ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЕМ НА ПЭВМ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ РЭУ

9.1. Цель работы

Цель работы: определение основных характеристик системы массового обслуживания (СМО) смешанного типа с ограничением длины очереди моделированием на ПЭВМ процесса её функционирования.

Исследование выполняется на примерах работы участка регулировки и (или) участка ремонта функциональных узлов РЭУ.

9.2. Теоретические сведения

В технологии РЭУ протекание многих процессов можно рассматривать как функционирование СМО. Каждая СМО состоит из некоторого числа каналов обслуживания, в качестве которых могут выступать рабочие места, участки, технологическое оборудование и т. п. В качестве заявок могут быть функциональные узлы, сошедшие с конвейера и поступающие на участок регулировки, неисправные ФУ, поступающие на участок ремонта, отказавшее технологическое оборудование и т.п.

Функционирование любой СМО состоит в обслуживании поступающих на ее каналы заявок. Заявки поступают одна за другой через некоторые, в общем случае случайные, интервалы времени. После того как заявка обслужена, канал СМО освобождается и готов принять следующую заявку.

Основные характеристики СМО, используемые на практике:

- пропускная способность. Различают относительную и абсолютную пропускные способности. Относительная пропускная способность показывает, каков процент заявок будет обслужен системой, абсолютная – какое количество заявок будет обслужено в единицу времени;
- средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
- вероятность простоя – средняя доля времени, в течение которого СМО будет простаивать.

Пропускная способность зависит не только от параметров СМО, но и от характера поступления заявок. В технологии РЭУ моменты поступления заявок часто случайны, например поступление функциональных узлов РЭУ на ремонт с участка регулировки. Обычно случайно и время обслуживания заявки. Поэтому в системе образуются местные "скопления" и "разряжения" заявок. Это может привести либо к отказам в обслуживании заявок и образованию очередей, либо к простою СМО. В зависимости от того, как поступают с заявкой, если все каналы СМО оказались занятыми, различают:

- СМО с отказом (в обслуживании заявки);
- СМО с ожиданием.

В СМО с отказом заявка, заставшая все каналы занятыми, немедленно покидает СМО (изделие убирается с участка и, к примеру, складируется).

В СМО с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а ставится в очередь и при освобождении одного из каналов обслуживается. На процесс ожидания заявок в очереди могут не накладываться или накладывается определенные ограничения.

Если на процесс ожидания заявок в очереди не наложено никаких ограничений, то СМО называют "чистой системой с ожиданием". Если на процесс ожидания заявок в очереди наложено какое-то ограничение (одно или несколько), то СМО называют "системой смешанного типа". Это название объясняется следующим. С одной стороны, указанная система является СМО с ожиданием, но с другой стороны, из-за наличия ограничений на процесс ожидания заявок в очереди возможны случаи отказа в обслуживании заявок, т.е. такая система проявляет также признаки СМО с отказом (рис. 9.1).

