9. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Расчетные соотношения и формулы

Таблица 9.1

Выражение	Номер	Выражение	Номер
$r = F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} w(x)dx$	9.1	$x_{\text{н}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$, обычно $n = 12$ (или $n = 20$)	9.2
$x' = (b-a)\cdot r + a$	9.3	$x_{\text{н}} = \sum\limits_{i=1}^{12} r_i - 6$	9.4
$x' = \sigma\cdot x_{\text{н}} + m = \sigma\left(\sum\limits_{i=1}^{12} r_i - 6\right) + m$	9.5	$T_{\text{ср}} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} t_j$	9.6
$x' = 0{,}7745967\left(\sum\limits_{i=1}^{20} r_i^{(1)} - 10\right)\cdot\sigma(x) + M(x)$			9.7
$z' = 0{,}7745967\left(\sum\limits_{i=1}^{20} r_i^{(2)} - 10\right)\cdot\sigma(z)\cdot\sqrt{1 - r_{xz}^2} + M(z) + r_{xz}\dfrac{\sigma(z)}{\sigma(x)}\left[x' - M(x)\right]$			9.8
$x' = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-r)$	9.9	$P(t_{\text{з}}) = \dfrac{N - N(t_{\text{з}})}{N}$	9.10
$x' = e^{\sigma\cdot x_{\text{н}} + m}$	9.11	$x' = \left[-\dfrac{1}{\rho}\ln(1\text{-}r)\right]^{1/\beta}$	9.12
$t_j = \min\{t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, ..., t_n^{(j)}\}$			9.13

9.2. Пояснение параметров

x - случайный параметр, рассматриваемый в отдельности; в функциях $F(x)$ и $w(x)$ также его текущие значения;

r - равномерно распределенная случайная величина (число) в диапазоне (0…1);

$w(x)$ - плотность распределения параметра x;

$F(x)$	-	функция распределения параметра x;
$x_{\text{н}}$	-	стандартная нормально распределенная случайная величина (имеет параметры $m=0$ и $\sigma=1$), получаемая при моделировании; в учебнике [1] эта величина обозначается также как z;
n	-	в формуле (9.2) - число независимых случайных чисел r_i с равномерным распределением; в выражении (9.13) - количество элементов в РЭУ, надежность которого моделируется;
x'	-	случайный параметр (число) x, получаемый при моделировании;
a, b	-	параметры закона равной вероятности (минимальное и максимальное значение случайного параметра);
m, σ	-	в выражении (9.5) - параметры нормальной модели (нормального закона распределения) случайной величины x; в формуле (9.11) - параметры логарифмически нормальной модели (логарифмически нормального закона распределения), $m=M(\lg x)$, $\sigma=\sigma(\lg x)$;
x', z'	-	в выражениях (9.7) и (9.8) – реализации случайных параметров x и z, вероятностная связь между которыми характеризуется коэффициентом линейной (парной) корреляции r_{xz} ;
$M(x)$,$M(z)$	-	математические ожидания (средние значения) параметров x и z;
$\sigma(x)$, $\sigma(z)$	-	средние квадратические отклонения параметров x и z;
r_{xz}	-	коэффициент линейной корреляции между параметрами x и z;
$r_i^{(1)}$, $r_i^{(2)}$	-	последовательности случайных равномерно распределенных чисел в диапазоне (0…1), полученные соответственно в первом и втором циклах;
λ	-	параметр экспоненциальной модели (экспоненциального закона распределения параметра);
ρ, β	-	параметры модели Вейбулла (распределения Вейбулла); β – коэффициент формы;
$T_{\text{ср}}$	-	среднее время безотказной работы РЭУ, найденное с использованием результатов моделирования;
t_j	-	время до отказа РЭУ, полученное в j-й реализации;
N	-	количество реализаций РЭУ при моделировании;
$P(t_{з})$	-	вероятность безотказной работы РЭУ, подсчитанная по результатам моделирования;
$N(t_{з})$	-	количество РЭУ, отказавших за время $t_{з}$;
$t_i^{(j)}$	-	время до отказа i–го элемента, полученное для j–й реализации РЭУ; $i=1,...,n$; $j=1,...,N$.

