расхождения вероятнее всего заключается в критичности условий авторезонанса, которая резко возрастает при увеличении длины области взаимодействия, что отмечалось еще в работе [12]. Поэтому неоптимальный выбор питч-фактора электронного пучка в экспериментах [13-15] и привел к резкому снижению КПД.

В [2] получено аналитическое решение уравнения движения заряженной частицы в поле Т-волны при точном выполнении условия авторезонанса. В данной главе получены аналитические решения и в нерезонансном случае, что позволяет провести исследование авторезонанса как физического явления в различных ситуациях: фиксированная длина области взаимодействия, фиксированная амплитуда волны, заданное число

витков траектории частицы и т.д. Такие исследования позволяют оценить полосу и критичность условий циклотронного авторезонанса для различных параметров электронного пучка и условий взаимодействия, что представляется полезным при выборе типов и конструкций приборов релятивистской электроники, в которых используются режимы, близкие к авторезонансу.

## 2.1. Аналитическое решение уравнений движения электрона в Т-волне и однородном магнитном поле

Уравнения движения электрона в заданном вращающемся Т-поле резонатора и в однородном магнитном поле при пренебрежении действием встречной несинхронной компоненты стоячего поля резонатора и несинхронной левополяризованной компоненты имеют вид [2, 18]

$$\frac{d\gamma\boldsymbol{\beta}}{d\theta} = -A\{\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \cdot [\mathbf{z}_0\mathbf{E}]]\} - F_0 \cdot [\boldsymbol{\beta} \mathbf{z}_0]; \quad (2.1)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \beta_x; \quad \frac{dy}{d\theta} = \beta_y; \quad \frac{dz}{d\theta} = \beta_z. \quad (2.2)$$

Здесь  $\theta = \omega t$ ;  $A = eE'_m / (m_0\omega c)$ ;  $F_0 = eB_0 / (m_0\omega)$ .

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v} / c; \quad \gamma = \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \mathbf{x} = \omega / c \cdot \mathbf{x}' = x \cdot \mathbf{x}_0 + y \cdot \mathbf{y}_0 + z \cdot \mathbf{z}_0.$$

Из условий гирорезонанса выбираем правополяризованную Т-волну:

$$\mathbf{E} = \cos(\theta - z + \psi_0) \cdot \mathbf{x}_0 + \sin(\theta - z + \psi_0) \cdot \mathbf{y}_0. \quad (2.3)$$

Начальные условия к системе (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad z = 0, \quad \beta_z(0) = \beta_{\parallel}, \quad \beta_x(0) = \beta_{\perp} - \cos\psi_p; \quad \beta_y(0) = \beta_{\perp} \sin\psi_p; \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Электронный КПД взаимодействия рассчитывается по изменению релятивистского масс-фактора  $\gamma(z)$  следующим образом:

$$\eta(z) = \frac{\gamma_0 - \gamma(z)}{\gamma_0 - 1}, \quad \gamma_0 = \gamma(0). \quad (2.5)$$

С целью аналитического решения преобразуем уравнение (9.1), следуя методике, аналогичной [2]. Умножая (2.1) скалярно на  $\vec{\beta}$ , получаем известное уравнение для  $\gamma$ :

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -A\beta\mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Умножив (2.1) скалярно на  $\mathbf{z}_0$  и используя (2.6), получаем интеграл движения:

$$\gamma(1 - \beta_z) = k_0 = \text{const} = \gamma_0(1 - \beta_{z0}) \quad (2.7)$$

Здесь  $\gamma_0, \beta_{z0}$  – значения  $\gamma$  и  $\beta_z$  при входе в резонатор.

Введем поперечный вектор  $\beta_t = \beta_x \cdot \mathbf{x}_0 + \beta_y \cdot \mathbf{y}_0$ , тогда из (2.1) и (2.6),(2.7) находим

$$\frac{d\gamma\beta_t}{d\theta} = -(1 - \beta_z) \cdot \left\{ A \cdot \mathbf{E} + \frac{F_0}{k_0} [\gamma\beta_t \cdot \mathbf{z}_0] \right\}.$$

Перейдя к новой независимой переменной  $\Phi = \theta - z$  и обозначая  $\mathbf{P}_t = \gamma\beta_t$ , получим для поперечной составляющей импульса  $\vec{P}_t$  линейное уравнение с гармонической правой частью:

$$\frac{d\mathbf{P}_t}{d\Phi} + \frac{F_0}{k_0} [\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{z}_0] = -A\mathbf{E}(\Phi). \quad (2.8)$$

Заметим, что (2.8) справедливо для Т-волны произвольной поляризации и  $F_0$  произвольного знака.

Для получения точного решения (2.8) его удобно записать в комплексном виде, для чего обозначим

$$\dot{P}_t = P_x + jP_y; \quad \dot{E} = \cos(\Phi + \psi_0) + j\sin(\Phi + \psi_0) = e^{j\Phi} \cdot e^{j\psi_0}.$$

При этом получим

$$\frac{d\dot{P}_t}{d\Phi} - j\frac{F_0}{k_0}\dot{P}_t = -Ae^{j\psi_0} \cdot e^{j\Phi}; \quad \dot{P}_t(0) = \dot{P}_{t0} = P_{x0} + jP_{y0} = |\dot{P}_{t0}| e^{j\psi_p}. \quad (2.9)$$

Здесь  $\Phi > 0$ ,  $\theta$  и  $z$  отсчитываются от начала резонатора.

Точное решение задачи (2.9) запишется в виде

а)  $F_0/k_0 \neq 1$  (нерезонансное движение):

$$\dot{P}_t = \dot{P}_{t0} \cdot e^{j\frac{F_0}{k_0}\Phi} - \frac{jAe^{j\psi_0}}{1 - F_0/k_0} (e^{j\frac{F_0}{k_0}\Phi} - e^{j\Phi}); \quad (2.10)$$

б)  $F_0/k_0 = 1$  (авторезонансное движение):

$$\dot{P}_t = \left( \dot{P}_{t0} - A e^{j\psi_0} \cdot \Phi \right) \cdot e^{j\Phi} = \left( \left( \dot{P}_{t0} \left( e^{j\psi_p} - A \cdot \Phi \cdot e^{j\psi_0} \right) \right) \cdot e^{j\Phi} \right). \quad (2.11)$$

Выражения (2.10), (2.11) получены для поперечной составляющей импульса. Для определения его продольной составляющей  $P_z = \gamma \beta_z$  воспользуемся интегралом движения (2.7) и соотношением  $\gamma^2 = 1 + P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$ . При этом получим

$$P_z = \gamma(z) - k_0; \quad \gamma = \frac{1 + P_x^2 + P_y^2 + k_0^2}{2k_0}. \quad (2.12)$$

Здесь выражение для  $|\dot{P}_t|^2 = P_x^2 + P_y^2$ , входящее в  $\gamma$ , имеет вид

а) нерезонансное движение:

$$|\dot{P}_t|^2 = |\dot{P}_{t0}|^2 + \frac{2A^2}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha \Phi) - 4 \frac{|\dot{P}_{t0}| A}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha \Phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \Phi}{2} + \psi_0 - \psi_p\right), \quad (2.13)$$

$$\alpha = 1 - F_0/k_0$$

б) авторезонансное движение ( $\alpha = 0$ ):

$$P_x^2 + P_y^2 = |\dot{P}_{t0}|^2 + A^2 \Phi^2 - 2 |\dot{P}_{t0}| A \Phi \cos(\psi_0 - \psi_p). \quad (2.14)$$

Для решения уравнений (2.2) обозначим  $\dot{r} = x + jy$ . Тогда, используя соотношение (2.7) и переходя к независимой переменной  $\Phi$ , получим уравнения

$$\frac{d\dot{r}}{d\Phi} = \frac{\dot{P}_t}{k_0}; \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0; \quad \frac{dz}{d\Phi} = \frac{P_z}{k_0} = \frac{\gamma - k_0}{k_0}; \quad z(0) = 0 \quad (2.15)$$

После подстановки в (2.15) выражений (2.10) – (2.14) получаются точные решения для  $\dot{r}(\Phi)$  и  $z(\Phi)$ .

Продemonстрируем вывод решения (2.15) для случая авторезонансного движения.

Используя в (2.15) выражение (2.11) для  $\dot{P}_t$ , после интегрирования находим

$$\dot{r} = \dot{r}_0 + \frac{1}{F_0} \left( A \cdot e^{j\psi_0} + j \dot{P}_{t0} \right) - \frac{1}{F_0} \left( A \cdot e^{j\psi_0} + j \dot{P}_{t0} - j A \cdot \Phi \cdot e^{j\psi_0} \right) \cdot e^{j\Phi}. \quad (2.16)$$

Используя (2.12), (2.14), уравнение для  $z$  из (2.15) преобразуем к виду

$$\frac{dz}{d\Phi} = \frac{1 - k_0^2 + (P_{x0} - A \cdot \Phi \cdot \cos \psi_0)^2 + (P_{y0} - A \cdot \Phi \cdot \sin \psi_0)^2}{2k_0^2}. \quad (2.17)$$

Интегрируя его, получаем уравнение, связывающее  $\Phi$  и  $z$ :

$$z = a\Phi^3 + b\Phi^2 + c\Phi. \quad (2.18)$$

$$\text{где } a = A^2 / (6k_0^2); \quad b = -A \cdot (P_{x0} \cos \psi_0 + P_{y0} \sin \psi_0) / (2k_0^2); \\ c = (1 - k_0^2 + P_{x0}^2 + P_{y0}^2) / (2k_0^2).$$

Аналогичные соотношения, только более громоздкие, получаются для нерезонансного случая (2.10):

$$z = \frac{1}{2k_0^2} \left\{ (1 - k_0^2 + |\dot{P}_{t0}|^2) \Phi + \frac{2A^2}{\alpha^3} (\alpha\Phi - \sin \alpha\Phi) - \right. \\ \left. - \frac{2|\dot{P}_{t0}|A}{\alpha^2} [(\cos(\psi_0 - \psi_p) - \cos(\alpha\Phi + \psi_0 - \psi_p) - \alpha\Phi \sin(\psi_0 - \psi_p))] \right\}. \quad (2.19)$$

Выражения (2.11)-(2.19) при заданных начальных условиях на входе резонатора определяют движение электрона в любом сечении  $z$  при его взаимодействии с попутной парциальной Т-волной.

## 2.2. Авторезонанс при заданной амплитуде поля

На рис. 2.1, а представлено семейство функций  $\eta(F_0)$  при  $A = 0,015$  для различных  $\beta_0$ . Для каждого значения  $\beta_0$  длина области взаимодействия  $L$  и питч-фактор  $q = v_{\perp} / v_{\parallel} = \sqrt{2/(\gamma_0 - 1)}$  выбирались из условия полной остановки электрона в конце этой области при точном авторезонансе ( $F_0 = 1$ ), т.е.  $\eta(1) = 1$ . Характер резонансных кривых весьма специфичен: в отличие от обычного резонанса при авторезонансе точка точного резонанса не является стационарной, т.е. в этой точке имеет место разрыв первой производной  $\eta'(F_0)$ . При этом  $\eta'(1-0) = -\eta'(1+0)$  и весьма велики, что говорит о критичности оптимальных условий при авторезонансе. Полоса авторезонанса достаточно узка и сужается по мере увеличения релятивизма электрона ( $\beta_0$ ). Последнее понятно: при заданной амплитуде  $A$  длина оптимальной области увеличивается с увеличением  $\beta_0$ , что естественным образом сужает полосу авторезонанса.

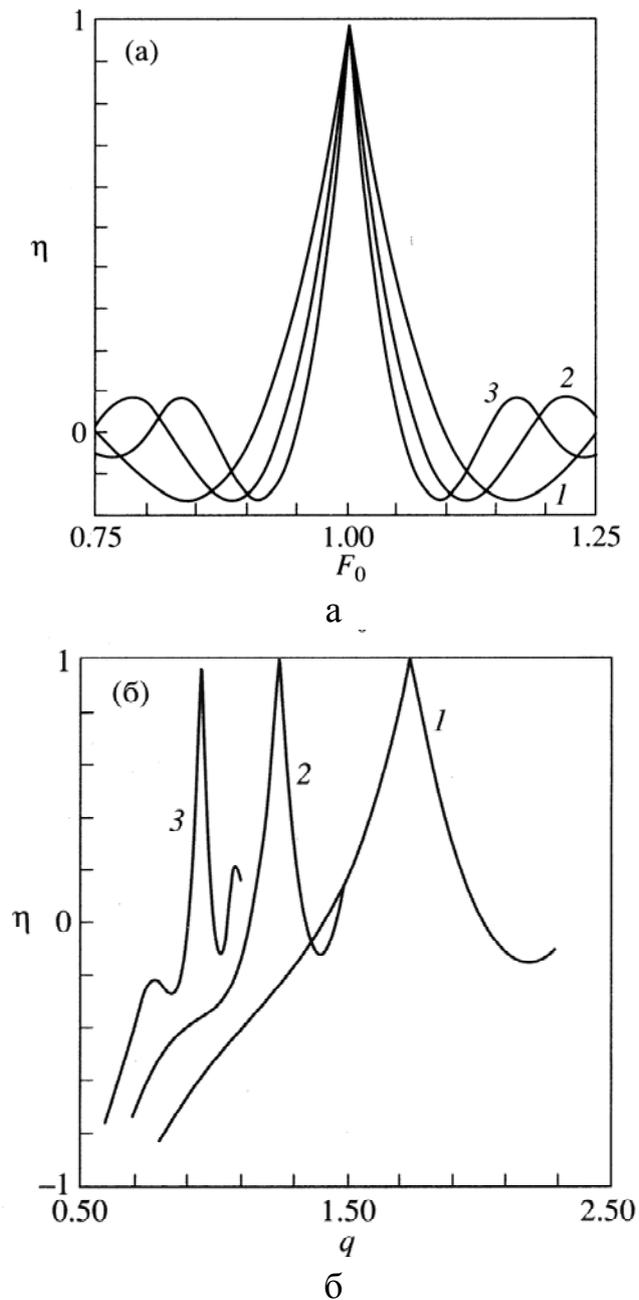


Рис.2.1. Резонансные кривые при фиксированном значении  $A = 0,015$ :  
 а –  $\eta(F_0)$ ; б –  $\eta(q)$ ; 1 –  $\beta_0 = 0,8$ ;  $L = 17,1$ ;  $\Phi = 77,0$ ;  
 2 –  $\beta_0 = 0,9$ ;  $L = 46,3$ ;  $\Phi = 107,2$ ; 3 –  $\beta_0 = 0,95$ ;  $L = 102,7$ ;  $\Phi = 139,9$

На рис. 2.1, б приведены «резонансные» кривые  $\eta(q)$  при  $F_0 = 1$ ,  $A = 0,015$  и заданных  $\beta_0$  (т.е.  $\gamma_0$ ). Эти кривые характеризуют критичность условий авторезонанса по отклонению параметров пучка (питч-фактора  $q$ ) от оптимальных, рассчитанных из условия полного отбора энергии электрона при точном авторезонансе ( $\gamma_0(1 - \beta_{z0}) = 1$ ). Критичность  $\eta(q)$  в оптимальных

точках резко возрастает при увеличении  $\beta_0$ . Это отчасти связано с указанной выше причиной: увеличением оптимальной длины области взаимодействия с увеличением  $\beta_0$  при заданной  $A$ . Кроме того, само условие оптимальности  $(1 - \beta_{z0}) = \gamma_0^{-1}$  становится тем критичнее, чем больше  $\gamma_0$ .

### 2.3. Авторезонанс при заданной длине области взаимодействия

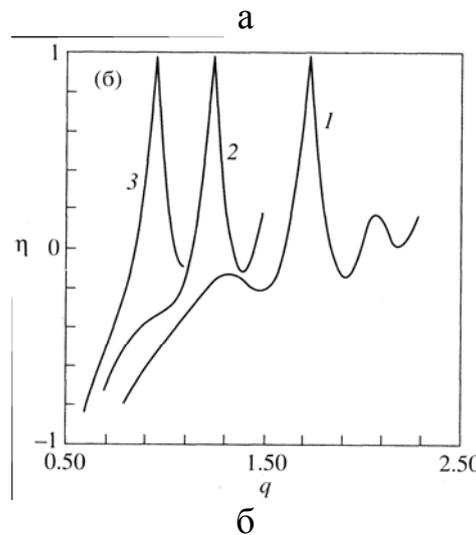
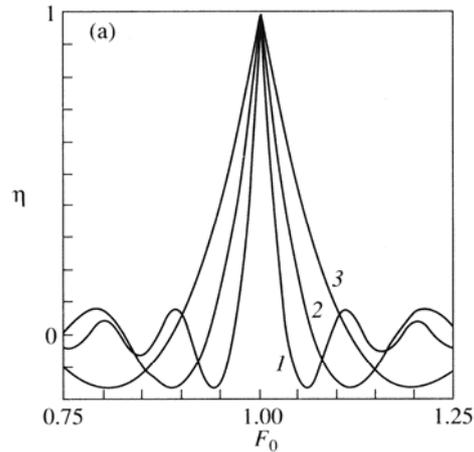


Рис. 2.2. Резонансные кривые при фиксированном значении  $L = 15\pi$  :  
 а –  $\eta(F_0)$ ; б –  $\eta(q)$ ; 1 –  $\beta_0 = 0,8$ ;  $A = 0,0055$ ;  $\Phi = 211,7$ ;  
 2 –  $\beta_0 = 0,9$ ;  $A = 0,0147$ ;  $\Phi = 109,2$ ; 3 –  $\beta_0 = 0,95$ ;  $A = 0,0327$ ;  $\Phi = 64,2$

На рис. 2.2, а приведено семейство резонансных кривых  $\eta(F_0)$  при заданной длине области взаимодействия  $L = 15\pi$  для различных  $\beta_0$ . Подобно предыдущему случаю выбор  $A$  и  $q$  производился из условия  $\eta(1) = 1$ . Характер функций  $\eta(F_0)$  такой же, как на рис 2.1, а, однако зависимость от  $\beta_0$  в приведенном семействе  $\eta(F_0)$  меняется на прямо противоположную: с увеличением  $\beta_0$  полоса резонанса теперь расширяется. Это вполне понятно,

ведь при заданной длине области взаимодействия с увеличением  $\beta_0$  число оборотов (циклотронных циркуляций) электрона уменьшается и полоса резонанса расширяется.

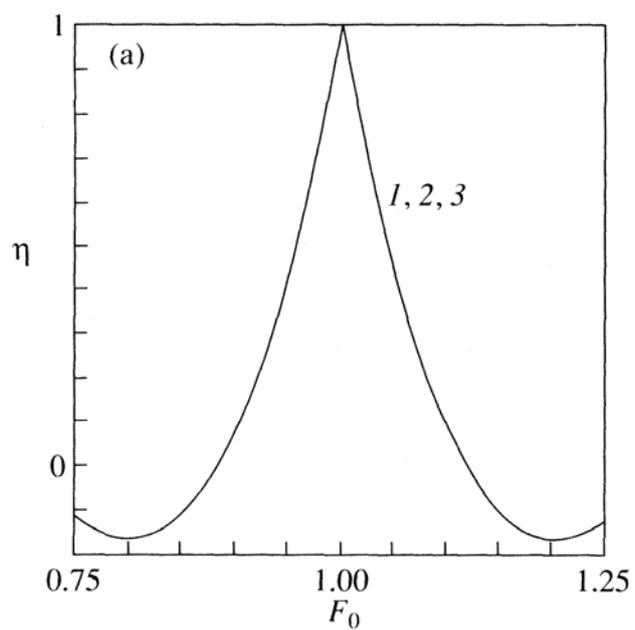
На рис. 2.2, б изображено семейство зависимостей  $\eta(q)$  при  $F = 1$  и  $L = 15\pi$  для различных  $\beta_0$ . По сравнению с аналогичным семейством на рис 2.1, б общий характер зависимостей сохраняется и, что существенно, по-прежнему критичность  $\eta(q)$  возрастает с увеличением  $\beta_0$ , хотя и менее резко, чем в предыдущем случае. Таким образом, требования к качеству электронного потока (минимальность разброса  $q$ ) и соответствию  $q$  условиям полного отбора энергии электрона ( $\gamma_0(1 - \beta_{z0}) = 1$ ) ужесточаются с увеличением релятивизма пучка.

#### 2.4. Авторезонанс при заданном числе оборотов электрона в области взаимодействия

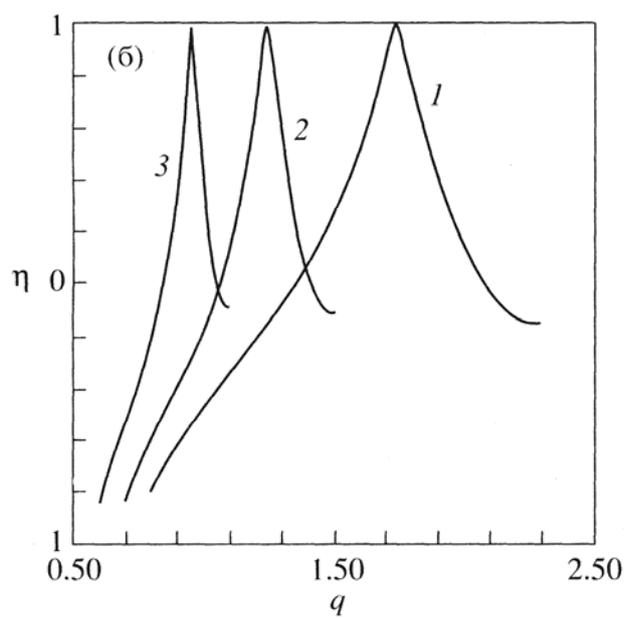
На рис. 2.3, а приведено семейство резонансных кривых  $\eta(F_0)$  при заданном числе оборотов электрона в области взаимодействия  $N = 10$  для различных  $\beta_0$ . Как следует из рис. 2.3, а, семейство вырождается в одну кривую  $\eta(F_0)$  для всех  $\beta_0$ , т.е. резонансные кривые  $\eta(F_0)$  при заданном  $N$  не зависят от  $\beta_0$ .

На рис. 2.3, б изображено семейство зависимостей  $\eta(q)$  при  $F_0 = 1$  и  $N = 10$  для различных  $\beta_0$ . Общий характер зависимостей остается аналогичным приведенным на рис 2.1, б, 2.2, б: критичность  $\eta(q)$  достаточно быстро возрастает с увеличением  $\beta_0$ .

На рис. 2.4, а, б приведены аналогичные предыдущим зависимости  $\eta(F)$  и  $\eta(q)$  при  $N = 50$  для различных  $\beta_0$ . Как следует из этих зависимостей, полоса резонанса значительно сужается, критичность условий резонанса возрастает. Очень резко возрастает критичность  $\eta(q)$  при росте  $\beta_0$ . Таким образом, становится понятной трудность созданий МЦАР с высоким КПД: для достижения приемлемой фазовой группировки электронов при  $\beta_\phi \rightarrow 1$  (например  $\beta_\phi = 1,03$  [9]) необходима большая длина области взаимодействия (точнее большое  $N$ ), но при росте  $N$ , как показывают приведенные выше результаты, критичность МЦАР к отклонению параметров пучка от оптимальных (прежде всего  $q$ ) резко возрастает, особенно при больших  $\beta_0$ . В то же время именно ультрарелятивистские МЦАР представляются интересными из-за возможности повышения рабочей частоты пропорционально  $\gamma^2$  [9].



а



б

Рис. 2.3. Резонансные кривые при фиксированном значении  $\Phi = 20\pi(N = 10)$ :

а –  $\eta(F_0)$ ; б –  $\eta(q)$ ; 1 –  $\beta_0 = 0,8; A = 0,0184; L = 13,9$ ;  
 2 –  $\beta_0 = 0,9; A = 0,0256; L = 27,10$ ; 3 –  $\beta_0 = 0,95; A = 0,0334; L = 46,13$

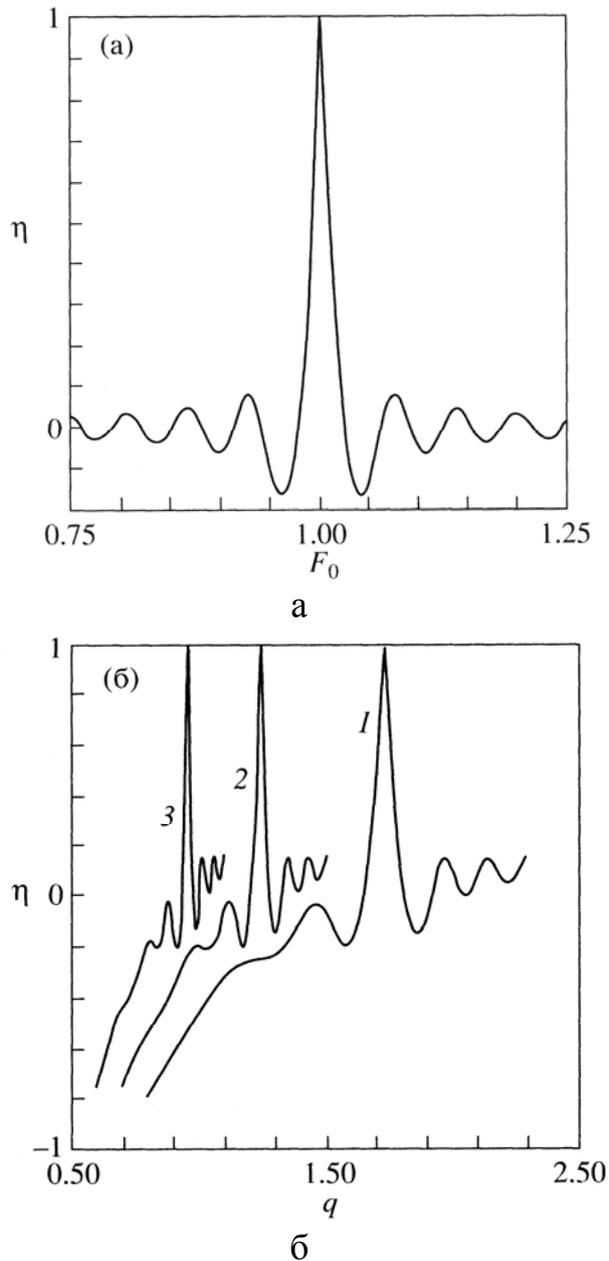


Рис. 2.4. Резонансные кривые при фиксированном значении  $\Phi = 100\pi (N = 50)$ :

а –  $\eta(F_0)$ ; б –  $\eta(q)$ ; 1 –  $\beta_0 = 0,8$ ;  $A = 0,0037$ ;  $L = 69,8$ ;  
 2 –  $\beta_0 = 0,9$ ;  $A = 0,0051$ ;  $L = 135,5$ ; 3 –  $\beta_0 = 0,95$ ;  $A = 0,0067$ ;  $L = 230,6$

Указанные противоречия, по-видимому, разрешимы только в каскадных МЦР, где первый каскад работает при  $\beta_\phi \approx 1,5 - 2$ , обеспечивая необходимую фазовую группировку электронов, а второй (отбиратель) – в режиме МЦАР при  $\beta_\phi \approx 1$ , при высоком качестве электронного пучка и точном соответствии его параметров условиям полного отбора энергии, обеспечивая высокий КПД прибора.

## Литература

1. Кураев А.А., Сеницын А.К., Щербаков А.В. Полоса и критичность условий циклотронного авторезонанса // РЭ. 1999. Т. 44. № 7. С. 891-896.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Авторезонансное движение частиц в плоской электромагнитной волне // ДАН СССР. 1962. Т. 145. N 6. С. 1259-1264.
3. Давыдовский В.Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // Экспер. и теорет. физика. 1962. Т.43. N 3. С. 886-891.
4. Петелин М.И. К теории ультрарелятивистских мазеров на циклотронном авторезонансе// Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т.17. N 6. С. 902-908.
5. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. и др. Циклотронные и синхронные мазеры// Релятивистская высокочастотная электроника. – Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157-216.
6. Bratman V.L., Ginzburg N.S., Nusinovich G.S. I.a. Relativistic gyrotrons and cyclotron autoresonance masers// Int. J.Electronics. 1981. V. 51. N 4. P.541-551.
7. Bratman V.L., Denisov G.G., Ginzburg N.S., Petelin M.I. FEL's with Bragg reflection resonators. Cyclotron autoresonance masers versus ubitrons// IEEE J. of Quantum Electronics. 1983. V.QE-19. N 3. P.282-287.
8. Гинзбург Н.С., Зарница И.Г., Нусинович Г.С. К теории релятивистских МЦР усилителей// Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. N 4. С. 481-490.
9. Братман В.Л., Денисов Г.Г., Офицеров М.М. Мазеры на циклотронном авторезонансе миллиметрового диапазона длин волн //Релятивистская высокочастотная электроника. – Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 127-159.
10. Братман В.Л., Новожилов Ю.В., Сергеев А.С. К теории мазеров на циклотронном авторезонансе с квазиоптическими резонаторами //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 10. С. 1261-1269.
11. Братман В.Л., Денисов Г.Г., Луковников Д.А. Теория мазера на циклотронном авторезонансе с открытой электродинамической системой //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 8. С. 976-983.
12. Еремка В.Д., Жураховский В.А., Коваленко А.М. Нелинейная аналитическая теория авторезонансного пениомагнетрона-генератора // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн.науки. 1990. N 10. С. 63-66.
13. Ботвинник И.Е., Братман В.Л., Волков А.Б. и др. Мазеры на свободных электронах с брэгговскими резонаторами// Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. N 10. С. 418-420.
14. Ботвинник И.Е., Братман В.Л., Волков А.Б. и др. Мазер на циклотронном авторезонансе с длиной волны 2,4 мм// Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. N 22. С. 1386-1388.

15. Богаченков В.А., Братман В.Л., Денисов Г.Г. и др. Экспериментальное исследование мазера на свободных электронах // Краткие сообщения по физ. 1983. N 6. С. 38.
16. Kurayev A.A., Sinitsyn A.K., Slepyan A.YA. Gyroton // Int. j. Electronics. 1996. Vol.80. № 4. P. 603-610.
17. Кураев А.А., Колосов С.В. АУС-метод для оптимизации электронных приборов // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. Вып. 2. С. 45-57.
18. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Рвачев В.А. Градиентный итерационный метод решения задач оптимального управления динамическими системами на основе атомарных функций // ЭВиЭС. 1998. Т.3. № 3. С. 41-45.

## ГЛАВА 3

### МИКРОВАКУУМНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ СВЧ С АВТОЭМИССИОННЫМИ КАТОДАМИ

#### Введение.

Прогресс в развитии технологии автоэмиссионных катодов [1-4] делает актуальным их применение не только в элементах памяти нанокomпьютеров и дисплеев, но и в качестве катодов с управляемой эмиссией в микрoвакуумных генераторах СВЧ [5-9]. В СВЧ диапазоне использование традиционных конструкций автоэмиссионного катода Спиндта невозможно из-за очень большой емкости управляющий электрод-катод: СВЧ напряжение шунтируется этой емкостью. Однако новые технологии создания управляемых автоэмиссионных катодов (УАЭК), основанных на формировании гексагональных опорных диэлектрических трубок из  $Al_2O_3$  [10], позволяют резко уменьшить емкость сетка-катод до значений, приемлемых для подачи на промежуток сетка-катод СВЧ управляющего напряжения [9]. На рисунке 9.1 приведена микрофотография структуры УАЭК из [10]. Из нее видно, что площадь управляющего электрода, напыленного на торцах гексогональных трубок из  $Al_2O_3$  на 1-2 порядка меньше, чем в катодах Спиндта. Таким образом, возникает технологически обоснованная задача создания по возможности простых по конструкции микрoвакуумных СВЧ генераторов.

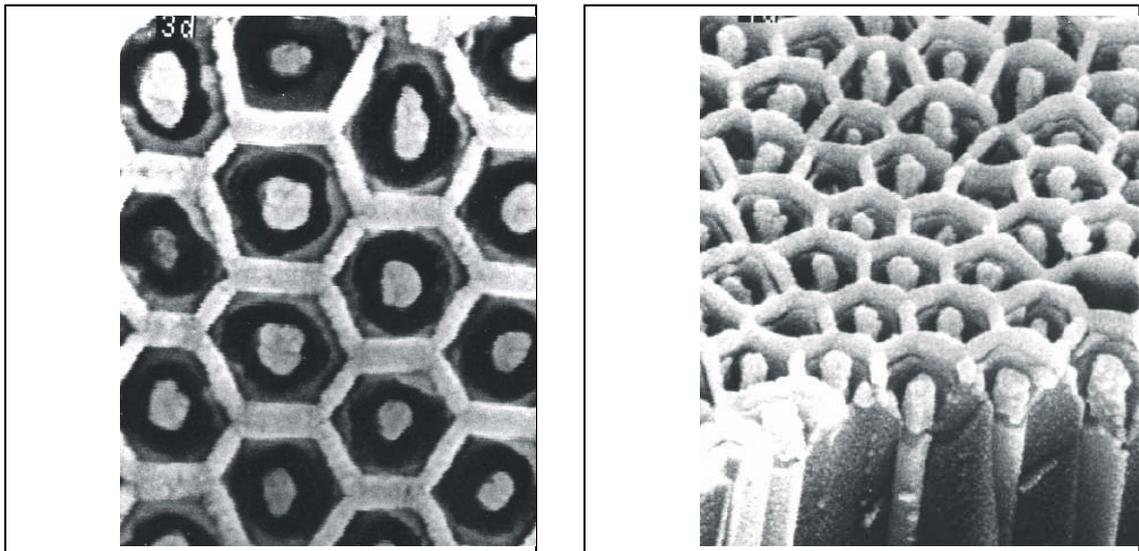


Рисунок 3.1 – Вид сверху и под углом 35° на матрицу

Одним из наиболее простых из известных вакуумных СВЧ генераторов является генератор на основе диода, в котором отрицательная проводимость

достигается за счет надлежащего выбора времени пролета электронов вакуумного промежутка. Один из первых таких приборов на основе диода в виде коаксиального резонатора, в котором эмиссия электронов осуществляется с поверхности внутреннего цилиндра, представляющего термокатод, был предложен и исследовался Левеллином [11] еще в 20х гг. прошлого века. Хотя из-за малого КПД ( $\approx 6\%$ ) и высоких требований к плотности тока этот прибор не получил распространения, однако проведенные эксперименты доказали принципиальную возможность использования инерции электронов для генерирования СВЧ колебаний и привлекли внимание исследователей к такой простейшей конструкции.

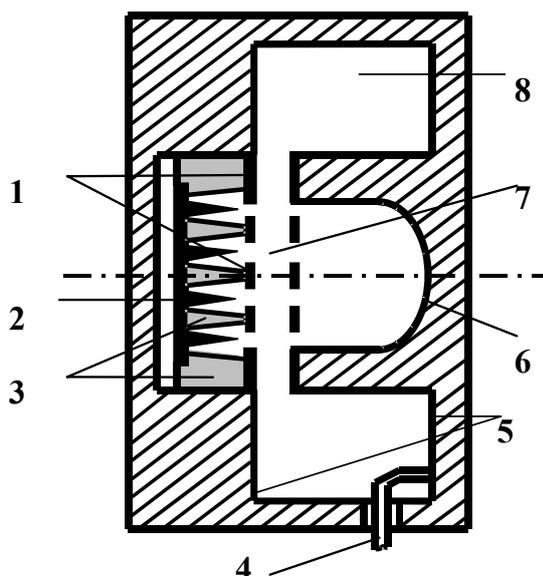
Интенсивные теоретические исследования процессов взаимодействия в плоском диоде были выполнены в работах [12-15]. Было показано, что в случае, когда электронный поток пронизывает плоский диодный промежуток с конечной начальной скоростью, теоретический предельный КПД может достигать 19%, что в два раза выше, чем у классической схемы диода. Схема генератора, использующая такой эффект, получила название «монотрон». Эффективность монотрона может быть повышена за счет движения электронов в ВЧ поле с нарастающей амплитудой [15].

Таким образом, рассмотренные схемы диода и монотрона оказываются наиболее привлекательными ввиду своей простоты и технологичности. Поэтому, актуальной является задача поиска параметров и режимов работы таких схем, обеспечивающих высокий КПД.

### 3.1. Схемы микровакuumных генераторов

Схематическое изображение предлагаемой конструкции монотрона представлено на рисунке 9.2. Одноззорный монотрон состоит из следующих основных элементов: объемного тороидального резонатора, катода Спиндта, управляющей сетки, являющейся одновременно торцом внутреннего цилиндра резонатора. Резонатор, состоящий из индуктивной части и емкостного зазора радиуса  $r_0$ , в центральной части имеет сеточки, сквозь которые пролетают электроны, вышедшие из катода. Для получения электронного потока (ЭП) на управляющую сетку подается постоянное напряжение, положительное относительно катода. Прошедшие через емкостной зазор резонатора электроны оседают на коллекторе.

Упрощенные схемы исследуемых модификаций генераторов представлены на рисунке 9.3. Напряжение  $U_0$  определяет начальную скорость электронов на входе в область взаимодействия,  $U_1$  - ускоряющее напряжение в области взаимодействия электронов с ЭМВ,  $U_v$ ,  $U_{v1}$ ,  $U_{v2}$  – амплитуды ВЧ колебаний возбуждаемых электромагнитных полей в объемных резонаторах, имеющих зазоры  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , соответственно (индуктивные части на рисунках не изображены).



..1 – управляющая сетка; 2 – катод Спиндта; 3 – изолятор; 4 – выход СВЧ-сигнала; 5 – объемный резонатор; 6 – коллектор; 7 – емкостной зазор резонатора; 8 – индуктивная часть резонатора

**Рисунок 3.2 - Схемотехническое изображение монотрона**

Схема №1 (рисунок 9.3а) соответствует режиму чистого монотрона в котором ЭП взаимодействует с полем одиночного объемного резонатора. При подаче напряжения  $U_0$  на управляющий электрод катода Спиндта возникает эффект автоэмиссии. Формируемый ЭП со средней скоростью  $v_0 = \sqrt{2eU_0/m_0}$  проходит через диодный зазор резонатора, в котором возбуждаются ВЧ-колебания, взаимодействует с электрической составляющей поля, имеющей амплитуду  $U_v$ , отдает часть кинетической энергии и оседает на катоде.

Для исследования возможности улучшения эффективности взаимодействия в резонатор была введена дополнительная сетка. Ее подключение рассматривалось двумя способами. В одном случае оба зазора принадлежат одному резонатору, а колебания напряжения в них имеют одинаковую амплитуду, но противоположны по знаку – схема №2: двухзазорный монотрон (рисунок 9.3б). В другом случае сетка разделяет зазоры двух резонаторов, связанных между собой обратной связью, колебания имеют различные амплитуды и фазы – схема №3: режим клистрона (рисунок 9.3в).

Еще одной возможностью улучшения эффективности взаимодействия электронов с ЭМВ является введение ускоряющего (тормозящего) поля в области взаимодействия. К тому же это делает возможным уменьшение пусковых токов в таких структурах. Схемы №4, №5, №6 (рисунок 9.3г, 9.3д,

9.3e) аналогичны выше рассмотренным. Разница заключается в том, что в данных схемах включен источник ускоряющего напряжения  $\dot{U}_1$ .

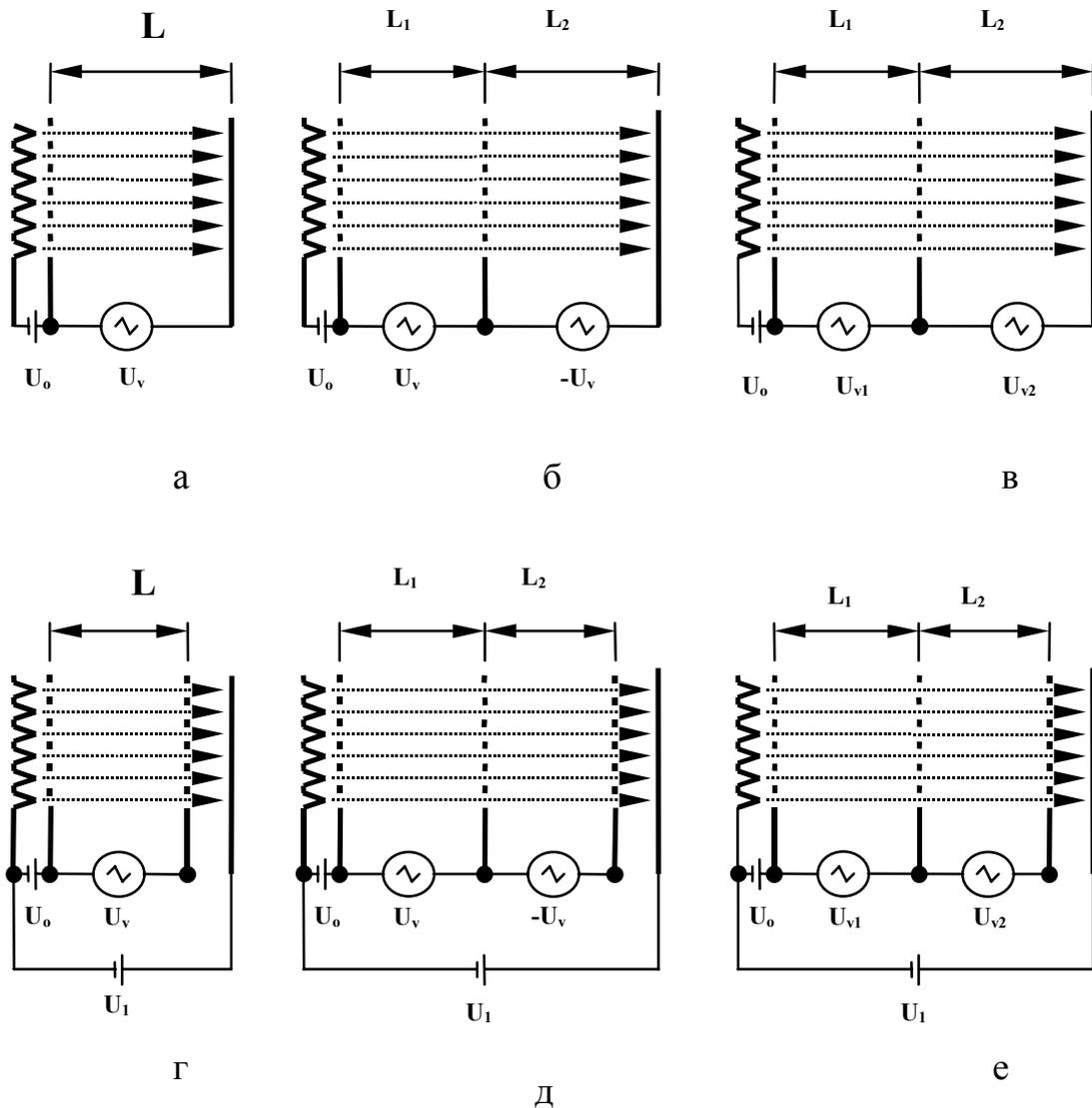


Рисунок 3.3 – Модификации исследуемых генераторов

Эффективность взаимодействия может возрасти, если на зазор сетка-катод вместе с постоянным источником напряжения  $U_0$  в схеме №1 "наложить" источник переменного напряжения  $U_0 + U_s \cos(\omega t)$  – схема №7: генератор с обратной связью.

### 3.2. Математические модели

Будем считать движение электронов одномерным, не учитывая разброс скоростей. В соответствии с предложенными схемами приборов, размерные

уравнения, описывающие движение электронов (без учета влияния пространственного заряда), имеют вид:

$$\frac{dv_i}{dz} = -\frac{e}{m_0 v_i} \left[ \frac{U_1}{L} + \frac{U_{vk}}{L_k} \cos(\omega t_i + \varphi_k) \right]; \quad \frac{dt_i}{dz} = \frac{1}{v_i}; \quad i = 1..Ne. \quad (3.1)$$

Здесь  $v_i$  - скорость движения  $i$ -го электрона,  $t_i$  - индивидуальное время,  $e, m_0$  - заряд и масса покоя электрона,  $Ne$  – число электронов,  $U_{vk}$  - амплитуда ВЧ колебаний возбуждаемого электромагнитного поля в резонаторе,  $U_1$  – ускоряющее напряжение в области взаимодействия,  $L_k$  - длина  $k$ -го зазора,  $L = \sum L_k$ ,  $\omega$  - рабочая частота колебаний,  $\varphi_k$  - начальная фаза.

Для удобства расчетов перейдем к безразмерным переменным:

$$V_i = v_i / v_0; \quad T = z / L; \quad \tau = t v_0 / L; \quad \theta_0 = \omega L / v_0; \quad T_1 = L_1 / L.$$

Тогда безразмерные уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dV_i}{dT} = -\frac{1}{2} \left[ A + \frac{A_k}{T_k} \cos(\theta_0 \tau_i + \varphi_k) \right]; \quad \frac{d\tau_i}{dT} = \frac{1}{V_i}. \quad (3.2)$$

$$V_i(0) = 1; \quad \tau_i(0) = 2\pi i / Ne / \theta_0; \quad 0 \leq T \leq 1;$$

Где для **схемы №1**:  $A_k = A_v = U_v / U_0$ ;  $A = 0$ ;  $T_1 = 1$ ;  $\varphi_1 = 0$ .

Для **схемы №2**:  $A_1 = A_2 = A_v = U_v / U_0$ ;  $A = 0$ ;  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \pi$ .

Для **схемы №3**:

$A_1 = U_{v1} / U_0 = A_v$ ;  $A_2 = U_{v2} / U_0 = \alpha A_v$ ;  $A = 0$ ;  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \varphi_0$ .

Для **схемы №4**:  $A_k = A_v = U_v / U_0$ ;  $A = U_1 / U_0$ ;  $T_1 = 1$ ;  $\varphi_1 = 0$ .

Для **схемы №5**:  $A_1 = A_2 = A_v = U_v / U_0$ ;  $A = U_1 / U_0$ ;  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \pi$ .

Для **схемы №6**:

$A_1 = U_{v1} / U_0 = A_v$ ;  $A_2 = U_{v2} / U_0 = \alpha A_v$ ;  $A = U_1 / U_0$ ;  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \varphi_0$ .

Для **схемы №7**:  $A_k = A_v = U_v / U_0$ ;  $A = 0$ ;  $T_1 = 1$ ;  $\varphi_1 = \varphi_0$ .

Эффективность взаимодействия оценивается величиной электронного КПД.

Для **схем №1, №2, №3**:

$$\eta_e(T) = 1 - \sum_{i=1}^{Ne} V_i^2(T) / Ne. \quad (3.3)$$

Для **схем №4, №5, №6**:

$$\eta_e(T) = \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \frac{A \cdot T + V_i^2(0) + V_i^2(T)}{A + V_i^2(0)}. \quad (3.4)$$

Для **схемы №7**:

$$\eta_e(T) = \frac{1}{I_s} \sum_{i=1}^{Ne} \frac{V_i^2(0) - V_i^2(T)}{V_i^2(0)} I_i, \quad (3.5)$$

где  $I_i$  - индивидуальный ток, соответствующей крупной частицы, определяемый из закона Фаулера-Нордгейма

$$I_F(U) = aU^2 \exp(-b/U); \quad I_i = I_F(U_i) = I_F(U_0 + U_s \cos(\omega t_{0i})); \quad I_s = \sum_{i=1}^{Ne} I_i;$$

Уровень группирования электронов оценивается функцией группировки:

$$Gr = \sqrt{\left(\sum_i \cos(t_i \theta_0)\right)^2 + \left(\sum_i \sin(t_i \theta_0)\right)^2} / Ne. \quad (3.6)$$

При отсутствии группировки  $Gr=0$ , при идеальной группировке  $Gr=1$ .

Рабочий ток предлагаемых схем генераторов определяется из условия баланса выделяемой мощности  $P^+$  и мощности потерь  $P^-$ :

$$P^+ = \eta_e P_0 = \eta_e I_0 U_0 = P^- = \frac{\omega_0}{Q} W; \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int EE^* dV.$$

Здесь  $W$  - средняя энергия, запасенная в объеме резонатора за период колебания,  $Q$  - добротность. Для рассматриваемого плоского зазора  $E = E_k = U_{vk} / L_k$ . После преобразования получаем расчетные формулы рабочего тока рассматриваемых схем:

$$\begin{aligned} \text{схемы №1, №7: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L Q \eta_e}; \\ \text{схема №2: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L Q \eta_e} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right); \\ \text{схема №3: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L \eta_e} \left( \frac{1}{Q_1 T_1} + \frac{\alpha^2}{Q_2 T_2} \right); \\ \text{схема №4: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L Q \eta_e (1+A)} \\ \text{схема №5: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L Q \eta_e (1+A)} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right); \\ \text{схема №6: } I_0 &= \frac{\pi^2 c \varepsilon_0 r_0^2 A_v^2 U_0}{\lambda_0 L \eta_e (1+A)} \left( \frac{1}{Q_1 T_1} + \frac{\alpha^2}{Q_2 T_2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусковые токи рассчитывались по вышеприведенным формулам при  $A_v \rightarrow 0$ .

### 3.3. Анализ процесса генерации

На основе вышеописанных математических моделей были разработаны пакеты программ расчета и оптимизации параметров предлагаемых схем генераторов. Выполнены расчеты, найдены и исследованы оптимальные по КПД режимы работы. Ниже приведены результаты расчетов при  $U_0=50\text{В}$ , радиусе емкостного зазора  $r_0=1\text{мм}$ ,  $\lambda_0=3\text{см}$ ,  $Q_1=Q_2=Q=50$ .

Оптимальные варианты безразмерных параметров и значения  $L$ ,  $I_{\text{раб}}$ ,  $I_{\text{пуск}}$  для трех *схем №1, №2, №3* приведены в таблице 3.1. Оптимизированные варианты параметров, рабочих и пусковых токов для *схем №4, №5, №6* представлены в таблицах 3.2, 3.3 и 3.4 соответственно.

Таблица 3.1. - Оптимальные параметры схем №1, №2, №3

Схема	$A_v$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$\alpha$	$T_1$	$\eta_{e,\%}$	$L, \text{мм}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$	$I_{\text{пуск}}, \text{мА}$
№1	3.648	7.382	0	-	1	18	0.493	128	32
№2	2.363	1.190	$\pi$	1	0.723	11	0.079	2490	341
№3	2.137	4.074	1.547	1.27	0.700	38	0.272	263	71

Таблица 3.2. Оптимальные параметры *схемы №4*,  $Q=100$ .

A	$A_v$	$\theta_0$	$\eta_{e,\%}$	$L, \text{мм}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$	$I_{\text{пуск}}, \text{мА}$
0	3.648	7.382	18	0.493	64.192	23.582
1	6.432	8.916	18	0.596	80.214	22.518
2	8.998	10.098	19	0.675	91.400	21.285
3	11.464	11.091	19	0.741	100.710	20.178
4	13.872	11.966	19	0.800	108.925	19.199
-0.1	3.392	7.196	18	0.481	63.612	23.610
-0.25	2.939	6.890	18	0.460	60.560	23.655
-0.5	2.142	6.304	17	0.421	54.553	23.527

Таблица 3.3. - Оптимальные параметры *схемы №5*,  $\varphi_0 = \pi$ ,  $\alpha = 1$ .

A	$A_v$	$\theta_0$	$T_1$	$\eta_{e,\%}$	$L, \text{мм}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$	$I_{\text{пуск}}, \text{мА}$
0	2.363	1.190	0.723	11	0.081	2672	327
1	2.788	1.174	0.699	8	0.078	2394	-
2	$\eta_{e,\%} < 0$						
-0.1							
-0.25							

Таблица 3.4. - Оптимальные параметры *схемы №6*,  $T_1=0.7$ .

A	$A_v$	$\theta_0$	$\alpha$	$\varphi_0$	$\eta_{e.\%}$	$L, \text{мм}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$
0	2.137	4.074	1.27	1.547	38	0.272	263
1	3.134	3.852	1.406	1.964	34	0.257	383
2	4.476	3.540	1.403	2.224	22	0.237	884
-0.1	2.049	4.053	1.259	1.511	37	0.271	272
-0.25	1.897	3.620	1.278	1.622	35	0.242	340
-0.5	2.433	2.535	1.409	1.976	34	0.169	1442

Оптимальные варианты безразмерных параметров и значения  $L$ ,  $I_{\text{раб}}$  для *схемы №7* при  $a=0.22$ ,  $b=1000$ , для различных значений  $U_0$ ,  $U_s$  приведены в таблицах 3.5 – 3.8.

Таблица 3.5. - Оптимальные параметры *схемы №7*

при  $U_0 = 40\text{В}$ ,  $L=0.461\text{мм}$ .

$U_s, \text{В}$	$A_v$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$\eta_{e.\%}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$
1	4.376	7.695	2.055	21	132
2.5	4.963	7.709	2.079	26	143
5	5.660	7.719	1.988	31	153
10	6.704	7.720	2.008	39	173
15	7.625	7.718	2.031	40	216
20	8.301	7.713	2.092	36	288

Таблица 3.6. - Оптимальные параметры *схемы №7*

при  $U_0 = 50\text{В}$ ,  $L=0.516\text{мм}$ .

$U_s, \text{В}$	$A_v$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$\eta_{e.\%}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$
1	4.242	7.691	2.074	20	156
2.5	4.677	7.701	2.037	23	155
5	5.317	7.712	2.006	28	167
10	6.251	7.719	2.006	34	191
15	7.031	7.719	2.024	37	225
20	7.730	7.717	2.049	36	280
25	8.374	7.710	2.092	28	416

Таблица 3.7. - Оптимальные параметры *схемы №7*

при  $U_0 = 60\text{В}$ ,  $L=0.585\text{мм}$ .

$U_s, \text{В}$	$A_v$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$\eta_{e.\%}$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$
1	4.626	7.996	1.799	25	152
2.5	4.678	7.997	1.800	24	158
5	4.865	7.999	1.816	24	176
10	5.405	7.999	1.860	22	230
15	5.976	7.996	1.901	20	319
20	6.571	7.991	1.944	15	487
25	7.141	7.984	1.989	10	881

Таблица 3.8. - Оптимальные параметры *схемы №7*  
при  $U_0 = 70\text{В}$ ,  $L=0.632\text{мм}$ .

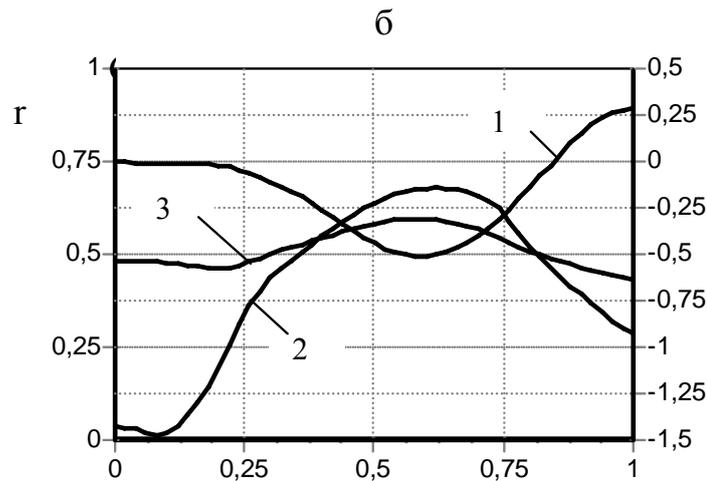
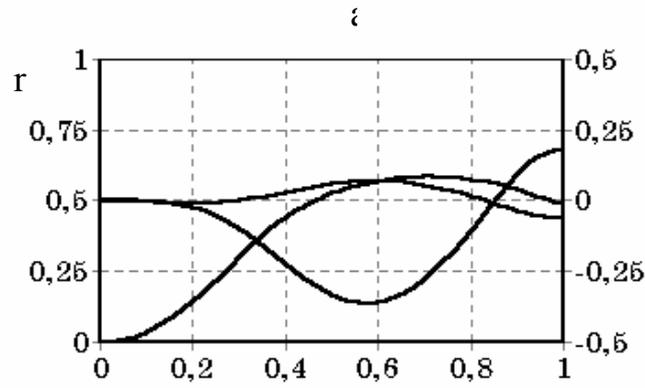
$U_s, \text{В}$	$A_v$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$\eta_e, \%$	$I_{\text{раб}}, \text{мА}$
1	4.621	7.996	1.801	25	164
2.5	4.656	7.996	1.801	24	169
5	4.775	7.998	1.809	24	182
10	5.200	7.999	1.845	23	226
15	5.676	7.998	1.881	21	292
20	6.162	7.994	1.915	18	339
25	6.664	7.989	2.953	15	598

Анализ полученных результатов показывает, что дополнительную сетку целесообразно подключать по схеме клистрона №3, в этой схеме КПД повышается более чем в 2 раза по сравнению с чистым монотроном, однако рабочий и пусковой токи значительно повышаются (в 2 раза), что является нежелательным при конструировании микровакуумных СВЧ генераторов. Включение же сетки по схеме №2 не позволяет повысить КПД, и, кроме того, приводит к неприемлемо большим рабочим токам. Из таблицы 3.2 следует, что в этом варианте генератора введение как тормозящего, так и ускоряющего полей неэффективно – КПД и пусковые токи практически одинаковы при различных значениях  $A$ .

