

## 8. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ РЭУ

### 8.1. Расчетные соотношения и формулы

Таблица 8.1

Выражение	Но- мер	Выражение	Но- мер
$\alpha = \lambda \cdot M(T_{\text{об}}) = \frac{\lambda}{\mu}$	8.1	$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^n \alpha^i / i!}; \quad 0 \leq k \leq n$	8.2
$P_{\text{необ}} = p(x_n) = p_n$	8.3	$P_{\text{простоя}} = p(x_0) = p_0$	8.4
$q = 1 - P_{\text{необ}}$	8.5	$Q = \lambda \cdot q$	8.6
$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}};$ $0 \leq k \leq n; \quad \alpha < n;$	8.7	$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}};$ $s \geq 0; \quad \alpha < n$	8.8
$M(T_{\text{ож}}) = \lambda / [\mu \cdot (\mu - \lambda)]; \quad \lambda < \mu$	8.9	$\mu = 1 / M(T_{\text{об}});$	8.10
$m_s = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! (1 - \alpha/n)^2}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! (n - \alpha)}};$ $\alpha < n$	8.11	$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j};$ $0 \leq k \leq n$	8.12
$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j};$ $0 \leq s \leq m$	8.13	$P_{\text{необ}} = p(x_{n+m}) = p_{n+m}$	8.14
$t \geq (4...5) \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{\mu} \right)$			8.15

## 8.2. Пояснение параметров

$\alpha$	–	приведенная плотность заявок или коэффициент загрузки канала;
$n$	–	число каналов обслуживания в системе массового обслуживания (СМО);
$p(x_k), p_k$	–	вероятность состояния СМО, заключающегося в том, что в системе занято $k$ каналов; $0 \leq k \leq n$ ;
$p_{n+s}$	–	вероятность состояния СМО, заключающегося в том, что в системе заняты все $n$ каналов и $s$ заявок находится в очереди;
$M(T_{об})$	–	математическое ожидание времени обслуживания одной заявки;
$\lambda$	–	плотность потока поступающих заявок (среднее число заявок, поступающих в единицу времени);
$\mu$	–	плотность потока обслуженных заявок (среднее число заявок, обслуженных в единицу времени);
$k$	–	число каналов обслуживания;
$P_{необ}$	–	вероятность необслуживания заявки;
$P_{простоя}, p(x_0), p_0$	–	вероятность того, что СМО будет простаивать;
$q$	–	относительная пропускная способность СМО;
$Q$	–	абсолютная пропускная способность СМО;
$M(T_{ож})$	–	среднее время ожидания заявки в очереди (для "чистой" СМО с ожиданием);
$m_s$	–	среднее число заявок, находящихся в очереди (для "чистой" СМО с ожиданием);
$m$	–	число, ограничивающее количество заявок, стоящих в очереди;
$p(x_{n+m}), p_{n+m}$	–	вероятности состояния СМО смешанного типа с ограничением длины очереди числом $m$ , соответствующие вероятности необслуживания заявки этой системой;
$t$	–	время, через которое режим функционирования СМО может рассматриваться практически как установившийся (кроме "чистой" СМО с ожиданием).

## 8.3. Типовые примеры

**Пример.8.1.** На участок ремонта технологического оборудования поступают приборы со средней плотностью  $\lambda = 2$  ед./ч. Среднее время обслуживания одной единицы оборудования равно 24 мин. Заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании.

Требуется определить характеристики СМО в предположении наличия одного рабочего места и проследить, как меняются её характеристики при введении второго рабочего места.

**Решение.** Согласно условию имеем СМО с отказом (в обслуживании).

Будем предполагать, что поток заявок, поступающих в СМО, простейший со средней плотностью  $\lambda$ .

1. По формуле (8.1) подсчитаем коэффициент загрузки канала или приведенную плотность заявок  $\alpha$  :

$$\alpha = \lambda \cdot M(T_{об}) = 2 \cdot 0,4 = 0,8.$$

При расчете значения величины  $\alpha$  учтено, что 24 мин = 0,4 ч.

2. Найдем характеристики СМО при числе каналов  $n=1$ . Применяя формулу (8.2), для вероятности необслуживания заявки получим

$$P_{необ} = p_n = p_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{0,8}{1+0,8} \approx 0,44.$$

Относительная пропускная способность  $q$  определится по выражению (8.5) как

$$q = 1 - P_{необ} = 1 - 0,44 = 0,56.$$

Следовательно, примерно 56% заявок, поступивших в СМО, будут обслужены.