9.3. Типовые примеры

Пример 9.1. Получить методом обратного преобразования формулу для моделирования случайных чисел с экспоненциальным распределением, плотность распределения для которого

$$w(x)=\lambda e^{-\lambda x}; \quad x\geq 0; \quad \lambda>0.$$

Решение. 1. Воспользуемся формулой (9.1) и определим распределение случайной величины r:

$$r = F(x) = \int_0^x w(x)dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. Решаем полученное уравнение относительно x:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r).$$

Если r равномерно распределена в интервале (0...1), то и $(1-r)$ также равномерно распределена в том же интервале. Поэтому для моделирования чисел x с экспоненциальным распределением можно пользоваться более компактным выражением

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln r.$$

Пример 9.2. Выходной параметр является функцией двух независимых параметров x_1 и x_2 и выражается математической моделью

$$y = x_1 + x_2 + x_1 x_2, \tag{9.14}$$

где $x_1 = 10\ \text{В} \pm 5\%$ – имеет равномерное распределение в пределах поля допуска;

$x_2 = 30\ \text{В} \pm 10\%$ – имеет нормальное распределение.

Требуется получить математические выражения для моделирования на ЭВМ случайных параметров x_1 и x_2 и подсчитать значение y в первой реализации процесса (объекта).

Решение. 1.Определяем предельные граничные значения параметра x_1: нижняя граница $x_{1\text{Н}} = 9{,}5\ \text{В}$, верхняя – $x_{1\text{В}} = 10{,}5\ \text{В}$. Используя выражение (9.3), и учитывая, что $a = x_{1\text{Н}}$, $b = x_{1\text{В}}$, получаем формулу для моделирования равномерно распределенных значений параметра x_1:

$$x_1 = (x_{1\text{В}} - x_{1\text{Н}})\cdot r + x_{1\text{Н}} = r + 9{,}5; \qquad \text{r} \in (0...1). \tag{9.15}$$

2. Определяем предельные значения параметра x_2. Нижнее отклонение $x_{2\text{Н}} = 27\ \text{В}$, верхнее предельное отклонение $x_{2\text{В}} = 33\ \text{В}$. Предполагаем, что все значения x_2 лежат в пределах $\pm 3\sigma(x_2)$ от номинального значения $x_{2\text{ном}}$, которое совпадает с математическим ожиданием $M(x_2) = x_{2\text{ном}}$.

Пользуясь «правилом трех сигм», вычисляем среднее квадратическое отклонение параметра x_2. Получим

$$\sigma(x_2) \approx \frac{x_{2\text{В}} - x_{2\text{ном}}}{3} = \frac{33-30}{3} = 1\ \text{В}.$$

Принимая во внимание выражение (9.5), получаем формулу для моделирования значений параметра x_2 с нормальным законом распределения в найденных пределах от 27 до 33 В.

$$x_2 = x_\text{н}\sigma(x_2) + M(x_2) = x_\text{н} + 30; \qquad -3 \le x_\text{н} \le +3, \tag{9.16}$$

где $x_н$ – нормально распределенные случайные числа с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$ (нормальные стандартные числа).

3. Предположим, что моделирование первых значений последовательности равномерно распределенных в интервале (0...1) чисел r и нормальных стандартных чисел $x_н$ дало:

$$r=0{,}307;\ x_н=-0{,}460.$$

По этим значениям вычисляем x_1 и x_2, пользуясь выражениями (9.15) и (9.16) соответственно. Получим $x_1=9{,}807$ В; $x_2=29{,}54$ В.

Подставляем эти результаты в модель (9.14) и получаем первое значение выходного параметра: $y^{(1)}=329{,}046$.

Аналогично могут быть получены значения выходного параметра y для других реализаций процесса (объекта).