Расчеты так же показали (таблицы 3.3, 3.4), что подключение источника ускоряющего напряжения по схемам №5 и №6 ведет к переходу режима генерации от мягкого (схемы №2 и №3) к жесткому, при этом пусковые токи существенно возрастают. К тому же повысить КПД и уменьшить рабочие токи не удалось.

Исследование схемы №7 показало, что введение источника модуляции  $U_s$  позволяет повысить КПД до 40%. Однако с увеличением модулирующего напряжения увеличиваются рабочие и пусковые токи, вплоть до неприемлемо больших. Поэтому наиболее эффективно и пригодно к практической реализации "наложение" модулирующего напряжения до 5В. КПД в данном случае достигает 30% при рабочем токе 150 - 180 мА. Для уменьшения рабочих токов необходимо увеличивать добротность резонатора.

Изменение основных характеристик ЭП  $\eta_e(T)$ ,  $Gr(T)$ , и средней скорости электронов  $\bar{V}(T)$  - для оптимальных режимов чистого монотрона (схема №1) и монотрона с модуляцией (схема №7) иллюстрирует рисунок 3.4. Из поведения кривой  $Gr(T)$  на рисунке 3.4б видно, что небольшая начальная группировка пучка за счет катодной модуляции оказывается противофазной, в результате выигрыш в КПД не столь значительный как в клистроне.



а – схема №1, б – схема №7 при  $U_0=50\text{В}$ ,  $U_s=5\text{В}$ .

Кривые: 1 -  $\eta_e(T)$ , 2 -  $Gr(T)$ , 3 -  $\bar{V}(T)/2$ .

**Рисунок 3.4 – Характеристики взаимодействия в рабочем зазоре генератора**

Анализ процессов генерации рассматриваемых схем генераторов позволяет рекомендовать к практическому использованию схему №1 (чистый моноотрон) и схему №7. Данная структура наиболее проста в микровакуумном исполнении, имеет реализуемые значения  $I_{\text{раб}}$ ,  $I_{\text{пуск}}$  и технологична в изготовлении. КПД моноотрона равен 18%, рабочий ток - 128 мА, выходная мощность - 0,5 - 1,5 Вт. К тому же введение по схеме №7 модулирующего напряжения до 15 В позволяет повысить КПД моноотрона до 40%.

## Литература

1. Spindt C.A. and al. Physical properties of thin-film field emission cathodes with molybdenum cones // Journal of Applied Physics. Vol.47,N12,1976 (December). P.5248.
2. Jac Hoon Jung and al. Enhancement of Electron Emission Efficiency and Stability of Molybdenum-Tip Field Emitter Array by Diamond Like Carbon Coating // IEE Electron Device Letters, Vol 18, N5, may 1997, p.197.
3. Brodie I. Kaynote adress to the First International Vacuum Microelectronics Conference, 1988, June: Patways vacuum microelectronics // IEEE Trans.on ED.1989. Vol ED-36, N11 (November). P.2637.
4. Гуляев Ю.В., Сеницын Н.И. Торгашов Г.В., Жбанов А.И., Торгашов И.Г., Савельев С.Г. Автоэлектронная эмиссия с углеродных нанотрубных и нанокластерных пленок.//Радиотехника и Электроника, 2003, т.48, №11, С.1399.
5. Татаренко Н.И., Петров А.С. Вакуумная микроэлектроника: реальность и перспективы // Зарубежная радиотехника. Успехи современной радиотехники. 1998, №7, с.10.
6. Исаев В. А., Соколов Д. В., Трубецков Д. И. Электронные СВЧ-приборы с электростатическим управлением и модуляцией эмиссии // РЭ. 1990. Т. 35, вып. 11. С. 2241.
7. Бондаренко Б. В., Шешин Е. П., Шука А. А. Приборы и устройства электронной техники на основе автокатодов // Зарубежная электронная техника. 1979. N 2. С. 3.
8. Исаев В.А., Соколов Д.В., Трубецков Д.И. "Электронные СВЧ-приборы с электростатическим управлением и модуляцией эмиссии." // Радиотехника и электроника, 1990, т.35, вып.11, с.2241.
9. Гуринович А.Б., Кураев А.А., Сеницын А.К. Исследование оптимальных по КПД ЛБВ с катодной модуляцией. // Радиотехника и электроника, 2000, т.45, №12, с.1493-1498
10. V.A.Sokol, A.A.Kuraev, A.K.Sinitsyn, L.M.Grinis Fabrication and perfomance simulation of nanodimensional matrix field-emission cathodes.//Physics, Chemistry and Application of Nanostructures. Minsk. 1999. С.280-286.
11. Левелин Ф.Б. "Инерция электронов.", Гостехиздат. 1947.
12. Голант М. Б., Бобровский Ю. Л. Генераторы СВЧ малой мощности. Вопросы оптимизации параметров. М.: Сов. радио, 1977. 336 с.
13. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. "Аналитические методы расчета в электронике СВЧ.", М. Сов. радио. 1970
14. Kurayev A.A., Lukashevich D.V., Sinitsyn A.K., Modeling of Diode Oscillators with Field-Emission Cathodes // IVEC 2000, Monterey, USA, may 2-4, 2000.
15. Кураев А.А., Сеницын А.К. Коаксиальный диодный генератор-диодотрон.//Радиотехника и электроника. 1997, т.42, N2, с.214-219.

## ГЛАВА 4

### НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ

#### 4.1. Неортогональные координатные системы [1]

Пусть в заданной области  $V(S)$  введены обобщенные криволинейные координаты  $u^1, u^2, u^3$  так, что любая точка  $P \in V$  определяется однозначно набором значений  $u^1, u^2, u^3$ . В точке  $P$  определены три координатные поверхности:

$$u^1 = \text{const}, \quad u^2 = \text{const}, \quad u^3 = \text{const}. \quad (4.1)$$

Пересечение двух поверхностей образует координатную кривую, вдоль которой меняется только одна координата.

Положение точки  $P$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из начала отсчета. Как и точка  $P$ ,  $\mathbf{r}$  является функцией криволинейных координат :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3). \quad (4.2)$$

Приращение вектора  $\mathbf{r}$  в соответствии с (4.2) определяется как

$$d\mathbf{r}(p) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} du^3. \quad (4.3)$$

Частные производные  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$  представляют собой приращение  $\mathbf{r}$  вдоль касательных к координатным кривым в точке  $P$ :

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}. \quad (4.4)$$

Длина и размерность координатных векторов зависят от характера криволинейных координат  $u^1, u^2, u^3$ . Смешанные произведения базисных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  дают объем  $V$  координатного параллелепипеда:

$$V = \mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_2[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = \mathbf{a}_3[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2].$$

Взаимную систему векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  определим как

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1], \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]. \quad (4.5)$$

В соответствии с (4.5)  $\mathbf{a}^1$  перпендикулярен плоскости, определяемой парой  $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ . Из определения (4.5) следует

$$\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4.6)$$

Основная система векторов выражается через взаимную аналогично (4.5):

$$\mathbf{a}_1 = V[\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3], \quad \mathbf{a}_2 = V[\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^1], \quad \mathbf{a}_3 = V[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]. \quad (4.7)$$

Дифференциал  $d\mathbf{r}$  во взаимной системе записывается через приращения  $du_1, du_2, du_3$  в направлении взаимных векторов:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}^1 du_1 + \mathbf{a}^2 du_2 + \mathbf{a}^3 du_3. \quad (4.8)$$

Дифференциалы  $du_1, du_2, du_3$  могут быть неполными в неортогональных системах. Приравнявая (4.3) (с учетом (4.4)) и (4.8), имеем

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i du^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}^j du_j. \quad (4.9)$$

Используя (4.6) и умножая (4.9) скалярно на  $\mathbf{a}^i$  и затем на  $\mathbf{a}_j$ , получим

$$du_j = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i du^i; \quad du^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j du_j. \quad (4.10)$$

Обозначим скалярные произведения основных и взаимных векторов, входящие в (4.10):

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = g_{ji}, \quad g^{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = g^{ji}. \quad (4.11)$$

Тогда компоненты  $d\mathbf{r}$  в основной и взаимной базисных системах будут связаны следующим образом:

$$du_j = \sum_{i=1}^3 g_{ji} du^i; \quad du^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} du_j. \quad (4.12)$$

Любой вектор  $\mathbf{F}$ , как и  $d\mathbf{r}$ , может быть разложен на компоненты как в основной, так и во взаимной базисных системах:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 f^i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^3 f_j \mathbf{a}^j, \quad (4.13)$$

где  $f^i = \mathbf{F} \mathbf{a}^i$ ,  $f_j = \mathbf{F} \mathbf{a}_j$ . Последнее поясним:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{a}^i &= \sum_{j=1}^3 f^j \mathbf{a}_j \mathbf{a}^i = (\text{с учетом (4.6)}) = f^i, \\ \mathbf{F} \mathbf{a}_j &= \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = f_j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогично (4.10) связи  $f_j$  и  $f^i$  выражаются в виде

$$f_j = \sum_{i=1}^3 q_{ji} f^i, \quad f^i = \sum_{j=1}^3 q^{ij} f_j. \quad (4.15)$$

Итак, можно записать

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F} \mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F} \mathbf{a}_j) \mathbf{a}^j. \quad (4.16)$$

Проекции  $f_i$  называются *ковариантными* компонентами вектора  $\mathbf{F}$ ,  $f^i$  – *контравариантными*.

Введем безразмерные единичные векторы  $\mathbf{I}_i$  :

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ij}}} \mathbf{a}_i. \quad (4.17)$$

Тогда

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{I}_1 + F_2 \mathbf{I}_2 + F_3 \mathbf{I}_3, \quad (4.18)$$

где  $F_i = \sqrt{g_{ii}} f^i$  – физические компоненты вектора  $\mathbf{F}$ , имеющие ту же размерность, что и сам вектор  $\mathbf{F}$ .

## 4.2. Дифференциальные операторы [1]

Приведем без доказательства формулы основных дифференциальных операторов электродинамики.

*Градиент скалярной функции  $\varphi(u^1, u^2, u^3)$  в точке  $P$ :*

$$\mathit{grad}\varphi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}. \quad (4.19)$$

Здесь градиент записан с использованием взаимной системы базисных векторов. Естественно,  $\mathbf{a}^i$  могут быть выражены через  $\mathbf{a}_i$  путем преобразования

$$\mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{a}_j. \quad (4.20)$$

*Дивергенция векторной функции  $\mathbf{F}(u^1, u^2, u^3)$  в точке  $P$ :*

$$\mathit{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}). \quad (4.21)$$

Здесь  $f^i$  – контравариантные проекции  $\mathbf{F}$ ,  $f^i = \mathbf{F}\mathbf{a}^i$ .

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \sqrt{g} = \mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = V.$$

*Ротор вектора  $\mathbf{F}$ :*

$$\mathit{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left( \frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} \right) \mathbf{a}_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1} \right) \mathbf{a}_2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} \right) \mathbf{a}_3 \right\}. \quad (4.22)$$

Здесь  $f_i = \mathbf{F}\mathbf{a}_i$  – ковариантные проекции  $\mathbf{F}$ .

*Оператор Лапласа от скалярной функции  $\varphi(u^1, u^2, u^3)$ :*

$$\Delta\varphi = \mathit{divgrad}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}). \quad (4.23)$$

### 4.3. Продольно-азимутально нерегулярный волновод. Контравариантные компоненты уравнений Максвелла [2]

Рассмотрим произвольно нерегулярный прямолинейный волновод (продольно-азимутально нерегулярный волновод). Пусть внутренняя граница такого волновода задается следующей произвольной гладкой функцией

$$b = b(\varphi, z), \quad (4.24)$$

где  $\rho = r/b$ .

Тогда радиус-вектор внутренней точки P может быть задан как

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = z\mathbf{z}_0 + \rho b \{ \mathbf{x}_0 \cos \varphi + \mathbf{y}_0 \sin \varphi \}. \quad (4.25)$$

В соответствии с (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = b\mathbf{r}_0; \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \varphi_0 \rho b + \mathbf{r}_0 \rho \frac{\partial b}{\partial \varphi}; \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}_0 \rho \frac{\partial b}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Соответственно  $V = \mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_2[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = \mathbf{a}_3[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = b^2 \rho$ . Тогда в соответствии с (4.5) система взаимных векторов имеет вид

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{b^2} (\mathbf{r}_0 b - \varphi_0 \frac{\partial b}{\partial \varphi} - \mathbf{z}_0 \rho b \frac{\partial b}{\partial z}), \quad \mathbf{a}^2 = \varphi_0 / b \rho, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{z}_0. \quad (4.27)$$

Запишем первое уравнение Максвелла, используя основную (4.26) и взаимную (4.27) системы векторов. При этом для сохранения привычных выражений для компонент  $rotH$  в цилиндрической системе координат введем «расчетные» (со штрихом) компоненты векторов  $\mathbf{H} = H'_\rho \mathbf{a}^1 + \rho H'_\varphi \mathbf{a}^2 + H'_z \mathbf{a}^3$  (т.е. ковариантные проекции векторов связаны с расчетными как  $H_2 = \mathbf{H}\mathbf{a}_2 = \rho H'_\varphi$ ,  $H'_\rho = H_1$ ,  $H'_z = H_3$ ),  $\mathbf{E} = E'_\rho \mathbf{a}^1 + \rho E'_\varphi \mathbf{a}^2 + E'_z \mathbf{a}^3$  и т.д.

Тогда

$$\begin{aligned} rot\mathbf{H} &= \frac{\rho}{\sqrt{g}} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H'_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H'_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{a}_3 \right\} = \\ &= \varepsilon_a \left\{ \frac{\partial E'_\rho}{\partial t} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial(\rho E'_\varphi)}{\partial t} \mathbf{a}^2 + \frac{\partial E'_z}{\partial t} \mathbf{a}^3 \right\} + \delta'_\rho \mathbf{a}^1 + \rho \delta'_\varphi \mathbf{a}^2 + \delta'_z \mathbf{a}^3. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Умножая обе части (4.28) скалярно последовательно на взаимные векторы  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ , получаем контравариантные проекции уравнений Максвелла в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial z} &= \frac{\sqrt{g}}{\rho} \{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{11} E'_\rho + g^{12} \rho E'_\varphi + g^{13} E'_z) + g^{11} \delta'_\rho + g^{12} \rho \delta'_\varphi + g^{13} \delta'_z \}; \\
\frac{\partial H'_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial \rho} &= \sqrt{g} \{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{21} E'_\rho + g^{22} \rho E'_\varphi + g^{23} E'_z) + g^{21} \delta'_\rho + g^{22} \rho \delta'_\varphi + g^{23} \delta'_z \}; \\
\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H'_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\sqrt{g}}{\rho} \{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{31} E'_\rho + g^{32} \rho E'_\varphi + g^{33} E'_z) + \\
&+ g^{31} \delta'_\rho + g^{32} \rho \delta'_\varphi + g^{33} \delta'_z \}. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

В векторной форме уравнения (4.29) можно теперь записать в виде

$$rot \mathbf{H}' = \varepsilon_a \hat{g} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \hat{g} \boldsymbol{\delta}', \tag{4.30}$$

$$\text{где } \hat{g} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \frac{g^{11}}{\rho} & g^{12} & \frac{g^{13}}{\rho} \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ \frac{g^{31}}{\rho} & g^{32} & \frac{g^{33}}{\rho} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} = V = b^2 \rho, \quad g^{11} &= \frac{1}{b^4} (b^2 + (\frac{\partial b}{\partial \varphi})^2 + \rho^2 b^2 (\frac{\partial b}{\partial z})^2); \quad g^{22} = 1/(b\rho)^2, \quad g^{33} = 1, \\
g^{12} &= -\frac{1}{b^3 \rho} \frac{\partial b}{\partial \varphi} = g^{21}; \quad g^{13} = -\frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial z} = g^{31}, \quad g^{23} = g^{32} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогичные преобразования приводят к следующей форме второго уравнения Максвелла:

$$rot \mathbf{E}' = -\mu_a \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} - \hat{g} \boldsymbol{\delta}'^M. \tag{4.31}$$

С учетом формул (4.17), (4.18) физические компоненты векторов  $\mathbf{H}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}^M$  могут быть записаны как (выпишем только  $\mathbf{H}$ , остальные записи идентичны)

$$\begin{aligned}
H_r &= H'_\rho / b; \\
H_\varphi &= H'_\varphi / b - \frac{H'_\rho}{b^2} \frac{\partial b}{\partial \varphi}; \\
H_z &= H'_z - H'_\rho \frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

В новой системе координат  $\rho, \varphi, z$  внутренняя граница произвольно-нерегулярного волновода  $b(\varphi, z)$  преобразуется в границу регулярного цилиндра с внутренней границей  $\rho = l$ . Таким образом, граничные условия для уравнений (4.30), (4.31) в новой системе координат в случае идеальной проводимости стенок приобретают простейший вид:

$$[\rho_0, \mathbf{E}']|_{\rho=l} = 0. \quad (4.33)$$

#### 4.4. Уравнение возбуждения произвольно-нерегулярного волновода сторонними токами [2]

Прежде чем переходить к решению (4.30), (4.31), (4.33), целесообразно для улучшения его сходимости выделить в (4.30), (4.31) электростатическую часть поля, содержащую разрыв первой производной  $\mathbf{E}'$ , и магнитостатическую, содержащую разрыв  $\mathbf{H}'$ .

При этом динамическая задача имеет вид

$$\text{rot} \mathbf{H}_1 = \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \hat{g} \delta_1, \quad \text{rot} \mathbf{E}_1 = -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} - \hat{g} \delta_1^M; \quad (4.34)$$

$$[\mathbf{n}', \mathbf{E}_1]|_{\rho=l} = 0. \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad \delta_1 &= \delta' - \varepsilon_0 \text{grad}(\partial \Phi'_e / \partial t), & \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}' + \text{grad} \Phi'_e. \\ \delta_1^M &= \delta'^M - \mu_0 \text{grad}(\partial \Phi'_M / \partial t), & \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}' + \text{grad} \Phi'_M. \end{aligned}$$

Существенно, что  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  – непрерывные на границе источников векторы. Остановимся на решении задачи (4.34),(4.35). Представим

$$\mathbf{E}_{1t} = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \mathbf{E}_{1z} = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

Где

$$\dot{\mathbf{E}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^e(z) \mathbf{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^M(z) \mathbf{e}_{ni}^M \right), \quad \dot{\mathbf{E}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \mathbf{a}^3.$$

$$\mathbf{H}_{1t} = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \mathbf{H}_{1z} = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{B}_{mni}^e(z) \mathbf{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^M(z) \mathbf{h}_{ni}^M \right), \quad \dot{\mathbf{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \mathbf{a}^3.$$

Здесь  $\varphi_{ni} = J_n(v_{ni}\rho)e^{jn\varphi}$ ,  $\psi_{ni} = J_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi}$ ;

$$\mathbf{e}_{ni}^e = \rho_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho)e^{jn\varphi} + \Phi_0 j \frac{n}{\rho} J_n(v_{ni}\rho)e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{e}_{ni}^m = \rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi} - \Phi_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{h}_{ni}^e = -\rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(v_{ni}\rho)e^{jn\varphi} + \Phi_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho)e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{h}_{ni}^m = \rho_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi} + \Phi_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi}, \quad J_n(v_{ni}) = 0, \quad J'_n(\mu_{ni}) = 0.$$

АМПЛИТУДЫ  $\dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^m(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^m(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z)$

определим из следующих проекционных равенств, эквивалентных (4.34):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \} \mathbf{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = & \quad (4.36) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{\mathbf{g}} \delta_1 \mathbf{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \} \mathbf{e}_{-ni}^m \rho d\rho d\varphi = & \quad (4.37) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{\mathbf{g}} \delta_1 \mathbf{e}_{-ni}^m e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \} \cdot \varphi_{-ni} \mathbf{a}^3 \rho d\rho d\varphi = & \quad (4.38) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{\mathbf{g}} \delta_1 \mathbf{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega; & \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \{ \hat{\mathbf{g}}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \} \mathbf{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \quad (4.39)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta_1^M \mathbf{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d \rho d \varphi d \omega t ;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \mathcal{E}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \mathbf{h}_{-ni}^M \rho d \rho d \varphi = \quad (4.40)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta_1^M \mathbf{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d \rho d \varphi d \omega t ;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \mathcal{E}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \psi_{-ni} \mathbf{a}^3 \rho d \rho d \varphi = \quad (4.41)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta_1^M \mathbf{a}^3 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d \rho d \varphi d \omega t .$$

Правые части уравнений возбуждения (4.36) – (4.41) (интегралы возбуждения) записаны в общем случае, когда координаты источников могут меняться во времени, т.е.  $\rho = \rho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $z = z(t)$ . Причем эти зависимости могут содержать и негармонические составляющие.

Уравнения (4.36) – (4.41) образуют полную систему ОДУ первого порядка, определяющую искомые коэффициенты разложения:

$$\dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^M(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^M(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z).$$

Иначе говоря, уравнения (4.36) – (4.41) представляют собой систему уравнений возбуждения динамических полей волновода произвольной нерегулярной конфигурации, возбуждаемого негармоническими электрическими и магнитными токами источников.

#### 4.6. Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного коаксиального волновода [5]

В п. 4.4 сформулированы уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного полого волновода (односвязная область поперечного сечения). Большой интерес однако представляют коаксиальные волноводы, особенно в области миллиметровых и субмиллиметровых волн, где на их основе создаются приборы и устройства, обладающие уникальными характеристиками. Последнее связано с аномальной дисперсией волн  $H_{ni}$  ( $n \gg l$ ), позволяющей в нерегулярных коаксиальных волноводах эффективно осуществить селекцию паразитных колебаний и волн в полосе порядка октавы, что открывает путь к созданию сверхразмерных одномодовых коаксиальных структур с рабочей волной  $H_{ni}$ .

Строгой теории нерегулярных коаксиальных структур, однако, не существует; оценки свойств таких структур строятся на базе теории регулярной коаксиальной линии (например дисперсионного уравнения для такой линии). Двусвязность области поперечного сечения коаксиальной структуры (наличие двух границ в отличие от нерегулярного полого волновода) требует при использовании наиболее естественного для рассматриваемой задачи метода преобразования координат введения новой функции отображения. В данном разделе определена такая функция и на ее основе сформулирована строгая теория произвольно (по  $z$  и  $\varphi$ ) нерегулярной коаксиальной структуры, включая общий случай, когда в ней действуют сторонние негармонические источники.

Рассмотрим произвольно (по  $z$  и  $\varphi$ ) нерегулярный коаксиальный волновод ( $r, \varphi, z$  – компоненты исходной цилиндрической системы координат). Поверхности внутреннего и внешнего проводников  $S_1, S_2$  задаются соответственно как  $b_1(\varphi, z)$  и  $b_2(\varphi, z)$ . Задача состоит в определении поля, возбуждаемого в волноводе источниками, заданными плотностью стороннего электрического тока  $\delta = \mathbf{r}_0 \delta_r(r, \varphi, z, t) + \varphi_0 \delta_\varphi(r, \varphi, z, t) + \mathbf{z}_0 \delta_z(r, \varphi, z, t)$  и плотностью стороннего магнитного тока  $\delta^M = \mathbf{r}_0 \delta_r^M(r, \varphi, z, t) + \varphi_0 \delta_\varphi^M(r, \varphi, z, t) + \mathbf{z}_0 \delta_z^M(r, \varphi, z, t)$ . Искомое поле должно удовлетворять граничному условию на  $S_1, S_2$  (потери в стенках пренебрегаем,  $\sigma \rightarrow \infty$ ; изломы  $S_1, S_2$  отсутствуют):

$$\left[ \mathbf{n}_{1,2}, \mathbf{E} \right] \Big|_{S_{1,2}} = 0, \quad (4.49)$$

$\mathbf{n}_{1,2}$  – внешняя нормаль к  $S_1$  или  $S_2$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом преобразования координат, позволяющим преобразовать граничную задачу (4.49) к элементарной. Введем следующую функцию преобразования:

$$\rho = (r + b - b_1) / b, \quad (4.50)$$

$$b = (b_2 - b_1) / (\alpha - 1), \quad \alpha = b_2(0) / b_1(0).$$

При этом  $\rho \in [1, \alpha]$  и в новых переменных внутренняя граница волновода регулярна:  $\rho|_{r=b_1} = 1, \rho|_{r=b_2} = \alpha$ . Учитывая обратное преобразование  $r = \rho b - b + b_1$ , для радиуса-вектора точки во внутренней области волновода в новой системе координат  $\rho, \varphi, z$  имеем

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{z}_0 z + (\mathbf{x}_0 \cos \varphi + \mathbf{y}_0 \sin \varphi)(\rho b - b + b_1). \quad (4.51)$$

Определим основную систему векторов косоугольной системы  $\rho, \varphi, z$ :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = b(\mathbf{x}_0 \cos \varphi + \mathbf{y}_0 \sin \varphi) = b\mathbf{r}_0,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}] \mathbf{r}_0 + (\rho b - b + b_1) \boldsymbol{\varphi}_0,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{z}_0 + [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}] \mathbf{r}_0.$$

Взаимная система векторов  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]}{V}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]}{V}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]}{V},$$

$$V = \mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_2[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = \mathbf{a}_3[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = b(\rho b - b + b_1).$$

Производя указанные действия, имеем

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{b} \mathbf{r}_0 - \frac{(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}}{b(\rho b - b + b_1)} \boldsymbol{\varphi}_0 - \frac{1}{b} [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}] \mathbf{z}_0,$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{\rho b - b + b_1} \boldsymbol{\varphi}_0,$$

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{z}_0.$$

Найдем теперь элементы метрического тензора:

$$g^{11} = \mathbf{a}^1 \mathbf{a}^1 = \frac{1}{b^2} + \left[ \frac{(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}}{b(\rho b - b + b_1)} \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[ (\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z} \right]^2,$$

$$g^{22} = \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2 = 1/(\rho b - b + b_1)^2,$$

$$g^{33} = \mathbf{a}^3 \mathbf{a}^3 = 1,$$

$$g^{12} = \mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 = -\frac{1}{b} \frac{(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}}{(\rho b - b + b_1)^2} = g^{21},$$

$$g^{13} = \mathbf{a}^1 \mathbf{a}^3 = -\frac{1}{b} [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}] = g^{31},$$

$$g^{23} = \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3 = g^{32} = 0.$$

Воспользуемся теперь определением оператора  $rot$  в косоугольной системе  $\rho, \varphi, z$ :

$$rot \mathbf{F} = \frac{1}{V} \left\{ \left( \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathbf{a}_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \rho} - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right) \mathbf{a}_3 \right\},$$

$f_1 = (\mathbf{F} \mathbf{a}_1)$ ,  $f_2 = (\mathbf{F} \mathbf{a}_2)$ ,  $f_3 = (\mathbf{F} \mathbf{a}_3)$  – ковариантные проекции вектора  $\vec{F}$ .  
Используем далее свойство основной и взаимной системы векторов:

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \delta_{ij}. \quad (4.52)$$

Применим (4.52) и найдем ковариантные компоненты уравнений Максвелла в системе  $\rho, \varphi, z$ . Однако при записи компонент введем вспомогательные векторы  $\mathbf{E}', \mathbf{H}', \delta', \delta'^M$  таким образом, чтобы для них компоненты  $rot$  имели формальную запись, тождественную выражению их в ортогональной цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$ . Тогда преобразованные контравариантные компоненты уравнений Максвелла для вспомогательных векторов  $\mathbf{E}', \mathbf{H}', \delta', \delta'^M$  в системе переменных  $\rho, \varphi, z$ , которые рассматриваются теперь как ортогональные, имеют вид

$$\begin{aligned} rot \mathbf{H}' &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \hat{g} \delta'; \\ rot \mathbf{E}' &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} - \hat{g} \delta'^M. \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\text{Здесь } \hat{g} = V \begin{pmatrix} g^{11} / \rho & g^{12} & g^{13} / \rho \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ g^{31} / \rho & g^{32} & g^{33} / \rho \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}' = \rho_0 E'_\rho + \varphi_0 E'_\varphi + z_0 E'_z, \quad E'_\rho = (\mathbf{E}, \mathbf{a}^1), \quad E'_\varphi = (\mathbf{E}, \mathbf{a}^2) / \rho, \quad E'_z = (\mathbf{E} \mathbf{a}^3),$$

остальные векторы  $\mathbf{H}', \delta', \delta'^M$  конструируются аналогичным образом. Причем  $\rho_0, \varphi_0, z_0$  – тройка ортогональных векторов.

Физические векторы в исходной системе  $r, \varphi, z$  рассчитываются через вспомогательные следующим образом (на примере  $\mathbf{E}$ ):

$$\begin{aligned} E_r &= \sqrt{g_{11}}(g^{11}E'_\rho + g^{12}\rho E'_\varphi + g^{13}E'_z); \\ E_\varphi &= \sqrt{g_{22}}(g^{21}E'_\rho + g^{22}\rho E'_\varphi + g^{23}E'_z); \\ E_z &= \sqrt{g_{33}}(g^{31}E'_\rho + g^{32}\rho E'_\varphi + g^{33}E'_z). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 = b^2, \quad g_{22} = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 = [(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}]^2 + (\rho b - b + b_1)^2, \\ g_{33} &= \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 = 1 + [(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}]^2. \end{aligned}$$

В результате проведенных преобразований приходим к следующей переформулировке исходной краевой задачи возбуждения волн в произвольно нерегулярном коаксиальном волноводе (4.49): найти решения системы (4.53) в ортогональной системе  $\rho, \varphi, z$  при граничных условиях

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{E}']\big|_{\rho=1} = 0, \quad [\mathbf{n}_2, \mathbf{E}']\big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{r}_0.$$

Прежде чем переходить к решению (4.53), целесообразно для улучшения его сходимости выделить в (4.53) электростатическую часть поля источников, содержащую разрыв первой производной  $\mathbf{E}'$ , и магнитостатическую, содержащую разрыв  $\mathbf{H}'$ .

При этом динамическая задача имеет вид

$$\text{rot}\mathbf{H}_1 = \varepsilon_0\hat{g}\frac{\partial\mathbf{E}_1}{\partial t} + \hat{g}\boldsymbol{\delta}_1, \quad \text{rot}\mathbf{E}_1 = -\mu_0\hat{g}\frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial t} - \hat{g}\boldsymbol{\delta}_1^M, \quad (4.55)$$

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{E}_1]\big|_{\rho=1} = 0, \quad [\mathbf{r}_0, \mathbf{E}_1]\big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (4.56)$$

$$\text{Здесь } \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}' - \varepsilon_0\text{grad}(\partial\Phi'_e/\partial t), \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}' + \text{grad}\Phi'_e.$$

$$\boldsymbol{\delta}_1^M = \boldsymbol{\delta}'^M - \mu_0\text{grad}(\partial\Phi'_m/\partial t), \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}' + \text{grad}\Phi'_m,$$

где  $\Phi'_e, \Phi'_m$  – соответственно электрический и магнитный скалярные потенциалы источников.

Существенно, что  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  – непрерывные на границе источников векторы и операция почленного дифференцирования представляющих их в решении рядов ( $rot \mathbf{E}', \mathbf{H}'$ ) допустима, поскольку эти ряды сходятся равномерно.

Остановимся на решении задачи (4.55),(4.56), полагая режим установившимся и периодическим. Представим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{1t} &= \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \mathbf{E}_{1z} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{zm} e^{jm\omega t}; \\ \mathbf{E}_{tm} &= \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^e(z) \mathbf{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^M(z) \mathbf{e}_{ni}^M \right) + \dot{A}_m^T \mathbf{e}^T; \\ \dot{\mathbf{E}}_{zm} &= \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \mathbf{a}^3.\end{aligned}$$

Здесь и далее индекс « $t$ » обозначает поперечную составляющую соответствующих компонент:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1t} &= \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \mathbf{H}_{1z} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{zm} e^{jm\omega t}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{tm} &= \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{B}_{mni}^e(z) \mathbf{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^M(z) \mathbf{h}_{ni}^M \right) + \dot{B}_m^T(z) \mathbf{h}^T, \\ \dot{\mathbf{H}}_{zm} &= \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \mathbf{z}_0.\end{aligned}$$

$$\text{Здесь} \quad \varphi_{ni} = F_{ni}^e(\rho) e^{-jn\varphi}, \quad \psi_{ni} = F_{ni}^M(\rho) e^{-jn\varphi},$$

$$\mathbf{e}^T = \rho_0 \mathbf{1} / \rho, \quad \mathbf{h}^T = \varphi_0 \mathbf{1} / \rho, \quad \mathbf{e}_{ni}^e = [\rho_0 \bar{F}_{ni}^e(\rho) - j\varphi_0 \frac{n}{\chi_{ni}^e} F_{ni}^e(\rho)] e^{-jn\varphi},$$

$$\mathbf{e}_{ni}^M = -[\rho_0 F_{ni}^M(\rho) j \frac{n}{\chi_{ni}^M} + \varphi_0 \bar{F}_{ni}^M(\rho)] e^{-jn\varphi},$$

$$\mathbf{h}_{ni}^e = [\rho_0 j \frac{n}{\chi_{ni}^e} F_{ni}^e(\rho) + \varphi_0 \bar{F}_{ni}^e(\rho)] e^{-jn\varphi},$$

$$\mathbf{h}_{ni}^M = [\rho_0 \bar{F}_{ni}^M(\rho) - \varphi_0 j \frac{n}{\chi_{ni}^M} F_{ni}^M(\rho)] e^{-jn\varphi}, \quad F_{ni}^e(\rho) = \frac{J_n(\chi_{ni}^e \rho)}{J_n(\chi_{ni}^e)} - \frac{N_n(\chi_{ni}^e \rho)}{N_n(\chi_{ni}^e)},$$

$$\bar{F}_{ni}^e(\rho) = \frac{J'_n(\chi_{ni}^e \rho)}{J_n(\chi_{ni}^e)} - \frac{N'_n(\chi_{ni}^e \rho)}{N_n(\chi_{ni}^e)}, \quad F_{ni}^M(\rho) = \frac{J_n(\chi_{ni}^M \rho)}{J'_n(\chi_{ni}^M)} - \frac{N_n(\chi_{ni}^M \rho)}{N'_n(\chi_{ni}^M)},$$

$$\bar{F}_{ni}^M(\rho) = \frac{J'_n(\chi_{ni}^M \rho)}{J'_n(\chi_{ni}^M)} - \frac{N'_n(\chi_{ni}^M \rho)}{N'_n(\chi_{ni}^M)}.$$

Собственные числа  $\chi_{ni}^M, \chi_{ni}^e$  определяются следующими дисперсионными уравнениями:

$$\frac{J'_n(\chi_{ni}^M)}{N'_n(\chi_{ni}^M)} = \frac{J'_n(\alpha \chi_{ni}^M)}{N'_n(\alpha \chi_{ni}^M)}, \quad \frac{J_n(\chi_{ni}^e)}{N_n(\chi_{ni}^e)} = \frac{J_n(\alpha \chi_{ni}^e)}{N_n(\alpha \chi_{ni}^e)}.$$

Применяя к решению (4.55), (4.56) проекционную процедуру, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \left\{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{g}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \mathbf{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \quad (4.57) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \hat{g} \delta_1 \mathbf{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \left\{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{g}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \mathbf{e}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \quad (4.58) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \hat{g} \delta_1 \mathbf{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \left\{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{g}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \cdot \varphi_{-ni} \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\varphi = \quad (4.59) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \hat{g} \delta_1 \mathbf{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \left\{ \hat{g}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega \mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \mathbf{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \quad (4.60) \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \delta_1^M \mathbf{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_1^\alpha \left\{ \widehat{g}^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \mathbf{h}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = & \quad (4.61) \\
= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^\alpha \delta_1^M \mathbf{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_1^\alpha \left\{ \widehat{g}^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \psi_{-ni} \mathbf{z}_0 \rho d\rho d\varphi = & \quad (4.62) \\
= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^\alpha \delta_1^M \psi_{-ni} \mathbf{z}_0 e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_1^\alpha \left\{ \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \widehat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{zm}) \right\} \boldsymbol{\rho}_0 d\rho d\varphi = & \quad (4.63) \\
= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \widehat{g} \delta_1 \boldsymbol{\rho}_0 d\rho d\varphi d\omega, &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_1^\alpha \left\{ \widehat{g}^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{zm}) + jm\omega\mu_0(\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) \right\} \boldsymbol{\varphi}_0 d\rho d\varphi = & \quad (4.64) \\
= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^\alpha \delta_1^M \boldsymbol{\varphi}_0 d\rho d\varphi d\omega. &
\end{aligned}$$

Уравнения (4.57) – (4.64) образуют полную систему ОДУ первого порядка, определяющую комплексные амплитуды связанных волн:

$$\dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^M(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^M(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{nmi}(z), \dot{A}_m^T(z), \dot{B}_m^T(z),$$

т.е. (4.57) – (4.64) представляют собой систему уравнений возбуждения динамических полей коаксиального волновода произвольной нерегулярной конфигурации, возбуждаемого негармоническими электрическими и магнитными токами источников.

В заключение заметим, что полученные уравнения возбуждения справедливы, строго говоря, только в случае, когда граничные поверхности коаксиального волновода не имеют изломов, т.е.  $\frac{\partial b}{\partial z}$  и  $\frac{\partial b}{\partial \varphi}$  не имеют

разрывов. Практически, однако, они могут использоваться в этом случае, если при численном интегрировании уравнений обходить точки разрыва производных путем соответствующего выбора шага интегрирования.

#### 4.7. Уравнения возбуждения нерегулярных замедляющих систем [6, 7, 8]

Поставим задачу следующим образом. Требуется найти решение уравнений Максвелла для гармонических процессов

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{d}}; \\ \text{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} \end{cases} \quad (4.65)$$

при граничных условиях импедансного типа

$$\frac{\dot{E}_\tau}{\dot{H}_\tau} = \dot{Z}(z). \quad (4.66)$$

Здесь координата  $z$  соответствует направлению оси замедляющей системы, поперечные координаты (в общем случае криволинейные) обозначим  $q_1, q_2$ .

Будем считать, что контур поперечного сечения замедляющей системы не зависит от  $z$  и её нерегулярность обусловлена только зависимостью от  $z$  импеданса стенок (или эквивалентных им боковых поверхностей, на которых задан  $\dot{Z}(z)$ ).

В качестве базисных функций выберем «квазирегулярную» систему функций  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$  вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_s &= \mathbf{E}_s^0(q_1, q_2, \aleph_s(z)) e^{-j \int h_s dz}, \\ \dot{\mathbf{H}}_s &= \mathbf{H}_s^0(q_1, q_2, \aleph_s(z)) e^{-j \int h_s dz}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$h_s = \sqrt{k^2 + \aleph_s^2}.$$

Функции  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$  удовлетворяют граничным условиям (4.66) в каждом сечении  $z'$  и являются решениями однородных уравнений (4.65) для регулярной системы с  $\dot{Z} = \dot{Z}(z')$  при всех  $z$  (соответственно и  $\aleph_s(z') = \text{Const}$

в эквивалентной регулярной системе). Система функций  $\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_s \\ \mathbf{H}_s \end{Bmatrix}$  ортогональна

в каждом сечении  $z'$ , как и всякая система собственных волн регулярного волновода, т.е.

$$J_{s,p} = \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_p \right] - \left[ \mathbf{E}_p, \mathbf{H}_s \right] \right\} \mathbf{z}_0 dS_\perp = \begin{cases} 0, & p \neq s; \\ N_s, & p = s. \end{cases} \quad (4.68)$$

Поскольку  $\aleph_s = \aleph_s(z) \neq Const$ , поля (4.67) не удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла и система уравнений для них имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_s &= j\omega \dot{\epsilon}_a \mathbf{E}_s + \boldsymbol{\Psi}_s^e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_s &= -j\omega \dot{\mu}_a \mathbf{H}_s - \boldsymbol{\Psi}_s^m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_s^e &= -e^{-j \int h_s dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{H}_s^0, \mathbf{z}_0 \right], \\ \boldsymbol{\Psi}_s^m &= e^{-j \int h_s dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{E}_s^0, \mathbf{z}_0 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\boldsymbol{\Psi}_s^e, \boldsymbol{\Psi}_s^m$  – чисто поперечные векторы, что существенно в последующем выводе уравнений возбуждения.

Разделим все векторы на поперечные и продольные и запишем разложения для поперечных составляющих  $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$  в виде

$$\mathbf{E}_t = \sum_s \left( \dot{C}_s(z) \mathbf{E}_{st} + \dot{C}_{-s}(z) \mathbf{E}_{-st} \right),$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_s \left( \dot{C}_s(z) \mathbf{H}_{st} + \dot{C}_{-s}(z) \mathbf{H}_{-st} \right).$$

Тогда нетрудно показать, что разложение полного поля, удовлетворяющего (4.65), должно быть записано в следующей форме (при доказательстве используется тот факт, что  $\boldsymbol{\Psi}_{s\ell}^m = \boldsymbol{\Psi}_{s\ell}^e = 0$ ):

$$\mathbf{E} = \sum_s \left( \dot{C}_s(z) \mathbf{E}_s + \dot{C}_{-s}(z) \mathbf{E}_{-s} \right) - \frac{\boldsymbol{\delta}^l}{j\omega \epsilon_\alpha}, \quad (4.69)$$

$$\mathbf{H} = \sum_s \left( \dot{C}_s(z) \mathbf{H}_s + \dot{C}_{-s}(z) \mathbf{H}_{-s} \right).$$

Для определения коэффициентов разложения воспользуемся леммой Лоренца для бесконечно малого объема  $S_\perp dz$  в волноводе, предполагая, что  $\dot{Z}(z)$  и соответственно  $\aleph_s(z)$  – гладкие функции. В соответствии с леммой Лоренца для  $dV = S_\perp dz$  можно записать

$$\frac{d}{dz} \int_{S_{\perp}} \{[\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1]\} \mathbf{Z}_0 dS_{\perp} = \int_{S_{\perp}} (\delta_1^e \mathbf{E}_2 - \delta_2^e \mathbf{E}_1 - \delta_1^m \mathbf{H}_2 + \delta_2^m \mathbf{H}_1) dS. \quad (4.70)$$

Полагая в качестве  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  поля (4.69) ( $\delta_1^e = \delta, \delta_1^m = 0$ ), а в качестве  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  – поля  $\mathbf{E}_{\pm s}, \mathbf{H}_{\pm s}$  ( $\delta_2^e = \psi_{\mp s}^e, \delta_2^m = \psi_{\mp s}^m$ ) и с учетом условия ортогональности (4.68), из (4.70) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\dot{C}_s N_s) &= \int_{S_{\perp}} \delta \mathbf{E}_{-s} dS_{\perp} + \sum_P \dot{C}_P \gamma_{p, -s}, \\ \frac{d}{dz} (\dot{C}_{-s} N_{-s}) &= \int_{S_{\perp}} \delta \mathbf{E}_s dS_{\perp} + \sum_P \dot{C}_P \gamma_{p, s}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Здесь

$$\gamma_{p, \pm s} = \gamma_{p, \pm s}^m - \gamma_{p, \pm s}^e = \gamma_{\pm s, p}, \quad \gamma_{p, \pm s}^e = \int_{S_{\perp}} \mathbf{E}_p \psi_{\pm s}^e dS_{\perp}, \quad \gamma_{p, \pm s}^m = \int_{S_{\perp}} \mathbf{H}_p \psi_{\pm s}^m dS_{\perp}.$$

Система (4.71) представляет собой совершенно общую форму уравнений возбуждения для произвольной нерегулярной замедляющей системы.

Заметим, что (4.71) нетрудно видоизменить на случай, когда выделяется квазистатическая часть электрического поля  $\mathbf{E}_{cm} = -grad\Phi, \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$ . В этом случае в (4.71)  $\delta$  необходимо заменить на  $\delta' = \delta - j\omega\epsilon_a grad\Phi$ .

#### 4.8. Спиральная замедляющая система с нерегулярной навивкой для спутниковых ЛБВ

Проблема повышения КПД спутниковых ЛБВ со спиральными замедляющими системами (ЗС) является весьма актуальной: как подсчитано в [11], повышение КПД ЛБВ в 54 космических ретрансляторах на 1% дает доход в 35 млн. дол. в год. В ряде работ [7, 8, 12-14] показана возможность увеличения электронного КПД с 40 до 70-80 % за счет оптимизации нерегулярной спиральной ЗС. Однако в указанных работах использовались уравнения возбуждения, основанные на импедансном приближении [8], что приводит к дополнительной проблеме синтеза адекватного найденному оптимальному распределению фазовой скорости закона навивки спирали вдоль ЛБВ. Эта проблема осложняется еще и тем, что понятие фазовой скорости в нерегулярной линии приобретает локальный смысл.

В данном разделе развита строгая теория возбуждения волновода с постоянным радиусом спирали и произвольно меняющейся вдоль оси навивкой. На основе операции отображения исходного пространства в пространство, где спираль оказывается регулярной, и с использованием затем проекционной процедуры получены строгие уравнения возбуждения. Благодаря полученной модели, при решении задач оптимизации ЛБВ можно непосредственно оптимизировать функцию навивки спирали, т.е. проблема синтеза нерегулярной оптимальной спиральной замедляющей системы снимается.

Рассмотрим спиральный волновод постоянного радиуса  $a'$  с нерегулярной навивкой в экране радиусом  $b'$ , возбуждаемый трубчатым электронным потоком, соосным с волноводом.

Поля в таком волноводе определяются уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}' = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \mathbf{J}'; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (4.71)$$

где  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{E}'$  – векторы напряженности магнитного и электрического полей,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость пустоты,  $\mathbf{J} = -\sum_i \rho_i \mathbf{v}_i$  – плотность тока;  $\mathbf{v}_i$  – скорость электронов,  $\rho_i$  – плотность заряда  $i$ -й крупной частицы.

Движение  $i$ -й крупной частицы описывается уравнением:

$$\frac{d\gamma \mathbf{v}_i}{dt} = \frac{e}{m_0} \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}'] \right), \quad (4.72)$$

где  $\mathbf{B}' = \mu_0 \cdot \mathbf{H}'$  – индукция магнитного поля;  $e$  и  $m_0$  – заряд и масса электрона;  $c$  – скорость света в пустоте;  $\gamma = 1/\sqrt{1 - |\mathbf{v}_e|^2/c^2}$ .

Уравнения (4.71), (4.72) с соответствующими граничными условиями представляют самосогласованную систему, описывающую процессы генерации и усиления электромагнитных волн электронным потоком в нерегулярном спиральном волноводе.

При решении системы (4.71) (4.72) удобно перейти к следующим безразмерным переменным (ниже размерные переменные, имеющие одинаковое написание с безразмерными, помечены штрихом):

$$\begin{aligned} (r, x, y, z, b) &= (r', x', y', z', b') \omega_0 / c, & \omega_0 t &= \theta, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}' / E_m, \quad \mathbf{B} = e \mathbf{B}' / E_m, & \delta &= \mathbf{J} / (\varepsilon_0 \omega_0 E_m), \quad E_m = m_0 \omega_0 c / e, \end{aligned}$$

где  $\omega_0$  – опорная частота.

Безразмерные уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\theta} + \delta; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\theta}. \quad (4.73)$$

Граничные условия:

$$\text{при } r=b: [\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{E}] = 0; \quad (4.74)$$

$$\text{при } r=a: E_z(a^-) = E_z(a^+); E_\varphi(a^-) = E_\varphi(a^+);$$

$$E_z(a^\pm) + E_\varphi(a^\pm) \operatorname{ctg}\psi_s(z) = 0;$$

$$B_z(a^-) - B_z(a^+) + [B_\varphi(a^-) - B_\varphi(a^+)] \operatorname{ctg}\psi_s(z) = 0.$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом преобразования координат [5, 6], позволяющим трансформировать исходную задачу к задаче с регулярной спиралью, но в неоднородном и анизотропном пространстве.

Пусть в исходной системе координат  $(r, \varphi, z)$  навивка спирали определяется уравнением

$$\varphi = \int_0^z f(z) dz; \quad r = a. \quad (4.75)$$

Угол навивки  $\psi_s(z)$  связан с функцией  $f(z)$  следующим образом ( $d\ell$  – элемент длины дуги спирали):

$$\frac{1}{\sin\psi_s} = \frac{d\ell}{dz} = \sqrt{1 + a^2 f^2(z)}, \quad \text{или } \operatorname{ctg}\psi_s = af(z). \quad (4.76)$$

Преобразуем пространство, введя новую систему координат  $(\rho, \phi, \zeta)$ , связанную с исходной следующим образом:

$$r = \rho; \quad \varphi = \frac{\phi}{f(0)} \int_0^z f(z) dz = h(z)\phi; \quad z = \zeta. \quad (4.77)$$

Ввиду того, что  $r = \rho$  и  $z = \zeta$ , ниже будем пользоваться  $r$  и  $z$  вместо  $\rho, \zeta$ , где это не приводит к недоразумению. В новой системе координат навивка спирали регулярна:

$$\phi = f_0 z; \quad r = a, \quad \psi_s^0 = \psi_s(0) = \operatorname{const}.$$

Учитывая (4.76), радиус-вектор точки и его приращение в новой системе координат задаются как

$$\mathbf{r} = r \cos(h \cdot \phi) \mathbf{x}_0 + r \sin(h \cdot \phi) \mathbf{y}_0 + z \mathbf{z}_0, \quad d\mathbf{r} = dr \mathbf{a}_1 + d\phi \mathbf{a}_2 + dz \mathbf{a}_3.$$

Определим основную систему векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  косоугольной системы координат  $(r \phi z)$ :

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = rh \boldsymbol{\varphi}_0; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{z}_0 + r \phi h' \boldsymbol{\varphi}_0.$$

Соответственно взаимная система векторов имеет вид

$$\mathbf{a}^1 = \frac{[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}{V} = \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{[\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1]}{V} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_0 - r \phi h' \mathbf{z}_0}{hr}; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}{V} = \mathbf{z}_0;$$

$$V = \mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = rh; \quad h' = \frac{dh}{dz}.$$

В принятой системе представим векторы  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\delta}$  в виде (на примере  $\mathbf{E}$ ):

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{a}^1 + E_2 \mathbf{a}^2 + E_3 \mathbf{a}^3 = E_r \mathbf{r}_0 + E_\phi \boldsymbol{\varphi}_0 + E_z \mathbf{z}_0. \quad (4.78)$$

Запишем теперь уравнения Максвелла (4.73) в новой системе координат:

$$\frac{1}{V} \left\{ \left( \frac{\partial B_3}{\partial \phi} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \mathbf{a}_1 + \left( \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial r} \right) \mathbf{a}_2 + \left( \frac{\partial B_2}{\partial r} - \frac{\partial B_1}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_3 \right\} =$$

$$= \frac{dE_1}{d\theta} \mathbf{a}^1 + \frac{dE_2}{d\theta} \mathbf{a}^2 + \frac{dE_3}{d\theta} \mathbf{a}^3 + \delta_1 \mathbf{a}^1 + \delta_2 \mathbf{a}^2 + \delta_3 \mathbf{a}^3; \quad (4.79)$$

$$\frac{1}{V} \left\{ \left( \frac{\partial E_3}{\partial \phi} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) \mathbf{a}_1 + \left( \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial r} \right) \mathbf{a}_2 + \left( \frac{\partial E_2}{\partial r} - \frac{\partial E_1}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_3 \right\} =$$

$$= - \left( \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial B_2}{\partial \theta} \mathbf{a}^2 + \frac{\partial B_3}{\partial \theta} \mathbf{a}^3 \right). \quad (4.80)$$

Используя далее свойство ортогональности основной и взаимной системы векторов  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \delta_{ij}$  и умножая скалярно уравнение (4.79) последовательно на  $\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3$ , а уравнение (4.80) на  $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$  получим систему уравнений для компонент. После этого введем замену переменных (на примере  $E$ ):

$$E_1 = E_\rho; E_2 = rE_\phi; E_3 = E_\zeta$$

и вспомогательные векторы  $\mathbf{E}^s, \mathbf{B}^s, \boldsymbol{\delta}^s$ :

$$\mathbf{E}^s = E_\rho \cdot \mathbf{r}_0 + E_\phi \cdot \boldsymbol{\phi}_0 + E_\zeta \cdot \mathbf{z}_0.$$

Связь между вспомогательными и физическими векторами имеет вид

$$E_r = E_\rho; E_\phi = E_\phi/h; E_z = E_\zeta - E_\phi r\phi h'/h. \quad (4.81)$$

Получим для них преобразованные уравнения Максвелла вида

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{B}^s &= \hat{g} \left( \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial \theta} + \boldsymbol{\delta}^s \right), \quad \tilde{g} \text{rot} \mathbf{E}^s = -\frac{\partial \mathbf{B}^s}{\partial \theta}; \quad (4.82) \\ \hat{g} &= V \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^1)}{r} & (\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2) & \frac{(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^3)}{r} \\ (\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^1) & r(\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2) & (\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3) \\ \frac{(\mathbf{a}^3 \mathbf{a}^1)}{r} & (\mathbf{a}^3 \mathbf{a}^2) & \frac{(\mathbf{a}^3 \mathbf{a}^3)}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(r\phi h')^2}{h} & -r\phi h' \\ 0 & -r\phi h' & h \end{bmatrix}; \\ \tilde{g} &= \hat{g}^{-1} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} r(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) & r(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3) \\ (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) & \frac{(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2)}{r} & (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) \\ r(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2) & r(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & h & r\phi h' \\ 0 & r\phi h' & \frac{1+(r\phi h')^2}{h} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Покомпонентная запись (4.80) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial B_\zeta}{\partial \phi} - \frac{\partial r B_\phi}{\partial z} \right) &= h \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial \theta} + \delta_\rho \right); \\ \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_\zeta}{\partial r} &= \frac{1+(r\phi h')^2}{h} \left( \frac{\partial E_\phi}{\partial \theta} + \delta_\phi \right) - r\phi h' \left( \frac{\partial E_\zeta}{\partial \theta} + \delta_\zeta \right); \quad (4.83) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) &= -r\phi h' \left( \frac{\partial E_\phi}{\partial \theta} + \delta_\phi \right) + h \left( \frac{E_\zeta}{\partial \theta} + \delta_\zeta \right). \\ \frac{1}{hr} \left( \frac{\partial E_\zeta}{\partial \phi} - \frac{\partial r E_\phi}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial B_\rho}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

$$h \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_\zeta}{\partial r} \right) + \phi h' \left( \frac{\partial r E_\phi}{\partial r} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) = -\frac{\partial B_\phi}{\partial \theta}; \quad (4.84)$$

$$r \phi h' \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_\zeta}{\partial r} \right) + \frac{1 + (r \phi h')^2}{hr} \left( \frac{\partial r E_\phi}{\partial r} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial \theta}.$$

Граничные условия (регулярные):

$$\text{при } r = b: E_\zeta = 0 \quad \frac{\partial B_\zeta}{\partial r} = 0; \quad (4.85)$$

$$\text{при } r = a: E_\zeta(a^-) = E_\zeta(a^+); E_\phi(a^-) = E_\phi(a^+);$$

$$E_\zeta(a^\pm) + E_\phi(a^\pm) a f(0) = 0;$$

$$B_\zeta(a^-) - B_\zeta(a^+) + [B_\phi(a^-) - B_\phi(a^+)] a f(0) = 0.$$

При решении (4.82) – (4.85) полагаем режим установившимся на рабочей частоте  $\omega = W \omega_0$ .