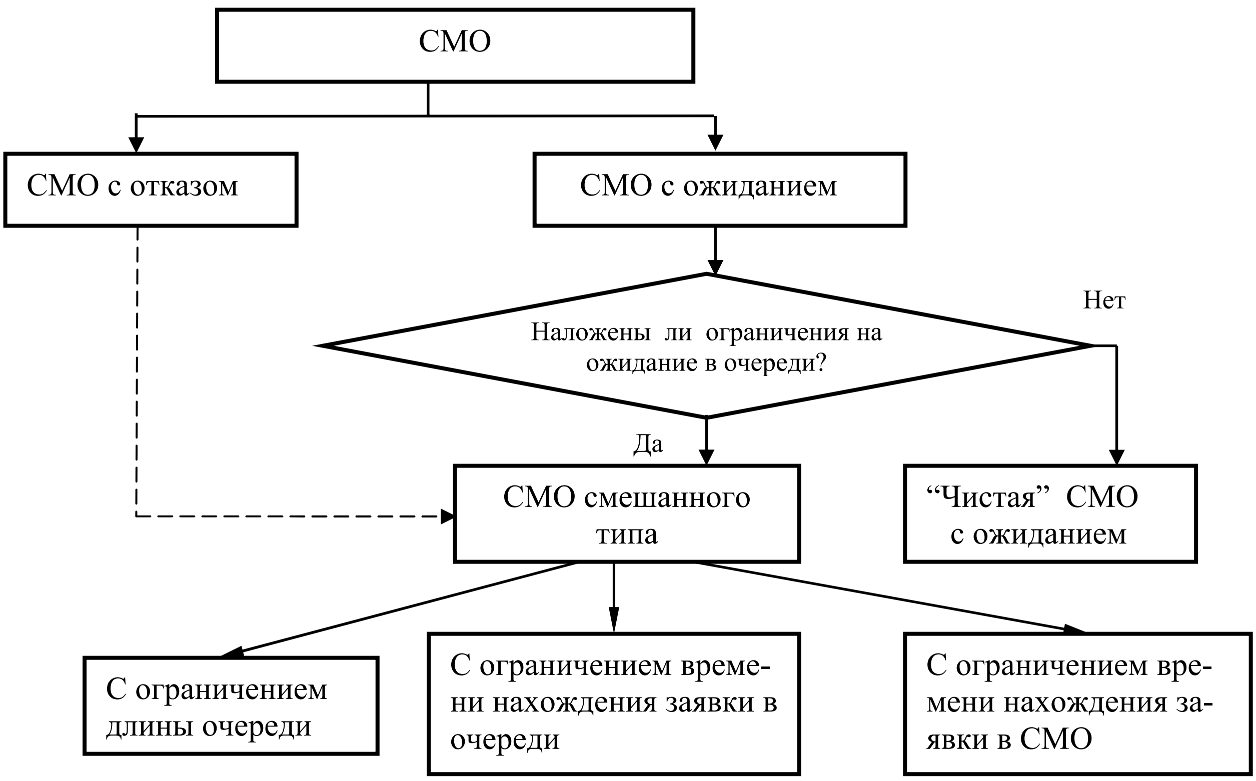

Рис. 9.1. Виды СМО в технологии РЭУ

В зависимости от характера ограничений основными видами СМО смешанного типа являются:

- СМО с ограничением длины очереди;
- СМО с ограничением времени ожидания заявки в очереди;
- СМО с ограничением времени пребывания заявки в системе.

Чтобы дать рекомендации по выбору числа каналов обслуживания, необходимо выяснить, как повлияет число каналов на основные характеристики СМО. Существенное влияние на функционирование и характеристики СМО оказывает характер **потока поступающих заявок.**

Под **потоком заявок** (событий) понимают последовательность заявок, следующих одна за другой в какие-то моменты времени.

В теории массового обслуживания особую роль играет **простейший** (пуассоновский) поток заявок. Для таких потоков число заявок, приходящихся на любой фиксированный интервал времени τ (рис.9.2), распределено по закону Пуассона для дискретных случайных величин.

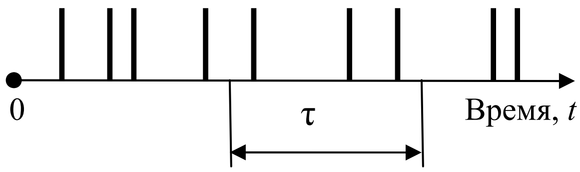

Рис.9.2. Поток поступающих заявок

Вероятность того, что за время τ произойдёт ровно m событий, равна:

$$P(m/\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (9.1)$$

где λ – плотность потока заявок, которая представляет среднее число заявок, приходящихся на единицу времени.

Важной характеристикой потока заявок является закон распределения промежутка времени t между приходом двух соседних заявок.

Простейший поток заявок обладает тремя следующими свойствами:

- стационарностью; это означает, что вероятностные характеристики потока не зависят от рассматриваемого временного участка; для стационарного потока характерна постоянная плотность – среднее число заявок в единицу времени;
- отсутствием последействия; это означает, что заявки в СМО поступают независимо друг от друга;
- ординарностью, что означает приход заявок в СМО поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

В теории вероятностей доказывается, что для простейшего потока время t между поступлениями соседних заявок описывается экспоненциальным законом. Плотность распределения $w(t)$ в этом случае

$$w(t)=\lambda e^{-\lambda t};\ t > 0, \quad (9.2)$$

где λ – параметр распределения, численно равный плотности потока заявок (среднему числу заявок в единицу времени).

Простейший поток заявок, описываемый выражением (9.2), играет в теории массового обслуживания особую роль. Во-первых, простейшие и близкие к ему потоки заявок часто встречаются на практике. Во-вторых, можно получить удовлетворительные по достоверности результаты, заменив любой поток простейшим. Простейший поток при анализе СМО играет в некоторой степени роль, аналогичную нормальному закону при описании случайных параметров.

Математическое описание СМО смешанного типа с ограничением длины очереди

Пусть имеется n-канальная СМО с ожиданием, для которой число заявок, стоящих в очереди, ограничено значением m. Эта СМО имеет конечное число состояний. Обозначим буквой x состояния СМО и перечислим их (табл. 9.1).