Найдем вероятность простоя канала ( $P_{простоя}$ ). Принимая во внимание соотношение (8.4), по формуле (8.2) получим

$$P_{простоя} = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+0,8} \approx 0,56.$$

3. Проследим, как меняются характеристики системы с введением второго канала. Для этого в соответствии с выражениями (8.3) – (8.5), используя формулы (8.2), подсчитаем характеристики СМО при значении  $n=2$ . Получим

$$P_{необ} = p_2 = \frac{0,8^2/2}{1+0,8+0,8^2/2} \approx 0,15; \quad q = 1 - P_{необ} = 1 - 0,15 = 0,85;$$

$$P_{простоя} = \frac{1}{1+0,8+0,8^2/2} \approx 0,47.$$

Относительная пропускная способность  $q=0,85$  или 85%.

Доля времени простоя системы уменьшилась до 47%.

**Пример 8.2.** На участок ремонта РЭУ поступают блоки со средней плотностью 2 блока в час. Среднее время ремонта одного блока равно 27 мин.

Требуется определить характеристики системы в случае одного и двух рабочих мест при условии, что в помещении дополнительно для ожидания в очереди можно поставить три блока ( $m=3$ ).

**Решение.** Согласно условию участок ремонта может рассматриваться как СМО смешанного типа с ограничением числа заявок, стоящих в очереди.

Будем считать, что поток заявок, поступающих в СМО, является простейшим, со средней плотностью  $\lambda$ .

По условию примера имеем

$$m=3; \quad \lambda = 2 \text{ бл./ч}; \quad M(T_{об}) = 27 \text{ мин} = 0,45 \text{ ч}.$$

Используя формулу (8.1), определяем

$$\alpha = 2 \cdot 0,45 = 0,9.$$

Подсчитаем характеристики СМО при числе каналов  $n=1$  для случая установившегося режима. Воспользуемся формулами (8.12) – (8.13).

1. Вероятность необслуживания заявки согласно равенству (8.14), определится как

$$P_{\text{необ}}^4 = p_{1+3} \approx 0,16.$$

2. Относительная пропускная способность СМО в соответствии с выражением (8.5)

$$q = 1 - P_{\text{необ}} = 0,84;$$

т. е. обслужено будет примерно 84% заявок.

3. Абсолютная пропускная способность, вычисляемая по формуле (8.6),

$$Q = 1,68 \text{ бл./ч}.$$

4. Средняя доля времени, которое СМО будет простаивать, с учетом соотношений (8.4) и (8.2) примет значение

$$p_0 = p(x_0) = 0,24,$$

т.е. примерно четверть.

5. Если число каналов  $n=2$ , то характеристики СМО для случая установившегося режима будут иметь следующие значения:

$$P_{\text{необ}} \approx 0,014; \quad q = 0,986; \quad Q = 1,972 \text{ бл./ч}; \quad p_0 = 0,384.$$

Из этой записи следует, что примерно 99% заявок будет обслужено, но в то же время примерно 2,7 часа при продолжительности рабочей смены 7 часов СМО будет простаивать.

#### 8.4. Задачи для самостоятельного решения

**8.1.** На участок ремонта технологического оборудования поступают заявки (требования). Причем среднее число заявок, приходящееся на единицу времени, постоянно и составляет 0,5 заявок в час. Заявки поступают по одиночке, и время поступления следующей заявки не зависит от времени поступления предыдущей заявки. Требуется определить вероятность того, что за рабочую смену (7 ч) на участок ремонта: а) не поступит ни одной заявки; б) поступит одна заявка; в) поступит две заявки.

**8.2.** На участок ремонта радиоэлектронных блоков поступают заявки со средней плотностью 2 блока в час. Среднее время ремонта и среднее квадратическое отклонение времени ремонта одного блока составляют соответственно 27 и 25 мин. Эти значения получены по данным ремонта 25 блоков. Если в момент поступления следующего блока все ремонтники заняты ремонтом предыдущих блоков, то такой блок уносят с участка на склад. Требуется определить, сколько рабочих мест для ремонта блоков необходимо предусмотреть, чтобы за рабочую смену (7 ч) отказ в обслуживании в среднем получили не более двух блоков.