Представим искомое решение в системе  $(r \phi z)$  в виде

$$\mathbf{E}^s = \text{Re} \left[ \sum_m (\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{\zeta m}) e^{jmW\theta} \right]; \quad \mathbf{B}^s = \text{Re} \left[ \sum_m (\dot{\mathbf{B}}_{tm} + \dot{\mathbf{B}}_{\zeta m}) e^{jmW\theta} \right];$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{tm} = \sum_n \dot{A}_{mn}(z) \vec{e}_{mn}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{tm} = \sum_n \dot{B}_{mn}(z) \mathbf{h}_{mn}; \quad (4.86)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\zeta m} = \sum_n \dot{C}_{mn}(z) \boldsymbol{\varphi}_{mn}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{\zeta m} = \sum_n \dot{D}_{mn}(z) \boldsymbol{\psi}_{mn}.$$

Система базисных функций  $\mathbf{e}_{mn}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_{mn}$ ,  $\mathbf{h}_{mn}$ ,  $\boldsymbol{\psi}_{mn}$  для регулярной спирали с постоянной навивкой  $\phi = f(0)z$  и радиусом  $a$  в экране радиусом  $b$ , возбуждаемой на частоте  $mW$ , известна [10]:

$$\boldsymbol{\varphi}_{mn} = \varphi_{mn}^o(r) e^{-jn\phi} \mathbf{z}_0, \quad \boldsymbol{\psi}_{mn} = \psi_{mn}^o(r) e^{-jn\phi} \mathbf{z}_0; \quad (4.87)$$

$$\mathbf{e}_{mn} = \left[ j e_{\rho mn}^o \mathbf{r}_0 + e_{\phi mn}^o \boldsymbol{\phi}_0 \right] e^{-jn\phi} =$$

$$= \left[ j \left( \frac{d\varphi_{mn}^o}{dr} - \alpha_{mn} n W m \frac{\psi_{mn}^o}{r} \right) \mathbf{r}_0 + \left( n \frac{\varphi_{mn}^o}{r} - \alpha_{mn} W m \frac{d\psi_{mn}^o}{dr} \right) \boldsymbol{\phi}_0 \right] \frac{K_{zmn} e^{-jn\phi}}{\chi_{mn}^2};$$

$$\mathbf{h}_{mn} = \left[ h_{\rho mn}^o \mathbf{r}_0 + j h_{\phi mn}^o \boldsymbol{\phi}_0 \right] e^{-jn\phi} =$$

$$= \left[ \left( -nWm \frac{\varphi_{mn}^o}{r} + \alpha_{mn} K_{zmn}^2 \frac{d\psi_{mn}^o}{dr} \right) \mathbf{r}_0 + j \left( Wm \frac{d\varphi_{mn}^o}{dr} - \alpha_{mn} n K_{zmn}^2 \frac{\psi_{mn}^o}{r} \right) \Phi_0 \right] \frac{e^{-jn\phi}}{\chi_{mn}^2};$$

$$\varphi_{mn}^o = \begin{cases} \dot{I}_n(\chi_{mn}r); & 0 \leq r \leq a, \\ \dot{I}E_n(\chi_{mn}r) = \dot{I}_n(\chi_{mn}a) \frac{\dot{I}_n(\chi_{mn}r)K_n(\chi_{mn}b) - \dot{I}_n(\chi_{mn}b)K_n(\chi_{mn}r)}{\dot{I}_n(\chi_{mn}a)K_n(\chi_{mn}b) - \dot{I}_n(\chi_{mn}b)K_n(\chi_{mn}a)}; & a \leq r \leq b. \end{cases}$$

$$\psi_{mn}^o = \begin{cases} \dot{I}_n(\chi_{mn}r); & 0 \leq r \leq a, \\ \dot{I}B_n(\chi_{mn}r) = \dot{I}'_n(\chi_{mn}a) \frac{\dot{I}'_n(\chi_{mn}r)K'_n(\chi_{mn}b) - \dot{I}'_n(\chi_{mn}b)K_n(\chi_{mn}r)}{\dot{I}'_n(\chi_{mn}a)K'_n(\chi_{mn}b) - \dot{I}'_n(\chi_{mn}b)K'(\chi_{mn}a)}; & a \leq r \leq b. \end{cases}$$

$$K_{zmn} = Wm / \beta_{\phi mn}; \quad \chi_{mn} = \sqrt{K_{zmn}^2 - (Wm)^2};$$

$$\alpha_{mn} = \frac{\dot{I}_n(\chi_{mn}a)}{\dot{I}'_n(\chi_{mn}a)Wm} \left( \frac{\chi_{mn}}{af(0)K_{zmn}} + \frac{n}{\chi_{mn}a} \right).$$

Величины  $\beta_{\phi mn}$ , а следовательно  $K_{zmn}$ ,  $\chi_{mn}$ , находятся из дисперсионного уравнения, обеспечивающего выполнение граничных условий при  $r = a$ :

$$\frac{Wmaf(0)}{\chi_{mn}} = \alpha_{mn} K_{zmn} \frac{\dot{I}B_n(\chi_{mn}a) - \dot{I}_n(\chi_{mn}a)}{\dot{I}E'_n(\chi_{mn}a) - \dot{I}'_n(\chi_{mn}a)} \left( 1 + \frac{nK_{zmn}}{a} \right). \quad (4.88)$$

Амплитуды  $\dot{A}_{mk}(z)$ ,  $\dot{C}_{mk}(z)$ ,  $\dot{B}_{mk}(z)$ ,  $\dot{D}_{mk}(z)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) компонент возбуждаемого поля (4.86) находятся из следующих проекционных соотношений:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b \left\{ \text{rot}(\dot{\mathbf{B}}_{tm} + \dot{\mathbf{B}}_{\zeta m}) - jWm\hat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{\zeta m}) \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{mk}^* \\ \Phi_{mk}^* \end{bmatrix} r dr d\phi = \quad (4.89)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^b \hat{g} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta^s e^{-jmW\theta} dW\theta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{mk}^* \\ \Phi_{mk}^* \end{bmatrix} r dr d\phi;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b \left\{ \tilde{g} \text{rot}(\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{\zeta m}) + jWm(\dot{\mathbf{B}}_{tm} + \dot{\mathbf{B}}_{\zeta m}) \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{mk}^* \\ \Psi_{mk}^* \end{bmatrix} r dr d\phi = 0.$$

Используя закон сохранения заряда, токовые интегралы в (4.89) в предположении тонкого пучка преобразуем к виду

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b \hat{g} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta^s e^{-jmW\theta} dW\theta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{mk}^* \\ \Phi_{mk}^* \end{bmatrix} r dr d\phi =$$

$$= -\frac{G_0}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left[ \left( \mathbf{a}^1 f_{ri} + \mathbf{a}^2 r_i f_{\phi i} + \mathbf{a}^3 f_{zi} \right) \frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\beta_{zi}} e^{-jWm\theta_i} \right]. \quad (4.90)$$

Здесь  $G_0 = \frac{I_0 \omega_0}{\pi \varepsilon_0 c^2 E_m}$ ;  $I_0$  – ток пучка,  $\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{mk}^* \\ \Phi_{mk} \end{bmatrix} (r_i \varphi_i)$ ,  $\beta_i = \mathbf{v}_{ei} / c$  –

относительные скорости  $Ne$  крупных частиц, которые описываются безразмерными уравнениями движения, полученными усреднением уравнений (4.72)

$$\frac{d\gamma_i \boldsymbol{\beta}_i}{dz} = -\left\{ \mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}_i \mathbf{V}] + [\boldsymbol{\beta}_i \mathbf{F}] + S_q \mathbf{E}_q \right\} / \beta_{zi}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{ti}}{dz} = \frac{\boldsymbol{\beta}_{ti}}{\beta_{zi}}, \quad \frac{dW\theta_i}{dz} = \frac{W}{\beta_{zi}}, \quad (4.91)$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}$  – векторы возбуждаемого волнового поля в исходной системе,  $S_q$  – параметр пространственного заряда,  $\mathbf{F}$  – магнитостатическое фокусирующее поле.

Исходя из проекционных соотношений (4.89) (4.90), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд в решении (4.86):

$$\dot{C}_{mk} = \frac{1}{\dot{I}_{mk}^{11}} \left( \dot{B}_{mk} \frac{I_{mk}^{12}}{Wmh} + \frac{h'}{h} \sum_n \dot{A}_{mn} \dot{S}_{nk}^1 I_{mnk}^{13} + \frac{\dot{I}_{mk}^c}{2\pi j Wmh} \right); \quad (4.92)$$

$$\dot{I}_{mk}^c = -\frac{G_0}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \varphi_{mk}^o(r_i) e^{-j(Wm\theta_i - n\phi_i)};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{A}_{mk}}{dz} = \frac{-j}{I_{mk}^{21} h - I_{mk}^{22} / h} \left[ \dot{C}_{mk} \left( h I_{mk}^{23} - \frac{k}{h} I_{mk}^{24} \right) + \dot{B}_{mk} Wm I_{mk}^{25} + \right. \\ \left. + h' \sum_n \dot{A}_{mn} \dot{S}_{nk}^1 I_{mnk}^{26} \right]; \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{mk} = \frac{-j}{Wm I_{mk}^{31}} \left[ \dot{A}_{mk} \frac{I_{mk}^{32}}{h} + \frac{h'^2}{h} \sum_n \dot{A}_n \dot{S}_{mnk}^2 I_{mnk}^{33} - \right. \\ \left. - j h' \sum_n \left( \frac{d\dot{A}_{mn}}{dz} I_{mnk}^{34} + j \dot{C}_{mn} I_{mnk}^{35} \right) \dot{S}_{mnk}^1 \right]; \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{B}_{mk}}{dz} = \frac{1}{I_{mk}^{41}} \left[ \dot{D}_{mk} I_{mk}^{42} + j Wm \dot{A}_{mk} \left( h I_{mk}^{43} + I_{mk}^{44} / h \right) + \right. \\ \left. + j Wm \left( \frac{h'^2}{h} \sum_n \dot{A}_{mn} \dot{S}_{mnk}^2 I_{mnk}^{45} - h' \sum_n \dot{C}_{mn} \dot{S}_{mnk}^1 I_{mnk}^{46} \right) + \frac{\dot{I}_{mk}^B}{2\pi} \right]; \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\dot{I}_{mk}^B = \frac{-G_0}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left[ -je_{\rho mk}^o(r_i) \frac{\beta_{ri}}{\beta_{zi}} + \frac{e_{\phi mn}^o(r_i)}{h} \left( \frac{\beta_{\phi i}}{\beta_{zi}} - r_i \phi_i h' \right) \right] e^{-j(Wm\theta_i - n\phi)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{S}_{nk}^1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi e^{j(k-n)\phi} d\phi; & \dot{S}_{nk}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^2 e^{j(k-n)\phi} d\phi; \\ I_{mk}^{11} &= \int_0^b \varphi_{mk}^{o2} r dr; & I_{mk}^{12} &= \int_0^b \left[ \frac{d}{dr} (r h_{\phi mk}^o) + k h_{\rho mk}^o \right] \varphi_k^o dr; \\ I_{mnk}^{13} &= \int_0^b e_{\phi mn}^o \varphi_{mk}^o r^2 dr; & I_{mk}^{21} &= \int_0^b e_{\rho mk}^o h_{\phi mk}^o r dr; \\ I_{mk}^{22} &= \int_0^b e_{\phi mk}^o h_{\rho mk}^o r dr; & I_{mk}^{23} &= \int_0^b \frac{d\varphi_{mk}^o}{dr} h_{\phi}^o r dr; \\ I_{mk}^{24} &= \int_0^b \varphi_{mk}^o h_{\rho mk}^o dr; & I_{mk}^{25} &= \int_0^b (h_{\rho mk}^{o2} h_{\phi mk}^{o2}) r dr; \\ I_{mnk}^{26} &= \int_0^b \left( n e_{\rho mn}^o - \frac{dr e_{\phi mn}^o}{dr} \right) h_{\phi mk}^o r dr; & I_{mk}^{31} &= \int_0^b \psi_k^{o2} r dr; \\ I_{mk}^{32} &= \int_0^b \left( n e_{\rho mk}^o - \frac{dr e_{\phi mk}^o}{dr} \right) \psi_{mk}^o dr; & I_{mnk}^{33} &= \int_0^b \left( n e_{\rho mn}^o - \frac{dr e_{\phi mn}^o}{dr} \right) \psi_{mk}^o r^2 dr; \\ I_{mk}^{41} &= \int_0^b (h_{\rho mk}^o e_{\phi mk}^o - h_{\phi mk}^o e_{\rho mk}^o) r dr; & I_{mk}^{42} &= \int_0^b \left( \frac{d\psi_{mk}^o}{dr} e_{\phi mk}^o r + n \psi_{mk}^o e_{\rho mk}^o \right) dr; \\ I_{mk}^{43} &= \int_0^b e_{\rho mk}^{o2} r dr; & I_{mk}^{44} &= \int_0^b e_{\phi mk}^{o2} r dr; \\ I_{mnk}^{45} &= \int_0^b e_{\phi mn}^o e_{\phi mk}^o r^3 dr; & I_{mnk}^{46} &= \int_0^b \varphi_{mn}^o e_{\phi mk}^o r^2 dr. \end{aligned}$$

## Литература

- 2.1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. – М. – Л.: ОГИЗ, 1948. – 539 с.
- 2.2. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. – Мн.: Бестпринт, 2004. – 375 с.
- 2.3. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Батура М.П. Двумерная нелинейная теория релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного волновода //ЭВиЭС. 1999. Т.4. № 6. С. 28-31.
- 2.4. Батура М.П. Алгоритм оптимизации по КПД профиля нерегулярной замедляющей системы релятивистской ЛБВ //ЭВиЭС. 2002. Т.7. № 3. С. 8-11.
- 2.5. Кураев А.А. Уравнения возбуждения продольно-нерегулярного коаксиального волновода //Вестці НАН Беларусі. Сер. ФТН. 1999. № 4. С. 60-65.
- 2.6. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. – М.: Радио и связь, 1986. – 208 с.
- 2.7. Кураев А.А., Байбурын В.Б., Ильин Е.М. Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ-приборов. – Мн.: Наука и техника, 1990. – 392 с.
- 2.8. Кураев А.А., Слепян Г.Я. К задаче оптимизации ЛБВ-О //Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 7. С. 1339-1346.
- 2.9. Кураев А.А., Сеницын А.К. Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением. Теория и приложения //ЭВиЭС. 2002. Т. 7. № 3. С. 12-23.
- 2.10. Тараненко З.И., Трохименко Я.К. Замедляющие системы. – К.: Наука. 1965, 307 С.
- 2.11. Abrams R.H., Levush B., Mondelli A.A., Parker R/K/ Vacuum Electronics for the 21th century. – IEEE Microwave Magazine, 2001, v.2, №3, pp. 61-72.
- 2.12. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. – М.: Радио и связь, 1986. – 208 с.
- 2.13. Кураев А.А., Слепян Г.Я. К задаче оптимизации ЛБВ-О //Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 7. С. 1339-1346.
- 2.14. Кураев А.А., Соловей М.П., Слепян Г.Я. Характеристики оптимизированной по КПД ЛБВ-О с нерегулярной замедляющей системой //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 1. С. 118-126.

## ГЛАВА 5

### РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЧЕРЕНКОВСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ

#### 5.1. Оптимизация релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных гофрированных волноводах с учетом закритических мод [1, 2]

Создание сильноточных ускорителей электронов с токами 1 – 35 кА при напряжении 0,3 – 2 МВ позволяет реализовать черенковские генераторы СВЧ с электродинамической системой в виде отрезка периодического гофрированного полого волновода, имеющие выходную мощность 1 – 30 ГВт в сантиметровом и миллиметровом диапазонах при КПД 10 – 50 % [3, 4]. Такие результаты достигнуты с использованием простейших математических моделей, справедливых для неглубокой периодической гофрировки волновода. Повышение КПД и улучшение выходных характеристик генераторов возможно на основе оптимизации всех параметров, включая профиль волновода. Это требует создания адекватной нелинейной теории таких приборов и эффективных методов оптимизации. Если общую формулировку теории релятивистских ЛБВ – ЛОВ с нерегулярными электродинамическими системами можно считать завершенной (включая методы учета сил взаимодействия релятивистских электронов) [5-14], то методы численного интегрирования самосогласованных нелинейных уравнений этих приборов требуют детального обсуждения. Дело в том, что для адекватного описания процессов взаимодействия в ЛБВ – ЛОВ на нерегулярном волноводе необходим учет ряда типов волн, связанных с рабочей волной, в том числе закритических. Однако для возникающей граничной задачи метод пристрелки на основе решения задачи Коши, который использовался в [5-14], оказывается непригоден ввиду его неустойчивости при учете закритических волн. Поэтому в настоящей работе предлагается оригинальная методика решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода блочной матричной прогонки. С использованием этого метода выяснены условия применимости результатов [4-14], полученных без учета закритических мод, и исследованы физические процессы в оптимальных многоволновых черенковских генераторах с глубокой гофрировкой типа ЛБВ-0 на основной гармонике при удалении от границы полосы прозрачности. Показано, что за счет оптимального профилирования гофра эффективность таких генераторов может достигать 70 %.

### 5.1.1. Самосогласованные уравнения одномерной модели релятивистских ЛОВ и ЛБВ-О с замедляющей системой в виде гофрированного волновода

Теория релятивистских ЛБВ и ЛОВ с электродинамической системой в виде нерегулярного гофрированного волновода на основе метода преобразования координат развита в работах [5-14]. Для ЛБВ и ЛОВ с рабочей волной  $E_{0m}$  полого нерегулярного волновода она приводит к следующей системе самосогласованных нелинейных уравнений в одномерном приближении.

Уравнения для амплитуд возбуждаемых волн:

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} = L_0 (m \cdot W \cdot \dot{V}_{mi} + v_{0i} \cdot \dot{C}_{mi}) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{V}_{mi}}{dT} = & -m \cdot W \left\{ L_0 \dot{A}_{mi} + \frac{v_{01}^2}{L_0} \left( \frac{dg}{dT} \right)^2 \times \left[ \dot{A}_{mi} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{v_{0i}^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k \neq i} \frac{4 \cdot (v_{0i}^2 + v_{0k}^2)}{(v_{0i}^2 - v_{0k}^2)^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right] - \right. \\ & \left. - v_{01}^2 g \frac{dg}{dT} \cdot \left( -\frac{\dot{C}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot v_{0k}}{v_{0i}^2 - v_{0k}^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{C}_{mk} \right) \right\} - \\ & - \frac{mWj\sigma r_0}{\pi e_{0i} g} \cdot \frac{dg}{dT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_1 \left( \frac{v_{0i} r_0}{v_{01} g} \right) e^{-jmW\theta_i}; \\ \dot{C}_{mi} = & -\frac{v_{0i} \dot{V}_{mi}}{(mW)^2 v_{01} g^2} + \frac{1}{L_0 g} \frac{dg}{dT} \times \left( -\frac{\dot{A}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2v_{0i}}{v_{0k}^2 - v_{0i}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right) - \\ & - \frac{j\sigma}{mW \pi e_{0i} v_{01} g^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_0 \left( \frac{v_{0i} r_0}{v_{01} g} \right) e^{-jmW\theta_i}. \end{aligned}$$

Уравнения движения крупных частиц:

$$\frac{d\beta_l}{dT} = -\frac{L_0}{\beta_l \gamma_l^3} E_{zl}; \quad \frac{d(W\theta_l)}{dT} = \frac{WL}{m\beta_l}; \quad l = 1 \dots N; \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} E_{zl} = \text{Re} \left[ \sum_m \sum_{i=1}^M J_0 \left( \frac{v_{0i} r_0}{v_{01} g} \right) \dot{C}_{mi} \cdot e^{jmW\theta_i} + \right. \\ \left. + \frac{r_0}{Lv_{01} g^2} \frac{dg}{dT} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left( \frac{v_{0i} r_0}{v_{01} g} \right) \dot{A}_{mi} \cdot e^{jmW\theta_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $T = z/L$ ,  $L$  – общая длина области взаимодействия,  $m$  – номер гармоники опорной частоты  $\omega_0$ ,  $W = \omega/\omega_0$ ,  $\omega$  – рабочая частота,  $i$  – радиальный индекс волны  $E_{0i}$ ,  $\nu_{0i}$  –  $i$ -й корень  $J_0(x)$ ,  $k_0 = \omega_0/c$ ,  $b(T) = k_0 \cdot b'(T)$ ,  $b'(T)$  – внутренний радиус волновода (штрихом помечены размерные величины, имеющие одинаковое обозначение с безразмерными),  $g = b(T)/\nu_{01}$ ,  $L_0 = k_0 L$ ,  $r_0 = k_0 r_\vartheta$ ,  $r_\vartheta$  – радиус трубчатого электронного потока,  $\dot{A}_{mi} = (b' \dot{E}_{rmi} e)/(m_0 c^2)$ ,  $\dot{C}_{mi} = (\dot{E}_{zmi} e)/(\omega_0 m_0 c)$ ;  $\dot{V}_{mi} = (b' \dot{B}_{\varphi mi} e)/(m_0 c)$ ;  $\dot{E}_{rmi}$ ,  $\dot{E}_{zmi}$ ,  $\dot{B}_{\varphi mi}$  – амплитуды компонент парциальных волн,  $e$ ,  $m_0$  – заряд и масса покоя электрона,  $c$  – скорость света в пустоте,  $\sigma = \frac{e I_0}{\pi \varepsilon_0 m_0 c^3} = 0,73 \cdot 10^{-3} |I_0|$ ,  $I_0$  – ток пучка в А,  $\beta_l = v_l/c$ ,  $\theta_l = \omega t_l$ ,  $v_l$  – скорость  $i$ -й крупной частицы,  $t_i$  – момент прохождения ею сечения  $z$ ,  $\gamma_l = (1 - \beta_l^2)^{-1/2}$ ,  $e_{0i} = 0.5 J_1^2(\nu_{0i})$ .

Заметим, что уравнения возбуждения (5.1) включают как вихревую, так и потенциальную («поле пространственного заряда») составляющие полного поля на частоте  $m\omega_0 W$ . Поясним это более подробно. Запишем первое уравнение Максвелла и применим к обеим его частям операцию  $\text{div}$ :

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\delta} \right).$$

В результате имеем ( $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ )

$$\text{div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\delta} \right) = 0,$$

где  $\vec{D}$  – вектор электрического смещения;  $\boldsymbol{\delta}$  – вектор полной плотности электрического тока. Поскольку  $\text{div } \boldsymbol{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  в соответствии с уравнениями непрерывности, в неподвижной системе отсчета получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D} - \rho) = 0.$$

Таким образом, для чисто переменных процессов  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \right)$  приходим к третьему уравнения Максвелла:  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ . Точно так же для этих процессов четвертое уравнение Максвелла является следствием второго. Таким

образом, для чисто переменных процессов первое и второе уравнения Максвелла определяют полное (т.е. включающее как вихревую, так и потенциальную составляющие) поле, возбуждаемое источником с плотностью тока  $\delta$  при соответствующем задании граничных условий. Этот вывод в полной мере относится к уравнению возбуждения (1), в котором в исходной постановке задачи задана полная плотность электрического тока  $\delta$ .

В некоторых задачах (например в теории клистронов) имеет смысл разделить искомое электрическое поле  $\vec{E}$  на вихревую и потенциальную составляющие:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \text{div} \mathbf{E}_1 = 0, \quad \text{rot} \mathbf{E}_2 = 0.$$

В этом случае задача разделяется на две связанные – динамическую и квазистатическую [гл. 4]:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \delta';$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_1 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\mathbf{E}_2 = -\text{grad} \Phi^e, \quad \nabla^2 \Phi^e = -\rho / \varepsilon_0,$$

$$\delta' = \delta - \varepsilon_0 \text{grad} \left( \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} \right).$$

При таком подходе плотность тока в (5.1)  $\delta$  должна быть замена на  $\delta'$ . Очевидно, что для ЛБВ такое разделение нецелесообразно: придется дважды рассчитывать ряды, представляющие  $\Phi^e$  – в квазистатической и динамической задаче (в уравнении возбуждения). Интересно, что в «традиционной» теории ЛБВ (работы В.А. Солнцева и соавторов) делается очевидная ошибка: квазистатическая часть («поле пространственного заряда») рассчитывается отдельно, но в уравнении возбуждения оставляется  $\delta$  вместо  $\delta'$ , что явно противоречит изложенным выше следствиям уравнений Максвелла.

Граничные условия к системе (5.1) могут быть сформулированы следующим образом:

Для немодулированного на входе области взаимодействия электронного потока

$$W \theta_l(0) = \frac{2\pi}{N} (l - 0,5), \quad \beta_l(0) = \beta_0. \quad (5.4)$$

На границах нерегулярной области взаимодействия, сопряженной с регулярным волноводом ( $\frac{\partial g(0)}{\partial T} = \frac{\partial g(1)}{\partial T} = 0$ ), имеют место следующие соотношения:

для распространяющихся  $E_{0i}$  волн:

$$\begin{aligned} W\dot{A}_{mi}(0) + jk_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= jk_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+; \\ -W\dot{A}_{mi}(1) + jk_{mi}^e \dot{V}_{mi}(1) &= jk_{mi}^e W 2b(1) \dot{e}_{mi}^-. \end{aligned} \quad (5.5)$$

для закритических  $E_{0i}$  волн:

$$\begin{aligned} W\dot{A}_{mi}(0) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= k_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+; \\ -W\dot{A}_{mi}(1) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(1) &= k_{mi}^e W 2b(1) \dot{e}_{mi}^-. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь  $k_{mi}^e = \sqrt{(mW)^2 - (v_{0i}/b)^2}$ ,  $\dot{e}_{mi}^+$ ,  $\dot{e}_{mi}^-$  – относительные амплитуды прямой и встречной распространяющихся и закритических волн на сопряженных с областью взаимодействия регулярных участках.

Профиль нерегулярного гофрированного волновода задавался как

$$b(T) = b_0 + h_v(T) \cdot \sin^2[n_v \pi(T + D_v(T))]. \quad (5.7)$$

Здесь  $T = (z - z_0)/L_v$ ,  $z_0$ ,  $L_v$  – начало и длина нерегулярного участка;  $n_v$  – количество периодов;  $h_v(T)$  – глубина гофра;  $D_v(T)$  – функция, ( $D_v(0) = D_v(1) = D_v'(0) = D_v'(1) = D_v''(0) = D_v''(1) = 0$ ) задающая изменение периода, если  $D_v(T) = 0$  – период постоянный и равен в принятых единицах  $d = k_0 L_v / n_v$ .

Функции  $h_v(T)$  и  $D_v(T)$  аппроксимировались в виде разложений по сдвигам стандартной финитной функции  $\varphi_3(x)$ , представляющей В-сплайн третьей степени [15]:

$$h_v(T) = \sum_{k=1}^K h_k^v \varphi_3[T \cdot (K - 3) - k + 2]; \quad D_v(T) = \sum_{k=1}^K d_k^v \varphi_3[T \cdot (K + 3) - k - 1]; \quad (5.8)$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2; \\ (2 - x)^3 / 6, & 1 \leq x \leq 2; \\ \left[ 1 + 3(1 - x) + 3(1 - x)^2 - 3(1 - x)^3 \right] / 6, & 0 \leq x \leq 1; \\ \varphi_3(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что при такой аппроксимации значения коэффициентов и  $h_k^v$  соответствуют значениям функций  $h_v(T)$  в точках  $T_k = (k-2)/(K-3)$ ,  $2 \leq k \leq K-1$ . В расчетах использовалась аппроксимация с  $K = 5-8$ .

Эффективность взаимодействия определяется следующими соотношениями:

1) через мощность возбужденных потоком волн («волновой» КПД):

$$\eta_{mi}^v(z) = e_{0i} \frac{\text{Im} \left[ \dot{A}_{mi}(z) \dot{V}_{mi}^*(z) - \dot{A}_{mi}(0) \dot{V}_{mi}^*(0) \right]}{(\gamma_0 - 1)\sigma}; \quad \eta^v = \sum_i \sum_m \eta_{mi}^v; \quad (5.9)$$

2) через потерю кинетической энергии электронным потоком («электронный» КПД):

$$\eta^e(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{\gamma_0 - \gamma_l(z)}{\gamma_0 - 1}. \quad (5.10)$$

Фазовую группировку электронов на частоте  $sW$  определяет функция группировки  $G_r$ :

$$G_{rm}(z) = \frac{1}{N} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \cos mW\theta_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N \sin mW\theta_i \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.11)$$

При малом энергообмене  $G_{rm}(T)$  близка к относительной первой гармонике тока в пучке.

### 5.1.2. Особенности расчета закритических волн

Как видно из (5.3), точное решение для полного электромагнитного поля на частоте  $mW$  в рассматриваемом волноводе представляется в общем случае в виде бесконечного по  $m$  ряда. На протяженном регулярном участке без источников в этом разложении остается только конечное число членов, представляющих распространяющиеся собственные волны  $E_{0i}$  с индексами  $1 \leq i \leq p$ , где  $p$  – число распространяющихся волн для заданного радиуса  $b$ . Все закритические волны на достаточно протяженном регулярном участке затухают.

На нерегулярном же участке, а также на регулярном с источниками для того, чтобы получить точное решение в представлении (5.3), необходимо учесть наряду с распространяющимися и некоторое число закритических

волн  $E_{0i}$  с индексами  $p < i \leq p + s = M$ , где  $s$  – количество учитываемых в расчете закритических волн.

Особенность краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (5.1) состоит в том, что применяемый для ее решения прямой численный расчет методом пристрелки с учетом закритических волн неустойчив из-за наличия экспоненциально нарастающих составляющих в представлении общего решения, т.е. задача Коши некорректна. Для решения таких задач ранее предлагались методы направленной ортогонализации [16], различные варианты дифференциальной прогонки [4], которые, однако, имеют ограниченное применение. Для решения этой краевой задачи ниже предлагается универсальный устойчивый алгоритм на основе использования метода блочной матричной прогонки.

### 5.1.3. Метод блочной матричной прогонки

Запишем систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд (5.1) в стандартном виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dT} = G(T)\mathbf{u} + \mathbf{f}(T); \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u} = \{u^1, \dots, u^{2M}\} = \{\dot{A}_1, \dot{V}_1, \dot{A}_2, \dot{V}_2, \dots, \dot{A}_j, \dot{V}_j, \dots, \dot{A}_M, \dot{V}_M\}; \quad (5.13)$$

$$\mathbf{f} = \{\dot{f}^1, \dot{f}^2, \dots, \dot{f}^{2M-1}, \dot{f}^{2M}\}.$$

Элементы комплексной матрицы  $G$  размером  $2M$  получены приведением подобных членов системы (5.1) в соответствии с представлением (5.13) и являются функциями от  $T$ . Связь с уравнениями движения реализуется через вектор  $\mathbf{f}(T)$ , в который входят члены (5.1), содержащие  $\sigma$ .

Зададим граничные условия к (5.12) исходя из (5.5), (5.6) в общем виде:

$$\alpha_j^0 u^{2j-1}(0) + \beta_j^0 u^{2j}(0) = \gamma_j^0; \quad \alpha_j^L u^{2j-1}(1) + \beta_j^L u^{2j}(1) = \gamma_j^L; \quad j = 1 \dots M. \quad (5.14)$$

Для численного решения краевой задачи (5.12), (5.14) выберем равномерную сетку:  $\{T_i = (i-1)h, h = 1/n, i = 1 \dots n+1\}$ ;  $\{\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(T_i)\}$  – таблица значений искомого решения в узлах сетки.

Для расчетов можно использовать трехточечную конечно-разностную неявную схему Адамса третьего порядка точности:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{h} = \frac{5}{12}(G\mathbf{u} + \mathbf{f})_{i+1} + \frac{8}{12}(G\mathbf{u} + \mathbf{f})_i - \frac{1}{12}(G\mathbf{u} + \mathbf{f})_{i-1}. \quad (5.15)$$

Заметим, что эта схема приводит к блочной трехдиагональной матрице с преобладающим диагональным элементом. После приведения подобных членов в (5.15) получим систему линейных алгебраических уравнений (если не считать, что  $\mathbf{f}(T, \mathbf{u})$  зависит от  $\mathbf{u}$ ):

$$\frac{h}{12}G_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} - \left(E + \frac{8h}{12}G_i\right)\mathbf{u}_i + \left(E - \frac{5h}{12}G_{i+1}\right)\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{d}_i, \quad (5.16)$$

где  $\mathbf{d}_i = \frac{h}{12}(5\mathbf{f}_{i+1} + 8\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1})$ ;  $i=2..n$ ;  $E$  – единичная диагональная матрица.

Систему (5.16) следует дополнить одним недостающим конечно-разностным уравнением второго порядка точности:

$$\frac{\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1}{h} = \frac{G_1\mathbf{u}_1 + f_1 + G_2\mathbf{u}_2 + f_2}{2}.$$

Вместо (5.15) можно также использовать более простую конечно-разностную неявную схему второго порядка точности:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{h} = \frac{(G\mathbf{u} + \mathbf{f})_{i+1} + (G\mathbf{u} + \mathbf{f})_i}{2}; \text{ или}$$

$$-\left(E + \frac{h}{2}G_i\right)\mathbf{u}_i + \left(E - \frac{h}{2}G_{i+1}\right)\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{d}_i; \mathbf{d}_i = \frac{h}{2}(\mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{f}_i). \quad (5.17)$$

Эта схема в 1,5 раза эффективнее, чем схема Адамса (5.16) при одинаковой погрешности решения.

Систему (5.16) или (5.17) следует дополнить граничными условиями

$$\alpha_j^0 u_1^{2j-1} + \beta_j^0 u_1^{2j} = \gamma_j^0; \quad \alpha_j^L u_{n1}^{2j-1} + \beta_j^L u_{n1}^{2j} = \gamma_j^L. \quad (5.18)$$

Для решения систем линейных уравнений (5.16)-(5.18) с ленточной матрицей была разработана экономичная модификация метода Гаусса – метод блочной матричной прогонки.

Решение самосогласованной системы уравнений (5.12) получалось в результате следующего итерационного процесса. Вначале при заданных граничных условиях и  $\mathbf{f}^0 = 0$  решается система (5.12). После этого для найденных по формуле (5.3) полей  $E_z$  решаются уравнения движения (5.2) и находится  $\tilde{\mathbf{f}}^1$ , затем итерации повторяются до сходимости. При итерациях использовалась последовательная нижняя релаксация  $\mathbf{f}^{k+1} = \omega_r \tilde{\mathbf{f}} + (1 - \omega_r) \mathbf{f}^k$ ;  $\omega_r = 0,2 - 0,6$ .

#### 5.1.4. Физические процессы в черенковских генераторах типа ЛБВ-0

Наиболее часто в черенковских генераторах используются комбинированные ЛБВ – ЛОВ механизмы взаимодействия, реализуемые вблизи границы полосы прозрачности ( $\pi$ -границы). В этом режиме отрезок гофрированного волновода работает как резонатор, внутри которого устанавливаются колебания значительной амплитуды. Однако длина области взаимодействия, при которой реализуется эффективная генерация из-за присутствия встречной волны, не превосходит 10 – 12 периодов. В экспериментах обычно используют 7 – 8 периодов гофра, и КПД не превосходит 30%. Для повышения эффективности до 50% в [61] использовалась двухсекционная конструкция. Ввиду довольно грубого «ударного» механизма и простоты обнаружения  $\pi$ -границы полосы прозрачности данный режим наиболее просто реализуется в экспериментах.

Более тонкий режим поддержания синхронизма электронов потока и возбуждаемого поля на достаточно длинном участке ( $n_v \geq 20$ ) гофрированного волновода возможен лишь при некотором удалении от  $\pi$ -границы, где влияние встречной волны становится незначительным. В работах [5-14] опубликованы результаты оптимизации одномодовых релятивистских ЛБВ-0 на основе математической модели (5.1) без учета закритических волн. В этих работах исследовались генераторы с малым периодом и глубокой гофрировкой, обеспечивающей достаточное замедление основной волны и значительную отстройку от обратной (набег фазы на период  $\varphi_0 < 2$ ). При этих условиях найдены варианты «длинных» нерегулярных ЛБВ-0 с оптимальными профилями глубины и периода гофра (число периодов 30 – 120), в которых достигается КПД до 80%. Для обеспечения генерации в таких режимах необходимо отражение части мощности от концов [60] (резонансная ЛБВ).

Результаты [5-14] правильно отражают физическую сущность нелинейных процессов взаимодействия в релятивистских ЛБВ с оптимизированным профилем электродинамической системы. Однако параметры найденных оптимальных вариантов непосредственно не могут быть использованы при проектировании ЛБВ-0, они требуют коррекции в связи с необходимостью учета ближайших закритических волн  $E_{0i}$ . Такой учет в данной работе реализован на основе методики, развитой в гл. 3.

Расчет дисперсии на основе системы (5.1) производился с использованием частного решения Флоке, что детально описано в [17]. При расчетах генераторов на выходе задавалось условие полного согласования:  $e_{1i}^- = 0$  в (5.5), (5.6). На входе задавались амплитуды распространяющихся волн  $\dot{e}_{1i}^+ = e_{0i}$ ,  $i \leq p$  и  $\dot{e}_{1i}^+ = 0$  для  $i > p$ . Выходные мощности при  $T = 0$  и  $T = 1$  получались в результате расчета.

Расчеты частично оптимизированных (оптимизировался профиль  $h_v(T)$  при  $D_v(T) = 0$ ) одномодовых ( $p = 1$ ) нерегулярных релятивистских ЛБВ-0, выполненные с учетом достаточного числа закритических мод, показали, что в них реализуются характерные для оптимальных режимов ЛБВ-0 механизмы с максимальным КПД до 65 % [1]:

а) режим одновременного монотонного нарастания функции группировки  $G_r(T)$  и  $\eta(T)$  до выхода последнего на насыщение в конце области взаимодействия;

б) автофазный режим, в котором после достижения достаточно большой группировки электроны сгустка совершают колебания возле узла синхронной гармоники поля;

в) режим двукратной жесткой фазовой фокусировки сгустка и двукратного отбора энергии от него, впервые обнаруженный и описанный в [11, 12].

Сравнение параметров оптимальных вариантов, полученных без учета закритических волн с действительными, указывает на значительную (до 60 %) погрешность, особенно при увеличении глубины гофра. Уточненные расчеты дисперсионных характеристик [2] также указывают на то, что достижение эффективных режимов на основной волне для  $\beta_0 < 0,7$  проблематично, в то время как расчет без учета закритических мод прогнозирует возможность таких режимов вплоть до  $\beta_0 = 0,25$  [8].

В результате расчетов было обнаружено, что, несмотря на полное согласование на выходном конце и значительную удаленность от  $\pi$ -границы, при определенных условиях на входном конце лампы существует встречный поток мощности, сопоставимый и даже больший, чем попутный. Это указывает на возможность режимов генерации за счет внутренней обратной связи.

Анализ электродинамики нерегулярного участка гофра без пучка, на вход которого падает  $E_{01}$ -волна при полном согласовании на выходе, указывает на появление небольшого уровня встречной мощности. Рис. 5.1, а иллюстрирует процесс распространения волны в таком волноводе. Кривая 2

отражает набег фазы  $\varphi(T)$ , рассчитанный как  $\varphi = \arctg \frac{E_{zim}}{E_{zre}}$ . Видно, что на

разных участках волновода наклон кривой  $\varphi(T)$  меняется в соответствии с профилем гофра, что указывает на изменение фазовой скорости волны.

Характер изменения прямого и встречного потоков мощности  $P^+(T)$  и  $P^-(T)$  представлен на рис. 5.1, б. Заметим, что при выбранной методике расчета  $P^+$  и  $P^-$  имеют физический смысл в точках, где  $\partial b(T)/\partial T = 0$ , поэтому в целом качественно отражают локальную картину преобразования мощности. Суммарная проходящая мощность  $P = P^+ + P^- = const$ .

Этим эффектом внутреннего отражения, который имеет место также и при постоянном периоде, можно объяснить встречный поток мощности на

входе прибора при определенных условиях (например, при коэффициенте усиления  $K_u \geq 10$ ), достаточный для самовозбуждения. Кроме того, сгруппированный электронный поток также создает встречное излучение.

С увеличением рабочей частоты черенковских генераторов возникают проблемы. Для их преодоления необходимо использовать электродинамические структуры, в которых реализуется возбуждение многоволнового когерентного излучения [4]. Экспериментальные исследования таких генераторов указывают на сложный характер взаимодействия в них и значительные расхождения с тем, что предсказывают имеющиеся теоретические модели. В работе [14] на основе модели (5.1) без учета закритических мод были найдены оптимальные варианты двух- и трехмодовых релятивистских ЛБВ с нерегулярным профилем гофра и предсказана возможность увеличения КПД за счет кооперации мод. Для выяснения физических особенностей многомодовых периодических структур с глубокой гофрировкой были выполнены детальные расчеты дисперсионных характеристик двух- и трехмодового периодического волновода при  $b_0 = 9,5$  (трехмодовый),  $b_0 = 6$  (двухмодовый),  $d_v = 0,5 - 3$ ,  $1 \leq h_v \leq 1,4$ .

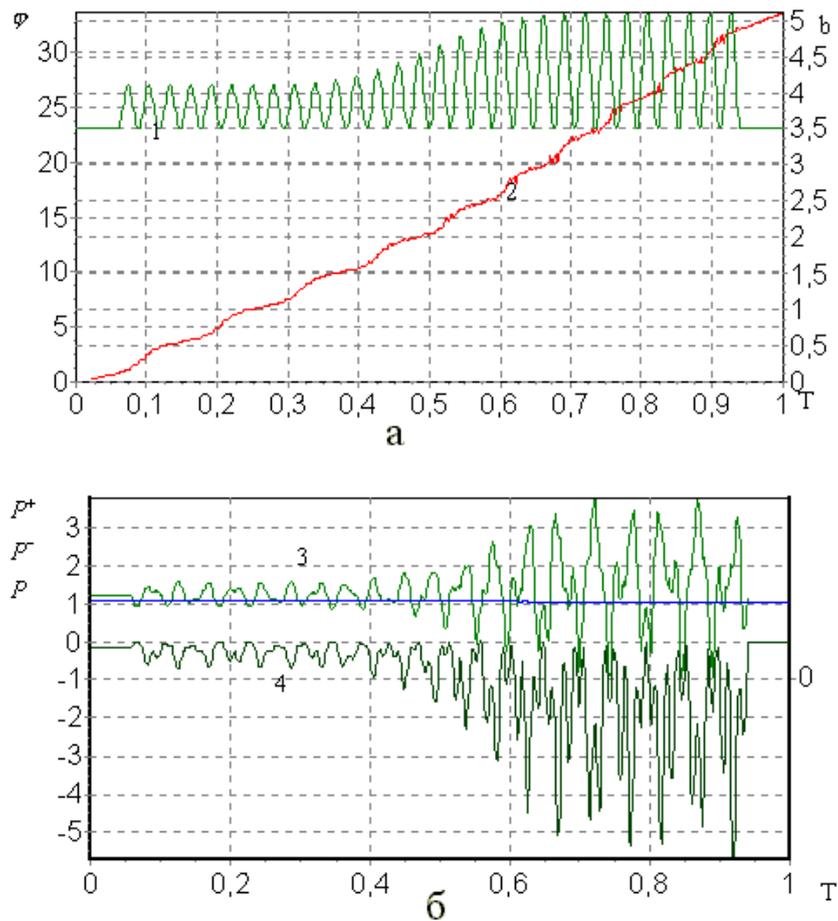


Рис. 5.1. Процесс распространения волны через отрезок нерегулярного гофрированного волновода:

1 –  $b(T)$ , 2 –  $\varphi(T)$ , 3,4 –  $P^+$ ,  $P^-$

Расчет показал, что при условии замедления невозможно выделить отдельно какую-либо из распространяющихся волн, так как амплитуды их сравнимы. Рис. 5.2, а иллюстрирует изменение амплитуд поля Флоке трехмодового волновода на одном периоде. Все волны вплоть до  $E_{07}$  имеют примерно одинаковую амплитуду. Заметное снижение амплитуды начинается у закритических волн с индексом  $i \geq 8$ .

На рис. 5.2, б представлена картина изменения амплитуд при подаче  $E_{01}$ -волны на вход короткого отрезка такого волновода из пяти волн гофра, согласованного на выходном конце. Уже на четвертом периоде амплитуды распространяющихся  $E_{02}$ - и  $E_{03}$ -волн становятся сравнимыми с амплитудой  $E_{01}$ . Во входном отрезке регулярного волновода ( $z/L = 0 \dots 0.2$ ) наблюдаются две бегущие отраженные  $E_{02}$ - и  $E_{03}$ -волны, а амплитуда  $E_{01}$ -волны имеет характерные для суммы прямой и встречной волн биения. В выходном отрезке регулярного волновода ( $z/L = 0.8 \dots 1$ ) наблюдаются три бегущие вправо  $E_{01}$ -,  $E_{02}$ - и  $E_{03}$ -волны. Амплитуды закритических волн  $E_{04} - E_{08}$  затухают в соответствии со своим инкрементом при удалении от нерегулярности входа и выхода гофра.

Рис.5.2, в отражает изменение рассчитанного по решению Флоке набега фазы основной волны на период структуры  $\varphi_0$  с увеличением  $M$ . Видно, что с уменьшением глубины  $h$  погрешность уменьшается и при  $h \leq 1$  для уверенных расчетов достаточно  $M \approx 5$ . На рис. 5.2, г представлены характерные дисперсионные кривые зависимости замедления основной  $\beta_{\varphi 0}$  (верхняя ветвь) и обратной  $\beta_{\varphi -1}$  (нижняя ветвь) гармоник волнового поля от величины периода  $d$  для четырех значений  $h$ .

$\pi$ -граница полосы прозрачности соответствует соединению нижней и верхней кривых. Видно, что замедление основной волны до  $\beta_{\varphi} \approx 0,5$  требует довольно глубокой гофрировки и значительного уменьшения периода  $d_v$ . Так, если при слабой гофрировке  $h_v < 1$   $\pi$ -граница соответствует периоду, близкому к половине длины волны ( $d_v \approx \pi$ ), то при  $h_v = 1,5$  она достигается для периода, соответствующего  $\lambda/3$  ( $d_v = 2$ ). Из рис. 5.2, г также видно, что при управлении процессом взаимодействия с помощью профилирования гофра большее воздействие на изменение фазы волны оказывает изменение глубины гофра по сравнению с изменением периода.

Расчеты показывают, что при выборе  $d_v$  и  $h_v$ , попадающих в область, соответствующую замедлению основной волны, возможна генерация и усиление при соответствующем выборе рассинхронизма ( $0 < \frac{\beta_0 - \beta_{\varphi 0}}{\beta_0} < 0,2$ ) и начальных амплитуд распространяющихся волн ( $\dot{e}_{01}, \dot{e}_{02}, \dot{e}_{03}$ ).

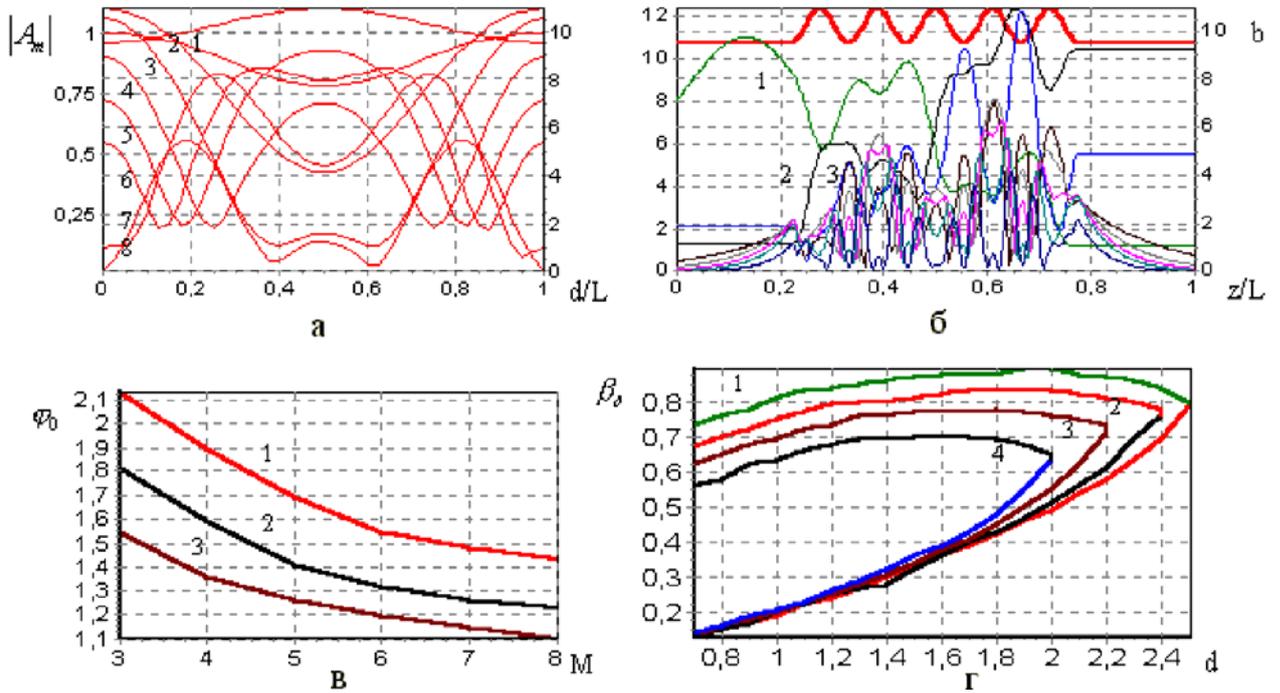


Рис. 5.2. Дисперсионные характеристики трехмодового периодического волновода  $b_0 = 9,5$ :

а – распределение амплитуд в поле Флоке; б – в согласованном отрезке гофра с  $E_{01}$ -волной на входе при  $h_v = 1,4$ ,  $d_v = 1$ ; в – зависимость набега фазы  $\varphi_0$  от числа учитываемых волн  $M$ ; г) зависимость фазовой скорости  $\beta_{\varphi_0}$  и  $\beta_{\varphi_{-1}}$  от  $d_v$  при 1 –  $h_v = 1,2$ ; 2 –  $h_v = 1,3$ ; 3 –  $h_v = 1,4$ ; 4 –  $h_v = 1,5$

Ниже приведены пять оптимизированных вариантов двух- и трехмодовых ЛБВ с  $n_v = 30$ ,  $I_0 = 1000 A$ .

*Вариант 1:* регулярный, двухмодовый.

$$b_0 = 6, r_0 = 5,5, h_v = 1,34, d_v = 0,975, \beta_0 = 0,9, \eta = 0,43, K_u = 10,8 \text{ дБ}, M = 5.$$

*Вариант 2:* нерегулярный, двухмодовый.

$$b_0 = 6, r_0 = 5,5, d = 0,99, \beta_0 = 0,9, \eta = 0,68, K_u = 7 \text{ дБ},$$

$$h_{\text{var}} = (h_{2-7}^v = 1,31; 1,59; 1,36; 1,3; 1,15; 1,32), M = 5.$$

*Вариант 3:* регулярный, трехмодовый.

$$b_0 = 9,5, r_0 = 9, h_v = 1,375, d_v = 1,1, \beta_0 = 0,8, M = 7, \eta = 0,43, K_u = 11,5 \text{ дБ}.$$

*Вариант 4:* нерегулярный, трехмодовый.

$$b_0 = 9,5, r_0 = 9, d_v = 1, \beta_0 = 0,79, \eta = 0,62, K_u = 13,5 \text{ дБ};$$

$$h_{\text{var}} = (h_{2-7}^v = 1,27; 1,33; 1,18; 1,31; 1,38; 1,4).$$

*Вариант 5:* нерегулярный, трехмодовый.

$$b_0 = 9,5, r_0 = 9, h_v = 1,3, d_v = 1, \beta_0 = 0,79, \eta = 0,56, K_u = 12 \text{ дБ},$$

$$d_{\text{var}} = (d_{2-7}^v = 0,003; 0,035; -0,012; -0,053; 0,082; -0,01).$$

Рис. 5.3, 5.4, 5.5 иллюстрируют физические особенности взаимодействия электронного потока с возбуждаемым электромагнитным полем в исследованных черенковских генераторах.