Если число заявок в очереди равно m, то следующая заявка в очередь не ставится, а покидает систему необслуженной.

Будем предполагать, что поток заявок, поступающих в рассматриваемую систему, является простейшим с плотностью λ, а время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{M\left(T_{\text{об}}\right)},$$

где $M(T_{\text{об}})$ – среднее значение (математическое ожидание) времени обслуживания заявки.

Таблица 9.1

Обозначение	Суть состояния СМО
x_0	Все каналы свободны, очереди нет
x_1	Занят один канал, очереди нет
…	…………………………..
x_k	Занято k каналов, очереди нет
…	…………………………..
x_n	Заняты все n каналов, очереди нет
x_{n+1}	Заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди
….	…………………………..
x_{n+m}	Заняты все n каналов, m заявок стоят в очереди

Если будут найдены вероятности состояний, то тем самым будут определены важнейшие характеристики СМО.

Для вероятностей состояний рассматриваемой СМО могут быть составлены дифференциальные уравнения Эрланга. Решение этих уравнений позволяет получить формулы для расчета вероятностей состояний СМО для установившегося режима функционирования, который наступает всегда при времени функционирования $t \to \infty$ [1]:

$$p\left(x_k\right) = p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 0 \le k \le n; \tag{9.3}$$

$$p\left(x_{n+s}\right) = p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 1 \le s \le m, \tag{9.4}$$

где α – приведённая плотность потока заявок, иначе – коэффициент загрузки канала.

Величину α можно определить как

$$\alpha = \lambda \cdot M\left(T_{\text{об}}\right). \tag{9.5}$$

Формулы (9.3) и (9.4) называются формулами Эрланга.

Приняв в формуле (9.4) $s = m$, получим вероятность того, что заявка получит отказ в обслуживании

$$P_{\text{необ}} = p_{n+m}. \qquad (9.6)$$

Относительная пропускная способность определяется как

$$q = 1 - P_{\text{необ}}. \qquad (9.7)$$

Принимая в формуле (9.3) $k = 0$, получим вероятность того, что СМО будет простаивать (p_0). Напомним, что эта вероятность показывает среднюю долю времени, которое СМО будет простаивать (простаивают сразу все каналы).

Формулы Эрланга получены для случая экспоненциального распределения времени обслуживания. В литературе [3] утверждается, что эти формулы остаются справедливыми при любом законе распределения времени обслуживания, лишь бы поток заявок был простейшим.

9.3. Описание исследуемых СМО

В лабораторной работе исследуются СМО смешанного типа с ограничением длины очереди. В качестве таких систем рассматриваются:

а) участок регулировки функциональных узлов РЭС (ФУ РЭС);

б) участок ремонта ФУ РЭС.

Для участка регулировки ФУ РЭС входным потоком (потоком заявок) являются функциональные узлы, поступающие со сборочного конвейера. В производственных условиях стремятся к ритмичности производства, поэтому интервал времени между поступлением соседних заявок является практически постоянным. В этом случае время между приходом двух соседних заявок практически является константой на любом рассматриваемом временном интервале функционирования СМО. При исследовании такой системы приходится заменять входной поток простейшим потоком.

Время регулировки ФУ РЭС является случайным. Законы его распределения могут быть разными. Наиболее характерен, вероятно, нормальный закон.

Для участка ремонта входным потоком (потоком заявок) являются неисправные ФУ РЭС, поступающие с участка регулировки. Поток заявок образуется из ФУ, регулировка которых не выполнялась ввиду наличия в ФУ неисправностей (дефектов), внесенных сборочными операциями. Поток поступающих заявок в этом случае близок к простейшему и может рассматриваться как простейший.

Ясно, что время ремонта ФУ случайно и во многом определяется опытом и квалификацией работника. Закон распределения времени ремонта может быть как близок к нормальному, так и заметно отличаться от него (экспоненциальный, равномерный).

Моделирование СМО на ПЭВМ

Программа моделирования СМО написана таким образом, что на экране дисплея ПЭВМ обеспечивается наглядность функционирования СМО. Достигается это путём графического отображения на экране дисплея рабочих мест (каналов обслуживания) рассматриваемого участка, линейки для постановки заявок в очередь. Сами заявки (ФУ) отображаются на экране светящимися цифрами. Эти цифры одновременно указывают номер ФУ, поступающего в СМО. По номеру заявки можно проследить путь прохождения ФУ в системе.