9.4. Задачи для самостоятельного решения

9.1. Используя формулу (9.1), получить с помощью ПЭВМ 100 реализаций сопротивления резистора, для которого R = 1 кОм ± 10%. С помощью программы lab1 [9] выполнить статистическую обработку реализаций и указать диапазон сопротивлений, в который будет попадать примерно 99,73% всех значений. Сравнить этот диапазон с диапазоном, найденным аналитическими методами.

9.2. Методом обратного преобразования получить формулы для генерирования с помощью ЭВМ значений случайного параметра, распределенного по закону Вейбулла, для которого плотность распределения задается выражением:

$$w(x)=\rho\beta\ x^{\beta-1}\ e^{-\rho\ x^{\beta}};\ x\ge 0,\ \rho>0.$$

9.3. Методом обратного преобразования получить формулу для генерирования с помощью ЭВМ случайных чисел, для которых плотность распределения имеет график, показанный на рис. 9.1.

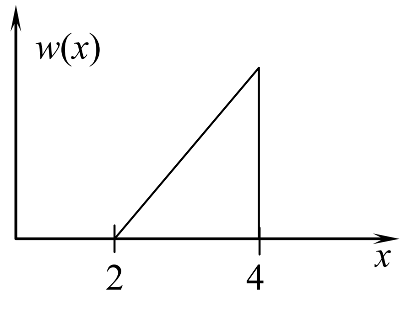

Рис. 9.1

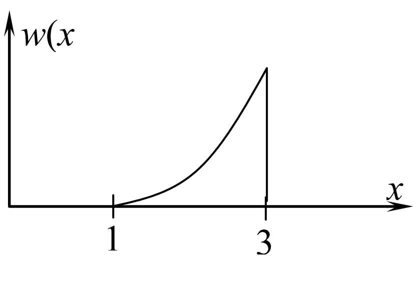

Рис. 9.2

9.4. Решить задачу 9.3 в предположении, что график *w(x)* имеет вид, показанный на рис. 9.2. Значения *w(x)* с увеличением *x* от 1 до 3 возрастают по показательной (экспоненциальной) функции.

9.5. Из партии резисторов со значением R = 1 кОм ± 10% был сделан отбор резисторов с разбросом сопротивления не более, чем ±5%. Требуется методом обратного преобразования получить примерную формулу для генерирования на ЭВМ отклонений сопротивления резисторов, оставшихся после процедуры отбора (рис. 9.3).

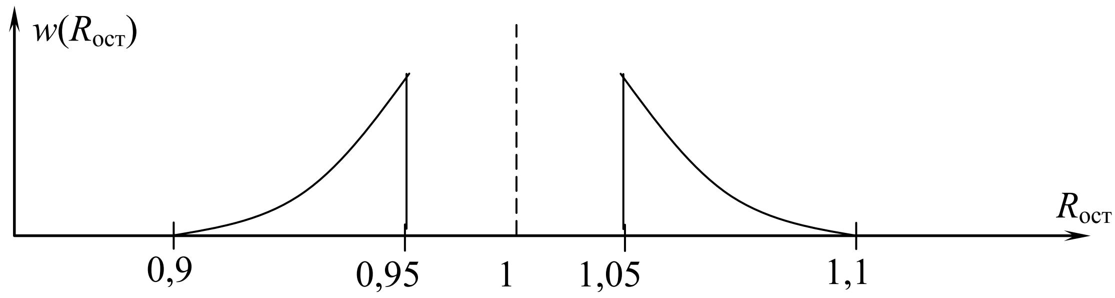

Рис. 9.3

9.6. Используя ЭВМ или таблицу равномерно распределенных случайных чисел, получить первые пять чисел, распределенных по закону Пуассона со значением $\lambda = 5$ 1/ч. Временной интервал τ принять равным 2 ч. Для решения задачи рекомендуется воспользоваться подразд. 9.7 учебника [1].