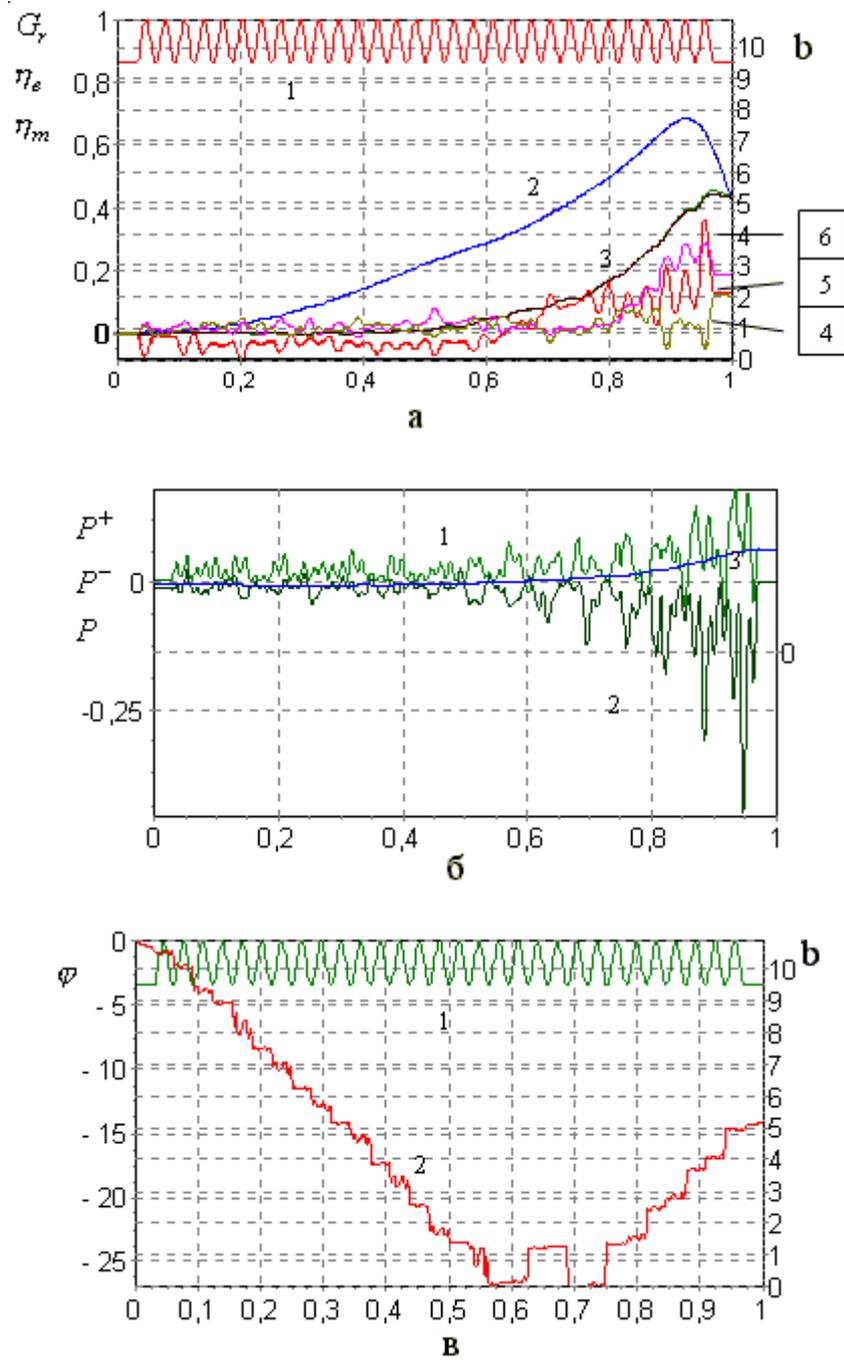


Рис. 5.3. Характеристики варианта 3:  
 а – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $G_r(T)$ , 3 –  $\eta_e$ , 4 –  $\eta_1$ , 5 –  $\eta_2$ , 6 –  $\eta_3$ ;  
 б – кривые 1 –  $P^+$ , 2 –  $P^-$ , 3 –  $P$ ; в – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $\varphi(T)$

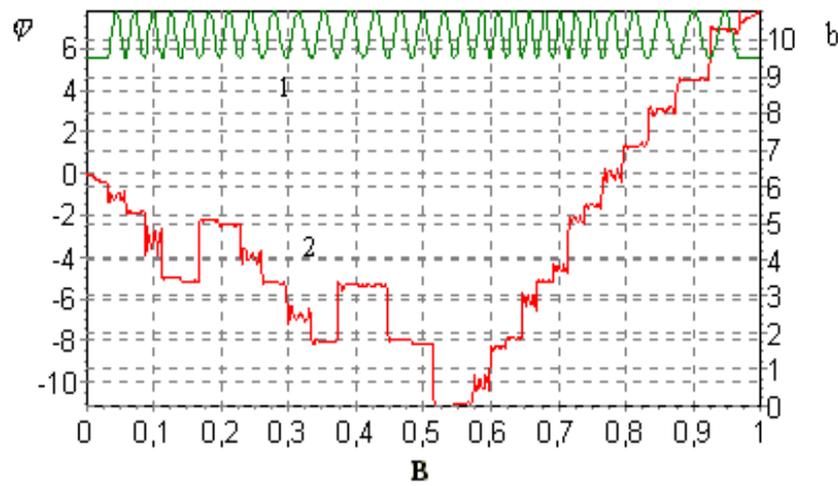
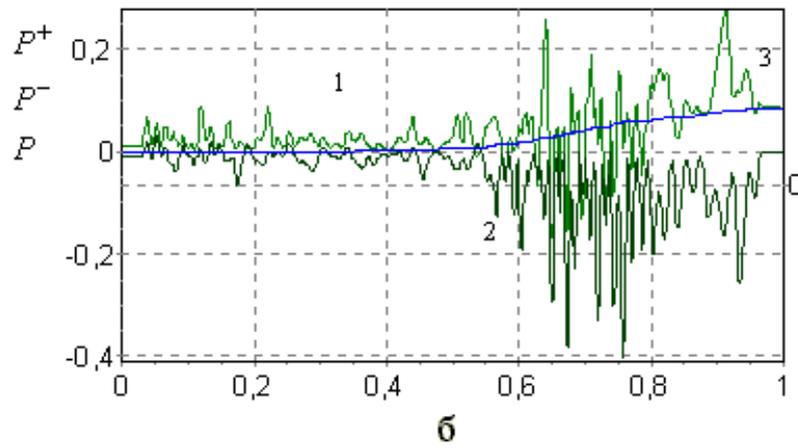
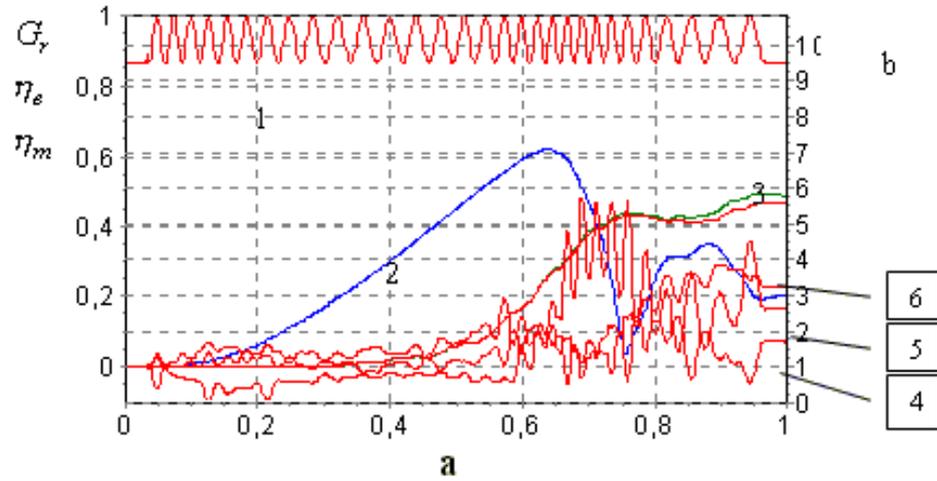


Рис. 5.4. Характеристики варианта 4:  
 а – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $G_r(T)$ , 3 –  $\eta_e$ , 4 –  $\eta_1$ , 5 –  $\eta_2$ , 6 –  $\eta_3$ ;  
 б – кривые 1 –  $P^+$ , 2 –  $P^-$ , 3 –  $P$ ; в – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $\varphi(T)$

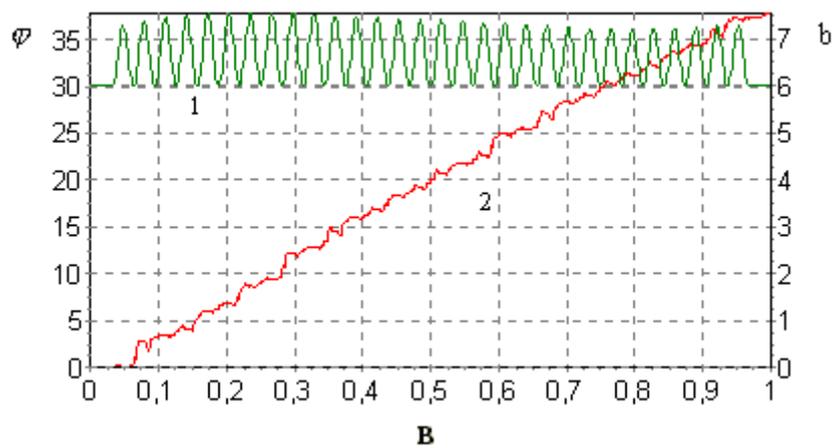
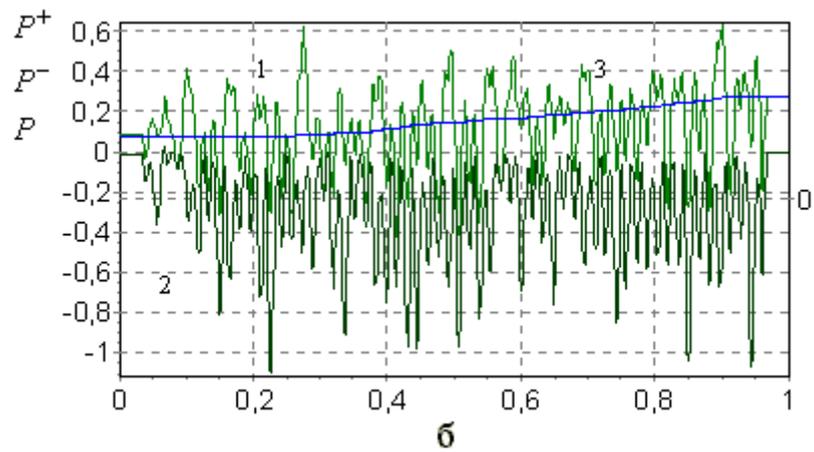
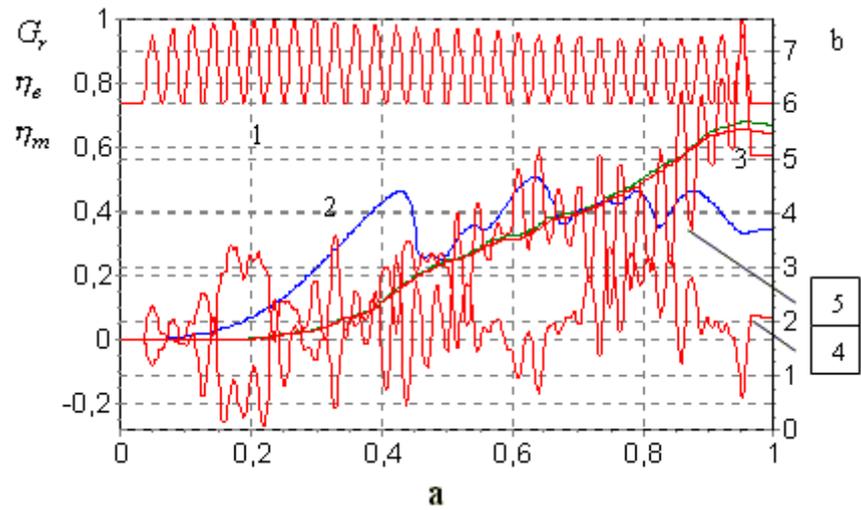


Рис.5.5 Характеристики варианта 5:

а – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $G_r(T)$ , 3 –  $\eta_e$ , 4 –  $\eta_1$ , 5 –  $\eta_2$ ; б – кривые 1 –  $P^+$ ,  
2 –  $P^-$ , 3 –  $P$ ; в – кривые 1 –  $b(T)$ , 2 –  $\varphi(T)$

Зависимости основных параметров вдоль области взаимодействия, приведенные на рис. 5.3 для варианта 3, отражают монотонный режим, характерный для регулярных ЛБВ (см. кривые 2,3). Кривые 4,5,6 соответствуют волновым КПД (5.9) для волн  $E_{01}, E_{02}, E_{03}$  соответственно. Видно, что в данном варианте на выходе преобладают волны  $E_{02}$  и  $E_{03}$ .

Следует, однако, отметить, что в других аналогичных вариантах распределение выходных мощностей может меняться в зависимости от геометрии, амплитуды сигнала и других параметров, т.е. можно ставить задачу о достижении заданного распределения. Характер распределения прямой и обратной мощностей (см рис. 5.3, а) указывает на то, что вдоль гофра реализуется режим, характерный для цепочки связанных резонаторов, причем каждый резонатор включает несколько периодов гофра. Характерно также, что отдаваемая электронами мощность распределена как на выходном конце, так и на входе, причем  $P^-(0) > P^+(0)$ . Это указывает на то, что при создании отражения волн на входе данный вариант реализуется как эффективный генератор с внутренней обратной связью. Изменение набега фазы «горячей» волны  $\varphi(T)$ , представленное на рис. 5.3, в, указывает на то, что в первой половине области взаимодействия волна распространяется навстречу движения электронов. При этом наблюдается монотонное нарастание группировки пучка без отбора энергии от него. Примерно в середине области взаимодействия реализуется резонансный режим (стоячая волна). Заметный отбор энергии начинается в резонансной части и резко возрастает в конце, где фаза волны начинает возрастать, что соответствует преимущественному переносу волной мощности попутно с движением электронов к выходному концу области. Наклон кривой  $\varphi(T)$  на конечном участке соответствует замедлению горячей волны  $\beta_\phi^2 \approx 0,73$ , т.е. практически совпадает с замедлением в холодной системе (см. рис. 5.2, г), на начальном же участке замедление  $\beta_\phi^2 \approx 0,7$ . Следует отметить, что в большинстве полученных путем оптимизации по КПД вариантах регулярных или нерегулярных ЛБВ, как одномодовых так и многомодовых, наблюдается описанный выше двухкаскадный режим взаимодействия. В разных вариантах изменяется только положение центральной резонансной области. Имеются варианты, в которых она вообще отсутствует и наблюдается обычный режим ЛБВ, в других – резонансная часть находится ближе к началу, посередине или ближе к концу. На рис. 5.4 представлено изменение характеристик взаимодействия варианта 5 с оптимизированным профилем периода гофра. КПД этого варианта на 13 % выше, чем в соответствующем ему регулярном варианте 3. В этом варианте область синхронного отбора имеет большую длину, чем в предыдущем, резонансная часть сдвинута ближе к центру и при меньшем уровне группировки достигнут большой КПД за счет более длительного удержания сгустка в тормозящей фазе суперпозиции  $E_{02} + E_{03}$ -волн. Волна же  $E_{01}$  отдает

энергию: фазовая скорость этой волны увеличивается (увеличивается период гофра) и сгусток попадает в ускоряющую фазу этой волны. Заметим, что в отличие от классических «длинных» нерегулярных ЛБВ, описанных в [14], с электродинамической длиной  $\theta_0 > 10$ , в рассматриваемых здесь вариантах  $\theta_0 \approx 5 - 6$ , что соответствует «короткой» ЛБВ. Оптимальные режимы в «коротких» нерегулярных ЛБВ до сих пор мало изучены. На рис. 5.5 приведены характеристики варианта 2 двухмодовой ЛБВ с оптимизированным профилем глубины гофра, в котором рассчитанный КПД достигает 68 %. В этом варианте также для удержания сгустка используется повышение фазовой скорости (уменьшение глубины гофра) после завершения формирования сгустка. Затем после перемещения сгустка в начало потенциальной ямы снова начинается уменьшение фазовой скорости, что сдвигает сгусток в максимум тормозящей фазы. Набег фазы указывает, что резонансный участок в этом варианте находится в самом начале, а на входном конце реализуется полное отражение. На выходном конце преимущественно возбуждается волна  $E_{02}$ , волна же  $E_{01}$  ослабляется за счет перемещения сгустка в ее тормозящую фазу.

## **5.2. Заграждающий катодный фильтр многоволнового черенковского генератора**

Фильтры, выполненные в виде резонансных канавок определенной конфигурации для заграждения  $E_{0m}$ -волн в волноводе кругового сечения, находят применение в конструкциях мощных черенковских СВЧ-генераторов.

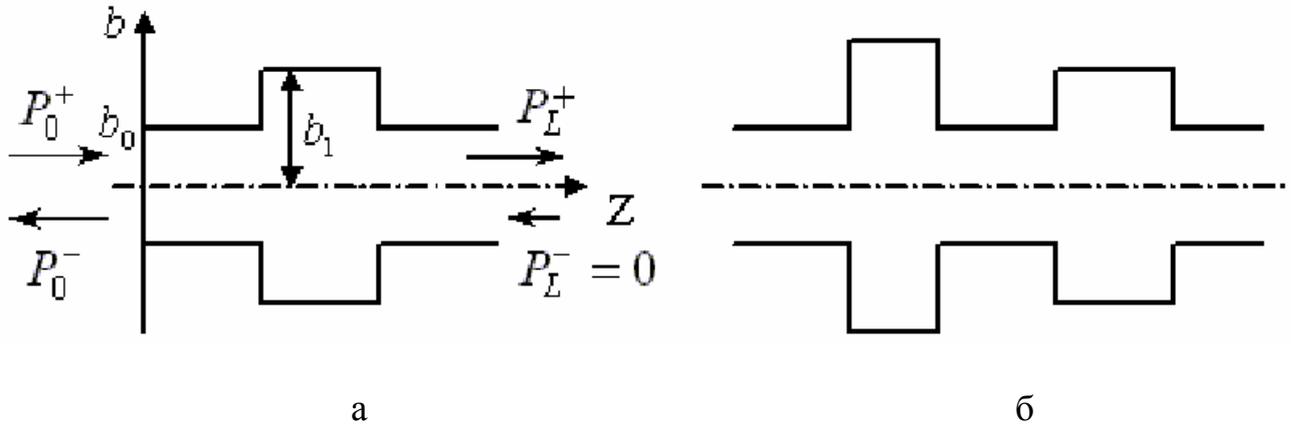
В работе [1] на основе общей теории [18] изложена строгая электродинамическая теория возбуждения азимутально-симметричных  $E_{0m}$ -волн нерегулярного волновода на основе использования метода преобразования координат. Для решения краевой задачи предложен также метод блочной матричной прогонки на основе конечно-разностной схемы Адамса (5.16).

В данной работе на основе уравнений [1] предложена модель для расчета фильтра в виде резонансных канавок цилиндрического волновода, заграждающего  $E_{0m}$ -волны. Разработана модификация метода блочной матричной прогонки на основе конечно-разностной схемы второго порядка (5.17), повышающая быстродействие расчетов в полтора раза. Рассчитаны оптимальные геометрические параметры таких канавок и исследованы полосовые характеристики фильтров на их основе.

### *Геометрия фильтра*

Геометрия фильтра представлена на рис. 5.6. Все размеры приведены в обозначениях [1]. На вход фильтра падает  $E_{0m}$ -волна мощности  $P_0^+$ . На

выходе задано условие полного согласования  $P_L^- = 0$ . Рассчитывается коэффициент пропускания  $\Gamma = P_L^+ / P_0^+$ .



**Рис. 5.6. Геометрия фильтров**

Сопряжение регулярных участков волновода с разными радиусами  $b_1, b_2$  задавалось как  $b = b_1 + (b_2 - b_1) \cdot P_5(T)$ ;  $T = (z - z_0) / L_c$ ; где  $z_0, L_c$  – начало и длина участка сопряжения. Полином пятой степени

$$P_5(T) = T^3(10 - 15T + 6T^2); \quad \frac{\partial P_5}{\partial T} = 30T^2(1 - T)^2; \quad \frac{\partial^2 P_5}{\partial T^2} = 60T(1 - 3T + 2T^2) \quad (5.19)$$

обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения.

С использованием таких сопряжений на профиле волновода моделировались резонансные канавки и выступы определенной конфигурации. Конфигурация при этом определяется параметрами  $h_k = |b_2 - b_1|$ ,  $\Delta_k = (L_k - 2L_c) / L_k$ , где  $L_k$  – ширина канавки,  $h_k$  – высота канавки,  $\Delta_k$  – параметр, характеризующий крутизну ее склонов,  $L_{k,k+1}$  – расстояние между канавками. Параметры канавок фильтра подбираются из условия минимума коэффициента пропускания.

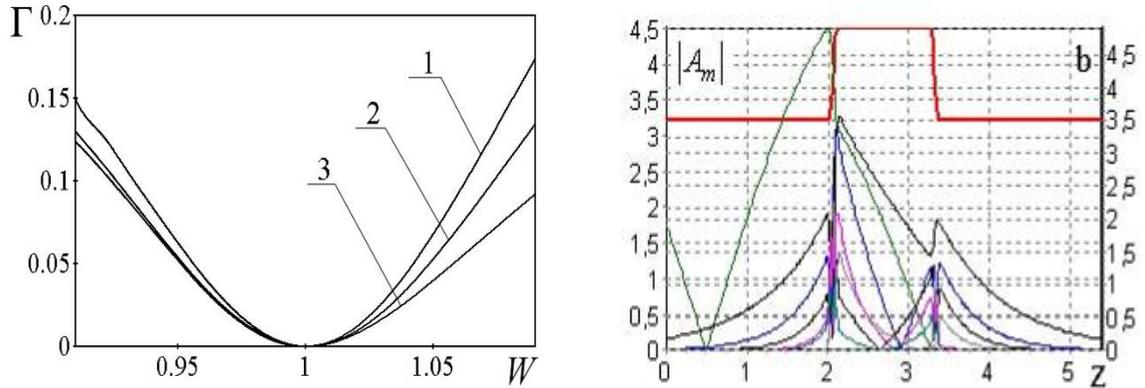
### *Результаты расчетов*

Как показали расчёты, для загораживания одной открытой волны на опорной частоте ( $\Gamma|_{W=1} = 0$ ) достаточно одной резонансной канавки (рис. 5.6, а). Начиная с  $b_0 > v_{02} \approx 5,6$  открывается вторая волна, и для полного загораживания двух волн требуется как минимум две канавки (рис. 5.6, б).

Установлено, что полоса загораживания фильтра зависит от крутизны среза канавки (в данной модели крутизну среза определяет параметр  $\Delta_1$ ). Как видно из рис. 5.7, а, более широкая полоса загораживания получается при

использовании канавки с большей крутизной среза. Пример распределения амплитуд волн в таком фильтре представлен на рис. 5.7, б.

При фиксированной высоте (ширине) имеется соответствующая последовательность значений ширины (высоты), при которых обеспечивается заграждение.



а б  
 Рис. 5.7. Полосы заграждения фильтров 1–3 (а)  
 и распределение амплитуд волн в фильтре 3 (б)  
 Параметры канавок:  $\Phi 1 - (L = 1,26, h = 1,54, \Delta_1 = 0,5)$ ;  
 $\Phi 2 - (L = 1,35, h = 1,47, \Delta_1 = 0,65)$ ;  $\Phi 3 - (L = 1,40,$   
 $h = 1,41, \Delta_1 = 0,8)$

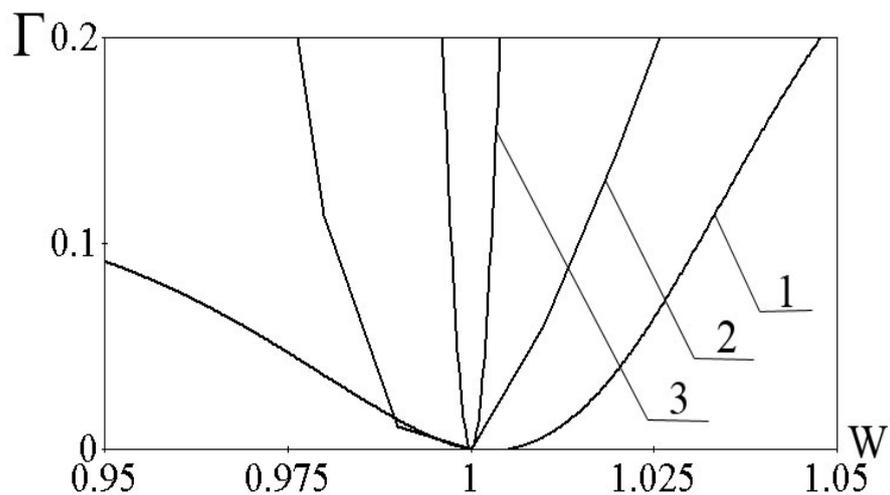


Рис. 5.8. Полосы заграждения фильтров 1–3  
 Параметры канавок:  $\Phi 1 - (L = 4,1, h = 2,7, \Delta_1 = 0,8)$ ;  
 $\Phi 2 - (L = 7,6, h = 2,7, \Delta_1 = 0,8)$ ;  $\Phi 3 - (L = 11,6, h = 2,7, \Delta_1 = 0,8)$

Была исследована зависимость полосы заграждения от соотношения ширины и высоты канавки. Установлено, что при одной и той же высоте канавки полоса заграждения расширяется при уменьшении её длины, что показано на рис. 5.8. При одной и той же длине канавки полоса заграждения расширяется при уменьшении высоты фильтра.

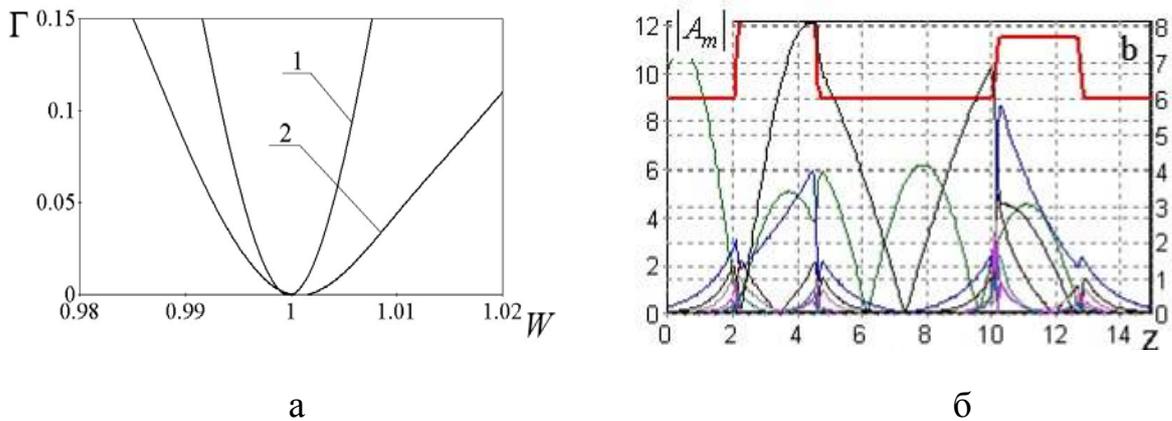


Рис. 5.9. Полосы заграждения фильтров 1–2 (а) и распределение амплитуд волн в фильтре 2 (б)

Параметры канавок:

$\Phi 1 - (L_1 = 3,94, h_1 = 3,70, L_2 = 3,94, h_2 = 3,70, L_{1,2} = 3,94, \Delta_{1,2} = 0,8)$ ;

$\Phi 2 - (L_1 = 2,76, h_1 = 2,16, L_2 = 2,93, h_2 = 1,74, L_{1,2} = 5,23, \Delta_{1,2} = 0,8)$ .

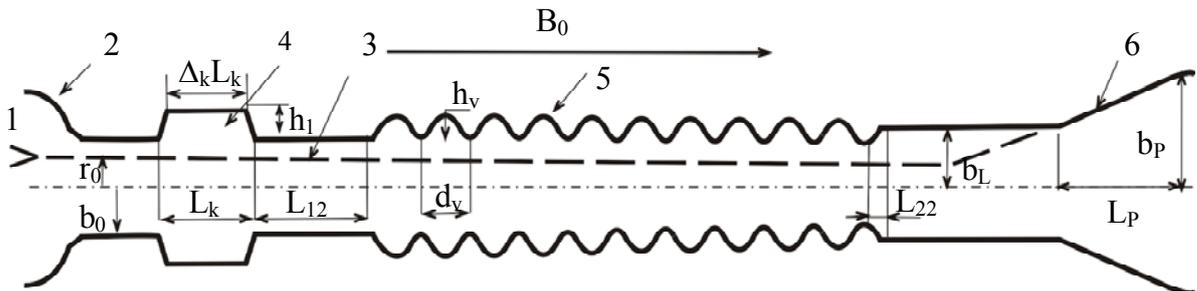
Как показало сравнение полосы заграждения фильтра с двумя одинаковыми и разными канавками, полоса заграждения во втором случае (рис. 5.9, а) оказывается шире. Типичное амплитудное распределение волн в таком фильтре приведено на рис. 5.9, б.

### 5.3. Сверхмощные ЛБВ и ЛОВ на нерегулярных волноводах с катодным фильтром-модулятором [19]

Электродинамические системы современных мощных и сверхмощных электронных приборов СВЧ (гиротронов, релятивистских ламп бегущей и обратной волны – ЛБВ и ЛОВ), включая вводы и выходы энергии, представляют собой отрезки нерегулярных волноводов. Причем режим этих волноводов оказывается чаще всего многоволновым. Улучшение характеристик указанных сверхмощных приборов СВЧ связано прежде всего с оптимизацией профиля их электродинамических систем. Это, в свою очередь, требует развития адекватной теории и методов расчета произвольно-нерегулярных волноводов.

На рис. 5.10 изображен один из вариантов схемы черенковского генератора. На вход области взаимодействия в виде отрезка полого цилиндрического гофрированного волновода 5 подается электронный поток

3, сформированный электронной пушкой 1,2. В области взаимодействия 5 реализуются условия синхронизма электронного потока с одной из пространственных гармоник возбуждаемого электромагнитного поля. Вывод СВЧ-мощности производится через выходной рупор 6. Отработавший электронный поток осаждается на стенку волновода сразу за областью взаимодействия. Резонансная канавка 4 играет роль как заграждающего катод фильтра для  $E_{0i}$  – волны, так и создает условия для начальной модуляции электронного пучка, образуя совместно с областью 5 и участком дрейфа двухкаскадный генератор с обратной связью по отраженной волне.



1,2 – катод и анод, формирующие трубчатый электронный поток 3,  
4 – модулирующая канавка, 5 – периодическая замедляющая  
гребенка, 6 – выходной рупор.

Рис. 5.10 - Схема черенковского генератора

В черенковских генераторах, реализуется довольно сложный комбинированный ЛБВ-ЛОВ-О и гирорезонансный механизм, при котором несколько гармоник поля как синхронных, так и несинхронных участвуют во взаимодействии направляемого магнитоэстатическим полем  $B_0$  релятивистского электронного потока с возбуждаемым ВЧ-электромагнитным полем. При этом обратная связь осуществляется как на обратной (минус первой) гармонике, так и за счет отражения части СВЧ-мощности от нерегулярных участков волновода и обратного излучения электронов пучка. Ввиду этого модель возбуждения должна учитывать полное возбуждаемое поле.

Наиболее эффективной процедурой при расчете нерегулярных волноводов как с вычислительной стороны, так и в отношении физической интерпретации представляется метод, основанный на отображении произвольно-нерегулярной внутренней поверхности волновода на регулярный цилиндр, коаксиал и т.д. с круговым или прямоугольным сечением (гл. 4). В преобразованной (косоугольной) системе координат решение представляется в виде связанных нормальных волн с использованием проекционной процедуры. При этом амплитуды связанных волн определяются системой ОДУ с переменными коэффициентами, вид которых определяется профилем неоднородного волновода. Граничные условия к этой системе

ставятся в начальном и конечном сечении отрезка нерегулярного волновода (двухточечная задача). Решение этой задачи традиционными методами не встречает затруднений, если рассматриваются только распространяющиеся волны. Как показано ниже, для точного расчета волновода необходим учет наряду с распространяющимися закритических волн, существенно меняющих характеристики волновода. Однако для закритических волн численное решение граничной (двухточечной) задачи с использованием традиционных методов (пошаговых методов типа Рунге–Кутты или Хемминга) невозможно из-за быстрой расходимости (из-за малых ошибок появляются резко возрастающие решения). Для решения такой задачи использован устойчивый метод блочной матричной прогонки (п.5.1).

Здесь также приведено сравнение результатов, полученных на основе развиваемого метода, с результатами расчета тех же нерегулярностей в волноводе методом конечных элементов.

Обращено также внимание на отсутствие условия периодичности второго рода («условия Флоке») в согласованных отрезках периодических нерегулярных волноводов, что предопределяет несостоятельность ряда работ в области теории ЛБВ и ЛОВ, основанных на указанном условии и вытекающем из него представлении о пространственных гармониках поля.

### 5.3.1. Двумерные самосогласованные уравнения нелинейной модели релятивистских ЛОВ и ЛБВ-О с замедляющей системой в виде гофрированного волновода

Теория релятивистских ЛБВ и ЛОВ с электродинамической системой в виде нерегулярного гофрированного волновода на основе метода преобразования координат развита в п. 5.1. Для ЛБВ и ЛОВ с рабочей волной  $E_{0i}$  полого нерегулярного волновода в двумерном приближении она приводит к следующей системе самосогласованных нелинейных уравнений.

Уравнения для расчетных амплитуд возбуждаемых волн:

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} = (m \cdot W \cdot \dot{V}_{mi} + v_{0i} \cdot \dot{C}_{mi}); \quad (5.20)$$

$$\dot{C}_{mi} = -\frac{v_{0i} \dot{V}_{si}}{m \cdot W \cdot b^2} + \frac{\partial b}{b \partial z} \times \left( -\frac{\dot{A}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot v_{0i}}{v_{0k}^2 - v_{0i}^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right) -$$

$$-\frac{j\sigma}{m \cdot W \cdot e_{0i} \cdot b^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_0 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) e^{-jmW\theta_l};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{V}_{mi}}{dz} = & -m \cdot W \left\{ \dot{A}_{mi} + \left( \frac{\partial b}{\partial z} \right)^2 \cdot \left[ \dot{A}_{mi} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{v_{0i}^2} \right) + \sum_{k \neq i} \frac{4 \cdot (v_{0i}^2 + v_{0k}^2)}{(v_{0i}^2 - v_{0k}^2)^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right] - \right. \\ & \left. - b \frac{\partial b}{\partial z} \cdot \left( -\frac{\dot{C}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot v_{0k}}{v_{0i}^2 - v_{0k}^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{C}_{mk} \right) \right\} + \\ & + \frac{\sigma}{e_{0i} b} \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_1 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \left( \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}} - \frac{r_l}{b} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \right) j e^{-jmW\theta_l}. \end{aligned}$$

Уравнения движения крупных частиц:

$$\begin{cases} \frac{d P_{rl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left( \frac{\gamma_l \beta_{\phi l}^2}{r_l} - E_r - \beta_{\phi l} F_z + \beta_{zl} B_\phi \right); \\ \frac{d P_{\phi l}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left( \frac{\gamma_l \beta_{rl} \beta_{\phi l}}{r_l} - \beta_{zl} F_r + \beta_{rl} F_z \right); \\ \frac{d P_{zl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} (-E_z - \beta_{rl} B_\phi + \beta_{\phi l} F_r); \\ \frac{d r_l}{dz} = \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}}; \quad \frac{d \theta_l}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}}; \\ \mathbf{P}_l = \gamma_l \mathbf{\beta}_l; \quad \gamma_l = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{\beta}_l^2}} = \sqrt{1 + P_{rl}^2 + P_{\phi l}^2 + P_{zl}^2} \end{cases} \quad (5.21)$$

Выражение физических ВЧ-полей через расчетные амплитуды с учетом полей пространственного заряда:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{1}{b} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \operatorname{Re} \left( \dot{A}_{mi} e^{jmW\theta_l} \right) - \frac{\sigma}{2r_l} \left( \frac{1}{\beta_{z0}} - \beta_{z0} \right); \\ E_z = \operatorname{Re} \left[ \sum_m \sum_{i=1}^M J_0 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \dot{C}_{mi} \cdot e^{mjsW\theta_l} + \frac{r_l}{b^2} \frac{\partial b}{\partial z} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \dot{A}_{mi} \cdot e^{jmW\theta_l} \right]; \\ B_\phi = \frac{1}{b} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \operatorname{Re} \left( -j \dot{V}_{mi} e^{jmW\theta_l} \right). \end{cases}$$

Магнитостатическое фокусирующее поле:

$$\begin{cases} F_r = -\frac{1}{2}r_l \frac{\partial F_0(z)}{\partial z} + \frac{1}{16}r_l^3 \frac{\partial^3 F_0(z)}{\partial z^3}; \\ F_z = F_0(z) - \frac{1}{4}r_l^2 \frac{\partial^2 F_0(z)}{\partial z^2}; \quad F_0 = \frac{B_0(z)e}{m_0\omega_0}; \quad B_0(z) - \text{поле вдоль оси.} \end{cases}$$

Здесь приняты ранее введенные обозначения в уравнениях (5.1) – (5.3),  $r_i = k_0 r'_i$ ,  $z = k_0 z'$ ,  $r_0 = k_0 r'_0$ ,  $r'_0$  – средний радиус трубчатого электронного потока на входе в область взаимодействия.

Заметим, что уравнения возбуждения (5.20) включают как вихревую, так и потенциальную («поле пространственного заряда») составляющие полного поля на частоте  $m\omega_0 W$ .

Граничные условия к системе (5.20), (5.21) могут быть сформулированы следующим образом.

На границах сопряжения нерегулярной области взаимодействия с регулярным волноводом выполняется условие  $\frac{db(0)}{dz} = \frac{db(L)}{dz} = 0$  и имеют место следующие соотношения.

Для распространяющихся  $E_{0i}$ -волн:

$$\begin{aligned} W\dot{A}_{mi}(0) + jk_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= jk_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+; \\ -W\dot{A}_{mi}(L) + jk_{mi}^e \dot{V}_{mi}(L) &= jk_{mi}^e W 2b(L) \dot{e}_{mi}^-; \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для закритических  $E_{0m}$ -волн:

$$\begin{aligned} W\dot{A}_{mi}(0) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= k_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+; \\ -W\dot{A}_{mi}(L) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(L) &= k_{mi}^e W 2b(L) \dot{e}_{mi}^-. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Для немодулированного на входе области взаимодействия электронного потока:

$$W\theta_l(0) = \frac{2\pi}{N}(l - 0.5); \quad l = 1 \dots N; \quad \beta_l(0) = \beta_0; \quad r_l(0) = r_0. \quad (5.24)$$

Таким образом, для системы уравнений для амплитуд (5.20) поставлена краевая задача, а для уравнений движения крупных частиц (5.21) сформулирована задача Коши. Совместное решение получается в результате итерационной процедуры.

Эффективность взаимодействия определяется соотношениями (5.9), (5.10).

### Аппроксимация управления

Задача (5.20) – (5.24) с указанной целевой функцией  $\max F_c(\vec{g}(z))$  (обычно  $F_c = \eta^e$ ) представляет собой задачу оптимального управления, в которой в качестве искомого управления  $\vec{g}(z)$  выступают нормированный профиль волновода  $b(z)$  и профиль фокусирующего магнитного поля  $F(z)$ . При аппроксимации управлений использовались сплайны третьей и пятой степени.

Профиль нерегулярного гофрированного участка волновода задавался в виде (5.7), (5.8).

Сопряжение регулярных участков волновода с разными радиусами  $b_1, b_2$  задавалось полиномом пятой степени (5.19), который обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения.

С использованием таких сопряжений на профиле волновода моделировались резонансные канавки и выступы определенной конфигурации, моделировались замедляющие квазипериодические меандровидные структуры, преобразователи мод и рупорные выводы.

### Постановка задачи для расчета методом сеток

В принятых обозначениях безразмерные компоненты  $E_r, E_z, B_\varphi$  симметричных  $E$ -волновых полей цилиндрического продольно-нерегулярного волновода на основной частоте  $s = 1$  получаются из решения следующей краевой задачи:

$$\dot{B}_\varphi = \frac{u(r, z)}{r}; \quad \dot{E}_r = \frac{j}{W} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \dot{E}_z = -\frac{j}{W} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad u(z, r) = u_{re} + ju_{im} \quad .$$

В области  $0 \leq r \leq b(z); \quad 0 \leq z \leq L$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{W^2}{r} u = 0. \quad (5.25)$$

Граничные условия:

При  $r = 0 : u = 0$ .

На проводящей границе :  $r = b(z), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ , где  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности.

$$\text{При } z = 0: \quad -\frac{\partial u}{\partial z} + jk_i^e u = e^+ r J_1(v_{0i} r) \quad (\text{падает } E_{0i}\text{-волна})$$

$$\text{При } z = L: \quad \frac{\partial u}{\partial z} + jk_i^e u = 0 \quad (\text{условие полного согласования для } E_{0i}\text{-}$$

волны).

Мощность через поперечное сечение:

$$P = \text{real} \int_0^{b(z)} E_r B_\phi^* r dr = \frac{1}{W} \int_0^{b(z)} \left( u_{im} \frac{\partial u_{re}}{\partial z} - u_{re} \frac{\partial u_{im}}{\partial z} \right) \frac{\partial r}{r}. \quad (5.26)$$

### Тестовые расчеты

Для проверки точности предлагаемого метода решалась задача об отражении  $E_{01}$ -волны регулярного цилиндрического волновода радиусом  $b_0$  от неоднородности в виде  $k$  синусоидальных канавок глубиной  $h$  и шириной  $d$ :

$$b(z) = \begin{cases} b_0; & z < z_1, \\ b_0 + h \sin^2(\pi(z - L_1)/d); & z_1 \leq z \leq z_1 + kd, \\ b_0; & z_1 + kd < z < L. \end{cases}$$

Значения  $z_1, L$  выбирались таким образом, чтобы возбуждаемые на неоднородности закритические волны затухали и в сечениях  $z=0, z=L$  наблюдалась только  $E_{01}$ -волна регулярного волновода.

На рис. 5.11 приведены кривые зависимости от глубины  $h$  проходящей мощности (5.38), отнесенной к проходящей мощности регулярного волновода. Кривые (5.19) получены с учетом 8-и базисных функций. Вторая кривая на рисунках получена из решения краевой задачи методом конечных треугольных элементов с использованием пакета MATLAB. Выбраны  $z_1 = 1.5b_0; L = 2z_1 + kd$ . Число элементов разбиения области равно 2750. При числе элементов 4000 кривые на всех рисунках совпадают, т.е. результаты по методу конечных элементов сходятся к результатам, полученным по уравнениям (5.19).

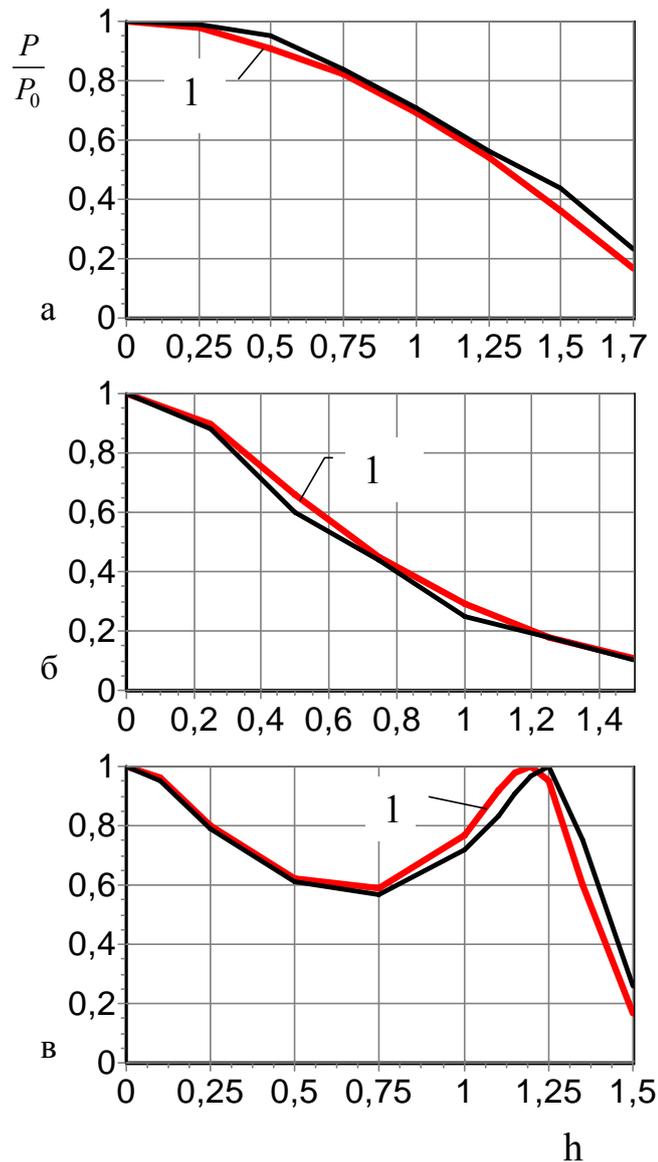


Рис. 5.11. Зависимость проходящей мощности от глубины канавок для  $d = 2$ ; а –  $b_0 = 3$ ;  $k = 1$ ; б –  $b_0 = 2,5$ ;  $k = 1$ ; в –  $b_0 = 2,5$ ;  $k = 2$

***Невыполнение условия периодичности второго рода в согласованных отрезках периодических волноводов***

Ранее в работах [1, 19-21] уже указывалось на невыполнение этого условия как в общем случае ( $EH_{nm}$ -,  $HE_{nm}$ -волны [19-21]), так и в рассматриваемом случае  $E_{0m}$ -волн [1]. Для подтверждения этих результатов приведем расчеты согласованных отрезков периодических гофрированных волноводов на  $E_{0m}$ -моду, полученных из решения задачи (5.37) как методом сеток, так и методом Галеркина.

На рис. 5.12, а, б приведена структура линий уровня функции  $real[r\dot{B}_\varphi(r, z)]$ , полученная из расчета методом сеток для двух конфигураций волновода (эти линии близки к силовым линиям  $\vec{E}$ ).

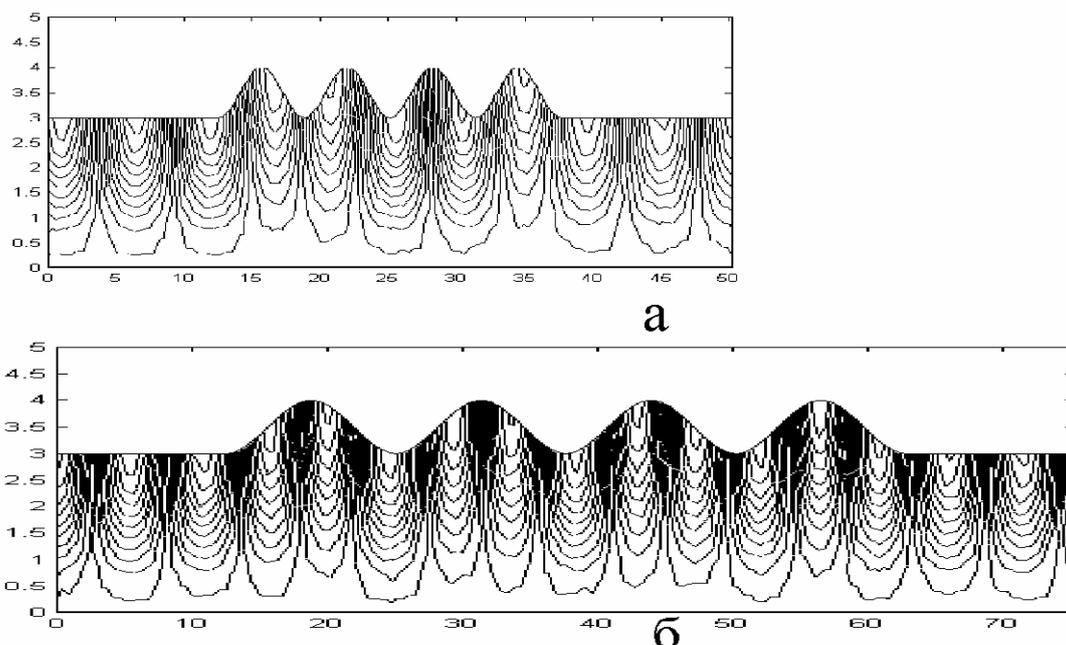


Рис. 5.12. Линии уровня  $\text{real}[u(r,z)]$ , полученные по методу сеток;  
 а –  $b_0 = 3, h = 1, d = 2\pi$ ; б –  $b_0 = 3, h = 1, d = 4\pi$

Рис. 5.13 иллюстрирует изменение модуля продольной компоненты  $|\dot{E}_z(r_0, z)|$  вдоль отрезка гофрированного волновода, рассчитанной по методу Галеркина. Заметим, что расчет такого волновода по методу сеток с достаточной точностью затруднителен из-за недостаточной мощности современных персональных компьютеров.

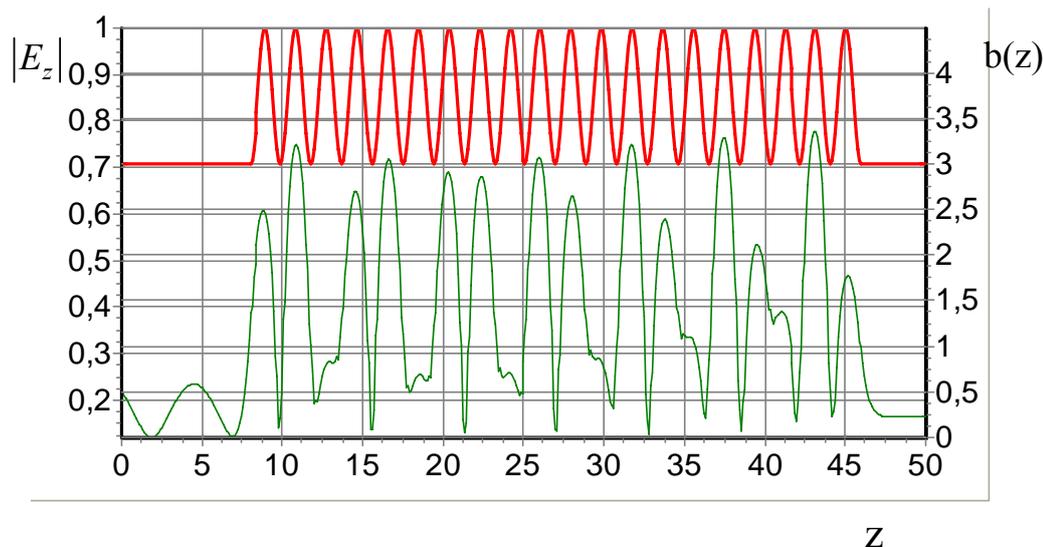


Рис.5.13. Изменение значения модуля компоненты  $E_z$  волнового поля вдоль отрезка гофрированного волновода  $b_0 = 3, d = 1,9$  на уровне  $r_0 = 2,5$

Как следует из рис. 5.12, 5.13, периодичность распределения как  $r\dot{B}_\varphi$ , так и  $\dot{E}_z$  в гофрированной секции в обоих случаях отсутствует. Этот вывод, как отмечалось ранее в [19-21], существен для формулировки адекватной самосогласованной теории ЛБВ и ЛОВ. В связи с этим выводом теории работ, основанные на представлении о «синхронных пространственных гармониках поля», в замедляющей системе ЛОВ или ЛБВ являются несостоятельными.

### 5.3.2. Расчет и оптимизация релятивистских ЛБВ-, ЛОВ-генераторов на гофрированном волноводе

Используя самосогласованную систему (5.19), (5.20), (5.21) и граничные условия к ней (5.22), (5.23), (5.24), на основе метода блочной матричной прогонки были получены следующие варианты генераторов.

*1. Вариант 4-миллиметрового одноволнового генератора.* Рабочая частота  $f = 73,17$  ГГц, выбранная опорная частота  $\omega_0$  соответствует  $\lambda_0 = 4,084$  мм. Напряжение пучка  $V_0 = 205$  кВ, ток  $I_0 = 900$  А, величина фокусирующего магнитного поля  $B_0 = 7,5$  Тл.

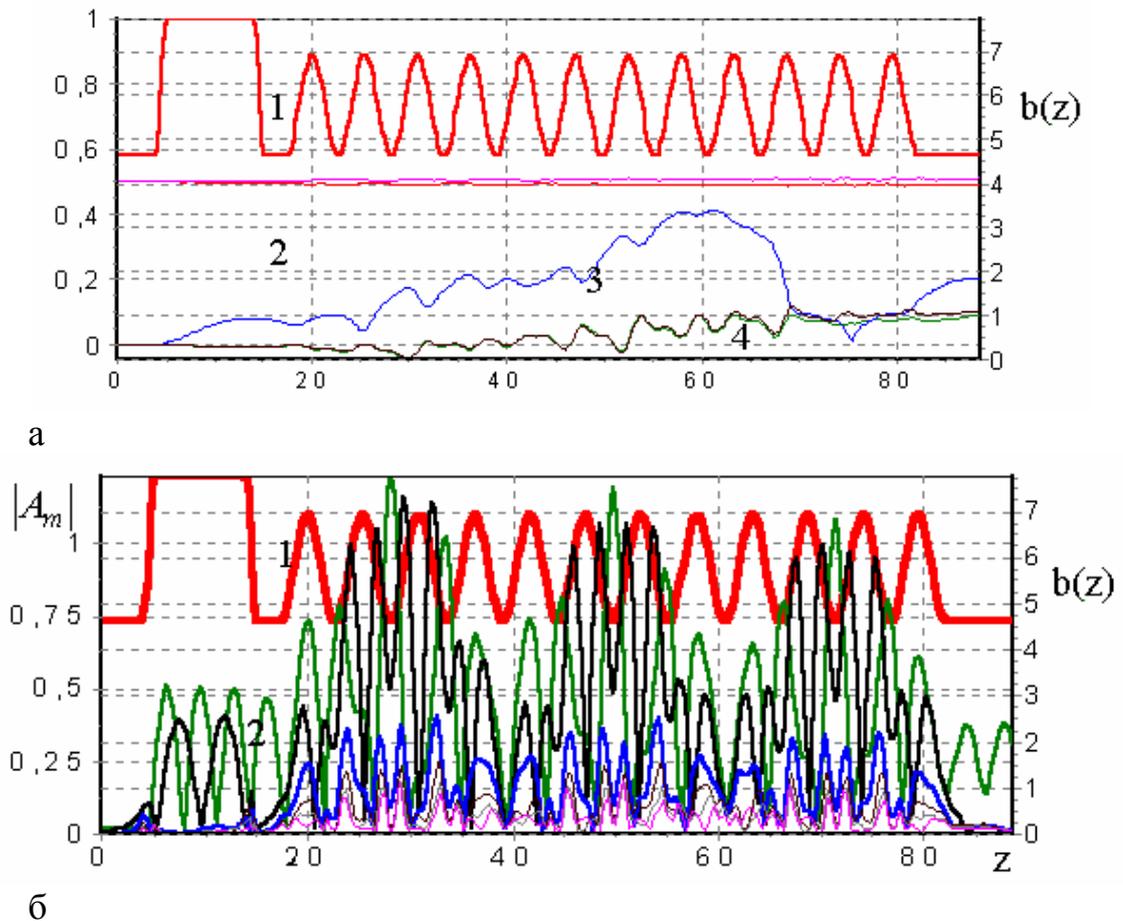


Рис. 5.14. Характеристики варианта 4-миллиметрового генератора:  
а – кривые 1 –  $b(z)$ , 2 –  $r_{max}$ ,  $r_{min}$ , 3 –  $G_{rl}$ , 4 –  $\eta^e$ ,  $\eta^v$ ; б) 1 –  $b(z)$ , 2 –  $A_m$

Регулярный гофрированный участок имеет  $n_v = 12$  периодов,  $d_v = 5,385$ ,  $h_v = 2,308$ ,  $b_0 = 4,615$  (3,5 мм, 1,5 мм, 3 мм). Ширина, высота модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки  $L_1 = 11,17$ ,  $h_1 = 3,14$ ,  $L_{1v} = 2,2$  (7,26 мм, 2,04 мм, 1,43 мм),  $\Delta_p = 0,8$ . Радиус пучка  $r_0 = 4,04$  (2,62 мм). Достигнутый КПД составил 10 %. Анализ показал, что реализован синхронизм на минус второй гармонике вблизи границы прозрачности  $2\pi$ -вида. Характеристики этого варианта представлены на рис. 5.14.

2. *Вариант 8-миллиметрового одноволнового генератора.* Рабочая частота  $f = 37,96$  ГГц, выбранная опорная частота  $\omega_0$  соответствует  $\lambda_0 = 7,99$  мм. Напряжение пучка  $V_0 = 212$  кВ, ток  $I_0 = 600$  А, величина фокусирующего магнитного поля  $B_0 = 5$  Тл. Регулярный гофрированный участок имеет  $n_v = 12$  периодов,  $d_v = 2,756$ ,  $h_v = 1,18$ ,  $b_0 = 2,3615$  (3,5 мм, 1,5 мм, 3 мм). Радиус волновода на конце  $b_L = 2,952$  (3,75 мм). Ширина, высота модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки  $L_1 = 4,72$ ,  $h_1 = 1,46$ ,  $L_{1v} = 5,51$  (6 мм, 1,86 мм, 7 мм),  $\Delta_p = 0,8$ . Радиус пучка  $r_0 = 2,06$  (2,62 мм). Достигнутый КПД составил 36 %. Анализ показал, что реализован синхронизм на минус первой гармонике вдали от границы полосы прозрачности. При внутреннем радиусе  $b_0 = 2,36$  волновод является закритическим, поэтому для вывода СВЧ-мощности сразу за гофрированным участком радиус волновода увеличен. Характеристики этого варианта представлены на рис. 5.15.