Моделирование процесса функционирования СМО основано на последовательном просмотре времени поступления заявки и времени ее обслуживания. Численные значения времени определяют ритмичность поступления заявок и продолжительность их нахождения в СМО.

Значения времени поступления заявки и времени ее обслуживания определяются с помощью генераторов случайных чисел (встроенных функций, подпрограмм) в соответствии с законом распределения времени. В табл. 9.2 указано, какие законы распределения реализованы в программе моделирования СМО и какие параметры являются исходными данными для указанных законов.

Таблица9.2

Назначение СМО		Регулировка ФУ РЭС		Ремонт ФУ РЭС	
Вариант СМО		1	2	3	4
Время поступления заявок в СМО	Закон распределения	t = const	t = const	Экспоненциальный	Экспоненциальный
	Параметры	t = 9 мин	t = 5 мин	$\lambda = 0{,}4$ мин$^{-1}$	$\lambda = 0{,}4$ мин$^{-1}$
Время обслуживания заявок	Закон распределения	Экспоненциальный	Нормальный	Экспоненциальный	Нормальный
	Параметры	$\mu = 1/M(T_{об}) = 0{,}1$ мин$^{-1}$	$M(T_{об}) = 4$ мин; $\sigma(T_{об}) = 1$ мин	$\mu = 1/M(T_{об}) = 0{,}2$ мин$^{-1}$	$M(T_{об}) = 4$ мин; $\sigma(T_{об}) = 1$ мин

Пояснение параметров, приведённых в табл. 9.2:

λ – плотность поступления заявок;

t – время между приходом двух соседних заявок;

μ – плотность потока обслуженных заявок (аналог параметра λ, используемого при описании потока поступающих заявок);

$M(T_{об})$, $\sigma(T_{об})$ – среднее время обслуживания одной заявки и среднее квадратическое отклонение времени обслуживания одной заявки.

Моделирование процесса функционирования СМО смешанного типа с ограничением длины очереди можно осмыслить с помощью диаграммы поступления и обслуживания заявок (рис. 9.3).

Основные характеристики СМО определяют по результатам моделирования. Вероятность простоя СМО определяется как

$$p_0 = t_{пр} / t_{смо}\ , \tag{9.8}$$

где $t_{пр}$ – время простоя СМО;

$t_{смо}$ – рассматриваемый интервал времени функционирования СМО.