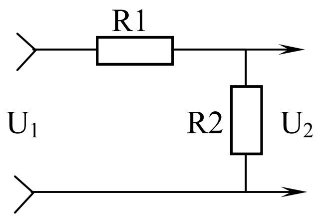

Рис. 9.4

9.7. Делитель напряжения, выполнен с использованием тонкопленочных резисторов R1 и R2 (рис. 9.4).

R1 = 200 Ом ± 10%, R2 = 300 Ом ± 10%.

Предполагая, что законы распределения сопротивлений резисторов нормальные и коэффициент парной корреляции между R1 и R2 равен 0,9, получить с помощью ЭВМ или таблицы равномерно распределенных случайных чисел первые десять пар этих коррелированных параметров.

9.8. Используя алгоритм, описанный в [1, с. 275 – 283], получить с помощью ЭВМ 30 пар коррелированных параметров x и z.

Законы распределения x и z равномерные со значениями

$a = -5$; $b = 5$ — для x; $a = -2$; $b = 2$ — для z.

Заданное значение коэффициента парной корреляции и абсолютную ошибку его обеспечения (ε) при моделировании выбрать согласно варианту из табл. 9.2.

Таблица 9.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{xz}	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,4	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
ε	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05

Указать, какое количество итераций потребовалось для достижения требуемого значения r_{xz} с ошибкой, не превышающей ε.

9.9. В качестве выходного параметра y рассматривается коэффициент деления $K_д$ делителя напряжения (рис. 9.5).

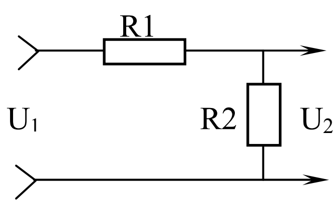

Рис. 9.5

$$y \to K_д = \frac{U_1}{U_2} = \frac{R1 + R2}{R2}.$$

Резисторы дискретные со значением сопротивления

R1 = 3 кОм ± 10%; R2 = 2 кОм ± 10%.

Методом Монте-Карло с использованием ЭВМ получить не менее 500 реализаций этого делителя с учетом производственного (технологического) разброса сопротивлений резисторов R1 и R2. По результатам статистической обработки реализаций дать ответ на вопрос о среднем значении величины $К_д$ и его рассеивании $\Delta К_д / К_д$, соответствующим вероятностям $P_г = 0{,}95$ и $P_г = 0{,}9973$.

Определить значения характеристики $\Delta К_д / К_д$, соответствующие вероятностям $P_г = 0{,}95$ и $P_г = 0{,}9973$, расчетно-аналитическим вероятностным методом (см. [1, с. 99 – 105]) и сравнить их со значениями, полученными методом Монте-Карло.

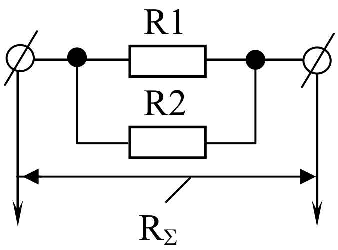

Рис. 9.6

9.10. Методом Монте-Карло с использованием математического моделирования на ЭВМ, а также расчетно-аналитическим вероятностным методом дать ответ на вопрос о среднем значении величины R_Σ (рис. 9.6) и ее относительном разбросе, соответствующим гарантированным вероятностям $P_г = 0{,}95$ и $P_г = 0{,}9973$.

Параметры резисторов: R1 = R2 = 1 кОм ± 10%.

Значение ошибки Δ, используемой в формуле (9.5), подлежит выбору и обоснованию при решении задачи.

9.11. Решить задачу **9.10**, рассматривая в качестве R_Σ результирующее сопротивление цепочки трех последовательно соединенных резисторов (рис. 9.7).

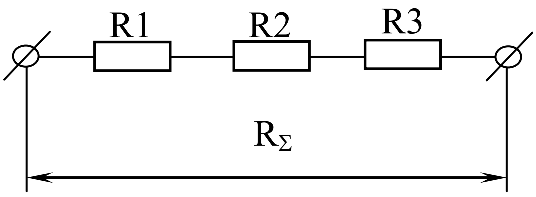

Рис. 9.7

R1 = R2 = R3 = 1кОм ± 10%.