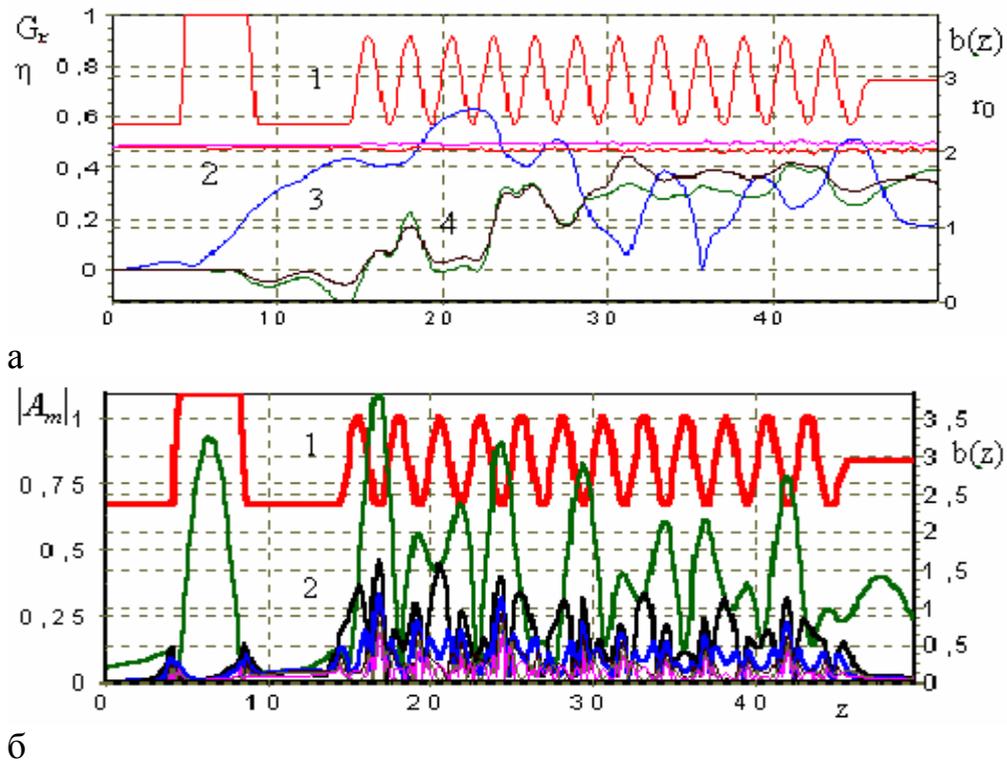


Рис. 5.15. Характеристики варианта 8-миллиметрового генератора: а – кривые 1 –  $b(z)$ , 2 –  $r_{max}$ ,  $r_{min}$ , 3 –  $G_{r1}$ , 4 –  $\eta^e$ ,  $\eta^v$ ; б) 1 –  $b(z)$ , 2 –  $A_m$

3. *Вариант 3-сантиметрового двухволнового генератора.* Рабочая частота  $f = 9,97$  ГГц, выбранная опорная частота  $\omega_0$  соответствует  $\lambda_0 = 3,2$  см. Напряжение пучка  $V_0 = 265$  кВ ( $\beta_0 = 0,753$ ), ток  $I_0 = 800$  А, величина фокусирующего магнитного поля  $B_0 = 0,35$  Тл. Регулярный гофрированный участок имеет  $nv = 20$  периодов,  $d_v = 1$ ,  $h_v = 1,42$ ,  $b_0 = 6$  (0,5 см, 0,71 см, 3 см). Ширина, высота двойной модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки  $L_1 = L_{12} = L_2 = 3,89$ ,  $h_{1,2} = 3,8$ ,  $L_{2v} = 4,716$  (1,945 см, 1,9 см, 2,36 см),  $\Delta_p = 0,8$ . Радиус пучка  $r_0 = 5$  (2,5 см). Достигнутый КПД составил 30%. Анализ показал, что реализован синхронизм на основной гармонике вдали от границы полосы прозрачности. Характеристики этого варианта представлены на рис. 5.16.

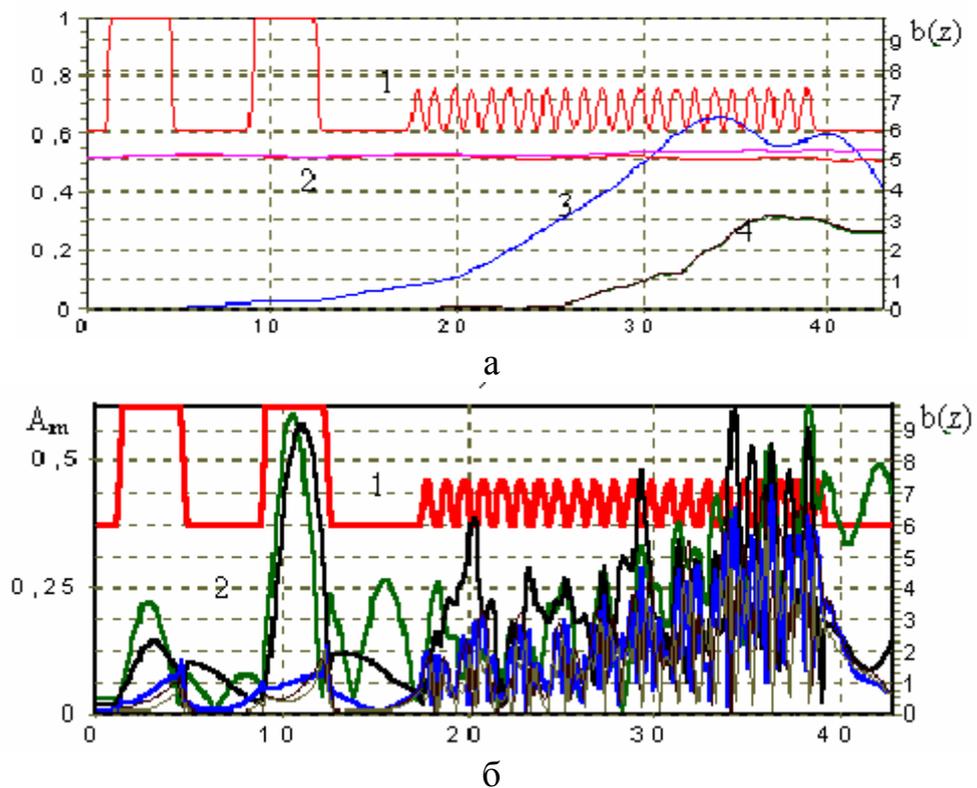


Рис. 5.16. Характеристики варианта 3-сантиметрового генератора: а – кривые 1 –  $b(z)$ , 2 –  $r_{\max}$ ,  $r_{\min}$ , 3 –  $G_{rl}$ , 4 –  $\eta^e$ ,  $\eta^v$ ; б – 1 –  $b(z)$ , 2 –  $A_m$

### 5.3.3. Двухкаскадный релятивистский клистрон-генератор

На рис. 1 изображена схема рассматриваемого двухкаскадного клистрона-генератора. Электронный поток 3, сформированный электронной пушкой 1,2 подается на вход электродинамической системы генератора, состоящей из отрезка полого цилиндрического нерегулярного волновода на котором имеется две резонансные канавки 4, 5 разделенные регулярным участком. Модулирующая канавка 4 полностью отражает  $E_{01}$ -волну и заграждает катод. Параметры же канавки 5 подбираются такими, чтобы обеспечить нагруженную добротность резонансной системы канавка-дрейф-

канавка в пределах 100-200. Вывод СВЧ-мощности производится через выходной рупор 6. Отработавший электронный поток осаждается на стенку волновода сразу за отбирающей канавкой 5.

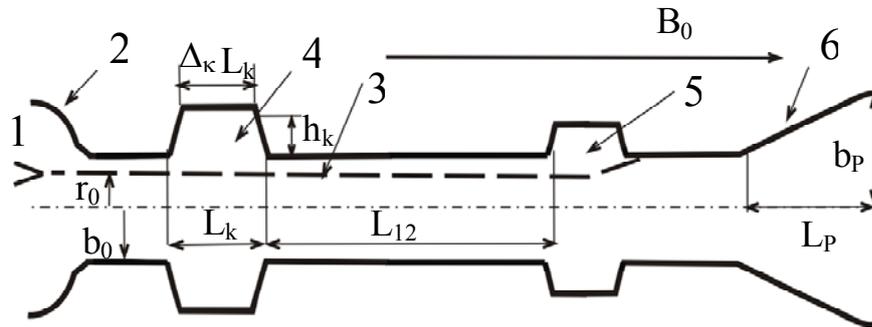


Рис. 5.17 Схема клистрона-генератора  
1,2 – лезвийный катод и анод, формирующие трубчатый электронный поток 3,4 – модулирующая канавка, 5 – отбирающая канавка, 6 – выходной рупор.

На рис. 2 представлены основные характеристики процесса взаимодействия в расчетной области для одного из найденных вариантов.

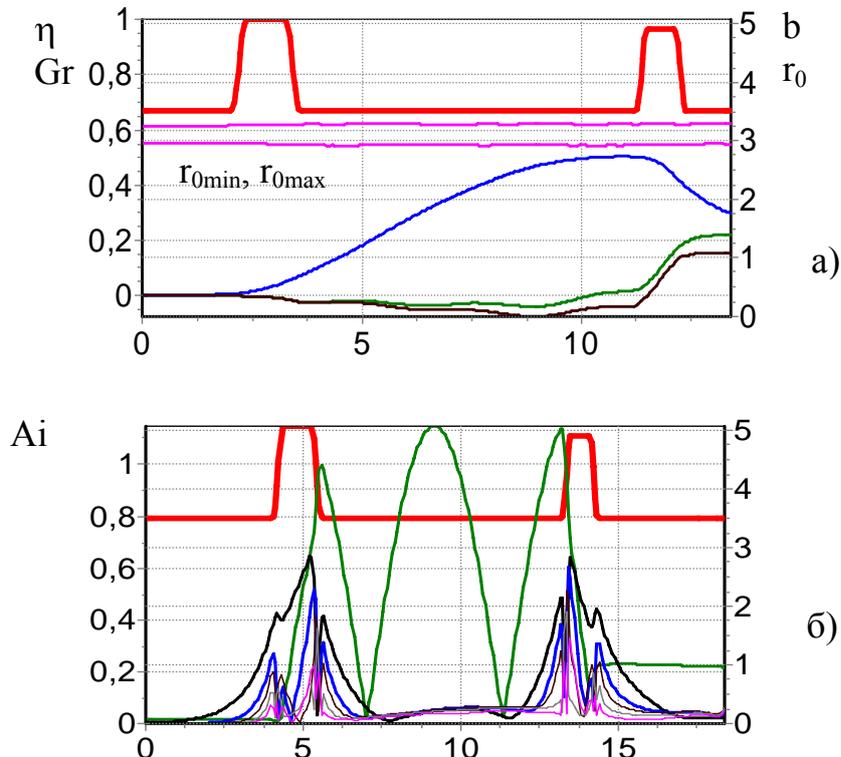


Рис.5.18 Характеристики клистрона-генератора  
а) профиль  $b(z)$ , границы электронного пучка  $r_0$ , функция группировки  $G_r$ , электронный и волновой КПД  $\eta$ ;  
б) амплитуды  $|A_i|$ ,  $i = 1..6$  возбуждаемых  $E_{0i}$  волн.

Внутренний радиус волновода  $b(0)=3.5$  (геометрические размеры приведены в единицах  $\lambda/2\pi$ ). Канавка 4 имеет параметры  $L_{k1}=1.625$ ,  $h_{k1}=1.57$ ,  $\Delta_{k1,2}=0.5$ . Канавка 5 -  $L_{k2}=1.18$ ,  $h_{k2}=1.4$ . Участок дрейфа  $L_{12}=7.59$ . Скорость электронов  $\beta_0=0.7$ , ток  $I_0=750A$ , средний радиус пучка  $r_0=3.1$ . Для фокусировки пучка требуется значительное магнитное поле ( $F=3.5$ ). Модуляция происходит при накачке энергии в электронный поток. На участке дрейфа происходит рост функции группировки. Интенсивный отбор энергии реализуется в области второй канавки. В

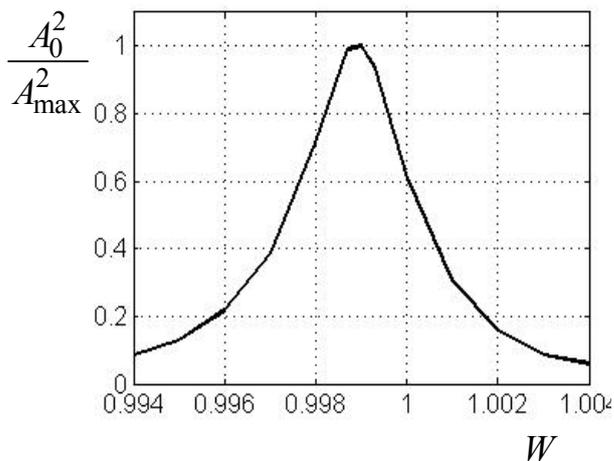


Рис.5.19

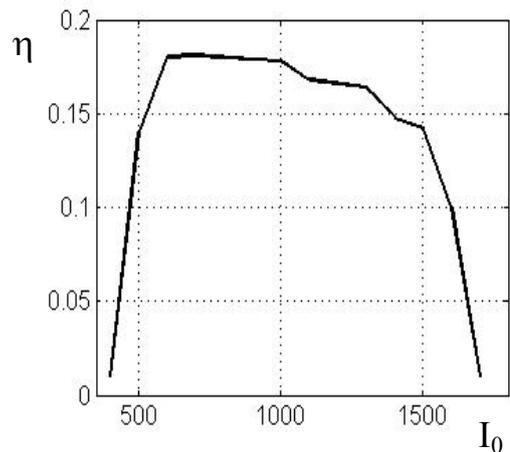


Рис.5.20

области между канавками устанавливается характерное для стоячей  $E_{01}$ -волны распределение амплитуды  $A_1(z)$ .

Резонансная кривая холодной электродинамической системы представлена на рис.5.19. Здесь  $A_0$  - амплитуда  $E_{01}$  - волны. Рассчитанная по ней нагруженная добротность равна  $\sim 170$ . Как видно, рабочая частота генератора несколько выше собственной частоты холодного резонатора.

Зависимость эффективности генерации от величины тока пучка представлена на рис.5.20. Пусковой ток равен 400А. Эффективная генерация наблюдается при токах в диапазоне  $500A < I_0 < 1500A$ .

#### 5.4. Оптимизация профиля рупора на симметричных E-волнах по характеристике направленности [22]

Рупоры чаще всего используются для сопряжения полого волновода с зеркальной антенной или для измерений [23, 24].

Основное назначение рупора состоит в том, чтобы согласовать волновод с открытым пространством, что достигается за счет плавного увеличения радиуса волновода до значения, при котором фазовая скорость основной волны приближается к скорости света в свободном пространстве. При этом условии отражение от открытого конца волновода практически

отсутствует и реализуется идеальная для данного типа волны диаграмма направленности излучения.

Однако проблема реализации такого рупора заключается в том, что при необходимом для идеального сопряжения выходном радиусе в рупоре возбуждаются высшие типы волн, которые имеют фазовую скорость, большую скорости света в открытом пространстве, что приводит как к рассогласованию и, следовательно, к увеличению коэффициента отражения, так и к ухудшению диаграммы направленности.

Как показывают расчеты, за счет увеличения длины рупора с плавным увеличением радиуса эти негативные факторы хотя и возможно уменьшить, однако, лишь до определенного и не всегда приемлемого уровня. Наиболее радикальный путь улучшения характеристик рупора – подбор закона изменения профиля, при котором высшие типы волн на его выходном сечении отсутствуют и при этом коэффициент отражения из-за их возбуждения минимален.

В настоящей работе такая оптимизационная задача решается для рупора, представляющего преобразователь сопротивления для симметричной  $E_{01}$ -волны. Найдены и исследованы оптимальные варианты профилей рупора, в котором возможно возбуждение двух или трех распространяющихся волн. Следует отметить, что в таком рупоре кроме распространяющихся возбуждается также ряд ближайших закритических для текущего сечения волн. Чтобы обеспечить их отсутствие на выходном сечении (после которого они становятся распространяющимися), рупор имеет достаточно протяженный регулярный выходной участок. Здесь задача оптимизации решается для одночастотного режима; она весьма актуальна в настоящее время для расчета и оптимизации профиля выходного рупора излучателя релятивистской ЛБВ-О с рабочим типом волны  $E_{01}$ .

*Схема рупора и математическая модель, используемая для расчетов*

Схема рассматриваемого рупора приведена на рис. 5.21.

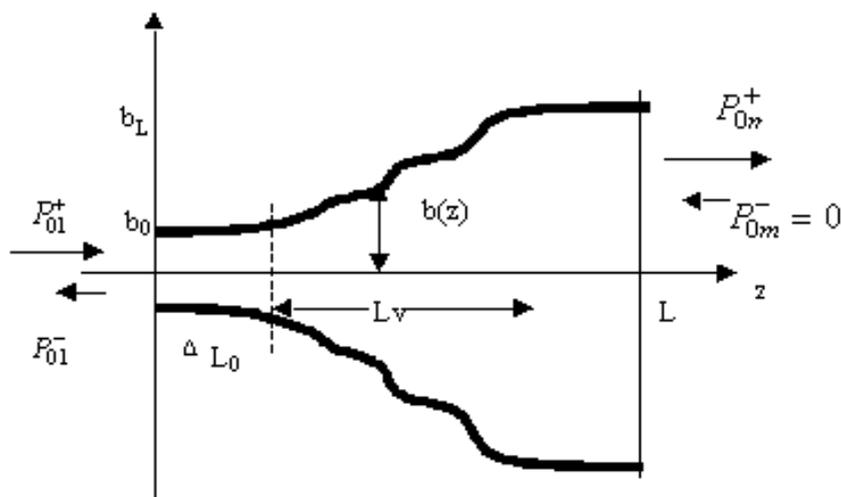


Рис. 5.21. Схема рупора

Рупор имеет вид отрезка нерегулярного расширяющегося волновода, представляющего преобразователь волнового сопротивления для  $E_{01}$ -волны

круглого волновода:  $W_{01}^E = W^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\nu_{01}}{b'}\right)^2}$ , где  $\nu_{01}$  – первый корень  $J_0(x)$ ,  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве,  $b'$  – радиус волновода,  $W^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  – волновое сопротивление свободного пространства.

Нерегулярный участок длиной  $L_v$  сопряжен с отрезками регулярного волновода, имеющими длину  $\Delta L_0$  и  $\Delta L_1$ , достаточную для затухания возбуждаемых закритических волн. На вход  $z=0$  рупора подается  $E_{01}$ -волна, имеющая мощность  $P_{01}^+$ .

Возбуждение волн в таком рупоре на рабочей частоте  $\omega$  описывается следующими безразмерными уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд и граничными условиями на внутренней поверхности рупора S:

$$\text{rot} \dot{\mathbf{B}} = jw \dot{\mathbf{E}}; \quad \text{rot} \dot{\mathbf{E}} = -jw \dot{\mathbf{B}}; \quad [\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{E}}]_S = 0. \quad (5.27)$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные:  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\} = \text{real}\{\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}} \cdot e^{j\omega t}\}$ ;  $w = \omega / \omega_0$ ;  $\omega_0$  – опорная частота,  $(b, L, L_v) = k_0 \cdot (b', L', L'_v)$ ;  $k_0 = \omega_0 / c$ ;  $c$  – скорость света;  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}' / E_0$ ;  $\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}' \cdot c / E_0$ ;  $E_0$  – амплитуда волны на входе рупора.

При задании граничных условий в сечениях ( $z=0$  и  $z=L$ ) используем тот факт, что на регулярных участках волновода электромагнитное поле представляется в виде суммы прямой и обратной симметричных  $E_{0m}$ -волн (как распространяющихся, так и затухающих) вида

$$\sum_m \dot{e}_m^+ e^{-jk_m^e \cdot z} (\dot{\mathbf{E}}^{e+}, \dot{\mathbf{B}}^{e+})_m + \dot{e}_m^- e^{+jk_m^e \cdot z} (\dot{\mathbf{E}}^{e-}, \dot{\mathbf{B}}^{e-})_m, \quad (5.28)$$

где  $\dot{e}_m^\pm$  – постоянные амплитуды,  $(\dot{\mathbf{E}}^{e\pm}, \dot{\mathbf{B}}^{e\pm})_m$  – мембранные функции  $E_{0m}$ -волны регулярного волновода,  $k_m^e = \sqrt{w^2 - \nu_{0m}^2} / b^2$  – продольное волновое число.

Воспользуемся общей теорией возбуждения нерегулярного волновода, построенной на основе метода отображения внутренней области нерегулярного волновода на цилиндр единичного радиуса, развитого в (п. 5.1). Согласно этой теории решение (5.27) для компонент симметричных E-

волновых полей представляется в виде разложения по собственным  $E_{0m}$ - волнам стандартного волновода единичного радиуса:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\frac{1}{b(z)} \sum_{m=1}^M \dot{A}_m(z) \cdot J_1(v_{0m} \frac{\rho}{b(z)}); & \dot{B}_\varphi &= -\frac{j}{b(z)} \sum_{m=1}^M \dot{V}_m(z) \cdot J_1(v_{0m} \frac{\rho}{b(z)}); \\ \dot{E}_z &= \sum_{m=1}^M [\dot{C}_m(z) \cdot J_0(v_{0m} \frac{\rho}{b(z)}) - \frac{\rho}{b^2} \frac{db}{dz} \dot{A}_m(z) \cdot J_1(v_{0m} \frac{\rho}{b(z)})];\end{aligned}\tag{5.29}$$

где  $M$  – количество учитываемых волн.

Амплитуды  $\dot{A}_m, \dot{V}_m$ , представляющие коэффициенты разложения компонент поля, удовлетворяют системе парных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной из (5.1):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = Q(z)\mathbf{u}; \quad \mathbf{u} = \{\dot{A}_1, \dot{V}_1, \dot{A}_2, \dot{V}_2, \dots, \dot{A}_m, \dot{V}_m\} = \{u^1 \dots u^{2M}\}.\tag{5.30}$$

Элементы матрицы  $Q$  выражаются следующим образом:

для  $m = 1 \dots M, k = 1 \dots M, k \neq m$ :

$$\begin{aligned}q_{2m-1, 2m-1} &= -\frac{\partial b}{b \partial z}; & q_{2m-1, 2m} &= \frac{1}{w} \left[ (w)^2 - \frac{v_{0m}^2}{b^2} \right]; \\ q_{2m-1, 2k} &= 0; & q_{2m-1, 2k-1} &= \frac{\partial b}{b \partial z} \frac{2v_{0m}^2}{v_{0k}^2 - v_{0m}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0m})}; \\ q_{2m, 2m-1} &= -w \left\{ 1 + \left( \frac{\partial b}{\partial z} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{v_{0m}^2} \right) - \sum_{k \neq m} \frac{4v_{0k}^2}{(v_{0m}^2 - v_{0k}^2)^2} \right] \right\}; \\ q_{2m, 2m} &= \frac{\partial b}{b \partial z}; & q_{2m, 2k} &= -\frac{\partial b}{b \partial z} \frac{2v_{0k}^2}{v_{0m}^2 - v_{0k}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0m})}; \\ q_{2m, 2k-1} &= -w \frac{\partial b}{\partial z} \left[ \frac{4(v_{0m}^2 + v_{0k}^2)}{(v_{0m}^2 - v_{0k}^2)^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0m})} - \sum_{\substack{l \neq m \\ l \neq k}} \frac{4v_{0l}^2}{(v_{0m}^2 - v_{0l}^2)(v_{0k}^2 - v_{0l}^2)} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0m})} \right]\end{aligned}$$

Амплитуды  $\dot{C}_m$  получают после решения (5.30) по формуле

$$\dot{C}_{sm} = -\frac{v_{0m} \dot{B}_m}{w \cdot b^2} + \frac{\partial b}{b \partial z} \times \left( -\frac{\dot{A}_m}{v_{0m}} + \sum_{k \neq m} \frac{2 \cdot v_{0m}}{v_{0k}^2 - v_{0m}^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0m})} \dot{A}_k \right).$$

Граничные условия к системе (5.30) задавались в виде (5.5), (5.6).

Решение краевой задачи для (5.30) получалось эффективным методом блочной матричной прогонки (5.12)-(5.18).

Безразмерная мощность, переносимая парциальной  $E_{0m}$ -волной через поперечное сечение волновода, в выбранных переменных выражается следующим образом:

$$P_m(z) = \frac{1}{2} J_1^2(\nu_{0m}) \cdot \text{Im}[\dot{A}_m(z) \cdot \dot{V}_m(z)]. \quad (5.31)$$

Исходя из представления (5.28) на регулярных участках мощности прямой и обратной распространяющихся волн в выбранных безразмерных переменных имеют вид

$$P_m^\pm = \frac{1}{2} J_1^2(\nu_{0m}) \cdot \text{Im}(\dot{A}_m \pm \frac{j}{k_m^e} \frac{d\dot{A}_m}{dz})(\dot{V}_m \pm \frac{j}{k_m^e} \frac{d\dot{V}_m}{dz}). \quad (5.32)$$

Для выполнения условий излучения на входном и выходном сечениях рупора (см. рис. 5.16) в (5.5), (5.6) задавалось:

$$\text{на входе} - e_{01}^+ = 1; e_{0m}^+ = 0, m > 1; \text{ на выходе} - e_{Lm}^- = 0; m \geq 1. \quad (5.33)$$

### *Диаграмма направленности*

При расчете диаграммы направленности будем использовать наряду с цилиндрической  $(\rho, \varphi, z)$  также сферическую  $(r, \vartheta, \varphi)$  и декартову  $(x, y, z)$  системы координат. Воспользуемся известными выражениями для вектора  $\dot{\vec{E}}$  через эквивалентные источники в раскрыве рупора  $(\rho', \varphi', 0)$  [25], которые в наших безразмерных переменных имеют вид

$$\dot{\vec{E}}(x, y, z) = \dot{\Pi}^e + \nabla \text{div} \dot{\Pi}^e - j \text{rot} \dot{\Pi}^m; \quad (5.34)$$

$$\dot{\Pi}^e = \frac{I}{4\pi j} \int_0^{b_l} \int_0^{2\pi} \frac{[\mathbf{n}\dot{\mathbf{B}}^0] e^{-jR}}{R} \rho' d\rho' d\varphi'; \quad (5.35)$$

$$\dot{\Pi}^m = -\frac{I}{4\pi j} \int_0^{b_l} \int_0^{2\pi} \frac{[\mathbf{n}\dot{\mathbf{E}}^0] e^{-jR}}{R} \rho' d\rho' d\varphi',$$

где  $\dot{\Pi}^e$  и  $\dot{\Pi}^m$  – электрический и магнитный векторы Герца,  $R$  – расстояние между точками интегрирования  $P'(\rho', \varphi', 0)$  в раскрыве рупора и точкой наблюдения  $P(x, y, z)$ ,  $z > 0$ .

Эквивалентные источники на раскрытие рупора с  $E_{0m}$  волнами имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}_0 \mathbf{B}^0] &= -B_\varphi(\rho') \cdot \boldsymbol{\rho}_0; \\ [\mathbf{z}_0 \mathbf{E}^0] &= jE_r(\rho') \cdot \boldsymbol{\Phi}_0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Таким образом, векторы Герца имеют одну компоненту:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^e &= \dot{I}_\rho^e \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = -\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{4\pi j} \cdot \int_0^{b_L} \int_0^{2\pi} \dot{B}_\varphi^0 \cdot e^{j(\varphi'-\varphi)} \cdot \frac{e^{-jR}}{R} \cdot \rho' d\rho' d\varphi'; \\ \dot{\Pi}^m &= \dot{I}_\varphi^m \cdot \boldsymbol{\Phi}_0 = -\frac{\boldsymbol{\Phi}_0}{4\pi} \cdot \int_0^{b_L} \int_0^{2\pi} \dot{E}_\rho^0 \cdot e^{j(\varphi'-\varphi)} \cdot \frac{e^{-jR}}{R} \cdot \rho' d\rho' d\varphi'. \end{aligned} \quad (5.37)$$

В дальней зоне справедливо разложение [23,24]:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2} = \\ &= \sqrt{r^2 - 2r\rho' \cos\Omega + \rho'^2} = r \sqrt{1 - \frac{2\rho'}{r} \cos\Omega + \frac{\rho'^2}{r^2}} \approx r - \rho' \cos\Omega + O\left(\frac{\rho'}{r}\right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

После несложных преобразований, заменяя в знаменателе  $R$  на  $r$ , в числителе  $R$  на  $r - \rho' \cos\Omega$  с точностью  $O\left(\frac{b}{r}\right)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_\rho^e &= -\frac{1}{4\pi j} \frac{e^{-jr}}{r} \int_0^{b_L} B_\varphi^0(\rho') \int_0^{2\pi} e^{j(\varphi'-\varphi)} e^{j\rho' \cos\Omega} \rho' d\rho' d\varphi'; \\ \dot{\Pi}_\varphi^m &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jr}}{r} \int_0^{b_L} E_\rho^0(\rho') \int_0^{2\pi} e^{j(\varphi'-\varphi)} e^{j\rho' \cos\Omega} \rho' d\rho' d\varphi'. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Воспользуемся соотношением  $\cos\Omega = \frac{xx' + yy'}{r\rho'} = \sin\vartheta \cdot \cos(\varphi' - \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_\rho^e &= -\frac{1}{4\pi j} \frac{e^{-jr}}{r} \int_0^{b_L} \dot{B}_\varphi^0(\rho') \cdot \int_0^{2\pi} e^{j(\varphi'-\varphi)} \cdot e^{j\rho' \sin\vartheta \cdot \cos(\varphi'-\varphi)} d\varphi' \rho d\rho'; \\ \dot{\Pi}_\varphi^m &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jr}}{r} \int_0^{b_L} \dot{E}_\rho^0(\rho') \cdot \int_0^{2\pi} e^{j(\varphi'-\varphi)} \cdot e^{j\rho' \sin\vartheta \cdot \cos(\varphi'-\varphi)} d\varphi' \rho d\rho'. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Так как  $\int_0^{2\pi} e^{j(\varphi'-\varphi)} \cdot e^{j\rho \sin \vartheta \cdot \cos(\varphi'-\varphi)} d\varphi' = -j2\pi J_1(\rho \sin \vartheta)$ , то векторы

Герца приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\rho^e &= \rho_0 \frac{e^{-jr}}{r} \cdot \frac{1}{2} \int_0^b \dot{B}_\varphi(\rho') \cdot J_1(\rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho' = \rho_0 \frac{e^{-jr}}{r} \cdot \dot{I}_B(\vartheta); \\ \mathbf{\Pi}_\varphi^m &= \varphi_0 \frac{e^{-jr}}{r} \cdot \frac{1}{2} \int_0^b \dot{E}_\rho(\rho') \cdot J_1(\rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho' = \varphi_0 \frac{je^{-jr}}{r} \cdot \dot{I}_E(\vartheta). \end{aligned} \quad (5.41)$$

После подстановки (5.41) в (5.34) и, пренебрегая членами  $\frac{1}{r^2}$ , получим

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathfrak{D}_0 \cdot \frac{e^{-jr}}{r} \left[ \dot{I}_B(\vartheta) \cdot \cos \vartheta + j\dot{I}_E(\vartheta) \right].$$

Нормированная групповая характеристика диаграммы направленности:

$$E_{0n}(\vartheta) = E_0(\vartheta) / \max_{\vartheta} E_0(\vartheta); \quad E_0(\vartheta) = \left| \dot{I}_B(\vartheta) \cos \vartheta + j\dot{I}_E(\vartheta) \right|. \quad (5.42)$$

Используя (5.29), получаем выражения для интегралов  $\dot{I}_B, \dot{I}_E$  через амплитуды возбуждаемых волн на раскрыве рупора:

$$\begin{aligned} \dot{I}_E &= -\frac{1}{2b_L} \int_0^{b_L} \left[ \sum_{m=1}^M \dot{A}_m \cdot J_1(v_{0m} \frac{\rho'}{b_L}) \right] \cdot J_1(\rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho'; \\ \dot{I}_B &= -\frac{j}{2b_L} \int_0^{b_L} \left[ \sum_{m=1}^M \dot{V}_m \cdot J_1(v_{0m} \frac{\rho'}{b_L}) \right] \cdot J_1(\rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho'. \end{aligned} \quad (5.43)$$

### *Критерий оптимизации*

Коэффициент направленного действия антенны определяется как [79]:

$$G(\vartheta) = \frac{E_0^2(\vartheta)}{\int_0^{\pi/2} E_0^2(\vartheta) \cdot \sin \vartheta d\vartheta}. \quad (5.44)$$

Из вида формулы (5.44) естественно выбрать в качестве целевой функции, обеспечивающей максимум коэффициента усиления и минимум отраженной мощности при оптимизации следующую:

$$\min F_c = \min(P_s + \alpha P_{01}^-), \quad (5.45)$$

где  $P_s = \int_0^{\pi/2} E_{0n}^2(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$ ,  $E_{0n}$  – нормированная групповая

характеристика диаграммы направленности, рассчитываемая по формуле (5.42),  $P_{01}^-$  – отраженная мощность, рассчитываемая по формуле (5.32),  $\alpha$  – весовой коэффициент.

### Результаты оптимизации профиля рупора

При оптимизации нерегулярный участок профиля рупора  $b_v(T)$  задавался следующей многопараметрической функцией:

$$b_v = b_0 + (b_L - b_0) \cdot P_5(T) + D_v(T). \quad (5.46)$$

Здесь  $T = (z - z_0)/L_v$ ,  $z_0$ ,  $L_v$  – начало и длина нерегулярного участка. Полином пятой степени  $P_5(T)$  (5.19) задает плавный монотонный переход с радиуса  $b_0$  на  $b_L$  и обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения с регулярными участками. Функция  $D_v(T)$  определяет отклонение профиля от монотонного и задается в виде (5.8). Параметры функции  $D_v(T)$   $d_k^v$  ( $k = 1..6$ ) подбирались из условия минимума целевой функции (5.45). Для сравнения рассчитывались характеристики рупора с монотонным изменением профиля ( $D_v(T) = 0$ ).

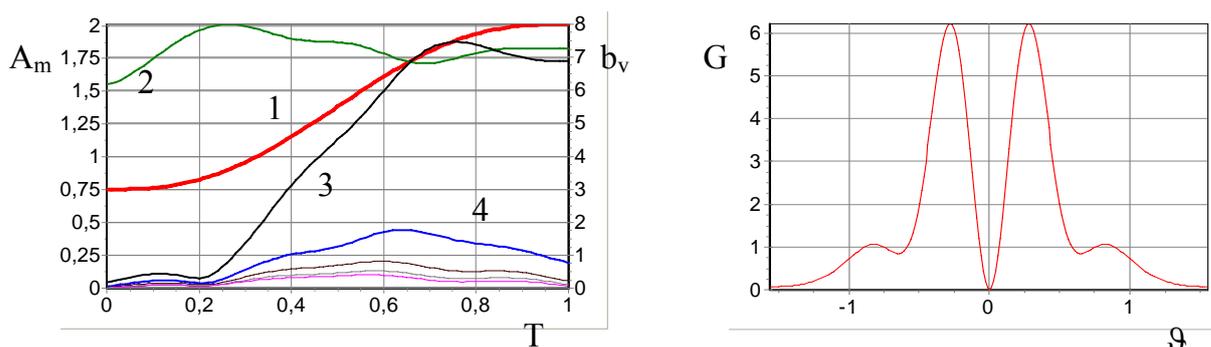


Рис. 5.22. Характеристики рупора с плавным изменением профиля

На рис. 5.22 приведены характеристики рупора с плавным изменением профиля при  $b_0 = 3$  (входное сечение нерегулярной части),  $b_L = 8$  (выходное сечение нерегулярной части),  $L_v = 10$  (длина нерегулярной части). На рис. 5.22, а представлены: 1 – профиль  $b_v(T)$ , 2, 3, 4, ... – нормированные амплитуды волн соответственно  $E_{01} \dots E_{08}$ , которые учитывались в расчетах.

Как видно из рис. 5.22, а, на выходе рупора велика амплитуда волны  $E_{02}$ : она равна амплитуде  $E_{01}$ -волны. В результате функция  $G(\vartheta)$  оказывается многогорбой (рис. 5.22, б).

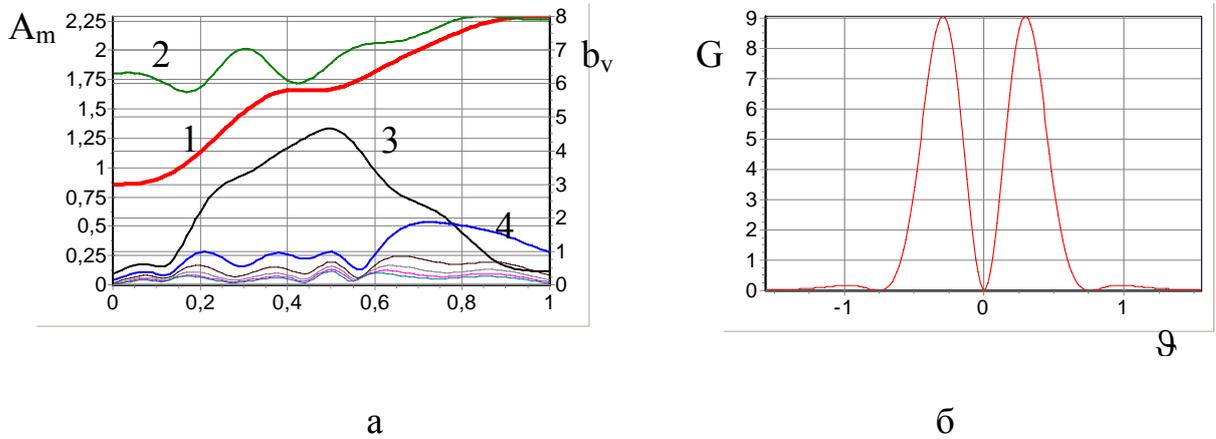


Рис. 5.23. Характеристика рупора с профилем, оптимизированным по минимуму амплитуды высших мод

На рис. 5.23 приведены аналогичные результаты для тех же заданных параметров  $b_0, b_L, L_v$  при минимизации  $\sum_{m=2}^8 |A_m(L)|$  (рис. 5.23, а). Характеристика направленности  $G(\vartheta)$  существенно улучшается (рис. 5.23, б).

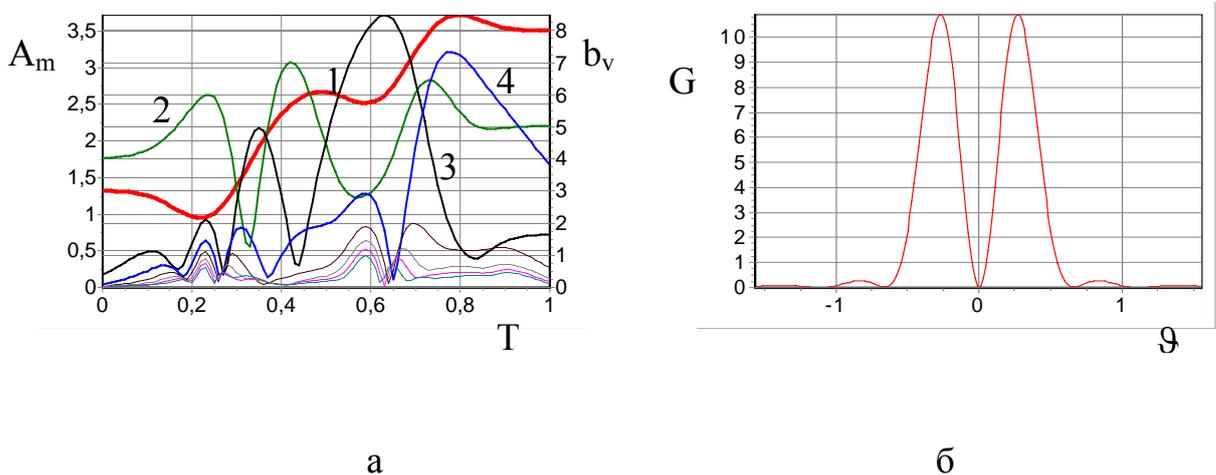


Рис. 5.24. Характеристика рупора оптимизированного по диаграмме направленности

Не следует, однако, считать, что минимизация модового состава на выходе рупора решает задачу оптимизации  $G(\vartheta)$ . На рис. 5.24 приведены результаты прямой оптимизации  $G(\vartheta)$ : распределение  $G(\vartheta)$  улучшено по сравнению с предыдущим решением (рис. 5.24, б), однако модовый состав на выходе рупора весьма сложный (рис. 5.24, а).

Увеличение выходного сечения и длины нерегулярной части рупора должно приводить к улучшению (сжатию) функции  $G(\vartheta)$ . Для подтверждения этого был рассчитан и оптимизирован вариант рупора с  $b_0 = 3$ ,  $b_L = 10$ ,  $L_v = 14,07$ . На рис. 5.25 представлены характеристики этого варианта с плавным изменением профиля, на рис. 5.26 – с оптимизированным по минимуму модового состава на выходе профилем. Очевидны улучшения  $G(\vartheta)$  в том и другом случаях. В оптимальном варианте  $G_{\max} = 13,5$ . Во всех вариантах отраженная мощность ( $P_{01}^-$ ) не превосходит 0,2 % от  $P_{01}^+$ .

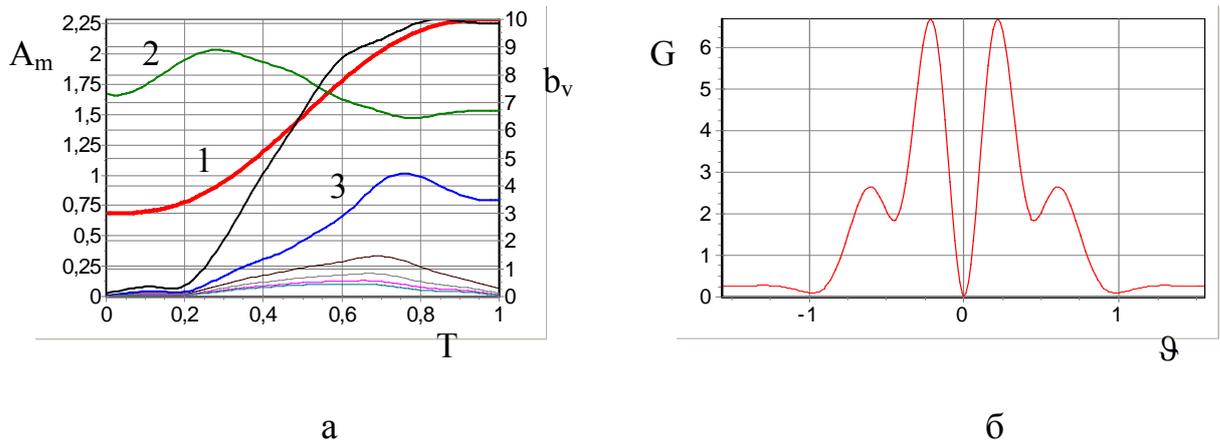


Рис. 5.25. Характеристика рупора с монотонным профилем и увеличенным раскрытием

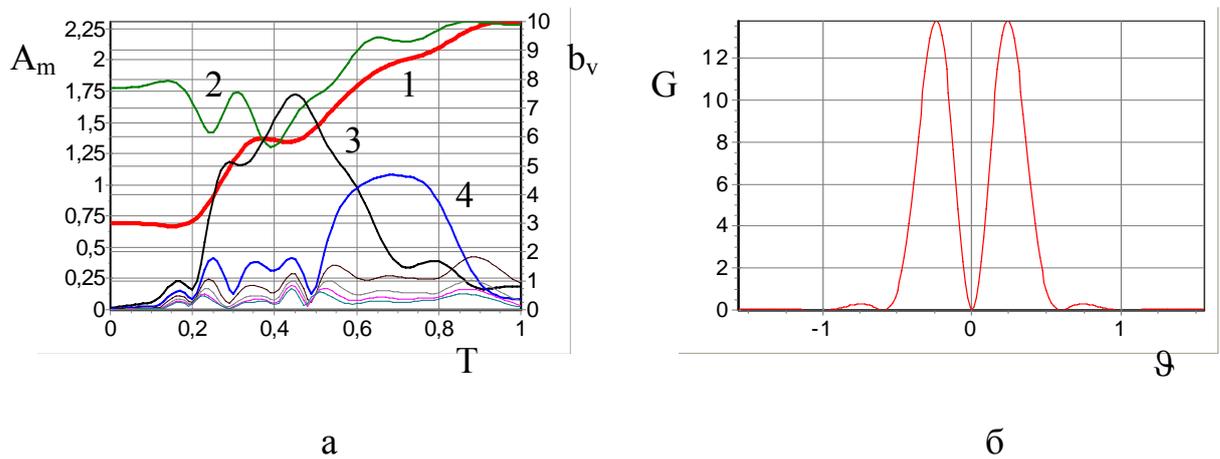


Рис. 5.26. Характеристика рупора с оптимизированным профилем

Приведенные результаты указывают на эффективность предложенного метода оптимизации профиля нерегулярного рупора на  $E_{0m}$ -волнах круглого волновода. Одновременно следует отметить существенную роль высших мод в формировании диаграммы направленности рупора. Управление модовым составом на выходе рупора позволяет существенно улучшить характеристику направленности  $G(\vartheta)$  рупора.

## 5.5. Оптимизированные варианты ЛБВ с учетом возбуждения волн на второй гармонике [26]

При оптимизации использовалась система уравнений (5.1) в случае  $W = 1$ ,  $s = 1, 2$ ,  $m = 1$ . Профиль волновода задавался в виде:

$$g(T) = g_0 + g_1 \cdot \sin^2(h \cdot T + A_3 \cdot T^3 + A_5 \cdot T^5).$$

В результате получены следующие четыре варианта.

Вариант 1. Регулярная ЛБВ на нулевой пространственной гармонике:

$L_0 = 30,05$ ;  $r_0 = 2,4$ ;  $n=27$ ,  $\beta_0 = 0,780$ ;  $I_0 = 135$  А;  $g_0 = 1,164$ ;  
 $g_1 = \text{const} = 0,555$ ;  $\eta_1 = 0,501$ ;  $K_U = 6,193$  дБ;

Вариант 2. Нерегулярная ЛБВ на первой пространственной гармонике:

$L_0 = 337$ ;  $r_0 = 2,4$ ;  $n=146$ ,  $\beta_0 = 0,902$ ;  $I_0 = 64$  А;  $g_0 = 1,13$ ;  
 $g_{10} = \text{const} = 0,511$ ;  $A_3 = 196,5$ ;  $A_5 = 27,81$ ;  $\eta_1 = 0,851$ ;  $K_U = 14,458$  дБ.

Вариант 3. Регулярная ЛБВ на нулевой пространственной гармонике:

$L_0 = 49,65$ ;  $r_0 = 2,42$ ;  $n=127$ ,  $\beta_0 = 0,250$ ;  $I_0 = 3,05$  А;  
 $g_1 = \text{const} = 0,627$ ;  $g_0 = 1,179$ ;  $g_1 = \text{const} = 0,627$ ;  $\eta_1 = 0,217$ ;  $K_U = 25,196$  дБ.

На рис. 5.27 представлены распределения амплитуд поля варианта 1 при его расчете без учета составляющих поля на второй гармонике сигнала (а) и при их учете (б). Соответственно на рис. 5.28 даны интегральные характеристики (1 –  $\eta(T)$ , 2 –  $G_1(T)$ , 3 –  $G_2(T)$ ) с учетом и без учета второй гармоники сигнала. Как видно из сравнения приведенных характеристик, влияние поля на второй гармонике весьма мало. Следует также отметить, что составляющая  $E_{02}$  на второй гармонике оказывается в полосе непрозрачности и практически не возбуждается.

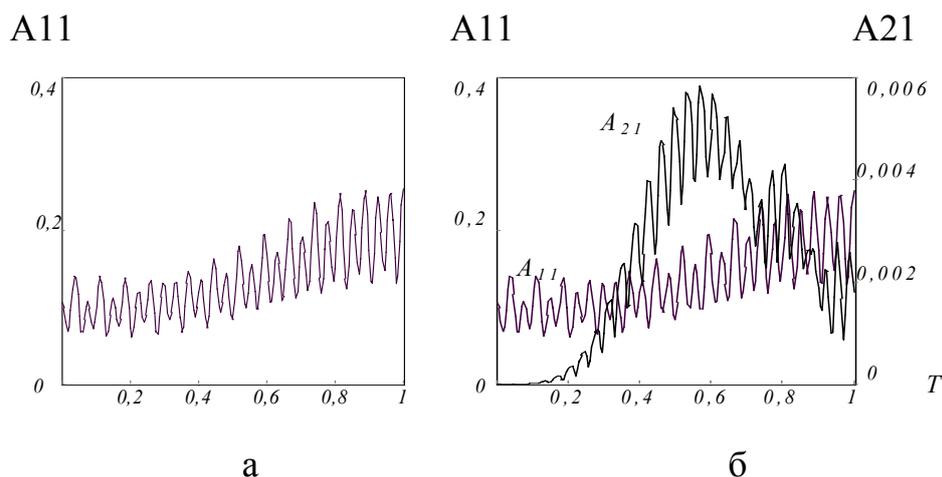


Рис. 5.27. Распределения амплитуд поля варианта 1:  
 а – без учета 2-й гармоники сигнала;  
 б – с учетом 2-й гармоники сигнала

Таким образом, можно заключить, что из-за достаточно большой дисперсии в гофрированном волноводе (в отличие от спиральной замедляющей системы) волны на второй гармонике сигнала имеют

незначительную амплитуду и практически не влияют на процесс взаимодействия. И это несмотря на то, что вторая гармоника тока в электронном потоке по величине сравнима с первой гармоникой (см.  $G_{r1}(T)$  и  $G_{r2}(T)$  на рис. 5.24, б).

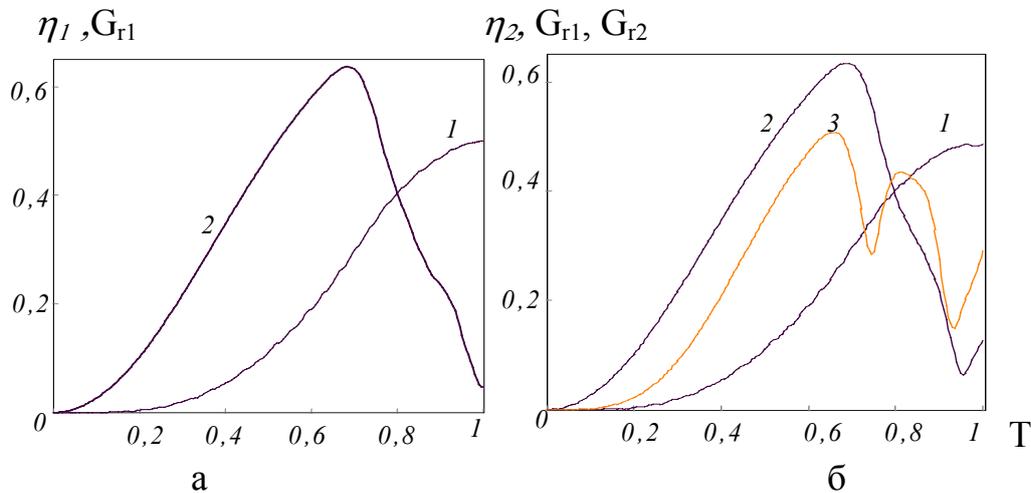


Рис. 5. 28. Интегральные характеристики варианта 1:

а – без учета второй гармоники сигнала;

б – с учетом второй гармоники;

1 – КПД первой гармоники  $\eta(T)$ , 2 – фазовая группировка на первой гармонике  $G_{r1}(T)$ , 3 – фазовая группировка на первой гармонике  $G_{r2}(T)$

На рис. 5.29 приведены интегральные характеристики для варианта 2 с учетом (б) и без учета (а) волн на второй гармонике сигнала.

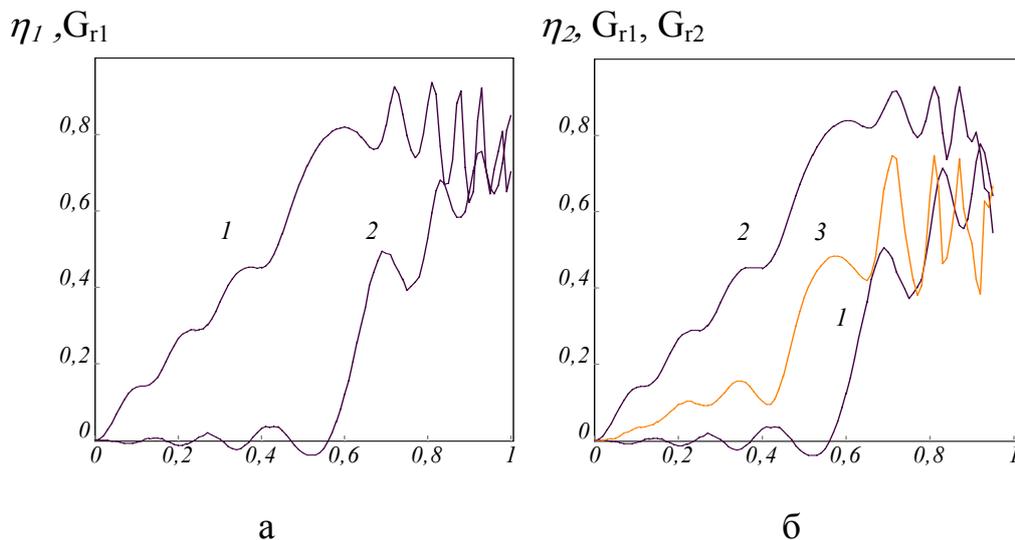


Рис. 5.29. Интегральные характеристики варианта 2:

а – без учета второй гармоники сигнала;

б – с учетом второй гармоники;

1 – КПД первой гармоники  $\eta(T)$ ; 2 – фазовая группировка на первой гармонике  $G_{r1}(T)$ ; 3 – фазовая группировка на второй гармонике  $G_{r2}(T)$

В этом варианте гофрированный волновод неперриодический ( $A_3, A_5 \neq 0$ ) и в районе значений  $T \approx 0,9$  поле  $E_{01}$  волны на второй гармонике имеет достаточно высокий локальный всплеск. Однако, как видно из сравнения интегральных характеристик на рис. 5.29, а и 5.29, б, влияние полей второй гармоники в итоге несущественно изменяет выходной КПД. Таким образом, и в этом варианте проявляются фильтрующие свойства гофрированного волновода.