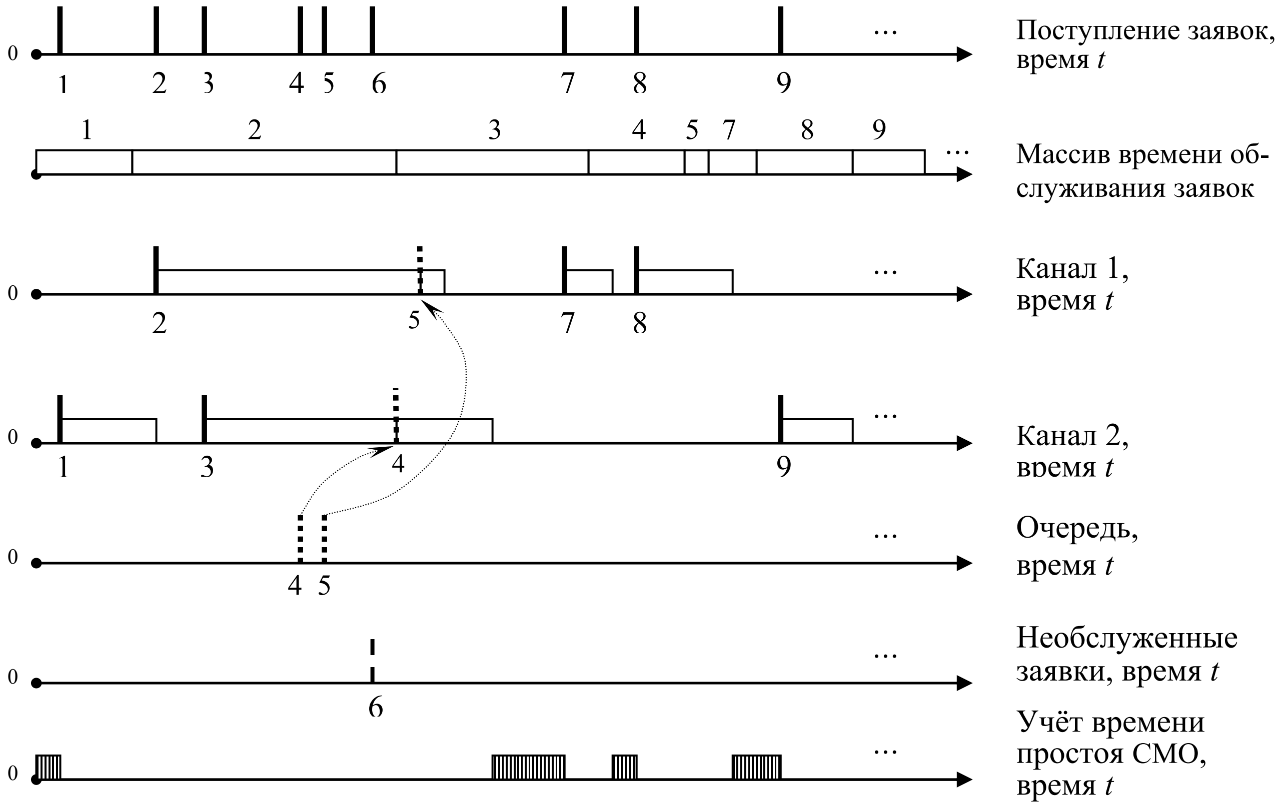

Рис. 9.3. Функционирование СМО смешанного типа с ограничением длины очереди числом *m* = 2 в случае двух каналов

Вероятность того, что заявка не будет обслужена СМО, можно получить по выражению

$$P_{\text{необ}} = N_{\text{необ}} / N_{\text{смо}} , \tag{9.9}$$

где $N_{\text{необ}}$ – количество ФУ (заявок), получивших отказ в обслуживании;
$N_{\text{смо}}$ – общее количество ФУ (заявок), прошедших через СМО.

9.4. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

В экспериментальной части лабораторной работы необходимо:

1. Ознакомиться с вариантами исходных данных для моделирования исследуемых СМО (см. табл. 9.2). Значение длины очереди m уточнить у преподавателя.

2. Используя исходные данные варианта 1 (см. табл. 9.2), запустить на ПЭВМ программу моделирования СМО, приняв число каналов (рабочих мест) $n = 1$. Имя программы ***lab*9** в папке **ТОКТиН.** Наблюдая на дисплее ПЭВМ процесс функционирования СМО, получить исходные данные, необходимые для определения по формулам (9.8) и (9.9) характеристик исследуемой СМО. Используя выражения (9.8), (9.9) и (9.7), определить характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q.

3. Повторяя моделирование СМО на ПЭВМ, получить данные, необходимые для определения характеристик СМО при числе каналов $n = 2$ и $n = 3$, и по выражениям (9.8), (9.9) и (9.7) определить характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q.

4. Повторить пп. 2, 3 для вариантов СМО 2 – 4 табл. 9.2.

5. Используя формулы Эрланга (9.3) – (9.4) и выражения (9.5) – (9.7), рассчитать характеристики p_0, $P_{\text{необ}}$ и q для каждого варианта СМО (см. табл. 9.2) при числе каналов n = 1, 2 и 3 (считая потоки заявок простейшими).

6. Написать отчёт по работе.

9.5. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Описание исходных данных, характеризующих исследуемые варианты СМО.
3. Значения характеристик исследуемых СМО, полученные с использованием результатов моделирования и рассчитанные по формулам Эрланга при числе каналов n = 1, 2, 3.
4. Используемые в расчётах формулы Эрланга.
5. Анализ эффективности функционирования исследуемых СМО при различном числе каналов обслуживания.
6. Выводы. Привести заключение о причинах расхождения теоретических и реальных (по результатам моделирования) характеристик исследуемых СМО, сформулировать рекомендации по выбору числа каналов для исследуемых СМО.

Примечание. Ответ на п. 3 дать в виде табл. 9.3.

Таблица 9.3

<table>
<tr><th rowspan="3">Вариант СМО по табл. 9.2</th><th colspan="6">Характеристика СМО</th></tr>
<tr><th colspan="2">p_0, полученная</th><th colspan="2">$P_{\text{необ}}$, полученная</th><th colspan="2">q, полученная</th></tr>
<tr><th>по результатам моделирования</th><th>с использованием формул Эрланга</th><th>по результатам моделирования</th><th>с использованием формул Эрланга</th><th>по результатам моделирования</th><th>с использованием формул Эрланга</th></tr>
<tr><td>1
…
4</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков С.М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности: Учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.
2. Львович Я.Е., Фролов В.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 192 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 576 с.