9.12. РЭУ включает три блока (рис. 9.8). Отказ устройства возникает при отказе хотя бы одного из блоков. Интенсивности отказов блоков таковы:

$\lambda_1 = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ 1/ч; $\lambda_2 = 0{,}10 \cdot 10^{-3}$ 1/ч;

$\lambda_3 = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$ 1/ч.

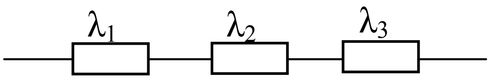

Рис. 9.8

1. Требуется моделированием на ЭВМ определить следующие количественные показатели безотказности: среднее время безотказной работы, вероятность безотказной работы за время $t_з = 500$ ч, 95-процентную наработку до отказа.
2. Определить показатели безотказности, указанные в п. 1, расчетным способом.
3. Сравнить результаты, полученные в пп. 1 и 2. Сделать выводы.

9.13. Смоделировать на ЭВМ функционирование одноканальной системы массового обслуживания с отказом. Поток поступающих заявок – простейший с параметром λ. Время обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Вариант моделирования выбирается из табл. 9.3.

Таблица 9.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ, заявок/ч	5	10	15	20	5	10	15	20	5	20	10	15
μ, заявок/ч	20	15	10	5	5	20	5	15	10	10	5	20

1. По результатам моделирования определить для установившегося режима следующие характеристики СМО: вероятность необслуживания заявки; вероятность того, что СМО будет простаивать.

2. Определить характеристики, указанные в п. 1 расчетно-аналитическим способом.

9.14. Решить задачу 9.13 в предположении, что СМО имеет два канала обслуживания.

9.15. Смоделировать на ЭВМ функционирование одноканальной СМО с отказом. Поток поступающих заявок простейший с параметром $\lambda = 10$ заявок/ч, время обслуживания заявок имеет нормальное распределение с параметрами $M(T_{об}) = 6$ мин, $\sigma(T_{об}) = 3$ мин.

1. По результатам моделирования определить для установившегося режима следующие характеристики СМО: вероятность необслуживания заявки; вероятность того, что СМО будет простаивать.

2. Определить характеристики, указанные в п. 1, расчетно-аналитическим способом.

9.16. Решить задачу 9.15 в предположении, что СМО имеет два канала обслуживания.

9.17. Решить задачу 9.15 в предположении, что время обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 5$ заявок/ч .

9.18. Смоделировать на ЭВМ функционирование одноканальной СМО с отказом. Заявки поступают в СМО через одинаковые промежутки времени $t = 6$ мин. Время обслуживания заявок имеет нормальное распределение с параметрами $M(T_{об}) =$ 6 мин, $\sigma(T_{об}) = 3$ мин.

1. По результатам моделирования определить для установившегося режима следующие характеристики СМО: вероятность необслуживания заявки; вероятность того, что СМО будет простаивать.

2. Определить характеристики, указанные в п. 1, расчетно-аналитическим способом.

9.19. Решить задачу 9.18 в предположении, что СМО имеет два канала обслуживания.

9.20. Решить задачу 9.18 в предположении, что время обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 5$ заявок/ч.

9.21. Смоделировать на ЭВМ функционирование одноканальной СМО с отказом. Поток поступающих заявок простейший с параметром $\lambda = 0{,}2$ заявки/ч, время обслуживания заявок имеет нормальное распределение с параметрами $M(T_{об}) = 4{,}5$ ч; $\sigma(T_{об}) = 0{,}8$ ч.

1. По результатам моделирования определить следующие характеристики СМО: вероятность необслуживания заявки в течение рабочей смены; вероятность того, что в течение рабочей смены система будет простаивать. Продолжительность рабочей смены принять равной семи часам.

2. Определить характеристики, указанные в п. 1, расчётно-аналитическим способом.