На рис. 5.30 приведены распределения амплитуд поля для варианта 3 с относительно малым  $\beta_0$  без учета и с учетом возбуждения волн на второй гармонике сигнала, на рис. 5.31 – интегральные характеристики без учета и с учетом возбуждаемых на второй гармонике полей. Как и в варианте 1,  $E_{02}$ -волна находится в полосе непрозрачности и не возбуждается. Несмотря на высокую амплитуду второй гармоники тока в пучке амплитуда волны  $E_{01}$  на второй гармонике весьма мала и практически не влияет на процесс взаимодействия. Здесь также сказывается высокая дисперсия в гофрированном волноводе.

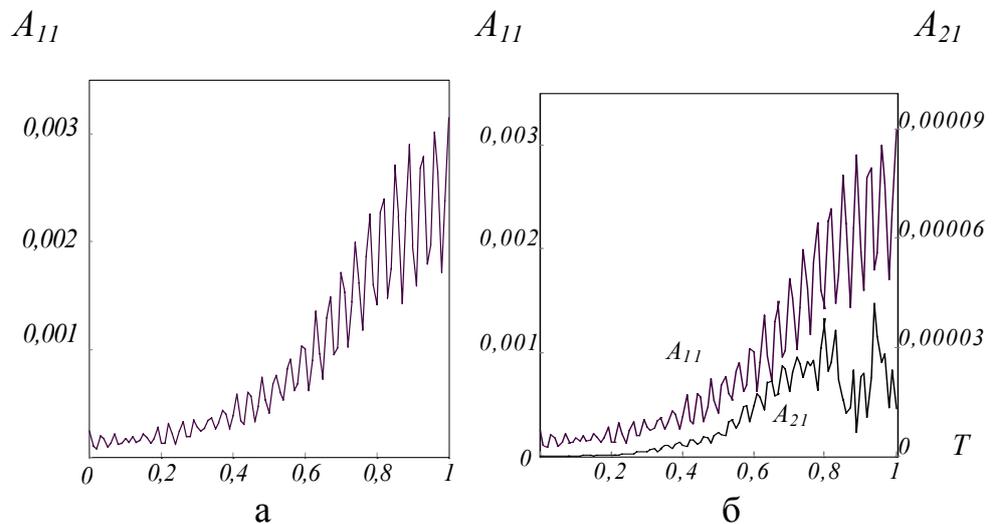


Рис. 5.30. Распределения амплитуд поля варианта 3:  
а – без учета 2-й гармоники сигнала; б – с учетом 2-й гармоники сигнала

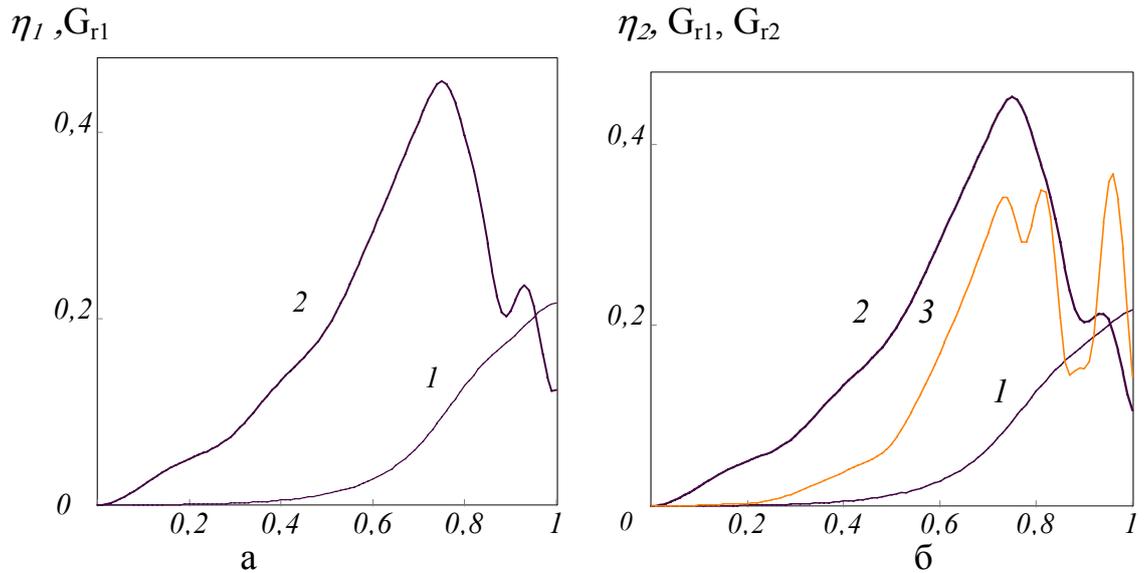


Рис. 5.31. Интегральные характеристики варианта 3:  
 а – без учета 2-й гармоники сигнала; б – с учетом 2-й гармоники;  
 1 – КПД первой гармоники  $\eta(T)$ ; 2 – фазовая группировка на 1-й гармонике  $G_{r1}(T)$ , 3 – фазовая группировка на 1-й гармонике  $G_{r2}(T)$

Итак, проведенные исследования влияния полей на второй гармонике сигнала в различных вариантах ЛБВ-О на гофрированном волноводе указывают на их малую роль в процессе взаимодействия из-за высокой дисперсии волны в гофрированном волноводе. Несмотря на высокий уровень второй гармоники в токе электронного пучка, амплитуда возбуждаемых на этой гармонике волн весьма мала. Противоположные результаты получены для ЛБВ-О на спиральной замедляющей системе, где дисперсия значительно ниже [27].

#### *Частотные характеристики оптимизированных вариантов*

На рис. 5.32  $\eta(W)$  – сплошная кривая,  $K_u(W)$  – штриховая кривая. Полоса по уровню  $\eta = 0,3$  составляет 16 %, что достаточно много для такой дисперсной системы, как гофрированный волновод. Заметим, что полоса заметно сдвинута в сторону низких частот. Коэффициент усиления оказывается невысоким (небольшая длина области взаимодействия) и имеет большой перепад в полосе  $\eta \geq 0,3$ . Причем он значительно возрастает с уменьшением частоты. Эта особенность, а также смещение полосы  $\eta(W)$  в область низких частот объясняются близким (при перемещении вниз по частоте) резонансом канавок гофрированного волновода, когда коэффициент связи волновода с электронным пучком резко возрастает, улучшая прежде всего коэффициент усиления. Относительно большая величина  $\eta$ , полученная в этом варианте регулярной ЛБВ, также объясняется указанным фактором.

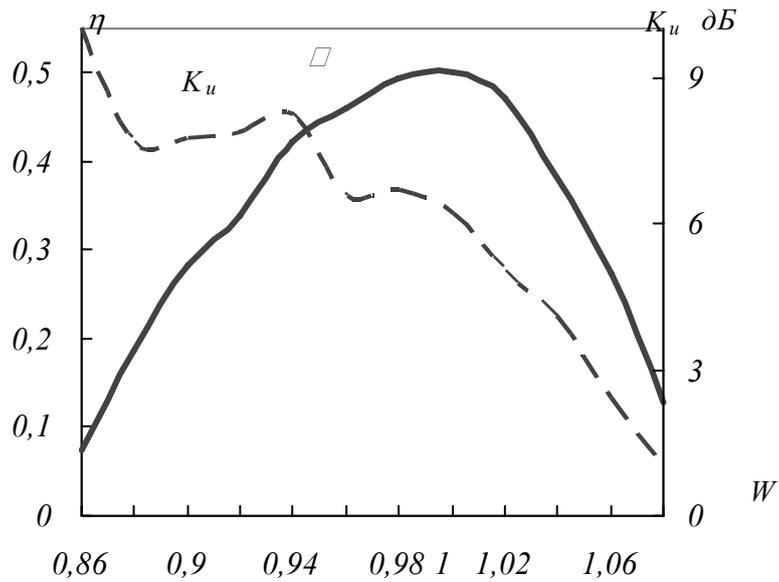


Рис. 5.32. Энергетические частотные характеристики варианта 1

На рис. 5.33 представлены аналогичные предыдущим характеристики варианта 2. Полоса по уровню  $\eta = 0,4$  составляет 17 %.

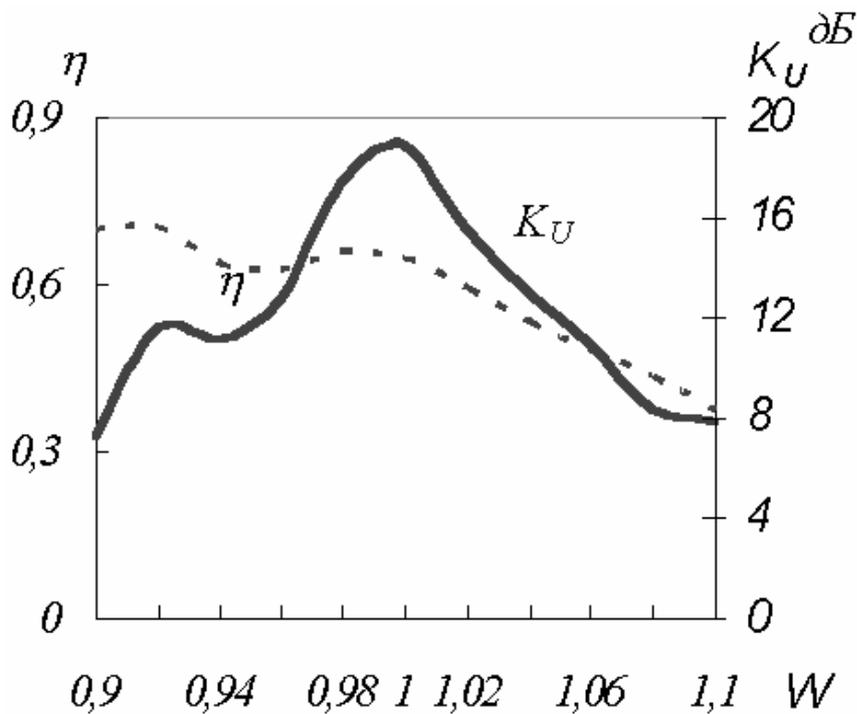


Рис. 5.33. Частотные характеристики варианта 2

При эквивалентных с предыдущим вариантом условиях, т.е. при  $\eta \geq 0,51$ , полоса составляет 14 % , т.е. несколько ниже, чем в предыдущем варианте,

что объясняется нерегулярностью и большей длиной области взаимодействия. Последнее определяет заметно более высокий коэффициент усиления  $K_u$ . Однако, как и в предыдущем варианте,  $K_u$  неравномерен и значительно возрастает к низкочастотному краю полосы. Причина этого та же, что и в предыдущем варианте: приближение к резонансу канавок гофрированного волновода.

На рис. 5.34 изображены аналогичные предыдущим энергетические полосовые характеристики варианта 3.

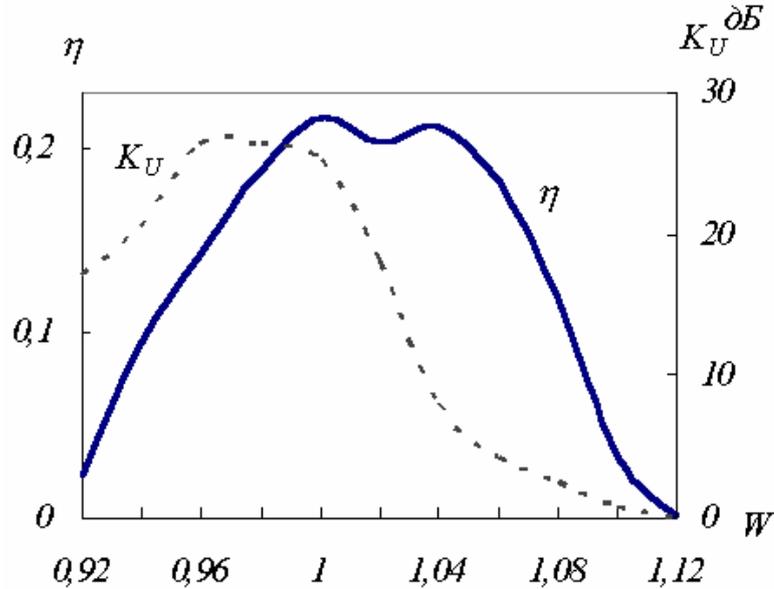


Рис. 5.34. Частотные характеристики варианта 3

Этот вариант отличается от предыдущих существенно меньшими  $\beta_0$  и  $I_0$ . Между тем  $g_0$  даже больше, чем в предыдущих вариантах, а  $r_0$  такое же, т.е. электронный поток расположен несколько дальше от поверхности зубьев замедляющей системы. В результате из-за значительно большего замедления (и соответствующего увеличения поперечной постоянной распределения поля) поле в области электронного потока существенно снижается. Перемещение резонанса канавок ближе к центральной частоте ( $g_1 = 0,627$ ), лишь значительно повышает  $K_u$  в низкочастотной части полосы усиления, но в то же время при отстройке от резонанса  $K_u$  резко понижается с увеличением  $W$ . Полоса данного варианта по уровню  $\eta = 0,1$  составляет 15%. Однако из-за неравномерности  $K_u(W)$  и его резкого уменьшения в высокочастотной части реальная полоса должна быть уменьшена до 10 %.

На рис. 5.35 представлены фазочастотные характеристики рассматриваемых вариантов:  $\Delta\varphi(W)$ ,  $\Delta\varphi$  – набег фазы сигнала при  $W$  относительно  $W = 1$ .

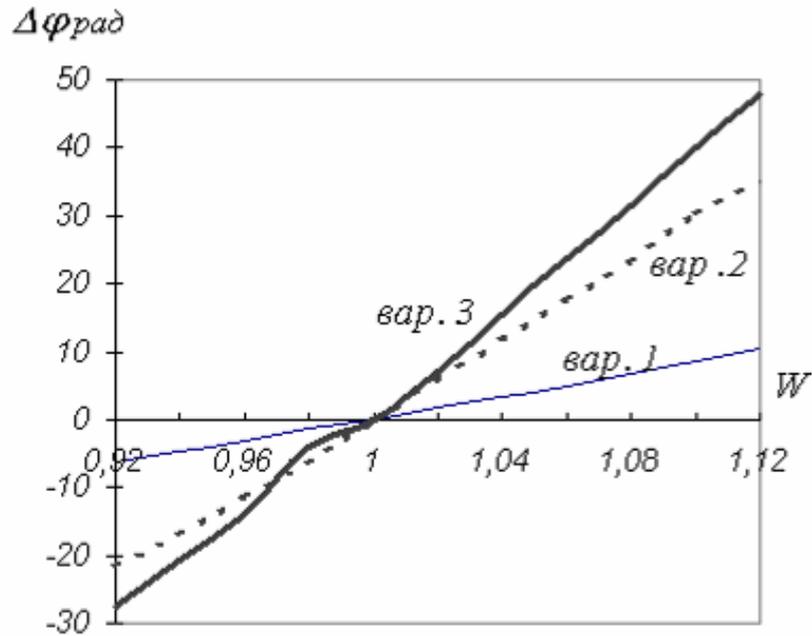


Рис. 5.35. Фазочастотные характеристики вариантов 1,2,3

Фазочастотные зависимости для первого и второго вариантов оказываются линейными во всей полосе частот. В третьем варианте в области  $W = 0,96 - 1$  обнаруживается нелинейность, которая связана с резонансом канавки гофрированного волновода. Разный наклон фазочастотных зависимостей определяется разной электрической длиной (по замедленной длине волны) области взаимодействия вариантов: вариант 1 – наиболее «короткий», вариант 3 – наиболее «длинный». Важно отметить, что в оптимизированном нерегулярном варианте 2 линейность фазочастотной характеристики не нарушается.

### 5.6. Нелинейные процессы многочастотной фазовой группировки электронов в ЛБВ-О с замедляющей системой в виде гофрированного волновода

#### *Математическая модель*

Математическая модель ЛБВ на гофрированном волноводе в многочастотном режиме базируется на общих уравнениях возбуждения произвольно нерегулярного волновода негармоническими источниками, приведенных в п. 5.1, и методе фундаментальной частоты [28]. В соответствии с этим методом все спектральные составляющие входного сигнала, а также продукты их нелинейного взаимодействия эквидистантны и рассматриваются как гармоники «фундаментальной частоты»  $\Omega$ , т.е.  $\omega_n = n\Omega$ . Обозначим опорную частоту в полосе усиления  $\omega_0 = n\Omega$ , для других гармонических составляющих сигнала  $\omega_m = m\Omega$  присвоим индекс «m» для

всех переменных, относящихся к ним. Введем, как и в п. 5.1, следующие предположения и упрощения:

1. Электронный поток трубчатый, симметричный и достаточно тонкий, чтобы не учитывать динамическое расслоение.
2. Все процессы азимутально симметричные.
3. Профиль волновода выбирается так, что везде в области взаимодействия волны  $E_{0i}$  ( $i \geq 2$ ) на частоте  $\omega$  оказываются закритическими.
4. Потери в стенках волновода игнорируются.

При таких условиях, исходя из общей теории возбуждения произвольно-нерегулярного волновода с круговым сечением негармоническими источниками (п. 5.1), приходим к следующей самосогласованной системе нелинейных уравнений релятивистской ЛБВ-О:

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_m &= -\frac{\dot{V}_m}{m\nu_{01}g^2} - \frac{\dot{A}_m}{L_0\nu_{01}g} \frac{dg}{dT} - \frac{j\sigma n}{me_{01}\pi\nu_{01}^2g^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_0\left(\frac{r_0}{g}\right) \cdot e^{-jm\Omega t_i}; \\
 \frac{d\dot{A}_m}{dT} &= L_0 \left( \frac{m}{n} \dot{V}_m + \nu_{01} \dot{C}_m \right); \\
 \frac{d\dot{V}_m}{dT} &= -\frac{m}{n} L_0 \dot{A}_m \left[ 1 + \frac{1}{3L_0^2} \left( \frac{dg}{dT} \right)^2 (4 + \nu_{01}^2) \right] - \nu_{01} \frac{m \cdot \dot{C}_m}{n} g \frac{dg}{dT} - \\
 &\quad - \frac{j\sigma}{e_{01}\nu_{01}\pi g} \frac{dg}{dT} \sum_{i=1}^N \frac{r_0}{g} J_1\left(\frac{r_0}{g}\right) e^{-jm\Omega t_i}; \\
 \frac{d\beta_i}{dT} &= -\frac{L_0}{\beta_i \gamma_i^3} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \left[ J_0\left(\frac{r_0}{g}\right) \dot{C}_m + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r_0}{L_0\nu_{01}g^2} \frac{dg}{dT} \dot{A}_m J_1\left(\frac{r_0}{g}\right) \right] e^{-jm\Omega t_i} - S_q F_{qi} \right\}; \\
 \frac{d\Omega t_i}{dT} &= \frac{L_0}{n \cdot \beta_i}.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Начальные условия к системе (5.47) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \beta_i(0) &= \beta_0, \quad \Omega \cdot t_i = 2\pi i/N, \quad g(0) = g_0, \quad \frac{dg}{dT}(0) = 0; \\
 \operatorname{Re} \dot{A}_m(0) &= \left[ K_{0m} \frac{(\gamma_0 - 1) \sigma \chi m}{\pi e_{01} n} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{Im} \dot{A}_m(0) = 0; \\
 \operatorname{Re} \dot{V}(0) &= 0, \quad \operatorname{Im} \dot{V}(0) = -\left( \frac{n}{m} \right)^2 \chi \operatorname{Re} \dot{A}_m(0);
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - g_0^{-2}}, \quad \dot{C}_m = -\frac{g_0}{v_{01}} \dot{V}_m(0).$$

В (5.47), (5.48) приняты обозначения, аналогичные принятым для (5.1). Кроме того, здесь  $K_{0m} = P_{exm} / P_0$ ,  $P_{exm}$  – мощность входного сигнала,  $P_0 = V_0 |I_0|$ ,  $e_{01} = \frac{1}{2} \cdot J_1^2(v_{01})$ ,  $S_q \cdot F_{qi}$  – силовая составляющая пространственного заряда:  $S_q = 3,517 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{|I_0|}{\beta_0 r_0}$ ;

$$F_{qi} = \frac{1}{Ne} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Delta^2}{(\Omega t_i - \Omega t_j)^2 \left[ (\Omega t_i - \Omega t_j)^2 + \Delta^2 \right]}, \quad \Delta = 2 \cdot (v_{01} \cdot (g_0 + 0.5 \cdot g_1) - r_0) / (\beta_0 \cdot n).$$

Профиль волновода задается в виде

$$g(T) = g_0 + g_1 \sin^2(h \cdot T + A_3 \cdot T^3 + A_5 \cdot T^5). \quad (5.49)$$

Общий электронный КПД определяется по формуле (5.10). Волновой КПД на  $m$ -й гармонике  $\Omega$  рассчитывается по формуле

$$\eta_m(T) = \frac{m \cdot \pi \cdot R_0 \cdot e_{011}}{(1 - R_0) \cdot \sigma} \cdot \text{Im} \left[ \dot{A}_m(T) \cdot \dot{V}_m^*(T) - \dot{A}_m(0) \cdot \dot{V}_m^*(0) \right]. \quad (5.50)$$

Погрешность расчетов определяет дисбаланс КПД  $\Delta$ :

$$\Delta = \eta_e(T) - \sum_m \eta_m(T). \quad (5.51)$$

Коэффициент усиления по мощности может быть определен как

$$K_{um} = 10 \cdot \lg \left( 1 + \eta_{11}^{(1)} / K_{0m} \right). \quad (5.52)$$

Фазовая группировка электронов на  $m$ -й гармонике рабочей частоты оценивается следующей функцией группировки:

$$G_{rm}(T) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{jm\omega_i t} \right|. \quad (5.53)$$

### Многочастотное взаимодействие в регулярной ЛБВ-О

На основе описанной модели были проведены подробные исследования оптимальных многочастотных режимов ЛБВ с регулярной замедляющей системой при  $\beta_0 \cong 0,25$ ,  $I_0 = 2$  А. Исследовались двух-, трех-, четырех- и пятичастотные режимы усиления ЛБВ. Было установлено, что процесс взаимодействия сигналов имеет многокомпонентный характер, на который влияет многочисленный ряд факторов, вступающих в действие еще на линейном этапе взаимодействия. Впервые изучены процессы формирования фазового сгустка электронов и его спектральный состав на различных этапах взаимодействия в многочастотных режимах ЛБВ. Для иллюстрации некоторых особенностей многочастотного взаимодействия ниже приведены следующие примеры.

*Регулярная ЛБВ:* ( $A_3 = A_5 = 0$ ), двухчастотный входной сигнал ( $m_1 = 19$ ;  $m_2 = n = 20$ );  $\beta_0 = 0,2595$ ;  $I_0 = 2$  А; число периодов гофра  $n_v = 54$ ,  $L_0 = 30,73$ ;  $r_0 = 1,45$ ;  $g_0 = 1,139$ ;  $g_{10} = 0,784$ ;  $K_{19} = K_{20} = 0,0005$ ;  $N = 240$  – количество крупных частиц.

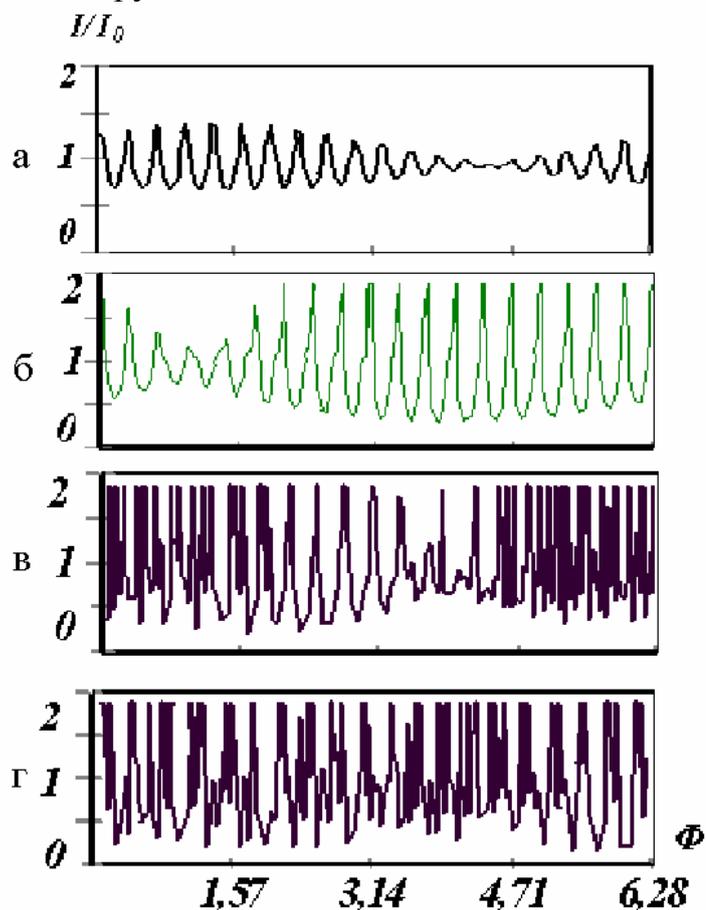


Рис. 5.36. Плотность тока пучка:

а – в сечении  $\Gamma = 0,15$ ; б – в сечении  $\Gamma = 0,4$ ;  
в – в сечении  $\Gamma = 0,7$ ; г – в сечении  $\Gamma = 1,0$

На рис.5.36, а, б, в, г изображены зависимости плотности тока пучка от полной фазы опорной частоты  $\Phi = \Omega t$ , соответственно в сечениях  $T = 0,15$ ;  $0,4$ ;  $0,7$ ;  $1,0$ .

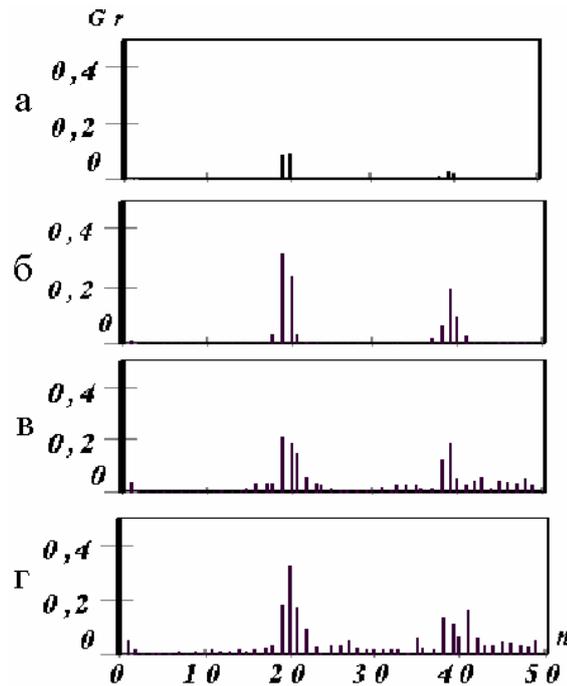


Рис. 5.37. Спектры гармоник тока в электронном пучке:  
а – в сечении  $T = 0,15$ ; б – в сечении  $T = 0,4$ ;  
в – в сечении  $T = 0,7$ ; г – в сечении  $T = 1,0$

На рис. 5.37, а, б, в, г в тех же сечениях приведены спектры гармоник тока в электронном пучке. Сечение  $T = 0,15$  соответствует почти линейному режиму. Здесь, как видно из рис. 5.36, а, за счет интерференции сигналов при равенстве их входных амплитуд имеет место сильная амплитудная модуляция плотности тока сгустков; число сгустков соответствует низшей частоте – их 19. Спектр тока (рис. 5.37, а) еще не содержит интермодуляционных составляющих, появились лишь слабо выраженные гармоники сигналов. В сечении  $T = 0,4$  нелинейность процесса взаимодействия уже существенна: модуляция плотности тока негармонична (рис. 5.36, б), появились интермодуляционные составляющие, гармоника тока на низшей частоте заметно выше (рис. 5.37, б). В сечении  $T = 0,7$  заметны процессы расщепления и фазовой модуляции сгустков: их расположение по  $\Phi$  неэквидистантно, число сгустков возросло (рис. 5.36, в), появляются сильные интермодуляционные составляющие практически во всем спектре  $m = 1 - 50$ , верхняя частота ( $m = 20$ ) превалирует. В сечении  $T = 1,0$  процессы расщепления и фазовой модуляции сгустков выражены еще более отчетливо, число сгустков значительно возросло (рис. 5.36, г), интермодуляционные составляющие практически во всем спектре  $m = 1 - 50$  усилились, верхняя частота ( $m = 20$ ) превалирует. При этом величина группировок в области частот  $m = 40$  по сравнению с сечением  $T = 0,7$  незначительно уменьшилась.

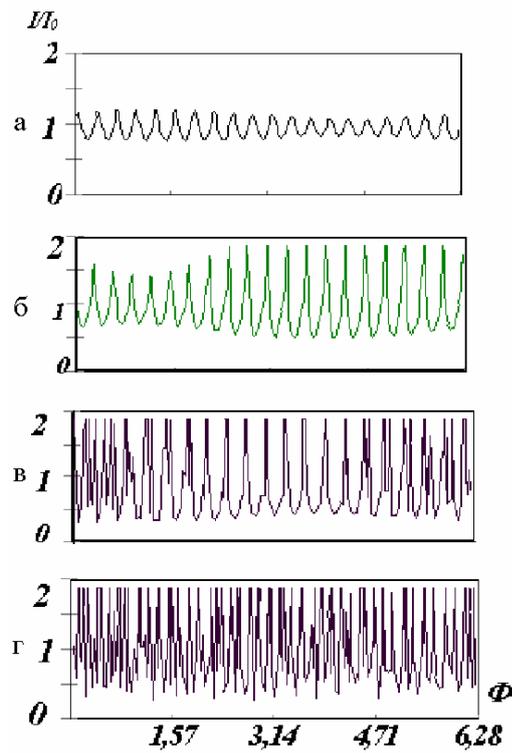


Рис. 5.38. Плотности тока:  
 а – в сечении  $T = 0,15$ ; б – в сечении  $T = 0,4$ ;  
 в – в сечении  $T = 0,7$ ; г – в сечении  $T = 1,0$ .

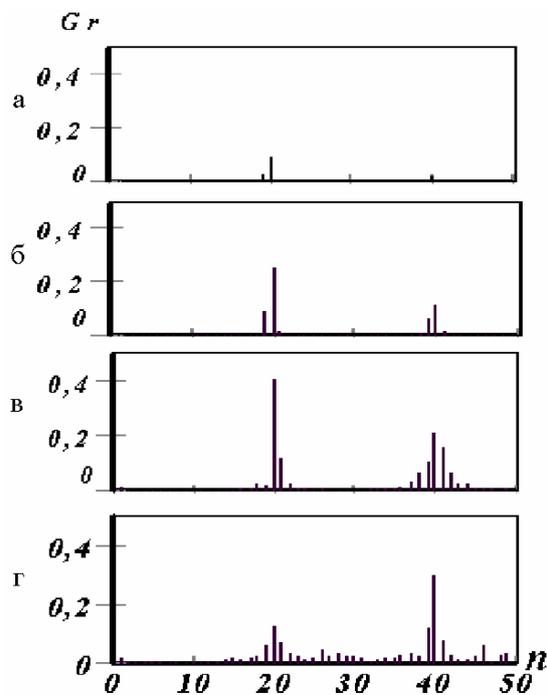


Рис. 5.39. Спектры тока:  
 а – в сечении  $T = 0,15$ ; б – в сечении  $T = 0,4$ ;  
 в – в сечении  $T = 0,7$ ; г – в сечении  $T = 1,0$ .

На рис. 5.38 и 5.39 изображены соответственно зависимости тока и спектры тока в сечениях  $T = 0,15; 0,4; 0,7; 1,0$  для того же варианта ЛБВ при существенно разных уровнях двух входных сигналов:  $K_{19} = 0,00015$ ;  $K_{20} = 0,00057$ ;  $\eta_{\Sigma} = 0,155$ . В этом случае образование спектра интермодуляционных составляющих в токе пучка несколько задерживается и при  $T = 0,4$  только начинает проявляться, хотя нелинейность процесса уже заметна (спектр гармоник в области  $m = 40$ ). Далее, при  $T = 0,7$ ;  $T = 1,0$  в существенно нелинейном режиме картина не отличается от предыдущей: продукты нелинейного взаимодействия занимают весь спектр от  $m = 1$  от 50. Сгустки имеют фазовую модуляцию и число их умножается.

*Нерегулярная релятивистская ЛБВ:* ( $A_3 = 27,810$ ;  $A_5 = 196,5$ ), двухчастотный входной сигнал ( $m_1 = 19$ ;  $m_2 = 20$ ),  $\beta_0 = 0,902$ ;  $I_0 = 64$  А; число периодов гофра  $n_{\gamma} = 146$ ;  $L_0 = 337$ ;  $r_0 = 2,4$ ;  $g_0 = 1,130$ ;  $g_{10} = 0,511$   $K_{19} = 0,03250$ ;  $K_{20} = 0,03250$ ;  $N = 320$  – количество крупных частиц.

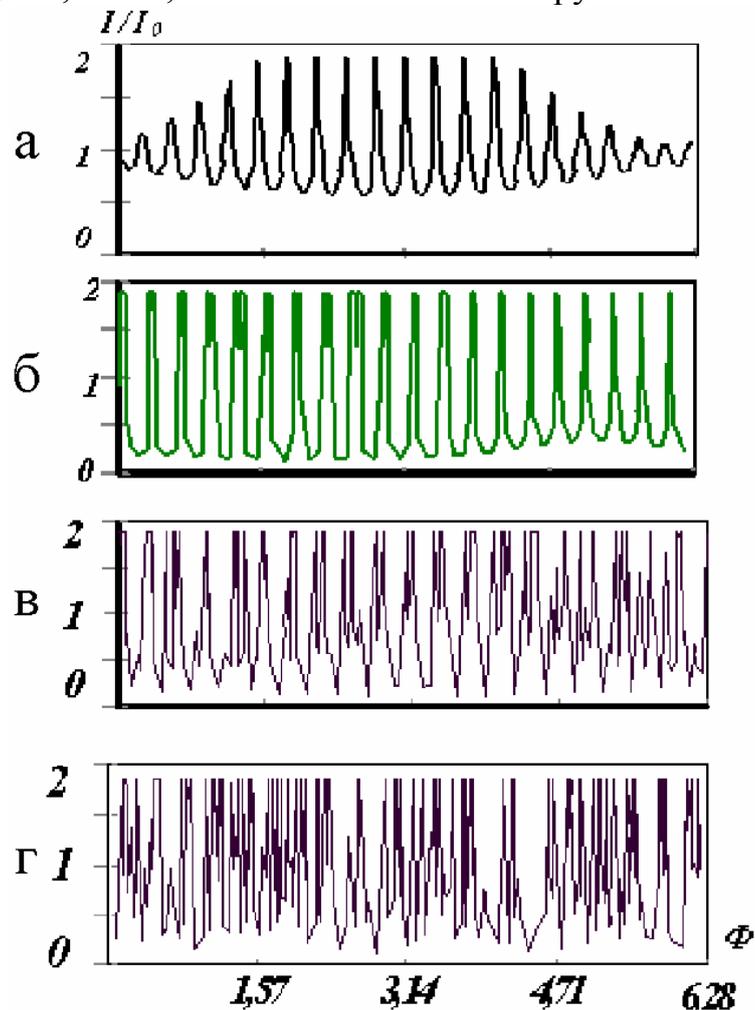


Рис. 5.40. Плотности тока:

а – в сечении  $T = 0,15$ ; б – в сечении  $T = 0,4$ ;  
в – в сечении  $T = 0,7$ ; г – в сечении  $T = 1,0$

На рис. 5.40, а, б, в, г изображены зависимости плотности тока пучка от полной фазы опорной частоты  $\Phi = \Omega t$ , соответственно в сечениях  $T = 0,15$ ;  $0,4$ ;  $0,7$ ;  $1,0$ .

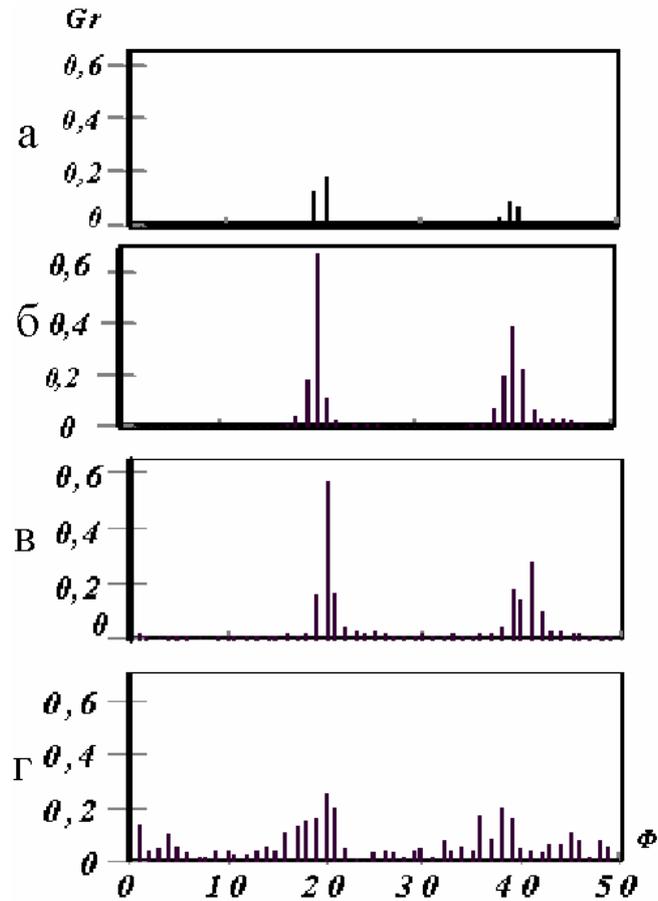


Рис. 5.41. Спектры гармоник в пучке:  
а – в сечении  $T = 0,15$ ; б – в сечении  $T = 0,4$ ;  
в – в сечении  $T = 0,7$ ; г – в сечении  $T = 1,0$

На рис. 5.41, а, б, в, г приведены спектры гармоник  $n\Omega$  в электронном пучке. Как показывают приведенные данные, общий характер процессов многочастотной фазовой группировки остается таким же, как и в слаборелятивистской регулярной ЛБВ. Однако КПД взаимодействия в нерегулярной ЛБВ остается высоким и в многочастотном режиме. В одночастотном режиме КПД этой ЛБВ при оптимальном входном сигнале составляет  $\eta_{\Sigma} = 85\%$  с учетом поля заряда и без учета поля заряда  $\eta_{\Sigma} = 64\%$ .

## Литература

1. Батура М.П., Кураев А.А., Лущицкая И.В., Сеницын А.К. Оптимизация релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных гофрированных волноводах с учётом закритических мод // Доклады БГУИР. 2004. № 4. С. 26-36.
2. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Пустовойт В.И., Сеницын А.К. Нерегулярные волноводы в электронике СВЧ // ЭВиЭС. 2005. Т. 10. № 8. С. 51-58.
3. Братман В.Л., Денисов Г.Г., Коровин С.Д. и др. Релятивистские генераторы миллиметровых волн // Релятивистская высокочастотная электроника. – Горький: ИПФАН, 1984. Вып. 4.
4. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.Н. и др. Физические процессы в многоволновых черенковских генераторах // Релятивистская высокочастотная электроника. – Горький: ИПФАН, 1988. Вып. 5. С. 78-100.
5. Кравченко В.Ф., Кураев А.А. Атомарные функции в задачах оптимизации ЛБВ и ЛОВ 0-типа // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2002. № 3. С. 4-42.
6. Кураев А.А. Возбуждение продольно-нерегулярных волноводов с круглым сечением // Известия АН БССР. Сер. ФТН. 1979. № 1. С. 121-127.
7. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного волновода // Радиотехника. 1997. № 9. С. 13 – 20.
8. Гуринович А.Б., Кураев А.А., Сеницын А.К. Электродинамическая теория ЛБВ-О на гофрированном волноводе с учётом высших гармонических составляющих сигнала // ЭВиЭС. 2000. Т. 5. № 6. С. 11-16.
9. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Оптимизация по КПД релятивистской ЛБВ-О с использованием атомарных функций // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 10. С. 58-71.
10. Закалюкин А.Б., Кураев А.А. Оптимальные по КПД релятивистские ЛБВ-О с замедляющимся периодом и глубиной канавки // РЭ. 2000. Т.45. № 4. С. 499-501.
11. Кураев А.А., Попкова Т.Л. Электродинамическая нелинейная теория релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного волновода // РЭ. 1997. Т. 42. № 10. С.1256-1261.
12. Закалюкин А.Б., Кураев А.А., Попкова Т.Л. Высокоэффективные релятивистские черенковские генераторы на гофрированном волноводе // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1992. № 2. С. 66-73
13. Кураев А.А., Попкова Т.Л. Электродинамическая линейная теория релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного гофрированного волновода // ЭВиЭС. 1997. Т. 2. № 4. С. 67-73

14. Закалюкин А.Б., Кравченко В.Ф., Кураев А.А. Оптимизация по КПД профиля нерегулярной замедляющей системы релятивистской ЛБВ-О с использованием атомарных функций //ЭВиЭС. 1998. Т. 3. № 3. С. 93-96.
15. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука. 1981. 414 с.
16. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: МГУ, 1983.
17. Кураев А.А., Сеницын А.К. Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением. Теория и приложения //ЭВиЭС. 2002. Т. 7. № 3. С. 12-23.
18. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. – М.: Радио и связь, 1986. – 208 с.
19. Колосов С.В., Кураев А.А. Волны в периодических продольно-нерегулярных волноводах //Электромагнитные волны и электронные системы. 1999. Т. 4. № 3. С. 44-49.
- Кураев А.А., Навроцкий А.А., Сеницын А.К. Поля Флоке и волны в периодических продольно-нерегулярных волноводах //Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т.8. № 1. С. 4-9.
- Kurayev A.A., Sinitsyn A.K., Yaromenok S.I. Fields Floke and waves in periodic longitudinal-irregular waveguides with rectangular cross-section //Proc. IVEC. 2003. P. 225-226.
20. Кураев А.А., Сеницын А.К. Оптимизация профиля рупора на симметричных E волнах по характеристике направленности //РЭ. 2006. Т. 51. № 2.
21. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. – М.: Сов. радио, 1957. – 580 с.
22. Рудольф Кюн. Микроволновые антенны. Л.: Судостроение, 1967. – 518 с.
23. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. – Мн.: Бестпринт, 2004. – 375 с.
24. Гуринович А.Б., Кураев А.А., Сеницын А.К. Возбуждение высших гармонических составляющих в нерегулярной ЛБВ-О в полосе частот //ЭВиЭС. 2000. Т.5. № 5. С. 34-39.
25. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
26. Кац А.М., Ильина Е.М., Манькин Н.А. Нелинейные явления в СВЧ-приборах 0-типа с длительным взаимодействием. – М.: Сов. радио, 1975.

## ГЛАВА 6

# УРАВНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАТОРА С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ СТЕНОК

### Введение

Для решения задач моделирования и оптимизации многих приборов и устройств СВЧ, включающих в свой состав объемные резонаторы, принципиально важно использовать точные уравнения возбуждения резонаторов с учетом конечной проводимости стенок. Примером могут служить многорезонаторные клистроны с большим коэффициентом усиления, в которых оптимальная система расстроек резонаторов должна быть указана с высокой точностью. Многие другие устройства также требуют высокой точности расчета характеристик многорезонаторных систем. Работа, в которой впервые были выведены строгие уравнения возбуждения автономных резонаторов с конечной проводимостью стенок [1], показала, что общепринятые уравнения возбуждения объемных резонаторов [2, 3-6] некорректны, причем ошибки, возникающие при их использовании, недопустимо велики. В настоящем разделе приведено обобщение результатов работы [1] на случай, когда резонатор нагружен (имеет связь с внешней нагрузкой).

### 6.1. Постановка задачи

Пусть задан конечный объем  $V$ , ограниченный замкнутой проводящей поверхностью  $S$ , характеризуемой комплексным поверхностным импедансом  $\dot{W}_\sigma$ . В объеме  $V$  заданы гармонические сторонние источники с плотностью стороннего электрического тока  $\dot{\delta}^e = \delta_e^0(r)e^{j\omega t}$  и магнитного тока  $\dot{\delta}^m = \delta_m^0(r)e^{j\omega t}$  (рис. 6.1).

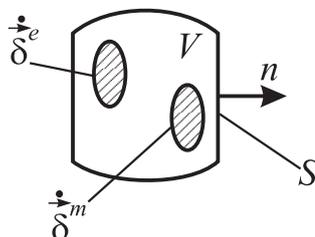


Рис. 6.1. Схема возбуждения резонатора

Будем считать, что потерь в среде, заполняющей резонатор (объем  $V$ ), нет, среда однородна и изотропна, а также недисперсна. Эти условия можно записать в виде

$$\operatorname{Im} \varepsilon_a = \operatorname{Im} \mu_a = 0, \quad \varepsilon_a, \mu_a \neq f(r), \quad \varepsilon_a, \mu_a \neq f(\omega). \quad (6.1)$$

Задача возбуждения резонатора может быть поставлена в виде следующей краевой задачи для неоднородных уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\boldsymbol{\delta}}^e; \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}^m; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S = -W_\sigma [\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_S. \quad (6.3)$$

Решение краевой задачи (6.2), (6.3) естественно искать в виде разложения по собственным колебаниям того же резонатора без потерь (собственным функциям). Коэффициенты разложения можно определить на основе проекционного метода Б.Г. Галеркина.

## 6.2. Свойства собственных функций резонатора

Собственные функции резонатора без потерь являются решениями однородной краевой задачи для уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k &= j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k; \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k &= -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}_k]|_S = 0. \quad (6.5)$$

Докажем некоторые свойства решений краевой задачи (6.4), (6.5).

1. Собственные значения (собственные частоты)  $\omega_k$  – вещественные (ввиду граничного условия (6.5) задача самосопряженная).

Применяя операцию *rot* ко второму уравнению (6.4) и используя первое уравнение, имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k = K_k^2 \dot{\mathbf{E}}_k; \quad K_k = \omega_k^2 \varepsilon_a \mu_a. \quad (6.6)$$

Умножим обе части (6.6) скалярно на  $\dot{\mathbf{E}}_k^*$ :

$$\dot{\mathbf{E}}_k^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_k = k_k^2 \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{E}}_k^*. \quad (6.7)$$

Для преобразованной левой части (6.7) используем тождество

$$\mathbf{E}_k^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_k = \operatorname{div} \left[ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k, \mathbf{E}_k^* \right] + \operatorname{rot} \mathbf{E}_k \operatorname{rot} \mathbf{E}_k^*.$$

Затем проинтегрируем обе части преобразованного уравнения (6.7) по  $V_p$  и воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для первого члена слева. В результате получим

$$\oint_S \left[ \operatorname{rot} \mathbf{E}_k, \mathbf{E}_k^* \right] n dS + \int_{V_p} |\operatorname{rot} \mathbf{E}_k|^2 dV_p = K_k^2 \int_{V_p} |\mathbf{E}_k|^2 dV_p.$$

В соответствии с граничным условием (6.5) для  $E_k^*$  первый член оказывается нулевым, в результате чего имеем

$$K_k^2 = \omega_k^2 \varepsilon_a \mu_a = \frac{\int_{V_p} |\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}|^2 dV}{\int_{V_p} |\dot{\mathbf{E}}_k|^2 dV}. \quad (6.8)$$

Поскольку в (6.8) правая часть вещественная и положительная, при действительных и положительных  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  (что оговорено выше) получаем искомый результат:  $\omega_k$  вещественны.

2. Собственные функции ортогональны в  $V_p$  с границей S.

Рассмотрим наряду с системой (6.4) для  $E_k$ ,  $H_k$  комплексно-сопряженную систему для собственных функций  $E_q^*$ ,  $H_q^*$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* &= -j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^*; \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* &= j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^*. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Умножим обе части второго уравнения (6.9) скалярно на  $H_k$ , а первое уравнение (6.4) – на  $E_q^*$  и сложим получившееся:

$$\dot{\mathbf{H}}_k \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k = \operatorname{div} \left[ \dot{\mathbf{H}}_k, \dot{\mathbf{E}}_q^* \right] = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k - j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*. \quad (6.10)$$

Проинтегрируем (6.10) по  $V_p$  с границей S. Применяя в левой части теорему Остроградского–Гаусса и граничное условие для  $E_q^*$  на S (6.5), имеем

$$\omega_q \int_{V_p} \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV = \omega_k \int_{V_p} \varepsilon_a \mathbf{E}_k \mathbf{E}_q^* dV. \quad (6.11)$$

Аналогично, используя второе уравнение (6.4) и первое из (6.9), нетрудно получить

$$\omega_k \int_{V_p} \mu_a \mathbf{H}_k \mathbf{H}_q^* dV = \omega_q \int_{V_p} \varepsilon_a \mathbf{E}_k \mathbf{E}_q^* dV. \quad (6.12)$$

Из системы (6.11), (6.12) находим

$$\left(\omega_k^2 - \omega_q^2\right) h_{kq} = 0, \quad \left(\omega_k^2 - \omega_q^2\right) e_{kq} = 0, \quad (6.13)$$

$$h_{kq} = \int_{V_p} \mu_a \mathbf{H}_k \mathbf{H}_q^* dV, \quad e_{kq} = \int_{V_p} \varepsilon_a \mathbf{E}_k \mathbf{E}_q^* dV.$$

При невырождении собственных колебаний идеального резонатора, т.е. при  $\omega_q \neq \omega_k$ , из (6.13) следует свойство ортогональности собственных функций:

$$h_{kq} = e_{kq} = \delta_{kq} N_k; \quad (6.14)$$

$$N_k = \int_{V_p} \mu_a H_{km}^2 dV_p = \int_{V_p} \varepsilon_a E_{km}^2 dV_p > 0;$$

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 0, & k \neq q, \\ 1, & k = q. \end{cases}$$

Далее  $N_k$  будем именовать нормой собственного колебания с номером  $K$ .

### 3. Собственные функции соленоидальны.

Собственные функции  $\{\mathbf{E}'_k, \mathbf{H}'_k\}$ , для которых собственное значение  $\omega_k \neq 0$ , являются, как нетрудно показать, соленоидальными, т.е.  $\operatorname{div} \mathbf{E}'_k = \operatorname{div} \mathbf{H}'_k = 0$ . Действительно, применяя операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям уравнений (6.4) и учитывая, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} A \equiv 0$ , получаем

$$\omega_k \varepsilon_a \operatorname{div} \mathbf{E}_k = 0, \quad \omega_k \mu_a \operatorname{div} \mathbf{H}_k = 0.$$

Таким образом, те собственные функции, которые соответствуют собственным колебаниям идеального резонатора и для которых  $\omega_k \neq 0$ , являются соленоидальными.

Однако сторонние источники могут иметь структуру разомкнутых электрических и магнитных токов (штыри, электронные сгустки, щели и т.д.). В этом случае имеются сторонние электрические и магнитные заряды, и для искоемых полей должны выполняться 3 и 4 уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho^e}{\varepsilon_a}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{\rho^m}{\mu_a}. \quad (6.15)$$

Представим искомые поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде сумм  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''$ , где составляющие с одним штрихом – соленоидальные, с двумя – потенциальные. Для них соответственно выполняются условия

$$\operatorname{div}\mathbf{E}' = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}' = 0;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'' = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}'' = 0.$$

Исходя из первого и второго уравнений Максвелла, заключаем, что  $\mathbf{E}''$  и  $\mathbf{H}''$  могут быть ненулевыми только при  $\omega_k = 0$ , т.е. они описываются уравнениями электростатики и магнитостатики. Поэтому решения для них следует искать в виде

$$\mathbf{E}'' = -\operatorname{grad}\phi^e, \quad \mathbf{H}'' = -\operatorname{grad}\phi^m.$$

Подставляя эти выражения в (6.15), получаем уравнения для потенциалов  $\phi^e$  и  $\phi^m$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi^e &= -\frac{\rho^e(\omega)}{\varepsilon_a}; \quad \nabla^2\phi^m = -\frac{\rho^m(\omega)}{\mu_a}; \\ \phi^e \Big|_{S=0}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} \Big|_{S=0}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Задача (6.16) имеет известные решения, и на ней не будем останавливаться. Обратимся к расчету только соленоидальных полей  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ , которые в дальнейшем для упрощения будем записывать без штрихов.

### 6.3. Уравнение возбуждения резонатора

Система  $\{\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k\}$  – полная на множестве соленоидальных  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  в  $V_p$ . Используя ее как базис в  $L_2(V)$ , представим искомые соленоидальные  $E$ ,  $H$  в виде

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_s \dot{A}_s \dot{\mathbf{E}}_s; \quad \dot{\mathbf{H}} = \sum_s \dot{B}_s \dot{\mathbf{H}}_s. \quad (6.17)$$

Для определения коэффициентов  $\dot{A}_s, \dot{B}_s$  в (6.17) воспользуемся проекционным методом Галеркина. Заменим исходную систему (9.2) эквивалентной ей системой проекционных равенств:

$$\int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}'' - \vec{\delta}^e \right) \dot{\mathbf{E}}_p^* dV = 0,$$

$$\int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}'' + \vec{\delta}^m \right) \dot{\mathbf{H}}_p^* dV = 0, \quad p=1,2,\dots$$

Воспользуемся следующими преобразованиями:

$$-j\omega \varepsilon_a \mathbf{E}'' \mathbf{E}_p^* = \frac{\omega}{\omega_p} (\mathbf{E}'', \text{rot} \mathbf{H}_p^*) = \frac{\omega}{\omega_p} (\mathbf{H}_p^* \text{rot} \mathbf{E}'' + \text{div}[\mathbf{H}_p^* \mathbf{E}'']) =$$

$$= \frac{\omega}{\omega_p} \text{div}[\mathbf{H}_p^* \mathbf{E}''],$$

поскольку  $\text{rot} \mathbf{E}'' \equiv 0$ . Тогда

$$-\int_{V_p} j\omega \varepsilon_a \mathbf{E}'' \mathbf{E}_p^* dV_p = \frac{\omega}{\omega_p} \int_{V_p} \text{div}[\mathbf{H}_p^* \mathbf{E}''] dV_p = \frac{\omega}{\omega_p} \oint_{S_p} [\mathbf{H}_p^* \mathbf{E}''] \mathbf{n} dS_p =$$

$$= -\frac{\omega}{\omega_p} \oint_{S_p} [\mathbf{n} \mathbf{E}''] \mathbf{H}_p^* dS_p = 0,$$

поскольку  $[\mathbf{n} \mathbf{E}'']|_{S_p} = 0$ .