**8.3.** Известно [4], что процесс подсчета полупроводниковых элементов в конце технологического процесса их изготовления является процессом массового обслуживания с отказом. Время счета одного элемента конечно и, если последующий элемент пройдет мимо счетчика в тот момент времени, когда счет предыдущего элемента еще не закончился, то этот последующий элемент счетчиком не будет учтен.

В распоряжении предприятия имеются счетчики со скоростью счета 25 элем./с. Требуется выяснить, какова будет ошибка подсчета для каждого из двух потоков с плотностью  $\lambda_1 = 1$  элем./с и  $\lambda_2 = 0,5$  элем./с; не превысит ли ошибка подсчета 5% при объединении двух этих потоков в один, какова ошибка подсчета элементов в этом случае.

**8.4.** На участок ремонта РЭС поступают блоки с плотностью 10 блоков в час. Среднее время ремонта и среднее квадратическое отклонение времени ремонта одного блока составляют соответственно 10 и 8 мин. Причем эти значения получены по результатам ремонта 30 блоков. Блок, заставший все места ремонта занятыми, не покидает участок ремонта, а ожидает освобождения одного из мест, причем на ожидание никаких ограничений не наложено. Требуется определить, какое минимальное количество рабочих мест для ремонта необходимо предусмотреть на участке, для того, чтобы:

- а) среднее время ожидания блока в очереди составило не более 5 мин;
- б) среднее количество блоков, стоящих в очереди, составило не более 3.

**8.5.** На участок ремонта поступают радиоэлектронные блоки со средней плотностью 5 блоков в час. Среднее время ремонта одного блока составляет 5 мин. Для ожидания в очереди на каждом рабочем месте можно поставить один блок. Требуется определить, какое минимальное количество рабочих мест необходимо предусмотреть, для того чтобы:

- а) процент отремонтированных блоков был не ниже 95;
- б) количество неотремонтированных блоков, покинувших участок из-за загрузки ремонтников и отсутствия мест для ожидания в очереди, составило за рабочую смену (7 ч) в среднем не более 5 штук.

**8.6.** На участок ремонта технологического оборудования поступают приборы со средней скоростью 5 приборов в час. Имеется три рабочих места для ремонта. Среднее время ремонта одного прибора составляет 15 мин. Требуется определить, на какое минимальное количество приборов, ожидающих в очереди для ремонта, должен быть рассчитан стеллаж для того, чтобы отказ в ремонте получали не более 5% приборов.

**8.7.** Протекание технологического процесса может рассматриваться как функционирование одноканальной СМО с отказом. Поток поступающих заявок простейший с параметром  $\lambda = 10$  заявок/ч, время обслуживания заявок имеет нормальное распределение с параметрами  $M(T_{об}) = 6$  мин,  $\sigma(T_{об}) = 3$  мин.

Требуется определить следующие характеристики СМО: вероятность необслуживания заявки в течение рабочей смены (7 ч); вероятность того, что в течение рабочей смены СМО будет простаивать.

**8.8.** Решить задачу 8.7 в предположении, что СМО с отказом имеет два канала обслуживания.

**8.9.** Для условий задачи 8.7 требуется определить, какое минимальное число каналов обслуживания необходимо предусмотреть, чтобы отказ в обслуживании получали не более пяти процентов заявок за рабочую смену (7 ч).

**8.10.** Поток заявок, поступающих в СМО, простейший с параметром  $\lambda = 30$  заявок/ч. Время обслуживания заявок определялось экспериментально. В результате статистической обработки 25 наблюдений получено  $M(T_{об}) \approx 5,5$  мин,  $\sigma(T_{об}) \approx 5,3$  мин.

Требуется определить, какое минимальное число каналов обслуживания необходимо предусмотреть, чтобы среднее число заявок, стоящих в очереди, не превышало пяти.

**8.11.** Решить задачу 8.7 в предположении, что  $\lambda = 0,2$  заявок/ч,  $M(T_{об}) = 4,5$  ч,  $\sigma(T_{об}) = 0,8$  ч.

**8.12.** Решить задачу 8.7 в предположении, что  $\lambda = 0,1$  заявок/ч,  $M(T_{об}) \approx 9$  ч,  $\sigma(T_{об}) \approx 8,1$  ч. Характеристики  $M(T_{об})$  и  $\sigma(T_{об})$  получены как результат статистической обработки 20 наблюдений обслуживания заявок.