Аналогичным образом можно показать, что

$$\int_{V_p} j\omega \mu_a \mathbf{H}'' \mathbf{H}_p^* dV_p = \frac{\omega_p}{\omega} \oint_{S_p} [\mathbf{n} \mathbf{E}_p^*] \mathbf{H}'' dS_p = 0, \quad \text{поскольку } [\mathbf{n} \mathbf{E}_p^*]|_{S_p} = 0.$$

Таким образом, исходные проекционные соотношения редуцируются к следующим:

$$\int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} - \vec{\delta}^e \right) \dot{\mathbf{E}}_p^* dV_p = 0,$$

$$\int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} + \vec{\delta}^m \right) \dot{\mathbf{H}}_p^* dV_p = 0, \quad p=1,2,\dots \quad (6.18)$$

Непосредственно подставлять (6.17) в (6.18), однако, нельзя: ряды (6.17) сходятся вблизи S неравномерно ввиду различия граничных условий (6.3) и

(6.5), и поэтому дифференциальные операторы *rot* к этим рядам неприменимы. Фактически с помощью рядов (6.17) ищется обобщенное решение краевой задачи (6.2), (6.3): граничные условия (6.3) удовлетворяются в среднем [7]. Для того чтобы обойти эту трудность, сделаем следующие преобразования в правых частях (6.18):

$$\dot{\mathbf{E}}_p^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_p^* + \operatorname{div} \left[ \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_p^* \right];$$

$$\dot{\mathbf{H}}_p^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_p^* - \operatorname{div} \left[ \dot{\mathbf{H}}_p^*, \dot{\mathbf{E}} \right];$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_p^* = j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{H}}_p^*, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_p^* = -j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{E}}_p^*;$$

$$\int_V \operatorname{div} \left[ \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_p^* \right] dV = \oint_{S_p} \left[ \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_p^* \right] \vec{n} dS = - \oint_{S_p} \left[ \mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}}_p^* \right] \dot{\mathbf{H}} dS = 0;$$

$$\int_V \operatorname{div} \left[ \dot{\mathbf{H}}_p^*, \dot{\mathbf{E}} \right] dV = \oint_{S_p} \left[ \dot{\mathbf{H}}_p^*, \dot{\mathbf{E}} \right] \vec{n} dS = \dot{W}_\sigma^0 \oint_{S_p} \left[ \mathbf{n} [\mathbf{n}, \mathbf{H}] \right] \dot{\mathbf{H}}_p^* dS.$$

Таким образом, дифференциальные операции над рядами (6.17) исключаются, что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения  $\dot{A}_p, \dot{B}_p$  (используется свойство ортогональности (6.14)):

$$j\omega_p N_p \dot{B}_p - j\omega N_p \dot{A}_p = V_p^e; \quad (6.19)$$

$$-j\omega_p N_p \dot{A}_p + j\omega N_p \dot{B}_p + \sum_S S_{sp} \dot{B}_s = -V_p^m;$$

$$V_p^e = \int_{V_p} \delta^e \dot{\mathbf{E}}_p^* dV, \quad V_p^m = \int_{V_p} \delta^m \dot{\mathbf{H}}_p^* dV;$$

$$S_{sp} = \dot{W}_\sigma^0 \oint_S \dot{\mathbf{H}}_{s\tau} \dot{\mathbf{H}}_{p\tau}^* dS.$$

Исключая из (6.19)  $\dot{A}_p$ , получаем систему связанных уравнений относительно  $\dot{B}_p$ :

$$j \cdot \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega} \dot{B}_p N_p - \sum_s S_{sp} \dot{B}_s = V_p^m + \frac{\omega_p}{\omega} V_p^e, \quad (6.20)$$

$$\dot{A}_p = \frac{\omega_p}{\omega} \dot{B}_p + j \frac{V_p^e}{\omega N_p}, \quad p=1,2,\dots$$

Введем величину собственной омической добротности  $p$ -колебания резонатора  $Q_p$ :

$$Q_p = \frac{\omega_p}{\text{Re}W_\sigma^0} \frac{\int \mu_a H_{pm}^2 dV}{\oint_S H_{p\tau m}^2 dS} = \frac{\omega_p N_p}{\text{Re}S_{pp}}. \quad (6.21)$$

Аналогично определим «взаимную» добротность колебаний  $p$  и  $s$  как

$$Q_{sp} = \frac{\omega_p N_p}{\text{Re}S_{sp}} = \frac{\omega_p}{\text{Re}W_\sigma^0} \frac{\int \mu_a H_{pm}^2 dV}{\oint_S H_{s\tau} H_{p\tau}^* dS}.$$

Учитывая, что волновое сопротивление металлической стенки при достаточно большой проводимости  $\sigma$  может быть представлено как

$$W_\sigma^0 = \sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\left(\varepsilon_{a\sigma} - j \frac{\sigma}{\omega}\right)}} \approx (1+j) \sqrt{\frac{\mu_\sigma \omega}{2\sigma}} = (1+j)Z_0,$$

$$\text{запишем } \dot{S}_{sp} = (1+j)S_{sp}^0; \quad S_{sp}^0 = Z_0 \oint_S \dot{\mathbf{H}}_{s\tau} \dot{\mathbf{H}}_{p\tau}^* dS.$$

Тогда можно ввести комплексные величины:

$$\dot{Q}_p^{-1} = Q_p^{-1}(1+j), \quad Q_p^{-1} = \frac{S_{pp}^0}{\omega_p N_p};$$

$$\dot{Q}_{sp}^{-1} = Q_{sp}^{-1}(1+j), \quad Q_{sp}^{-1} = \frac{S_{sp}^0}{\omega_p N_p}.$$

Теперь система уравнений связанных вынужденных колебаний (6.20) принимает вид

$$j(\omega_p^2 - \omega^2)\dot{B}_p - \sum_S \omega \omega_p Q_{sp}^{-1}(1+j)\dot{B}_s = (\omega V_p^m + \omega_p V_p^e)N_p^{-1}; \quad (6.22)$$

$$\dot{A}_p = \frac{\omega_p}{\omega}\dot{B}_p + j\frac{V_p^e}{\omega N_p}, \quad p=1,2,\dots$$

В случае, когда  $\omega \approx \omega_p$  (условия резонанса) и при очень малых  $Q_{sp}^{-1}$  (хорошая проводимость стенок), можно считать все  $\dot{B}_s$  пренебрежимо малыми по сравнению с  $\dot{B}_p$ . Тогда система (6.22) редуцируется к одному уравнению для колебания с  $s = p$ . Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{B}_p &= -j \frac{\omega V_p^m + \omega_p V_p^e}{\left[\omega_p^2 - \omega^2 + \omega \omega_p (j-1)Q_p^{-1}\right]N_p}; \\ \dot{A}_p &= -j \frac{\omega_p V_p^m + \left[\omega - \omega_p (j-1)Q_p^{-1}\right]V_p^e}{\left[\omega_p^2 - \omega^2 + \omega \omega_p (j-1)Q_p^{-1}\right]N_p}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Из (6.23) следует, что точный резонанс имеет место при  $\omega^2 + \frac{\omega \omega_p}{Q_p} - \omega_p^2 = 0$ , т.е. резонансная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{\omega_p^2}{4Q_p^2} - \frac{\omega_p}{2Q_p}} \approx \omega_p \left(1 - \frac{1}{2Q_p}\right).$$

Полученный результат (6.23) и его следствия существенно отличаются от приведенных в известных учебниках [2, 3-6] и др.

Дело в том, что в имеющихся учебниках задача возбуждения резонатора ставится некорректно, как задача возбуждения идеального резонатора (т.е. в отсутствие потерь). При этом нарушаются условия теоремы единственности. Полученный результат «обобщается» путем замены вещественной собственной частоты исходной самосопряженной краевой задачи на комплексную собственную частоту реального колебания с потерями. Естественно, при такой замене комплексный характер импеданса стенок игнорируется и смещение частоты собственного колебания по отношению к идеальному (при нулевом импедансе) случаю за счет реактивной части импеданса оказывается неучтенным, как и другие сопутствующие эффекты.

Полученные уравнения возбуждения (6.20) и формулы (6.23) соответствуют исходной задаче (9.2), (9.3) и относятся к случаю возбуждения

автономного (ненагруженного) резонатора. Такие случаи встречаются в технике СВЧ: холостые резонаторы в группирователях клистронов, гироклистронов, гироконов, гиротонов, параметрических усилителей и т.д.; стабилизирующие резонаторы электронных и твердотельных генераторов; резонаторы специальных фильтров СВЧ и т.д. Однако в общем случае резонаторы связаны с внешней нагрузкой, т.е. нагружены. Нагрузку в принципе можно учесть в интегралах  $S_{sp}$  в (6.19) как излучение через часть поверхности стенок резонатора  $S$ .

Пусть поверхность стенок резонатора  $S = S_{\sigma} + S_H$ , где  $S_{\sigma}$  – поверхность металлических стенок с проводимостью  $\sigma$ ,  $S_H$  – поверхность окна связи с нагрузкой, на которой заданы импедансные условия  $\dot{W}_H^0 = (\dot{E}_{\tau H} / \dot{H}_{\tau H})|_{S_H}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{S}_{sp} &= \dot{W}_{\sigma}^0 \int_{S_{\sigma}} \dot{\mathbf{H}}_{s\tau} \dot{\mathbf{H}}_{p\tau}^* dS_{\sigma} + \int_{S_H} \dot{W}_H(S_H) \dot{\mathbf{H}}_{s\tau} \dot{\mathbf{H}}_{p\tau}^* dS_H = \dot{S}_{sp\sigma} + \dot{S}_{spH} = \\ &= (1+j)S_{sp\sigma}^0 + (1+j\alpha_H)S_{spH}^0. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{\dot{S}_{sp}}{\omega_p N_p} &= (1+j)Q_{sp\sigma}^{-1} + (1+j\alpha_H)Q_{spH}^{-1}, \\ \text{где } Q_{sp\sigma}^{-1} &= \frac{S_{sp\sigma}^0}{\omega_p N_p}, Q_{spH}^{-1} = \frac{S_{spH}^0}{\omega_p N_p}. \end{aligned}$$

При этом система уравнений связанных вынужденных колебаний (6.22) трансформируется к виду

$$j(\omega_p^2 - \omega^2)\dot{B}_p - \sum_S \omega \omega_p [(1+j)Q_{sp\sigma}^{-1} + (1+j\alpha_H)Q_{spH}^{-1}] \dot{B}_s = (\omega V_p^m + \omega_p V_p^e) N_p^{-1};$$

$$\dot{A}_p = \frac{\omega_p}{\omega} \dot{B}_p + jV_p^e / \omega N_p, p = 1, 2, \dots$$

(6.24)

В случае резонанса ( $\omega \approx \omega_p$ ),  $Q_{sp}^{-1} \rightarrow 0$  имеем

$$\dot{B}_p = -j \frac{\omega V_p^m + \omega_p V_p^e}{(\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega\omega_p[(1+j)Q_{p\sigma}^{-1} + (1+j\alpha_H)Q_{pH}^{-1}])N_p}; \quad (6.25)$$

$$\dot{A}_p = j \frac{V_p^e(\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega\omega_p[(1+j)Q_{p\sigma}^{-1} + (1+j\alpha_H)Q_{pH}^{-1}]) - \omega_p\omega V_p^m - \omega_p^2 V_p^e}{\omega(\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega\omega_p[(1+j)Q_{p\sigma}^{-1} + (1+j\alpha_H)Q_{pH}^{-1}])N_p}.$$

Аналогично можно учесть и дифракционные потери, если резонатор открытый. В этом случае  $S$  следует представить как  $S = S_\sigma + S_H + S_K$ , где  $S_K$  – поверхность каустики с соответствующими импедансами:  $\dot{W}_\sigma^0, \dot{W}_H^0, \dot{W}_K^0$ .

Полученные строгие уравнения возбуждения объемных резонаторов с учетом импеданса стенок типа (6.22)-(6.23) или (6.24)-(6.25) позволяют корректно моделировать как электронные приборы СВЧ, так и устройства СВЧ, включающие объемные резонаторы с конечной проводимостью стенок.

### Литература

1. Кураев А.А., Попкова Т.Л. Возбуждение резонаторов с конечной проводимостью стенок. – Доклады НАН Беларуси, 1998, т. 42, №2, с. 120-122.
2. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: «Сов. радио», 1973.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989.
5. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: «Сов. радио», 1979.
6. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971.
7. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: Изд. МГУ, 1983.

## ГЛАВА 7

# ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СТЕНОК ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ

### Введение

В современных математических моделях мощных релятивистских приборов СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами – релятивистских черенковских генераторов типа ЛБВ и ЛОВ [1,2], гиротронов [3,4], гиро-ЛБВ [4], гиротронов [5] – используются уравнения возбуждения, полученные при граничном условии на металлической стенке нерегулярного волновода в преобразованной системе координат вида

$$[\rho_0, \dot{\mathbf{E}}] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (7.1)$$

$\vec{\rho}_0$  – нормаль к поверхности регулярного цилиндра.

Условие (7.1) соответствует бесконечной проводимости стенки, что означает пренебрежение омическими потерями в электродинамической системе. Естественно возникает вопрос об адекватности полученных на основе таких моделей оптимальных вариантов, особенно в диапазоне миллиметровых волн и в квазирезонансных режимах с высокой дифракционной добротностью системы. Ниже этот вопрос решается в отношении релятивистских ЛБВ-ЛОВ на основе общей теории возбуждения нерегулярных волноводов с конечной проводимостью стенки.

### 7.1. Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного полого волновода с учетом конечной проводимости стенок

Вместо условия (7.1) используем приближенное граничное условие-Щукина–Леонтовича [6]:

$$[\rho_0 \dot{\mathbf{E}}] \Big|_{\rho=1} = -\vec{G} [\rho_0 [\rho_0 \dot{\mathbf{H}}]] \Big|_{\rho=1}. \quad (7.2)$$

$$\text{Здесь } \vec{G} = \dot{W}_\sigma^0 \sqrt{\frac{g}{g^{11}}} \begin{pmatrix} \rho [g^{11} g^{22} - (g^{12})^2] & -g^{12} g^{13} \\ -g^{12} g^{13} & \frac{1}{\rho} [g^{11} - (g^{13})^2] \end{pmatrix},$$

где  $\dot{W}_\sigma^0 = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu_\sigma}{\sigma}}$  – волновое сопротивление стенки волновода,  $\mu_\sigma$  – магнитная проницаемость стенки,  $\sigma$  – ее удельная проводимость,  $f$  – рабочая частота;  $\rho = r/b(z)$ ,  $b(z)$  – внутренняя граница нерегулярного волновода; компоненты метрического тензора  $g^{ij}$  имеют вид:

$$\sqrt{g} = b^2 \rho, \quad g^{11} = \left(1 + (\partial b / \partial z)^2 \rho^2\right) / b^2, \quad g^{22} = 1 / (b\rho)^2, \quad g^{33} = 1, \\ g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{13} = -\partial b / \partial z \rho / b = g^{31}, \quad g^{23} = g^{32} = 0.$$

Теперь задачу сформулируем так: при граничном условии (7.2) решить уравнения Максвелла в преобразованной системе координат для полных компонент поля  $\vec{E}^p, \vec{H}^p$  и токов  $\vec{\delta}^p, \vec{\delta}^{pM}$ .

$$\text{rot} \mathbf{H}^p = \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} + \hat{g} \boldsymbol{\delta}^p, \quad \text{rot} \mathbf{E}^p = -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \mathbf{H}^p}{\partial t} - \hat{g} \boldsymbol{\delta}^{pM}. \quad (7.3)$$

$$\text{Здесь } \hat{g} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} g^{11} / \rho & g^{12} & g^{13} / \rho \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ g^{13} / \rho & g^{32} & g^{33} / \rho \end{pmatrix}.$$

Физические компоненты векторов  $\mathbf{H}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\delta}$  связаны с расчетными  $\mathbf{H}^p, \mathbf{E}^p, \boldsymbol{\delta}^p, \boldsymbol{\delta}^{pM}$  следующим образом (на примере  $\vec{H}$ ):

$$H_r = H_\rho^p / b; \quad H_\varphi = H_\varphi^p / b; \quad H_z = H_z^p - H_\varphi^p \partial b / \partial z \rho / b.$$

Подчеркнем, что в отличие от [1,2] компоненты  $\mathbf{H}^p, \mathbf{E}^p, \boldsymbol{\delta}^p, \boldsymbol{\delta}^{pM}$  содержат как вихревые, так и потенциальные (в общем случае содержащие разрывы) составляющие. В дальнейшем будут использованы процедуры, исключющие почленное дифференцирование (операция *rot*) рядов, представляющих  $\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^p$ .

Представим решение задачи (7.2), (7.3) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_t^p = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{tm} e^{jm\omega t}; \quad \mathbf{E}_z^p = \text{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{zm} e^{jm\omega t};$$

Где

$$\dot{\mathbf{E}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^e(z) \mathbf{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^M(z) \mathbf{e}_{ni}^M \right), \quad \dot{\mathbf{E}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \mathbf{a}^3.$$

$$\mathbf{H}_t^p = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{tm} e^{jm\omega t}; \quad \mathbf{H}_z^p = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{H}}_{zm} e^{jm\omega t};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{B}_{mni}^e(z) \mathbf{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^M(z) \mathbf{h}_{ni}^M \right), \quad \dot{\mathbf{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \mathbf{a}^3.$$

$$\text{Здесь} \quad \varphi_{ni} = J_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi}, \quad \psi_{ni} = J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{e}_{ni}^e = \rho_0 \nu_{ni} J'_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \varphi_0 j \frac{n}{\rho} J_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{e}_{ni}^M = \rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} - \varphi_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{h}_{ni}^e = -\rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \varphi_0 \nu_{ni} J'_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi};$$

$$\mathbf{h}_{ni}^M = \rho_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \varphi_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi}; \quad J_n(\nu_{ni}) = 0, \quad J'_n(\mu_{ni}) = 0.$$

Амплитуды  $\dot{A}_{mni}^e(z)$ ,  $\dot{A}_{mni}^M(z)$ ,  $\dot{B}_{mni}^e(z)$ ,  $\dot{B}_{mni}^M(z)$ ,  $\dot{C}_{mni}(z)$ ,  $\dot{H}_{mni}(z)$  определим из следующих проекционных равенств, эквивалентных (7.3):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \operatorname{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \mathbf{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{\mathbf{g}} \delta^p \mathbf{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \operatorname{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \mathbf{e}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{\mathbf{g}} \delta^p \mathbf{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \right\} \cdot \varphi_{-ni} \mathbf{a}^3 \rho d\rho d\varphi = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \widehat{\mathbf{g}} \delta^{pM} \mathbf{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{7.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \widehat{\mathbf{g}}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \mathbf{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta^{pM} \mathbf{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{7.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \widehat{\mathbf{g}}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \mathbf{h}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta^{pM} \mathbf{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{7.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \widehat{\mathbf{g}}^{-1} \text{rot}(\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{tm} + \mathbf{H}_{zm}) \right\} \psi_{-ni} \mathbf{a}^3 \rho d\rho d\varphi = 0 \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta^{pM} \mathbf{a}^3 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

Правые части уравнений возбуждения (7.4)–(7.9) (интегралы возбуждения) записаны в общем случае, когда координаты источников могут меняться во времени, т.е.  $\rho = \rho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $z = z(t)$ . Причем, эти зависимости могут содержать и негармонические составляющие.

Левые части уравнений возбуждения (7.4)–(7.9), однако, должны быть преобразованы с целью исключения операций дифференцирования  $\text{rot}(\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) = \text{rot}\dot{\mathbf{H}}_m$  и  $\text{rot}(\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{zm}) = \text{rot}\dot{\mathbf{E}}_m$ , поскольку  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{H}_m$  содержат разрывные в общем случае потенциальные составляющие и, кроме того, ряды, представляющие эти функции, имеют разрыв на границе  $\rho = 1$ , поскольку базисные функции удовлетворяют граничному условию (7.1), а не (7.2). Преобразования выполним с использованием следующих векторных тождеств:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\mathbf{H}_m) \mathbf{e}_{-ni}^e &= \mathbf{H}_m \text{rote}_{-ni}^e + \text{div} \left[ \mathbf{H}_m, \mathbf{e}_{-ni}^e \right], \\
\text{rot}(\mathbf{H}_m) \mathbf{e}_{-ni}^M &= \mathbf{H}_m \text{rot} \mathbf{e}_{-ni}^M + \text{div} \left[ \mathbf{H}_m, \mathbf{e}_{-ni}^M \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
rot(\mathbf{H}_m)\mathbf{z}_0\varphi_{-ni} &= \mathbf{H}_m rot(\mathbf{z}_0\varphi_{-ni}) + div[\mathbf{H}_m, \mathbf{z}_0\varphi_{-ni}], \\
rot(\mathbf{E}_m)\mathbf{h}_{-ni}^e &= \mathbf{E}_m rot(\mathbf{h}_{-ni}^e) + div[\mathbf{E}_m, \mathbf{h}_{-ni}^e], \\
rot(\mathbf{E}_m)\mathbf{h}_{-ni}^M &= \mathbf{E}_m rot(\mathbf{h}_{-ni}^M) + div[\mathbf{E}_m, \mathbf{h}_{-ni}^M], \\
rot(\mathbf{E}_m)\mathbf{z}_0\varphi_{-ni} &= \mathbf{E}_m rot(\mathbf{z}_0\varphi_{-ni}) + div[\mathbf{E}_m, \mathbf{z}_0\varphi_{-ni}].
\end{aligned}$$

Воспользуемся также следующим интегральным тождеством (доказательство опустим):

$$\int_{S_{\perp}} div \mathbf{A} dS_{\perp} = \int_{S_{\perp}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \mathbf{z}_0 dS_{\perp} + \oint_l \mathbf{A} n dl. \quad (7.10)$$

Тождество (7.10) специализировано для нашей задачи, в которой  $S_{\perp} = const$  ( $\rho = 1 = const$ ).

Учтем также выражения базисных функций с индексами  $(-ni)$  и векторные тождества для них.

$$\begin{aligned}
\varphi_{-ni} &= (-1)^n J_n(v_{ni}\rho) e^{-jn\varphi}, \quad \psi_{-ni} = (-1)^n J_n(\mu_{ni}\rho) e^{-jn\varphi}, \\
\mathbf{e}_{-ni}^e &= (-1)^n \left\{ \rho_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) - \varphi_0 j \frac{n}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\mathbf{e}_{-ni}^M &= (-1)^{n+1} \left\{ \rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) + \varphi_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\mathbf{h}_{-ni}^e &= (-1)^n \left\{ \rho_0 \frac{jn}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) + \varphi_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\mathbf{h}_{-ni}^M &= (-1)^n \left\{ \rho_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) - \varphi_0 j \frac{n}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
J_n(v_{ni}) &= 0, \quad J_n(\mu_{ni}) = 0.
\end{aligned}$$

Для перечисленных функций имеют место тождества

$$\begin{aligned}
rot \mathbf{e}_{-ni}^e &= 0, \\
rot \mathbf{h}_{-ni}^M &= 0, \\
rot(\mathbf{z}_0\psi_{-ni}) &= \mathbf{e}_{-ni}^M, \\
rot \mathbf{e}_{-ni}^M &= \mathbf{z}_0 (-1)^n \mu_{ni}^2 \psi_{-ni}, \\
rot \mathbf{h}_{-ni}^e &= -\mathbf{z}_0 (-1)^n v_{ni}^2 \varphi_{-ni}.
\end{aligned}$$

При  $\rho = 1$  с учетом (7.2) имеем:

$$[\mathbf{E}_m, \vec{z}_0 \psi_{-ni}] \boldsymbol{\rho}_0 = \vec{G}(\mathbf{H}_{m\varphi} + \mathbf{H}_{mz}) \mathbf{z}_0 \psi_{-ni},$$

$$[\mathbf{E}_m, \mathbf{h}_{-ni}^e] \boldsymbol{\rho}_0 = \vec{G}(\mathbf{H}_{m\varphi} + \mathbf{H}_{mz}) \mathbf{h}_{-ni}^e,$$

$$[\mathbf{E}_m, \mathbf{h}_{-ni}^M] \boldsymbol{\rho}_0 = \vec{G}(\mathbf{H}_{m\varphi} + \mathbf{H}_{mz}) \mathbf{h}_{-ni}^M,$$

$$[\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{e}_{-ni}^e] = 0,$$

$$[\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{e}_{-ni}^M] = 0,$$

$$[\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{z}_0 \varphi_{-ni}] = 0.$$

С использованием (7.10) и перечисленных тождеств получаем систему уравнений возбуждения в следующей математически корректной форме:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{H}}_{tm}, \mathbf{e}_{-ni}^e \right] \vec{z}_0 - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g} (\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{zm}) \mathbf{e}_{-ni}^e \right\} \rho d\rho d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \delta^p \mathbf{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ (-1)^n \mu_{ni}^2 \dot{H}_{mz} \psi_{-ni} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{H}}_{tm}, \mathbf{e}_{-ni}^M \right] \mathbf{z}_0 - j\omega\varepsilon_0 \hat{g} (\dot{\mathbf{E}}_{tm} + \dot{\mathbf{E}}_{zm}) \mathbf{e}_{-ni}^M \right\} \rho d\rho d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \delta^p \mathbf{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -\dot{\mathbf{H}}_{tm} \mathbf{h}_{-ni}^e - j\omega\varepsilon_0 \hat{g} (\mathbf{E}_{tm} + \mathbf{E}_{zm}) \mathbf{z}_0 \varphi_{-ni} \right\} \rho d\rho d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \delta^p \mathbf{z}_0 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -\dot{E}_{zm} (-1)^n v_{ni}^2 \varphi_{-ni} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{E}}_{tm}, \mathbf{h}_{-ni}^e \right] \vec{z}_0 + \right. \\ \left. + jm\omega\mu_0 \hat{g} (\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) \mathbf{h}_{-ni}^e \right\} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi} \vec{G}(\dot{\mathbf{H}}_{m\varphi} + \dot{\mathbf{H}}_{mz}) \mathbf{h}_{-ni}^e \Big|_{\rho=1} d\varphi = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \delta^{pM} \mathbf{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{E}}_{tm}, \mathbf{h}_{-ni}^M \right] \vec{z}_0 + jm\omega\mu_0 \hat{g} (\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) \mathbf{h}_{-ni}^M \right\} \rho d\rho d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \vec{G}(\dot{\mathbf{H}}_{m\varphi} + \dot{\mathbf{H}}_{mz}) \mathbf{h}_{-ni}^M \Big|_{\rho=1} d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \widehat{g} \delta^{pM} \mathbf{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t, \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \dot{\mathbf{E}}_{tm} \mathbf{e}_{-ni}^M + jm\omega\mu_0 \widehat{g} (\dot{\mathbf{H}}_{tm} + \dot{\mathbf{H}}_{zm}) \mathbf{z}_0 \psi_{-ni} \right\} \rho d\rho d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \vec{G}(\dot{\mathbf{H}}_{m\varphi} + \dot{\mathbf{H}}_{mz}) \mathbf{z}_0 \psi_{-ni} \Big|_{\rho=1} d\varphi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \widehat{g} \delta^{pM} \mathbf{z}_0 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Система уравнений возбуждения (7.11) – (7.16) отличается от системы (4.36) – (4.41) не только тем, что в ней учтены потери в стенках волновода, но и своей математически корректной структурой, позволившей представить полное поле, возбуждаемое в нерегулярном волноводе заданной системой источников  $\delta(t)$  и  $\delta^M(t)$  и включающее как динамические, так и квазистатические составляющие. Поэтому даже при игнорировании потерь в стенках ( $\dot{W}_\sigma = 0$ ) система (7.11) – (7.16) предпочтительнее системы уравнений возбуждения (4.36) – (4.41).

Преобразования, выполненные здесь в отношении уравнений возбуждения нерегулярного полого волновода, легко осуществимы и для случая нерегулярного коаксиального волновода и нерегулярного волновода с прямоугольным сечением. Схема таких преобразований идентична приведенной выше.

## 7.2. Самосогласованные нелинейные уравнения для релятивистских черенковских генераторов на $E_{0i}$ -модах

Рассмотрим случай  $n = 0$ . Теперь

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\rho m} &= -\sum_{i=1}^M \dot{A}_{mi}(z) J_1(\nu_{0i} \rho), \\ \dot{E}_{zm} &= -\sum_{i=1}^M \dot{C}_{mi}(z) J_0(\nu_{0i} \rho), \\ \dot{B}_{\varphi m} &= -j \sum_{i=1}^M \dot{V}_{mi}(z) J_1(\nu_{0i} \rho). \end{aligned}$$

Используя (7.11)–(7.16) и законы сохранения заряда, приходим к следующим безразмерным уравнениям возбуждения:

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} = (mW\dot{V}_{mi} + v_{0i}\dot{C}_{mi}) + (1-j)2S_{\sigma} \frac{\sqrt{1+(\partial b/\partial z)^2}}{b} \sum_k \dot{V}_{mk} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})}, \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{V}_{mi}}{dz} = & -mW \left\{ \dot{A}_{mi} + \left(\frac{\partial b}{\partial z}\right)^2 \left[ \dot{A}_{mi} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{v_{0i}^2}\right) + \sum_{k \neq i} \frac{4(v_{0i}^2 + v_{0k}^2)}{(v_{0i}^2 - v_{0k}^2)^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right] - \right. \\ & \left. -b \frac{\partial b}{\partial z} \left( -\frac{\dot{C}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2v_{0k}}{v_{0i}^2 - v_{0k}^2} \cdot \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{C}_{mk} \right) \right\} + \\ & + \frac{G_0}{e_{0i}b} \left( \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_1 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \left( \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}} - \frac{r_l}{b} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \right) j e^{-jmW\theta_l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{mi} = & -\frac{v_{0i}\dot{V}_{mi}}{mWb^2} + \frac{\partial b}{b\partial z} \times \left( -\frac{\dot{A}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2v_{0i}}{v_{0k}^2 - v_{0i}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right) - \\ & - \frac{jG_0}{mWe_{0i}b^2} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_0 \left( v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) e^{-jmW\theta_l}. \end{aligned}$$

Уравнения движения крупных частиц

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dP_{rl}}{dz} &= \frac{1}{\beta_{zl}} \left( \frac{\gamma_l \beta_{\phi l}^2}{r_l} - E_{rl} - \beta_{\phi l} F_z + \beta_z B_{\phi} \right); \\ \frac{dP_{\phi l}}{dz} &= \frac{1}{\beta_{zl}} \left( -\frac{\gamma_l \beta_{rl} \beta_{\phi l}}{r_l} - E_{\phi} - \beta_z F_r + \beta_r F_z \right); \\ \frac{dP_{zl}}{dz} &= \frac{1}{\beta_{zl}} (-E_z - \beta_r B_{\phi} + \beta_{\phi} F_r); \\ \frac{dr_l}{dz} &= \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}}; \quad \frac{d\theta_l}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}}; \\ \mathbf{P}_l &= \gamma_l \boldsymbol{\beta}_l; \quad \gamma_l = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}_l^2}} = \sqrt{1+P_{rl}^2 + P_{\phi l}^2 + P_{zl}^2} \end{aligned} \right. \quad (7.18)$$

$$W\theta_l(0) = \frac{2\pi}{N}(l-0.5); \quad l=1\dots N; \quad \beta_l(0) = \beta_0; \quad r_l(0) = r_0.$$

Выражение физических ВЧ-полей через расчетные амплитуды с учетом полей пространственного заряда:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{1}{b} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1\left(\nu_{oi} \frac{r}{b}\right) \operatorname{Re}\left(\dot{A}_{mi} e^{jmW\theta}\right) - S_{qr}; & E_\varphi = 0; \\ E_z = \operatorname{Re}\left[ \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_0\left(\nu_{oi} \frac{r}{b}\right) \dot{C}_{mi} \cdot e^{jmW\theta} + \frac{r}{b^2} \frac{\partial b}{\partial z} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1\left(\nu_{oi} \frac{r}{b}\right) \dot{A}_{mi} \cdot e^{jmW\theta} \right]; \\ B_\varphi = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1\left(\nu_{oi} \frac{r}{b}\right) \operatorname{Re}\left(-j\dot{V}_{mi} e^{jmW\theta}\right). \end{cases}$$

Магнитостатическое фокусирующее поле

$$\begin{cases} F_r \cong -\frac{1}{2} r \frac{\partial F_0(z)}{\partial z} + \frac{1}{16} r^3 \frac{\partial^3 F_0(z)}{\partial z^3}; \\ F_z \cong F_0(z) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2 F_0(z)}{\partial z^2}; & F_0 = \frac{B'_0(z)e}{m_0 \omega_0}; \end{cases}$$

$B'_0(z)$  – распределение z-составляющей индукции магнитного поля вдоль оси

Безразмерные параметры:

$$e_{0i} = 0,5 J_1^2(\nu_{oi}), \quad G_0 = \frac{eI_0}{\pi \epsilon_0 m_0 c^3}; \quad S_\sigma = \frac{W_\sigma^0}{(1+j)\mu_a c} = \sqrt{\frac{\pi W}{\sigma \lambda_0 \mu_a c}};$$

$$S_{qr} = \frac{G_0}{2r} \left( \frac{1}{\beta_{z0}} - \beta_{z0} \right).$$

Здесь приняты следующие основные соотношения между безразмерными и размерными переменными:

$$(r, z, b, L) = (r', z', b', L') \omega_0 / c; \quad W = \omega / \omega_0; \quad \theta = \omega_0 t; \quad \beta_l = \mathbf{v}_{el} / c;$$

$$\vec{E} = \vec{E}' / E_m; \quad \vec{B} = \vec{B}' c / E_m; \quad E_m = m_0 \omega_0 c / e.$$

Сформулируем граничные условия для амплитуд  $\dot{A}(z)$ ,  $\dot{V}(z)$  в (7.17). Предполагаем, что при  $z \leq 0$  и  $z \geq L$  волновод регулярный. Обозначим амплитуды прямой и встречной  $E_{0m}$ - волн регулярного волновода как

$$\dot{e}_{0mi}^\pm \text{ для } z \leq 0, \quad \dot{e}_{Lmi}^\pm \text{ для } z \geq L.$$

Тогда общие условия для амплитуд распространяющихся  $E_{0i}$ -волн на границах отрезка нерегулярного волновода запишем в виде:

$$\dot{A}_{mi}(0) = \left( \dot{e}_{0mi}^+ - \dot{e}_{0mi}^- \right) \cdot j k_{0i}^e, \quad \dot{V}_{mi}(0) = \left( \dot{e}_{0mi}^+ + \dot{e}_{0mi}^- \right) \cdot W; \quad (7.19)$$

$$\dot{A}_{mi}(L) = (\dot{e}_{Lmi}^+ - \dot{e}_{Lmi}^-) \cdot jk_{0i}^e, \quad \dot{V}_{mi}(L) = (\dot{e}_{0mi}^+ + \dot{e}_{0mi}^-) \cdot W$$

$$k_{0i}^e = \sqrt{1 - (v_{0i}/b)^2}$$

Заметим, что для корректной постановки задачи для (7.17) достаточно выбрать только два из 4 уравнений (7.19).

При решении краевой задачи (7.19) на входе ЭДС задается амплитуда прямой волны  $\dot{e}_{0mi}^+$ , а на выходе контролируется величина амплитуды встречной волны  $\dot{e}_{Lmi}^-$  (при условии согласования  $\dot{e}_{Lmi}^- = 0$ ). Если из (7.19) исключить  $\dot{e}_{Lmi}^-$  или  $\dot{e}_{0mi}^+$ , то граничные условия для амплитуд распространяющихся  $E_{0i}$ -волн можно записать в следующем, более удобном при моделировании приборов виде:

$$\begin{aligned} W \cdot \dot{A}_{mi}(0) + jk_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(0) &= jk_{0i}^e W \cdot 2\dot{e}_{0mi}^+, \\ -W \cdot \dot{A}_{mi}(L) + jk_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(L) &= jk_{0i}^e W \cdot 2\dot{e}_{Lmi}^-. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Эти соотношения так же могут быть использованы для определения амплитуд прямой и встречной волн на регулярных участках волновода.

Граничные условия для амплитуд закритических  $E_{0i}$ -волн имеют вид:

$$W\dot{A}_{mi}(0) + k_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(0) = 0; \quad -W\dot{A}_{mi}(L) + k_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(L) = 0. \quad (7.21)$$

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода, в выбранных переменных имеет вид:

$$P(z) = \sum_{mi} e_{0i} \cdot \text{Im} \left[ \dot{A}_{mi}(z) \cdot \dot{V}_{mi}^*(z) \right].$$

На регулярных участках, а также в точках волновода, где  $\partial b / \partial z = 0$ , мощности прямой и обратной волн в выбранных безразмерных переменных выражаются следующим образом:

$$P^\pm = \sum_i e_{0i} \cdot \text{Im} \left[ \left( \dot{A}_{mi} \pm \frac{j}{k_{0i}^e} \frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} \right) \left( \dot{V}_{mi} \pm \frac{j}{k_{0i}^e} \frac{d\dot{V}_{mi}}{dz} \right)^* \right].$$

Эффективность взаимодействия оценивается величиной волнового КПД, представляющего отношение мощности переносимой электромагнитной волной через поперечные z-сечения отрезка  $[0, z]$  волновода к мощности электронного пучка:

$$\eta_{vmi} = \frac{\text{Im}\left(\dot{A}_{mi}(z)\dot{V}_{mi}^*(z)\right) - \text{Im}\left(\dot{A}_{mi}(0)\dot{V}_{mi}^*(0)\right)}{(\gamma_0 - 1)G_0 / e_{0i}}. \quad (7.22)$$

Профиль нерегулярного гофрированного волновода задается по формулам (5.7), (5.8).

### 7.3. Тестовые расчеты

Прежде чем переходить к проверке оптимальных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ, полученных ранее без учета потерь в стенках электродинамической системы, необходимо протестировать полученную систему уравнений возбуждения. Это можно сделать, используя классическую теорию затухания  $E_{0i}$ -волн в регулярных волноводах [7-9]. При этом уместно обратить внимание на следующее. Следует различать понятия «собственные волны» и «нормальные волны» регулярного волновода. Собственные волны – это частные решения уравнений Максвелла вне источников, удовлетворяющие приближенным граничным условиям Щукина–Леонтовича на стенках волновода. Нормальные волны – частные решения, полученные при условии (7.1) на стенках волновода. Последние и представлены в полученной здесь системе уравнений возбуждения. Нормальные волны также используются при расчете затухания в классической литературе. Собственные волны энергетически независимы, как показано в [10]. Нормальные же волны в волноводе с конечной проводимостью стенок оказываются связанными, что следует как из общей системы (7.11) – (7.16), так и специализированной для  $E_{0i}$ -волн (7.17). В классической же литературе по электродинамике затухание нормальных волн рассматривается как затухание изолированных волн, что, вообще говоря, некорректно. Но для доминантной  $E_{01}$ -волны при радиусе волновода и рабочей частоте, соответствующих условиям закритичности  $E_{0i}$ -волн ( $i \geq 2$ ) это приближение может считаться приемлемым. Поэтому рассчитанный в таком приближении коэффициент затухания нормальной  $E_{01}$ -волны может служить ориентиром для проверки системы (7.17) при  $G_0 = 0$  и  $b = b_0 = const$ .

На рис. 7.1 приведены результаты расчета затухания  $E_{01}$ -волны при  $b_0 = 3,5$ ;  $\lambda = 3,2$  см (для усиления эффекта импеданса границы в приведенных расчетах  $\sigma$  по сравнению со значением для меди  $\sigma = 5,6 \times 10^7$  сим/м уменьшена до  $\sigma = 30$  сим/м). Волновод согласован на правом конце; на левом конце  $e_{01}^+ = 0,39$ ;  $e_{0i>1}^+ = 0$ .

Как видно из рис. 7.1, амплитуды закритических  $E_{02}, E_{03}$  волн, возбуждаемых в волноводе, пренебрежимо малы. Поэтому коэффициент затухания, рассчитанный по (7.17), практически совпадает по величине с тем,

что приведен в литературе [7-9] для рассматриваемых параметров,  $\alpha_{01} = S_{\sigma} / b_0^r k_{01}^e = 0,079 \text{ см}^{-1}$ .

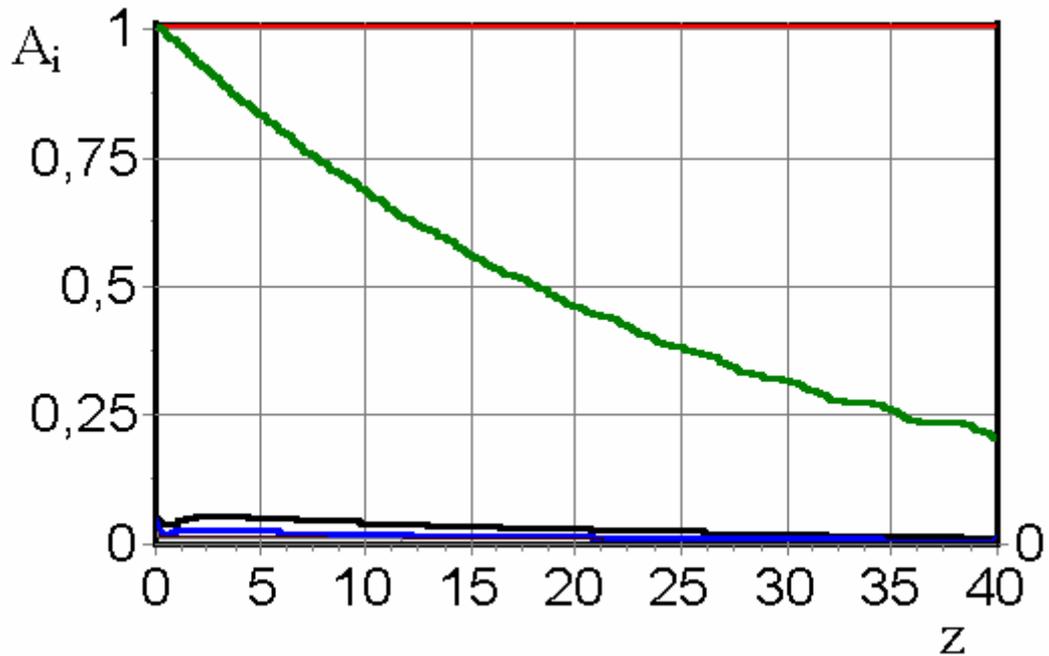


Рис. 7.1.  $b=3,5; e_{01}=0,39$

На рис. 7.2 приведены характеристики варианта с  $b_0 = 6; e_{01}^+ = 0,185; e_{0i>1}^+ = 0$  и тех же значениях  $\lambda, \sigma$ . Теперь волна  $E_{02}$  – распространяющаяся. Как видно из рис. 7.2, волна  $E_{02}$  периодически возбуждается из-за связи с волной  $E_{01}$ . Периодичность возбуждения  $E_{02}$  связана с разностью фазовых скоростей волн  $E_{01}$  и  $E_{02}$ .

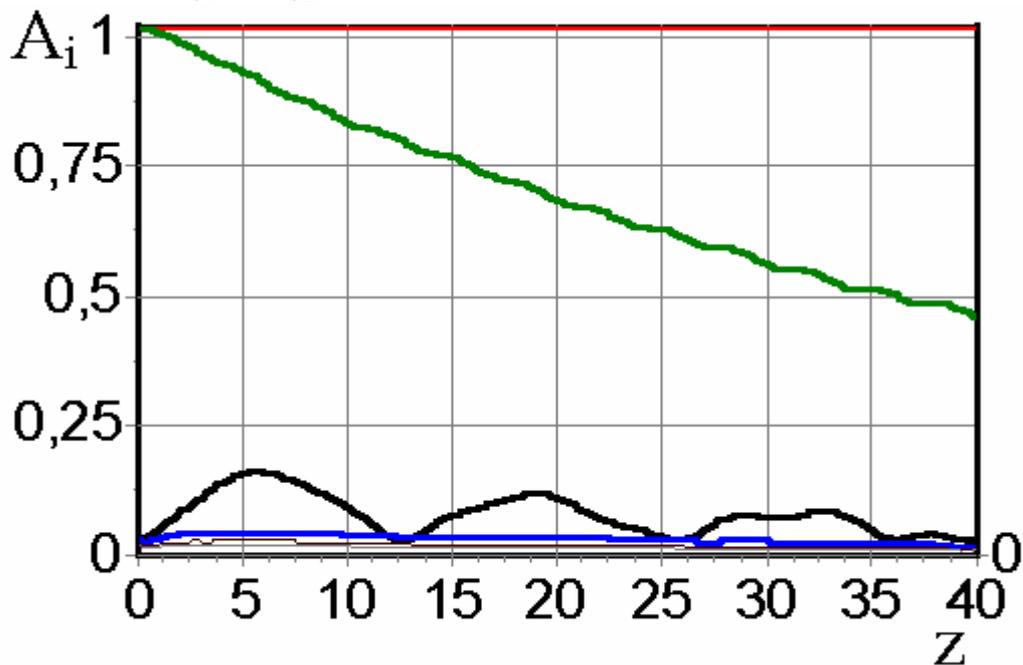


Рис. 7.2.  $b=6; e_{01}=0,185$

На рис. 7.3 приведены результаты расчета для варианта с  $b_0 = 6$ ;  $e_{01}^+ = 0$ ;  $e_{02}^+ = 0,42$ , остальные параметры – те же. Теперь волна  $E_{02}$  возбуждает основную волну  $E_{01}$ . Возбуждение ее также имеет периодический характер, связанный с периодичностью преобразования энергии из  $E_{02}$  в  $E_{01}$  и обратно за счет разности их фазовых скоростей.

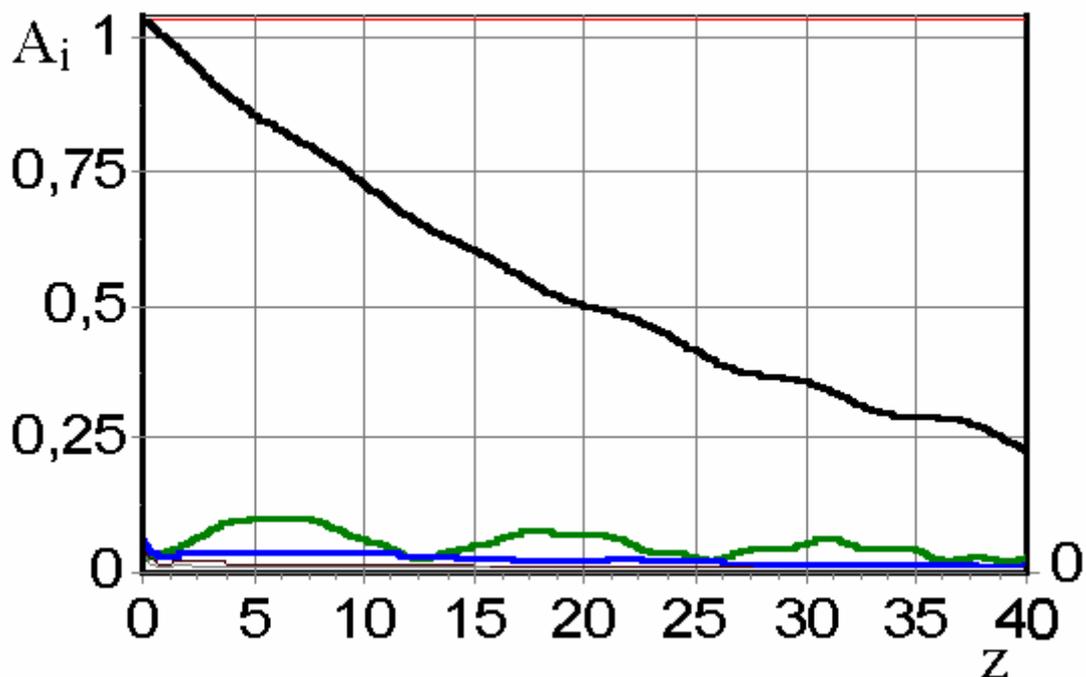


Рис. 7.3.  $b=6$ ;  $e_{02}=0,42$

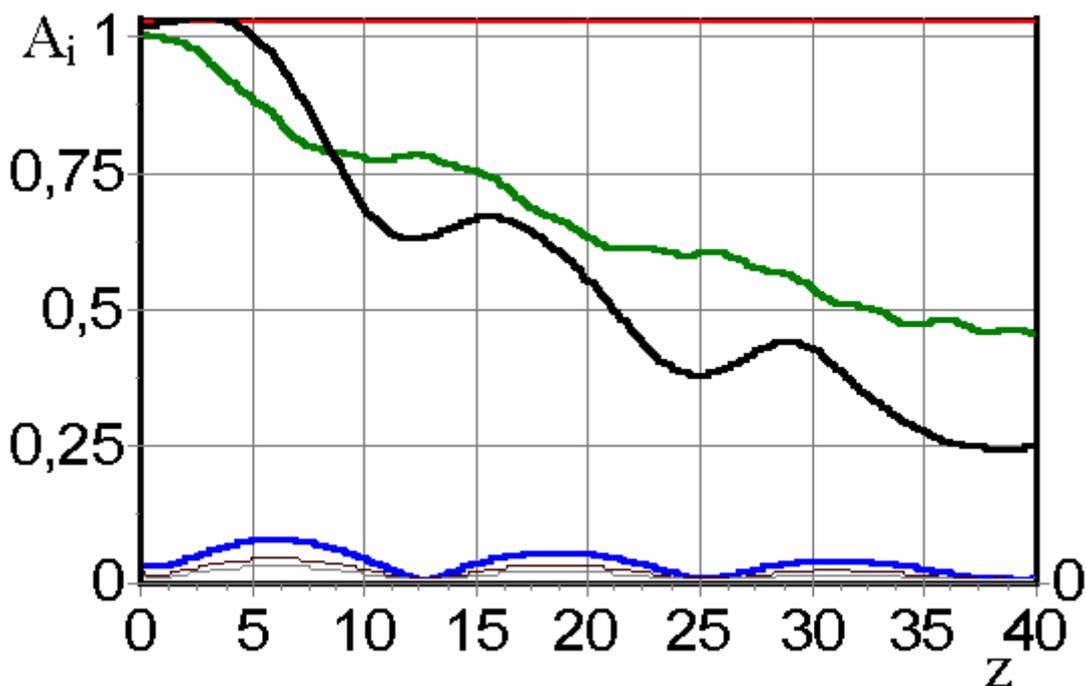


Рис. 7.4.  $b=6$ ;  $e_{01}=0,185$ ;  $e_{02}=0,42$

На рис. 7.4 приведены результаты для варианта с  $b_0 = 6$  и одинаковыми входными мощностями волн  $E_{01}$  и  $E_{02}$ :  $e_{01}^+ = 0,185$ ,  $e_{02}^+ = 0,42$ . Теперь эффект преобразования выражен значительно сильнее (следует также принять во внимание и возбуждение закритических нормальных мод  $E_{03}$ ,  $E_{04}$ ,  $E_{05}$ ,  $E_{06}$ ).

#### 7.4. Влияние конечной проводимости стенок электродинамической системы на характеристики оптимизированных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ

Для выяснения влияния конечной проводимости стенок были выполнены расчеты вариантов генераторов и усилителей, приведенных в п. 5.3, с учетом потерь. Оказалось, что при использовании электродинамической системы в виде отрезка гофрированного волновода, стенки которого выполнены из меди ( $\sigma = 5,6 \times 10^7$  сим/м), для приборов с рабочей частотой  $f < 10$  ГГц омические потери не превосходят 1 % от генерируемой мощности и их влияние оказывается в пределах погрешности расчетов. При  $f = 100$  ГГц омические потери достигают 3–4%. На рис. 7.5 приведены характеристики варианта «длинной» ЛБВ с нерегулярным гофром:

$$\beta = 0,9; I_0 = 510 \text{ А}; r_0 = 3,8; \lambda_0 = 2 \text{ мм} (f = 150 \text{ ГГц});$$

$$L_v = 39,26; n_v = 40; b_0 = 3,49; \eta_e = 56,5; \eta_v = 51,6;$$

$$D_v = 0; h_1^v = 1,386; h_2^v = 1,547; h_3^v = 1,724; h_4^v = 1,337; h_5^v = 0,575.$$

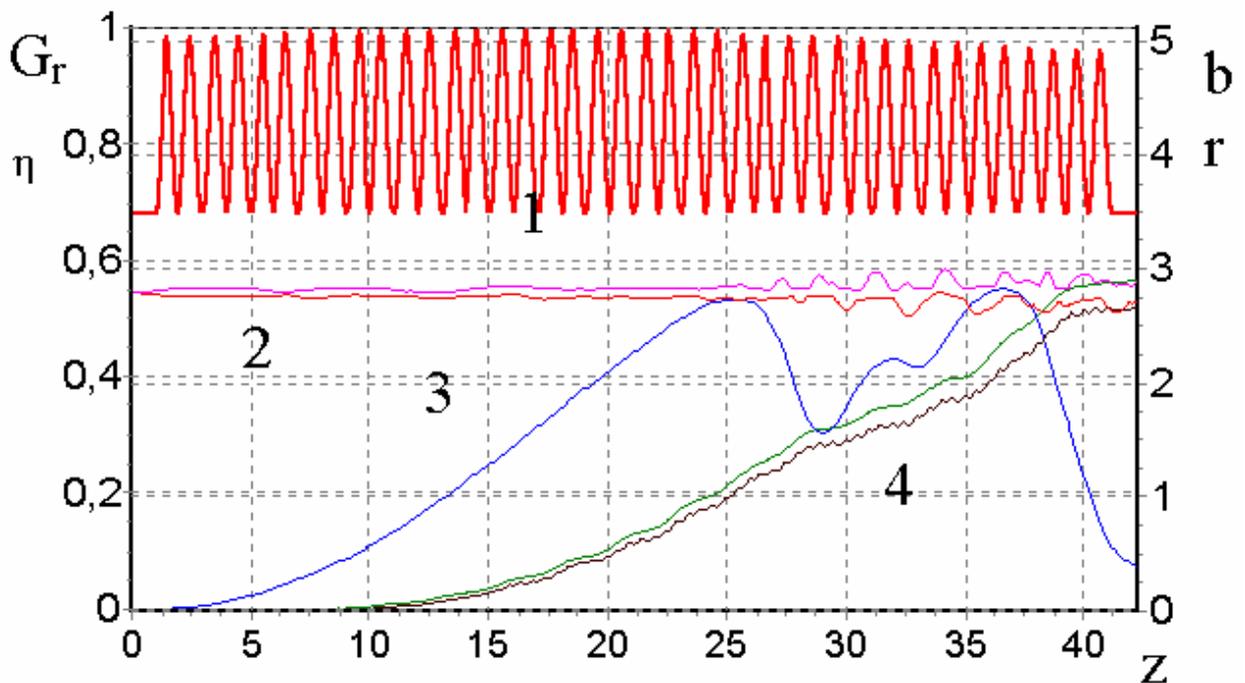


Рис. 7.5

1 –  $b$ ; 2 –  $r_{0\min}, r_{0\max}$ ; 3 –  $Gr$ ; 4 –  $\eta_e, \eta_v$

Влияние омических потерь выражается в раздвоении кривых волнового и электронного КПД. Разность  $\eta_e - \eta_v$  соответствует относительной величине мощности потерь.

### Литература:

27. Батура М.П., Кураев А.А., Лущицкая И.В., Сеницын А.К. Оптимизация релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных гофрированных волноводах с учётом закритических мод // Доклады БГУИР. 2004. № 4. С. 26-36.

28. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Пустовойт В.И., Сеницын А.К. Нерегулярные волноводы в электронике СВЧ // ЭВиЭС. 2005. Т. 10. № 8. С. 51- 58.

29. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. – М.: Радио и связь, 1986. – 208 с.

30. Кураев А.А., Байбурин В.Б., Ильин Е.М. Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ-приборов. – Мн.: Наука и техника, 1990. – 392 с.

31. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Кураев А.А. Усилители на основе эффекта Вавилова-Черенкова с нерегулярными электродинамическими структурами // УФН, 2004. Т. 174. № 6. С. 639-655.

32. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: МГУ, 1983.

33. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989.

34. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. радио, 1979.

35. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971.

36. Кураев А.А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. – Мн.: Наука и техника, 1971. – 307 с.

## ГЛАВА 8

# РАСЧЁТ ГРУППИРОВКИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПРОИЗВОЛЬНО-НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТРУБКЕ ДРЕЙФА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

### Введение

В работах [1...2] обоснованы процедуры корректного разделения возбуждаемого электронным потоком поля в нерегулярном волноводе на соленоидальные и потенциальные составляющие, а также на попутные и встречные волны. Одновременно показано, что в теории релятивистских и нерелятивистских ЛБВ и ЛОВ такое разделение нецелесообразно из-за существенного усложнения численных расчетов и потери их точности из-за неопределенности формы «крупных частиц» и упрощения граничных условий при расчете функции Грина. Однако было высказано предположение, что при расчете группирования электронов в трубке дрейфа клистронов, возможно, выделение потенциальной части поля и его расчет с использованием моделей «крупных частиц», как это принято в традиционной теории клистронов, имеет смысл. Ниже показано, что и в этом случае разделение полного поля на квазистационарное и динамическое также нецелесообразно. Кроме того, подход, основанный на методе «крупных частиц» и функциях Грина для них, вообще говоря, неприменим в случае нерегулярной трубки дрейфа. Использование строгих уравнений возбуждения нерегулярного волновода в этом случае (все волны – закритические) неизбежно.

### 8.1. Основные уравнения и методика решения задачи

Как это принято в теории клистронов, будем рассматривать азимутально-симметричную краевую задачу. В этом случае можно воспользоваться уравнениями возбуждения продольно-нерегулярных волноводов для  $E_{oi}$  мод (7.17)-(7.18).

Во входном сечении трубки дрейфа задается скоростная модуляция :

$$P_l = \beta_l \gamma_l = P_0 + A \sin(\omega \theta_l), P_0 = \beta_0 \gamma_0, \quad l = 1 \dots N; \quad \beta_l(0) = \beta_0; \quad r_l(0) = r_0. \quad (8.1)$$

Граничные условия для амплитуд закритических  $E_{oi}$ -волн имеют вид:

$$W \dot{A}_{mi}(0) + \dot{k}_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(0) = 0; \quad -W \dot{A}_{mi}(L) + \dot{k}_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(L) = 0, \quad (8.2)$$

$\dot{k}_{0i}^e$  – постоянная распространения волны  $E_{oi}$  с учетом  $S_\sigma$ .

Физически условия (8.2) соответствуют затуханию критических волн в регулярном продолжении отрезка нерегулярного волновода.

Фазовую группировку электронов в трубке дрейфа отражает функция группировки  $Gr(z)$  (7.24), которая пропорциональна величине амплитуды  $m$ -гармоники тока в модулированном пучке электронов.

Энергетический обмен энергией между электронами пучка и возбуждаемым электромагнитным полем оценивался по величине электронного и волнового КПД (7.23) и (7.22) соответственно.

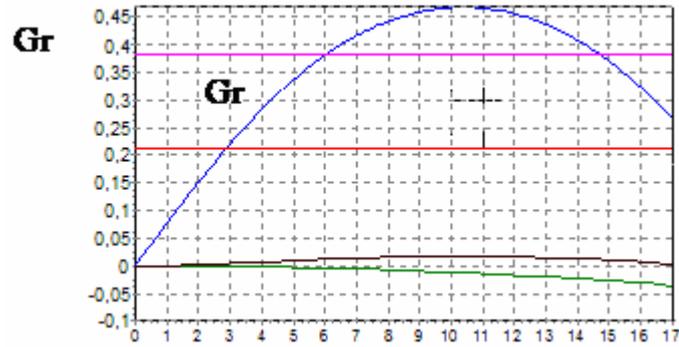
Профиль нерегулярного гофрированного волновода задается в соответствии с формулами (7.25), (7.26).

## **8.2. Группирование электронов в регулярной трубке дрейфа. Сравнение результатов расчета на основе уравнения возбуждения и метода крупных частиц.**

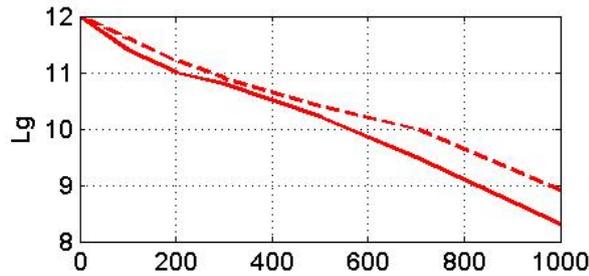
В этом случае радиус трубки дрейфа задавался постоянным  $b = b_0 = const$ . Расчет группирования методом крупных частиц с использованием функций Грина для квазистатического поля проводился на основе стандартных процедур, описанных, например, в [4, 5].

На рис. 8.1,а представлена функция группировки  $G_r(z)$  для варианта:  $I_0 = 500$  А;  $b_0 = 1$ ;  $r_0 = 0,7$ ;  $\Delta r_0 = 0,3$ ;  $\beta_0 = 0,7$ ;  $A = 0,2$ . Значения  $G_r(z)$ , рассчитанные по двум методам, практически совпадают в пределах погрешности расчетов. Существенно отметить, что по методу уравнения возбуждения сходимость достигается уже при учете двух мод:  $i = 1, 2$ . Причем, что еще более важно, точность решения сохраняется при учете только 8 электронных траекторий ( $N = 8$ ). В то же время для достижения требуемой точности в методе крупных частиц необходимо использовать 32 частицы на период ( $N = 32$ ).

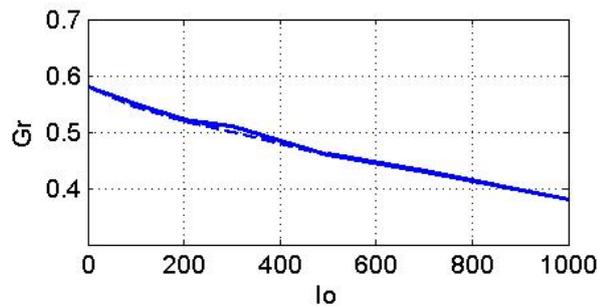
На рис. 8.1,б приведены зависимости  $z = L_g$  (расстояния, при котором достигается максимум группировки) от величины тока пучка  $I_0$  (сплошная кривая – метод уравнений возбуждения, пунктирная – метод крупных частиц). На рис. 8.1,в приведена аналогичная зависимость для  $Gr_{max}(I_0)$ . Как видно, при перечисленных выше условиях оба метода дают хорошо совпадающие результаты.



a)



б)



в)

Рис. 8.1

Естественно, в методе крупных частиц как точность расчетов, так и адекватность представления физических процессов группирования существенно зависят от «формы» крупной частицы. Для иллюстрации этого на рис. 8.2 представлены фазовые траектории 8 электронов  $u_i(z) = \omega t_i - z / \beta_0$  (в методе крупных частиц – это 8 из 32) для варианта:  $b = 1$ ,  $r_0 = 0,7$ ,  $\Delta r_0 = 0$ ,  $I_0 = 500$  А,  $\beta_0 = 0,7$ ,  $z = Lg$ . На рис. 8.2,а – результаты по методу уравнений возбуждения, на рис. 8.2,б – по методу крупных частиц при «длине» частицы  $\Delta z = \pi / N$ , на рис. 8.2,в – при  $\Delta z = 4\pi / N_c$  («перекрывающиеся» частицы). Как видно из сравнения рассчитанных фазовых траекторий, правильные результаты (совпадающие с методом уравнений возбуждения) в методе крупных частиц достигаются только для «перекрывающихся» частиц (рис. 8.2,в), когда  $\Delta z = 4\pi / N$ . При  $\Delta z = \pi / N$  (рис. 8.2,б) получается физически неверный результат: обгон электронов в потоке отсутствует (траектории не пересекаются).

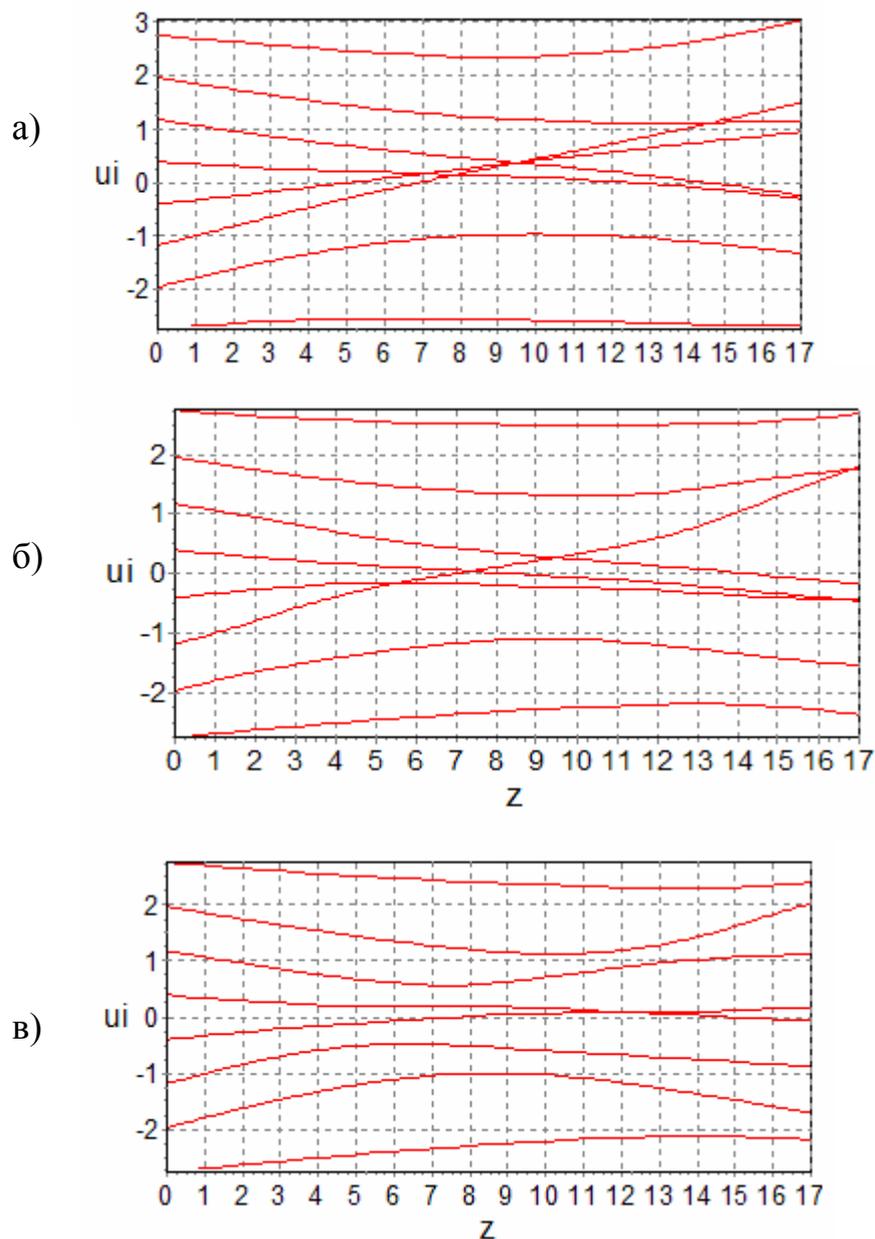


Рис. 8.2

### 8.3. Группировка электронов в нерегулярной трубке дрейфа.

Этот случай интересен по двум причинам: 1) изменение сечения трубки дрейфа вдоль области группирования несомненно повлияет на процесс и степень и характер этого влияния следует установить; 2) такой случай ранее (насколько нам известно) не анализировался, поскольку методом крупных частиц при расчете квазистатического поля пространственного заряда с использованием функций Грина для регулярной граничной задачи это сделать невозможно (по крайней мере, с требуемой точностью). Метод же уравнений возбуждения не имеет подобных ограничений.

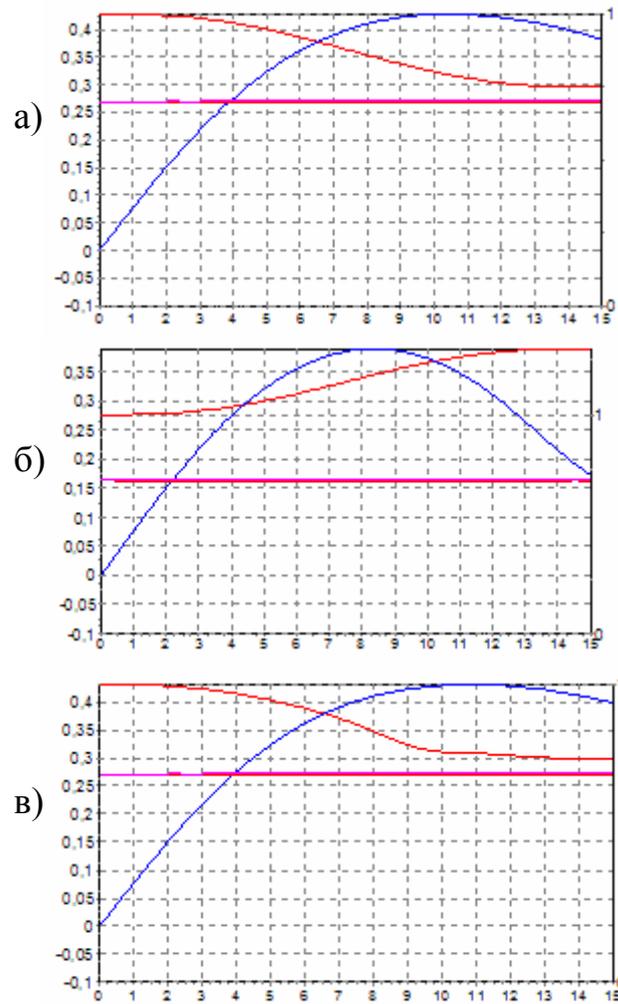


Рис. 8.3

На рис. 8.3,а приведена функция группировки  $Gg$  для следующих данных:  $b_0 = 1$ ;  $r_0 = 0,7$ ;  $\Delta r_0 = 0$ ;  $\beta_0 = 0,7$ ;  $A = 0,2$ ;  $I_0 = 700$  А. Трубка монотонно сужается до  $b_L = 0,75$ . На рис. 8.3,б приведена  $Gg$  для тех же данных, но для расширяющейся трубки. На рис. 8.3,в для указанных данных  $Gg$  рассчитана для менее плавно сужающейся трубки, чем в варианте рис. 8.3,а. Сравнение трех вариантов указывает на следующее: в сужающейся трубке группировка улучшается; кроме того, максимальный уровень группировки сохраняется на более протяженном участке, чем в расширяющейся трубке. Физический аспект этого вполне понятен: стенки экранируют (шунтируют) поле электронных сгустков, уменьшая их взаимодействие, препятствующее группировке. И чем ближе стенки к электронной трубке, тем сильнее их шунтирующее действие. Причем, это действие наиболее важно на конечном участке трубки дрейфа, где плотность электронных сгустков максимальна.

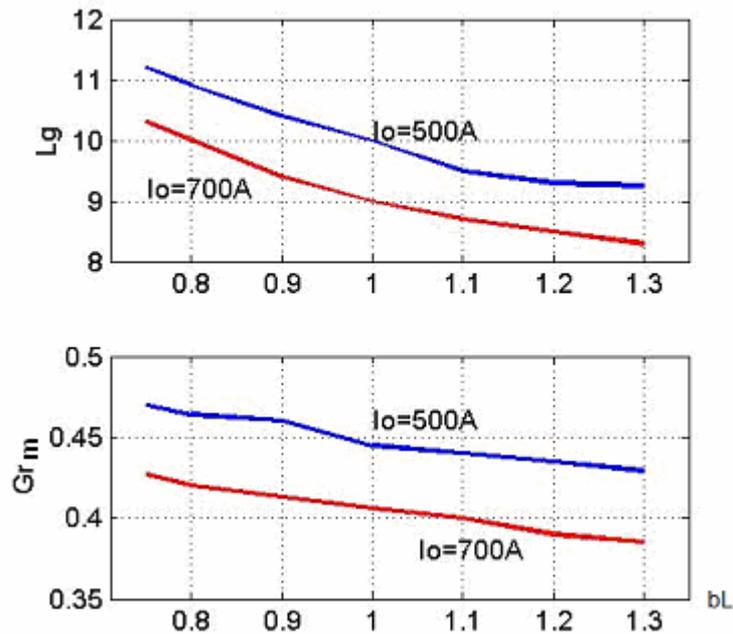


Рис. 8.4

На рис. 8.4 представлены расчетные зависимости длины группирования  $L_g$  и величины функции группировки в насыщении  $Gr$  от значения выходного радиуса  $b_L$ . При уменьшении выходного радиуса  $b_L$  длина  $L_g$  увеличивается, одновременно возрастает и максимальное значение  $Gr$ .

Расчеты показали, что во всех вариантах достаточно ограничиться всего 8 электронными траекториями на период (при  $N = 16, 24, 32$  результат практически не меняется).

#### 8.4. Группировка в трубке дрейфа с поглощающим покрытием.

В ряде случаев, когда необходимо предотвратить паразитную связь каскадов через низшую моду  $H_{11}$  (или, в общем случае, когда  $i > 1$  – через другие низшие моды) используются трубки дрейфа с поглощающим покрытием. Группировка электронов в таком случае не может быть проанализирована традиционными методами, основанными на известных функциях Грина и моделировании электронного потока серией крупных частиц. Развитый же выше метод без каких-либо модификаций применим и в рассматриваемом случае.

На рис. 8.5 представлены сравнительные зависимости длины, на которой достигается максимальная группировка  $L_g$  (Рис. 8.5, а) и максимальная величина функции группировки  $Gr$  (Рис. 8.5, б) от радиуса трубки дрейфа  $b_0$  при  $\sigma = 10^{20}$  (металлическая стенка) – штриховая кривая и при  $\sigma = 1$  (стенка с поглощающим покрытием) – сплошная кривая.

Электронный поток предполагался трубчатым с  $r_0=0,5$  и  $\Delta r_0=0,1$ ;  $b_0=0,7$ ;  $I_0=800$  А;  $A=0,2$ .

Из рис. 8.5 следует, что в трубке дрейфа с поглощающим покрытием группировка улучшается – Gr возрастает, а длина, на которой достигается максимальная группировка – увеличивается. С физической точки зрения это обусловлено уменьшением амплитуды ВЧ полей пространственного заряда пучка в поглощающей их трубке дрейфа. С этим же связан и выявленный феномен отбора энергии пучка в трубке дрейфа с поглощающим покрытием. На рис. 8.5, в приведена зависимость  $\eta_{\text{потерь}}$  от  $b_0$ . При ее анализе следует учитывать, что за счет нелинейности процесса модуляции пучка в него при  $A=0,2$  «накачивается» дополнительная мощность к исходной мощности пучка, поступающая от источника модуляции.

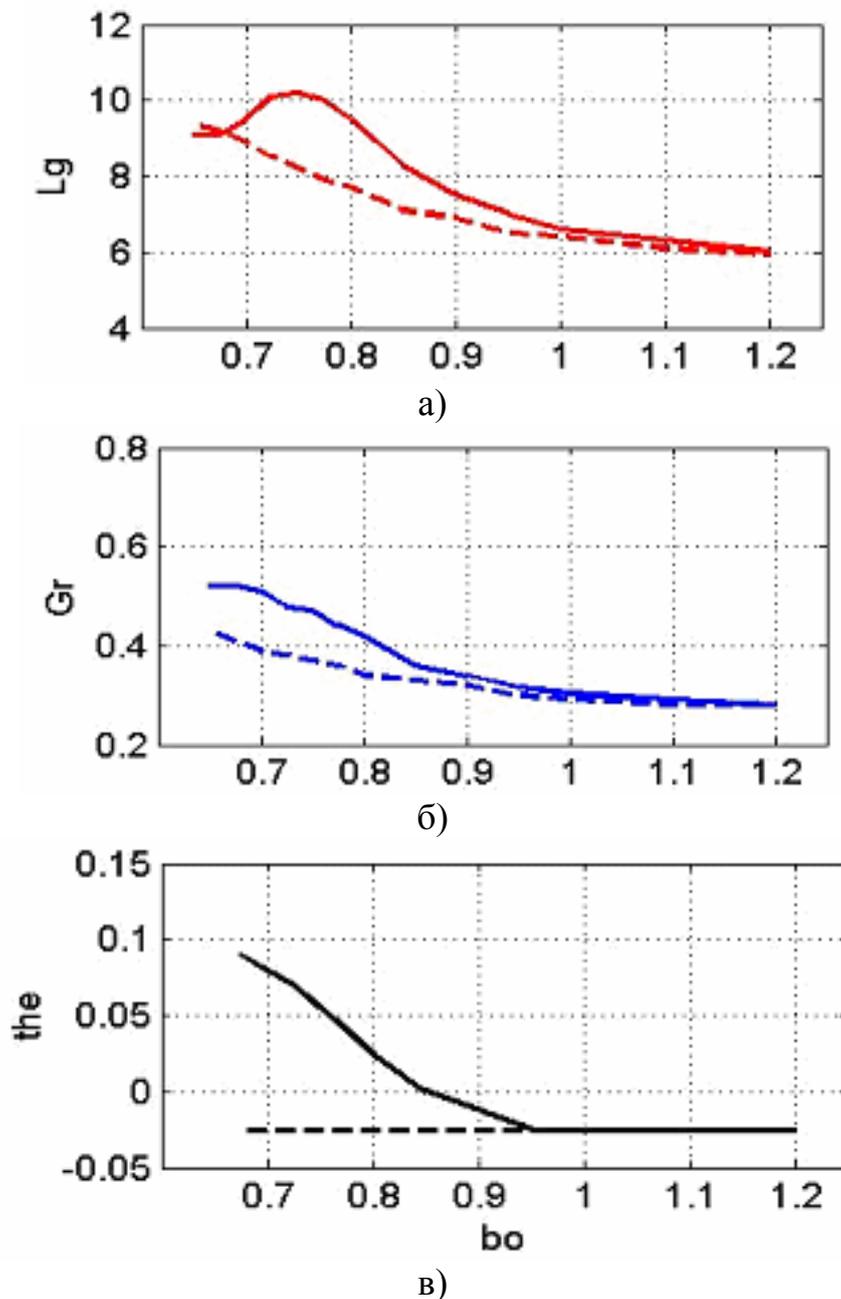


Рис. 8.5.

*Приведенные материалы позволяют сделать следующие выводы.*

1. Метод уравнений возбуждения при расчете группирования электронов в трубке дрейфа существенно эффективнее традиционно используемого для этой цели метода крупных частиц: для достижения необходимой точности требуется расчет 8 фазовых траекторий электронов  $N$  вместо 24-32 в методе крупных частиц. Кроме того, в последнем точность расчетов и физическая адекватность результатов зависит от правильного выбора формы крупной частицы, что не всегда можно сделать априори. Следует, конечно, отметить, что в методе уравнения возбуждения приходится принимать в расчет не менее двух мод и сходимость итерационного процесса решения двухточечной краевой задачи обеспечивается только при применении метода блочной матричной прогонки [2, 3].

2. Исследование процессов группирования в трубке с переменным по длине профилем может быть успешно выполнено на основе метода уравнений возбуждения нерегулярных волноводов. Метод крупных частиц в этом случае неприменим (по крайней мере, в традиционной формулировке). То же следует сказать и о трубке дрейфа с поглощающим покрытием.

### **Литература**

1. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Пустовойт В.И., Сеницын А.К. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники 2006. №3, с. 75-77.
2. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация мощных электронных приборов СВЧ. Мн., 2006, 260 с.
3. Кураев А.А., Сеницын А.К. // Докл. БГИУР. 2006. №3, с. 82-92.
4. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986, 208 с.
5. Аксенчик А.В., Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ с дискретным взаимодействием (теория и оптимизация). Мн., 2003, 376 с.

## ГЛАВА 9

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРОВ СИММЕТРИЧНЫХ $H_{01}$ -ВОЛН МЕТОДОМ БЛОЧНОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ

### Введение.

Устройства на основе отрезка продольно-нерегулярного волновода находят широкое применение в технике СВЧ – волноводные сопряжения, фильтры, резонаторы, замедляющие системы. Рассматриваемые в настоящей статье отражающие фильтры Брэгговского типа [1], в которых волны преобразуются и интерферируют на неоднородностях профиля волновода нашли полезное применение в мощных электровакуумных генераторах при реализации открытых с двух сторон для прохождения электронного потока резонаторов. Обеспечить требуемые характеристики указанных устройств удастся только за счет синтеза продольного профиля стенки волновода и его диэлектрического заполнения на основе оптимизационных процедур и решения краевой задачи для уравнений Максвелла. Несмотря на большое число предложенных методов расчета нерегулярных волноводящих систем [2-7], проблема разработки эффективных алгоритмов ее решения остается актуальной ввиду необходимости значительных вычислительных затрат.

Одной из наиболее универсальных, хотя и затратных процедур решения рассматриваемых задач являются проекционно-сеточные методы с использованием парциальных условий излучения на входном и выходном сечениях отрезка нерегулярного волновода, сопряженного с регулярными участками [2-4]. Для случая только продольной нерегулярности и круглого волновода, наиболее эффективной, по-видимому, является процедура, использующая преобразование координат, отображающее внутреннюю область нерегулярного волновода на регулярный волновод и последующее сведение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для коэффициентов разложения решения по базису из мембранных функций регулярного волновода с использованием метода Галеркина-Канторовича [2,5,6,7,8]. Последний подход, однако, при учете закритических мод в ряде случаев приводит к необходимости использования специальных методов регуляризации [2,7]. Решение этой проблемы было предложено вначале на основе метода Т- функций, а затем метода блочной матричной прогонки решения краевой задачи для системы ОДУ [6,9]. Однако реализация данного подхода, например, для волновода коаксиального или эллиптического сечения наталкивается на ряд затруднений, связанных с замедлением сходимости и необходимостью увеличения количества выбираемых функций разложения.

В настоящей работе для решения выше обозначенных волноводных задач предлагается процедура решения, удачно совмещающая метод

преобразования координат, последующее сведение к системе ОДУ на основе метода прямых [9] и метода блочной матричной прогонки, эффективно реализующей прямой метод Гаусса с выбором главного элемента для полученной СЛАУ при использовании техники хранения и работы с разреженными матрицами [11,12]. Как показали расчеты, для рассматриваемых здесь двумерных задач по эффективности предлагаемый метод не уступает методу, использующему разложение по собственным волнам регулярного волновода, в тоже время он без труда переносится на решение волноводных задач произвольного поперечного сечения.

Решаемая в статье задача поиска профиля и исследования характеристик Брэгговского фильтра симметричных Н – волн круглого волновода является иллюстрацией возможностей предложенного метода. Такие фильтры обычно реализуются в виде гофра с несколькими периодами [13,14] или резонансных канавок [6,15]. Как показано в [6,14,15] фильтры такой конфигурации довольно эффективны для отражения симметричных Е – волн. Исследование периодического гофрированного фильтра Н – волн [13] показало, что его отражающая способность снижается по мере удаления от границы полосы прозрачности  $H_{01}$  – волны. В настоящей работе найдены геометрии фильтра в виде резонансной канавки определенной конфигурации, при которых обеспечивается практически полное отражение  $H_{01}$  – волны при радиусах волновода, непрозрачных для  $H_{02}$  – волны.

### 9.1. Геометрия и рассчитываемые характеристики фильтров

Геометрия рассматриваемых фильтров представлена на рисунке 9.1. На вход фильтра падает  $H_{01}$  – волна мощности  $P_0^+$ . На выходе задано условие полного согласования  $P_L^- = 0$ . В этом случае мощность через поперечное сечение  $P_s$  равна  $P_L^+$ , а отраженная мощность  $P_0^- = P_0^+ - P_s$ .

Профиль канавки фильтра (рисунок 1а) аппроксимировался следующим образом. Сопряжение регулярных участков волновода с разными радиусами  $b_0$  и  $b_1$  задавалось как  $b = b_0 + (b_1 - b_0) \cdot P_5(T)$ ,  $T = (z - z_0) / L_c$  где  $z_0$ ,  $L_c$  – начало и длина участка сопряжения. Полином  $P_5(T) = T^3(10 - 15T + 6T^2)$ , обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения. С использованием таких сопряжений на профиле волновода моделировались фильтры в виде резонансных канавок и выступов определенной конфигурации. Конфигурация при этом определяется параметрами  $h_k = |b_1 - b_0|$ ,  $\Delta_k = (L_k - 2L_c) / L_k = L_{kp} / L_k$ , где  $L_k$  – ширина канавки,  $h_k$  – глубина канавки (при  $h_k < 0$  – выступ),  $\Delta_k$  – параметр, характеризующий крутизну ее склонов.

Профиль фильтра в виде периодического синусоидального гофра (рисунок 9.1б) задавался в виде  $b(z) = b_0 + h_v \sin^2(n_v \pi T)$ ,  $T = (z - z_0) / L_v$ , где

$h_v$  – высота гофра,  $d_v = L_v / n_v$  – период гофра,  $n_v$  – количество волн гофра на длине  $L_v$ .

Внутренний радиус  $b_0$  фильтра сопряжен с регулярным волноводом, в котором возможно распространение только одной  $H_{01}$  волны, т.е.  $3.83 < b_0 < 7.016$ . Параметры  $h_k, L_k, h_v, d_v$  фильтров подбираются из условия минимума коэффициента ослабления  $\Gamma = P_L^+ / P_0^+ = P_s / P_0^+$ . Полосовая характеристика фильтра определяется зависимостью коэффициента отражения  $K=I-\Gamma$  от частоты.

## 9.2. Уравнения Максвелла в преобразованной системе координат

Возбуждение волн в рассматриваемом нерегулярном отрезке волновода на рабочей частоте  $\omega$  описывается однородными уравнениями Максвелла и соответствующими граничными условиями на внутренней идеально проводящей поверхности волновода. Для решения задачи воспользуемся известной методикой отображения внутренней области нерегулярного волновода, заданного профиля  $b(z)$  на цилиндр единичного радиуса [2,5,6,7]. Введем следующее преобразование координат

$$r = \rho b(\zeta); \quad \varphi = \psi; \quad z = \zeta. \quad (9.1)$$

Безразмерные уравнения Максвелла и граничное условие на стенке волновода для векторов поля в преобразованной системе запишем в виде [6]

$$\text{rot } \dot{\mathbf{B}}^P = jW \hat{\mathbf{g}} \dot{\mathbf{E}}^P; \quad \hat{\mathbf{g}}^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}^P = -jW \dot{\mathbf{B}}^P; \quad \hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 1 + \rho^2 b' & 0 & -\rho b b' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\rho b b' & 0 & b^2 \end{bmatrix}; \quad (9.2)$$

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{E}^P] \Big|_{\rho=1} = 0.$$

Здесь  $b' = \partial b / \partial z$ , все геометрические параметры выражены в единицах  $\lambda_0 / 2\pi$ ,  $\lambda_0$  – опорная длина волны,  $W = \lambda_0 / \lambda$ ,  $\lambda$  – рабочая длина волны.

В случае симметричных Н-волн  $\mathbf{E}^P = E_\psi(\rho, z) \boldsymbol{\psi}_0$ ,  $\mathbf{B}^P = B_\rho(\rho, z) \boldsymbol{\rho}_0 + B_\zeta(\rho, z) \mathbf{z}_0$  и задача (9.2) приводится к скалярному уравнению относительно  $E_\psi(\rho, z)$ . Введем замену переменных  $u = u_{re} + ju_{im} = \rho E_\psi$ , тогда (9.2) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + W^2 \frac{u}{\rho} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (9.3)$$

Граничное условие на стенке волновода  $u(1, z) = 0$ , на оси  $u(0, z) = 0$ .

Компоненты симметричной  $H$ -волны выражаются через  $u$  следующим образом:

$$\dot{\mathbf{B}}^p = \frac{j}{W} \left\{ \left( -\frac{\partial u}{\rho \partial z} + \frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \mathbf{p}_0 + \left( -\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1 + \rho^2 b'^2}{b^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \mathbf{z}_0 \right\}; \quad (9.4)$$

$$\mathbf{E}^p = u(\rho, z) / \rho \cdot \Psi_0.$$

Связь компонент в исходной  $(r, \varphi, z)$  и преобразованной  $(\rho, \psi, \zeta)$  системах:

$$B_r = B_\rho / b(z); \quad E_\varphi = E_\psi / b(z); \quad B_z = B_\zeta - B_\rho \cdot b'(z) / b(z).$$

### 9.3. Парциальные условия излучения на концах отрезка нерегулярного волновода.

В соответствии с методикой [4] представим искомое волновое поле в виде разложения по собственным  $H_{0i}$  - волнам регулярного волновода единичного радиуса

$$E_\psi(\rho, z) = \sum_i A_i(z) J_1(\mu_{0i} \rho); \quad A_i(z) = \frac{1}{h_{0i}} \int_0^1 u(z, \rho) J_1(\mu_{0i} \rho) d\rho; \quad (9.5)$$

$$h_{0i} = \int_0^1 J_1^2(\mu_{0i} \rho) \rho d\rho.$$

На регулярных участках волновода

$$A_i(z) = \begin{cases} a_i^+ e^{-jk_i z} + a_i^- e^{+jk_i z}; & W > \mu_{0i} / b, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ a_i^+ e^{-k_i z} + a_i^- e^{+k_i z}; & W < \mu_{0i} / b, \quad i > p; \end{cases},$$

$$k_i = \sqrt{|W^2 - (\mu_{0i} / b)^2|}.$$

Здесь  $p$  – максимальное количество распространяющихся волн.

В этом случае,

$$u(\rho, z) = \sum_{i \leq p} \left( a_i^+ e^{-jk_i z} + a_i^- e^{+jk_i z} \right) \rho J_1(\mu_{0i} \rho) + \sum_{i > p} \left( a_i^+ e^{-k_i z} + a_i^- e^{+k_i z} \right) \rho J_1(\mu_{0i} \rho). \quad (9.6)$$

Продифференцируем (6) по  $z$  и получим соотношение

$$\frac{\partial u(\rho, z)}{\partial z} = \sum_{i \leq p} \left( -jk_i a_i^+ e^{-jk_i z} + jk_i a_i^- e^{+jk_i z} \right) \rho J_1(\mu_{0i} \rho) + \sum_{i > p} \left( -k_i a_i^+ e^{-k_i z} + k_i a_i^- e^{+k_i z} \right) \rho J_1(\mu_{0i} \rho), \quad (9.7)$$

с помощью которого сформулируем следующие условия на границах сопряжения рассматриваемого нерегулярного отрезка волновода с регулярными участками.

*Условие полного согласования при  $z=L$ .*

При  $z>L$  отсутствуют обратные волны:  $a_i^- = 0$ . Учитывая это, из (9.5), (9.6), (9.7) получим

$$\frac{\partial u(\rho, L)}{\partial z} = - \sum_{i \leq p} \frac{jk_i}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, L) J_1(\mu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} - \sum_{i > p} \frac{k_i}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, L) J_1(\mu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho}. \quad (9.8)$$

*Условие набегания слева  $H_{0r}$ - волн при  $z=0$ .*

При  $z<0$   $a_r^+ \neq 0$ ,  $a_{i(i \neq r)}^+ = 0$ .

$$\frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial z} = \sum_{i \leq p} \frac{jk_i}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, 0) J_1(\mu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} + \sum_{i > p} \frac{k_i}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, 0) J_1(\mu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} - 2j \sum_r k_r a_r^+ \rho J_1(\mu_{0r} \rho). \quad (9.9)$$

Заметим, что здесь в граничных условиях (9.8), (9.9) наряду с распространяющимися, учтены и закритические волны, которые присутствуют вблизи концов нерегулярного участка. Ввиду этого, условия (9.8), (9.9) можно ставить непосредственно на концах нерегулярного отрезка, что позволяет значительно уменьшить расчетную область особенно вблизи границы полосы прозрачности.

*Мощность переносимая симметричной  $H$ -волной через поперечное сечение:*

$$P_s = \text{real} \int_0^b \left[ \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{B}}^* \right]_z r dr = \text{imag} \left\{ \frac{1}{W} \int_0^1 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^*}{\partial z} u - \frac{b' \partial u^*}{b \partial \rho} u \right) d\rho \right\}. \quad (9.10)$$

*Мощность прямой и обратной распространяющихся парциальных волн  $P_i^\pm$ .* Используя представления (9.5), (9.6), (9.7), аналогично (9.10) получаем на регулярных участках ( $b' = 0$ ):

$$P_i^\pm = \text{imag} \left\{ \frac{1}{W} \int_0^1 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_i^{\pm*}}{\partial z} u_i^\pm \right) d\rho \right\}; u_i^\pm = \frac{1}{2} \left( u \pm \frac{j}{k_i} \frac{du}{dz} \right). \quad (9.11)$$

#### 9.4. Метод блочной матричной прогонки

В соответствии с классическим методом прямых [10], выберем на интервале  $\{0 \leq \rho \leq 1\}$  сетку  $\omega_{hr} = \{\rho_j = jh_r, h_r = 1/m, j = 0 \dots m\}$  и обозначим

$$\mathbf{u} = \{u(\rho_1, z), \dots, u(\rho_{m-1}, z)\} = \{u_1(z), \dots, u_{m-1}(z)\}, u_0 = u_m = 0.$$

Аппроксимируем уравнение (9.3) конечно-разностной схемой второго порядка точности. После приведения к векторно-матричной форме, получаем систему ОДУ вида

$$\frac{d}{dz} \left( E(z) \frac{d\mathbf{u}}{dz} \right) + \frac{d}{dz} (Q(z)\mathbf{u}) + Q(z) \frac{d\mathbf{u}}{dz} + G(z)\mathbf{u} = 0. \quad (9.12)$$

Матрицы  $G$  и  $Q$  имеют следующие ненулевые коэффициенты:

$$g_{1,1} = -\frac{W^2}{\rho_1} - \frac{c_{1/2} + c_{1+1/2}}{b^2 h_r^2}; \quad g_{1,2} = -\left(\frac{b'}{b}\right)' \frac{1}{2h_r} + \frac{c_{1+1/2}}{b^2 h_r^2}; \quad c = \frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho};$$

$$g_{j,j-1} = \left(\frac{b'}{b}\right)' \frac{1}{2h_r} + \frac{c_{j-1/2}}{b^2 h_r^2}; \quad g_{j,j} = \frac{W^2}{\rho_j} - \frac{c_{j-1/2} + c_{j+1/2}}{b^2 h_r^2};$$

$$g_{j,j+1} = -\left(\frac{b'}{b}\right)' \frac{1}{2h_r} + \frac{c_{j+1/2}}{b^2 h_r^2};$$

$$q_{1,2} = -\frac{b'}{b2h_r}; \quad q_{j,j-1} = \frac{b'}{b2h_r}; \quad q_{j,j+1} = -\frac{b'}{b2h_r}; \quad j=2 \dots m-1;$$

Матрица  $E$  содержит только ненулевые диагональные элементы, равные  $1/\rho_j, j = 1 \dots m-1$ .

Для решения краевой задачи для системы (9.12) введем сетку по  $z$   $\omega_{hz} = \{z_k = (k-1)h_z, h_z = L/n, k = 1 \dots n+1\}$ , обозначим  $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}(z_k)$  и построим конечно-разностную схему второго порядка точности:

$$\begin{aligned} \left[ E^{k-1/2} - 0.5h_z (Q^{k-1} + Q^k) \right] \mathbf{u}^{k-1} + \left[ -E^{k-1/2} - E^{k+1/2} + h_z^2 G^k \right] \mathbf{u}^k + \\ + \left[ E^{k+1/2} + 0.5h_z (Q^{k+1} + Q^k) \right] \mathbf{u}^{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Парциальные граничные условия излучения (9.8), (9.9) при замене интеграла по методу трапеций приводятся к матричному виду

$$\frac{d\mathbf{u}^1}{dz} + \beta^0 \mathbf{u}^1 = \boldsymbol{\gamma}^0; \quad \frac{d\mathbf{u}^{n+1}}{dz} + \beta^L \mathbf{u}^{n+1} = 0; \quad (9.14)$$

$$\beta_{kl}^0 = -h_r \left[ \sum_{i=1}^p \frac{jk_i^0}{h_{0i}} J_1(\mu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\mu_{0i} \rho_l) + \sum_{i=p+1}^{N_v} \frac{k_i^0}{h_{0i}} J_1(\mu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\mu_{0i} \rho_l) \right];$$

$$\beta_{kl}^L = h_r \left[ \sum_{i=1}^p \frac{jk_i^L}{h_{0i}} J_1(\mu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\mu_{0i} \rho_l) + \sum_{i=p+1}^{N_v} \frac{k_i^L}{h_{0i}} J_1(\mu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\mu_{0i} \rho_l) \right];$$

$$\gamma_k^0 = -2j \sum_r k_r^0 a_r^+ \rho_k J_1(\mu_{0r} \rho_k), \quad N_v \quad - \quad \text{количество учитываемых}$$

собственных волн.

Для (14) используем аппроксимацию второго порядка точности [9]:

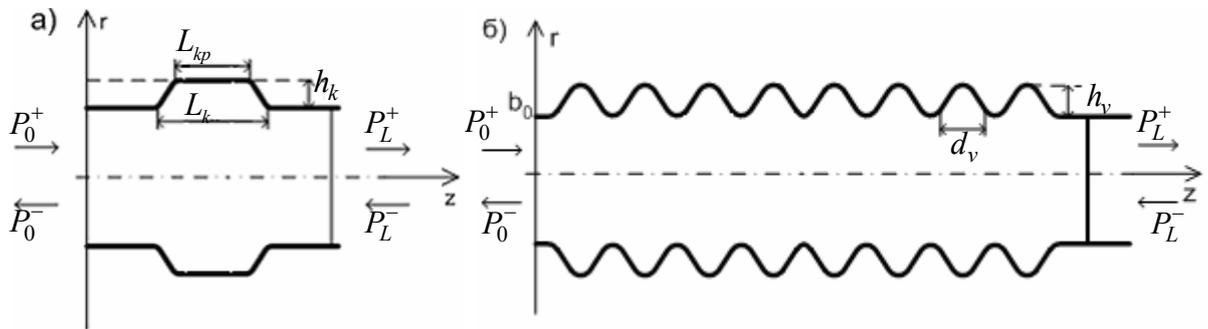
$$(-3\mathbf{u}^1 + 4\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3) + 2h_z \beta^0 \mathbf{u}^1 = 2h_z \bar{\boldsymbol{\gamma}}^0; \quad (3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) + 2h_z \beta^L \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (9.15)$$

Введем вектор неизвестных  $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^{n+1}\}$  и запишем систему (9.13) (9.15) в виде  $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ . Вследствие приведенной техники построения конечно-разностной схемы сильно разреженная матрица  $A$  имеет удобную для последующей обработки блочно-ленточную структуру. Для решения таких систем линейных уравнений с блочно ленточной матрицей была разработана экономичная реализация прямого метода Гаусса с выбором главного элемента – метод блочной матричной прогонки [6,9]. Идея алгоритма заключается в реализации метода на упакованном массиве из односвязных динамических стеков, в который помещаются только не нулевые элементы. Следует заметить, что данная методика может быть обобщена на случай трехмерных скалярных и векторных систем. Алгоритм метода Гаусса с выбором главного элемента обеспечивает устойчивость схемы (9.13) (9.14) даже если не выполняется условие преобладания диагонального элемента, необходимое для реализации классического метода прогонки и итерационных процедур. Отпадает также во многих случаях необходимость использования методов регуляризации [2].

## 9.5. Результаты расчета

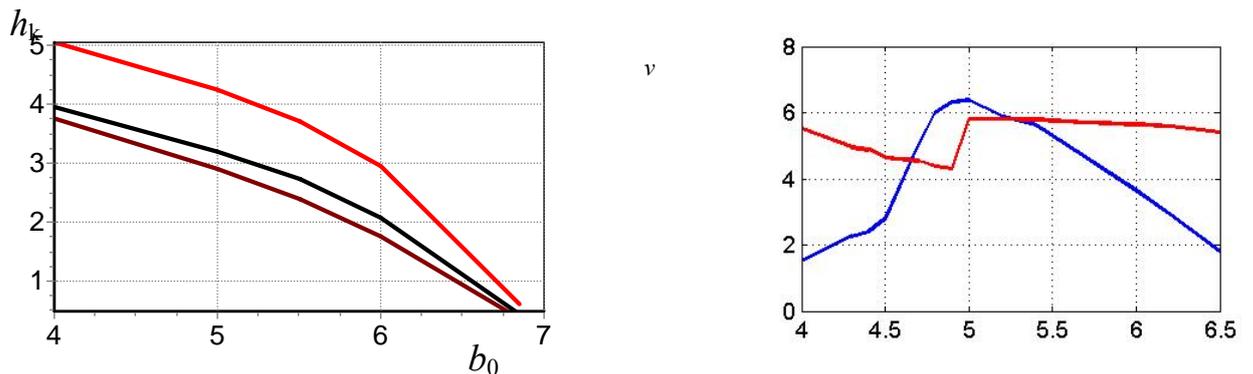
Для значений радиуса волновода  $b_0$  в пределах  $\mu_{01} < b_0 < \mu_{02}$  производился оптимизационный поиск параметров  $h_v$ ,  $d_v$ ,  $n_v$  и  $h_k$ ,  $L_k$ ,  $\Delta_k$  фильтров, представленных на рисунке 9.1, при которых целевая функция, равная  $\Gamma$  стремится к нулю и обеспечивается максимальное отражение  $N_{01}$  волны. Расчеты показали, что для любого значения  $b_0$  в рассматриваемом

диапазоне существуют указанные параметры фильтров, при которых обеспечивается практически полное ( $>30\text{Дб}$ ) отражение.



а) фильтр в виде канавки, б) фильтр в виде отрезка синусоидального гофра  
Рис. 9.1 – Геометрия рассматриваемых фильтров

Найденные геометрические параметры фильтров, при которых достигается коэффициент отражения  $K > 0.995$  представлены на рисунке 9.2.

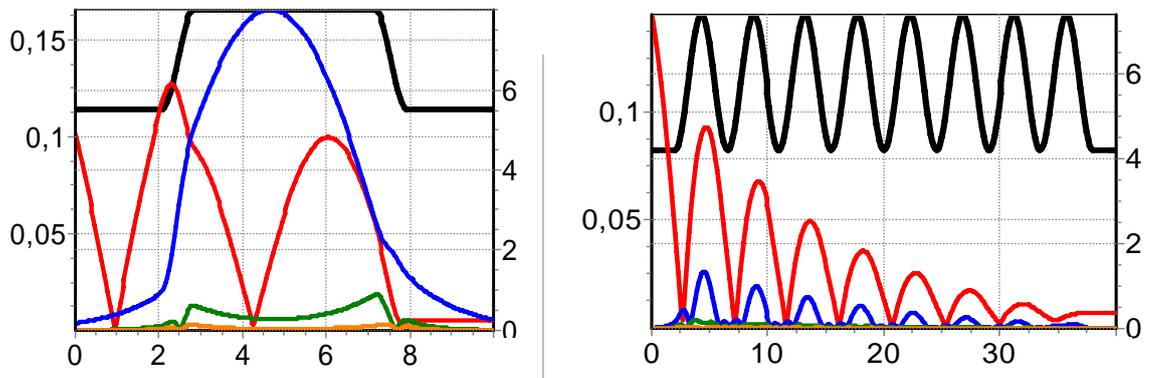


а – фильтр в виде одной канавки,  $\Delta_k=0.7$ ;  
кривые 1 -  $L_k=4.5$ , 2 -  $L_k=5.5$ , 3 -  $L_k=6.5$ ;  
б – фильтр в виде 8 синусоидальных гофров;  
кривые 1 -  $d_v$ , 2 -  $h_v$ .

Рис.9.2 – Зависимость параметров заграждающих фильтров

На рис. 9.3 представлены рассчитанные по формуле (9.5) характерные распределения вдоль фильтров амплитуд возбуждаемых мод.

*Особенности фильтров в виде резонансной канавки.* Для каждого значения  $b_0$  имеется семейство параметров  $h_k, L_k, \Delta_k$  канавки при которых она практически полностью отражает  $H_{01}$ -волну. Как видно из рисунка 9.2а при фиксированных  $\Delta_k, L_k$  с увеличением  $b_0$  глубина  $h_k$  резонансной канавки монотонно уменьшается. При уменьшении ширины канавки  $L_k$  ее высота



а - канавка:  $b_0=5.5, L_k=6, h_k=2.5$   
 б - гофра:  $b_0=4.21, n_v=8, d_v=4.5, h_v=3.2$   
 кривые 1 -  $A_1, 2 - A_2, 3 - A_3$

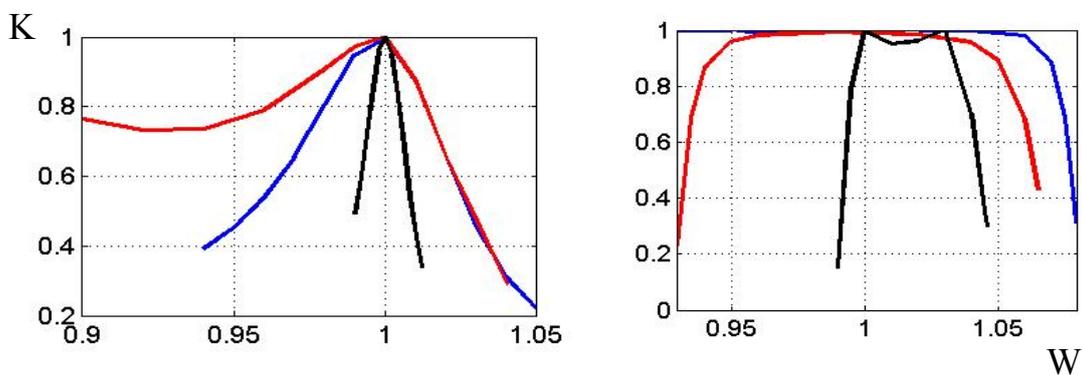
Рис. 9.3 - Распределение амплитуд возбуждаемых волн в фильтрах

возрастает. С увеличением крутизны стенок канавки ( $\Delta_k \uparrow 1$ ) при фиксированной ширине ее высота уменьшается до некоторой предельной. При  $\Delta_k \rightarrow 0$  высота отражающей резонансной канавки становится неприемлемо большой. Так, для  $b_0=5.5, L_k=5.5$  при  $\Delta_k \cong 1, h_k=2.5$ , а при  $\Delta_k=0, h_k=7.6$ . Высота резонансной канавки такова, что обеспечивает открытие возбуждаемой  $H_{02}$  - моды с амплитудой, сравнимой с амплитудой основной волны, причем ее пучность попадает примерно на центр канавки. Значима также возбуждаемая закритическая  $H_{03}$  - мода (см. рисунок 9.3).

*Особенности фильтров в виде  $n_v$  - периодического синусоидального гофра.* Для фильтра этого типа характерна однозначная зависимость периода  $d_v$ , соответствующего минимальному значению  $\Gamma$  от величины  $b_0$ . Значение же глубины гофра для данного периода определяется величиной коэффициента отражения  $K$ . При найденном оптимальном периоде  $d_v$  с увеличением глубины  $h_v$  коэффициент  $K$  монотонно возрастает. На рисунке 2б приведена зависимость от  $b_0$  оптимального периода  $d_v$  и значение глубины гофра  $h_v$ , соответствующее  $K=0.995$ . Из рисунка 2б видно, что наблюдается немонотонная зависимость глубины гофра от  $b_0$ , а также имеется скачок зависимости  $d_v(b_0)$  при  $b_0 \sim 5$ . При удалении от границы  $b_0 = \mu_{01}$  полосы прозрачности период монотонно убывает, а требуемая глубина гофра

возрастает до значений, превосходящих радиус волновода. Характерное распределение амплитуд возбуждаемых волн вдоль фильтра вблизи границы полосы прозрачности представлено на рисунке 9.3б. Начиная с  $b_0 > 4.5$  высота гофра такова, что внутри него открывается  $H_{02}$ -волна, темп возрастания  $h_v$  с ростом  $b_0$  увеличивается и превосходит радиус волновода. Если при такой высоте перейти на величину периода, соответствующего резонансу одной синусоидальной канавки ( $\Delta_k=0$ ) то уже первая канавка гофра обеспечивает требуемое ослабление волны. Этот переход отражает скачок при  $b_0=5$  кривой 1 на рисунке 9.2б. С увеличением  $b_0$  постепенно оказываются задействованы в ослаблении волны все гофры фильтра а их высота монотонно убывает. При этом амплитуда возбуждаемой  $H_{02}$  волны становится сравнимой с  $A_{01}$ .

*Полосовые характеристики фильтров* иллюстрирует рисунок 9.4. Как и следовало ожидать, фильтры в виде одной резонансной канавки имеют очень узкую полосу отражения 1-4% на уровне  $K > 0.8$ . Полоса сужается при уменьшении высоты канавки и возрастании  $b_0$ . Полоса отражения на уровне  $K > 0.8$  периодического гофрированного фильтра изменяется в пределах 5-12%. Как видно из хода кривых 1, при приближении  $b_0$  к границе полосы прозрачности коэффициент отражения  $K$  с уменьшением частоты от  $W=1$  вначале понижается, после чего увеличивается до единицы при достижении точки отсечки.



а – канавки,  $\Delta_k=0.7$   
 1 -  $b_0=4.5$ ,  $L_{k0}=5$ ,  $h_{k0}=3.95$ ;  
 2 -  $b_0=5.5$ ,  $L_{k0}=5$ ,  $h_{k0}=3.05$ ;  
 3 -  $b_0=6.5$ ,  $L_{k0}=5$ ,  $h_{k0}=1.41$ .

б – гофры:  
 1 -  $b_0=4$ ,  $d_{v0}=5.5$ ,  $h_{v0}=1.5$ ;  
 3 -  $b_0=4.5$ ,  $d_{v0}=4.64$ ,  $h_{v0}=3.2$   
 3 -  $b_0=6.5$ ,  $d_{v0}=5.41$ ,  $h_{v0}=1,8$

Рис. 9.4 – Зависимость коэффициента отражения  $K$  от частоты

Анализ вариантов рассмотренных фильтров, в виде периодического синусоидального гофра и в виде канавки показывает, что для любого радиуса волновода  $b_0$ , при котором обеспечивается распространение только  $H_{01}$  – волны, можно подобрать значения параметров фильтров рассмотренной конфигурации, обеспечивающих требуемый уровень отражения в полосе до 9%. Предложенный эффективный алгоритм решения волноводных задач

рассмотренного типа позволяет успешно производить синтез различных устройств на основе отрезка нерегулярного волновода.

### Литература

1. Пат.4745617 США, МКИ H01S. Ideal distributed Bragg reflectors and resonators/ Harvey R.J. (США); Hughes Aircraft Co. - № 31327. Заявл. 27.03.1987. Опубл. 17.05.1988. НКИ 372/96. – 12с.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. Математическое моделирование волноводных переходов.//РЭ. 2006. Т.51. №8.С.901-915.
3. Свешников А.Г. Принцип излучения.//ДАН СССР. 1950.Т.3.№5.С.517-520.
4. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В. Численное моделирование дифракции в волноводе методом конечных элементов.//Радиотехника.2004.№12.С.20-31.
5. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. –М.: Радио и связь, 1986, 208 с
6. Батура М.П., Кураев А.А, Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация мощных электронных приборов СВЧ. – Минск. БГУИР, 2006.
7. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М:МГУ 1983.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука. 1981.
9. Сеницын А.К. Метод блочной матричной прогонки для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Доклады БГУИР. 2007.№ 1 (17).С.57.
10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. – Минск. Наука и техника. 1986. 311С.
11. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М: Мир.1988. 548с.
12. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М: Мир. 1984. 333с.
13. Яроменок С.И. Расчет основных характеристик фильтра на нерегулярном периодическом волноводе. // Материалы 15-й международной Крымской микроволновой конференции.– Севастополь, Украина, 2005.– С.246-247.
14. Кураев А.А., Лущицкая И.В., Сеницын А.К. Исследование фильтра для  $E_{01}$  –волны на основе отрезка круглого гофрированного волновода.//Известия Белорусской инженерной академии.2003г., №1(15)/1, с.158-161
15. Кунцевич А.Ю., Сеницын А.К. Исследование фильтра, загрязняющего катод многоволнового черенковского генератора. // Материалы 15-й международной Крымской микроволновой конференции.– Севастополь, Украина, 2005.– С.248-249