Глава 8. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ РЭУ

8.1. Понятие и характеристики систем массового обслуживания

Протекание многих процессов в технологии РЭУ может рассматриваться как функционирование, так называемых, систем массового обслуживания (СМО).

Любая такая система состоит из определенного числа каналов обслуживания. Применительно к технологии РЭУ, в качестве каналов обслуживания могут рассматриваться технологическое оборудование, рабочие места и т.п.

Функционирование системы массового обслуживания состоит в поступлении на ее каналы заявок и их обслуживании. После того, как заявка обслужена, канал освобождается и готов принять очередную заявку.

Основными характеристиками СМО являются;

1) процент заявок, получивших отказ в обслуживании;

2) пропускная способность СМО. Различают относительную и абсолютную пропускные способности. Относительная пропускная способность показывает, каков процент заявок будет обслужен системой, абсолютная — какое количество будет обслужено в единицу времени;

3) вероятность простоя СМО (простоем СМО считают одновременный простой всех каналов);

4) среднее время обслуживания одной заявки.

Если бы время обслуживания заявок и интервалы, через которые поступают заявки, были постоянными, то оценка характеристик СМО, указанных в пп.1-3, не представляла бы труда. За счет того, что в общем случае время обслуживания и время поступления заявок случайны, в СМО могут образовываться разряжения и скопления заявок, что может приводить к ее простою и отказам в обслуживании заявок.

Основной задачей теории массового обслуживания является установление взаимосвязи между характером потока поступающих заявок и основными характеристиками СМО.

8.2. Потоки событий (заявок) и их математическое описание

Под потоком событий или заявок понимают последовательность событий, следующих друг за другом через определенные, в общем случае случайные, промежутки времени.

В инженерной практике широкое применение находят простейшие или стационарные пуассоновские потоки заявок [1, 7, 14].

Название "пуассоновский" связано с тем, что для таких потоков число заявок, попавших на любой фиксированный интервал времени, распределено по закону Пуассона для дискретных случайных величин величин. Согласно этому закону вероятность того, что за время τ поступит m заявок, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \qquad (8.1)$$

где λ — плотность потока заявок (среднее число заявок, приходящихся на единицу времени).

Для краткости простейшие стационарные пуассоновские потоки часто называют простейшими потоками. Такой поток должен отвечать трем следующим условиям:

1) условию стационарности — количественные характеристики потока не зависят от рассматриваемого временного участка. В качестве этой характеристики обычно используют плотность поступления заявок, представляющую собой среднее количество заявок, приходящихся на единицу времени;

2) условию ординарности — заявки поступают по одиночке, а не парами, тройками и т.д.

3) условию отсутствия последействия — время поступления очередной заявки не зависит от времени поступления предыдущей заявки.

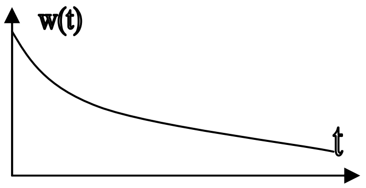

Рис. 8.1.Экспоненциальное распределение времени поступление заявок

Простейшие потоки в инженерных приложениях теории массового обслуживания находят примерно такое же применение, как нормальный закон распределения при вероятностном описании параметров. В теории вероятностей доказано, что для простейшего потока время t между приходом двух соседних заявок распределено по экспоненциальному закону (рис.8.1). Плотность распределения времени t в этом случае задается выражением

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0, \qquad (8.2)$$

где λ — плотность потока заявок.

8.3. Виды СМО в технологии РЭУ

В зависимости от того, как поступают с заявкой в случае, если все каналы оказались занятыми, различают:

СМО с отказом в обслуживании заявки и СМО с ожиданием.

Для СМО с отказом характерно, что заявка, заставшая все каналы занятыми, немедленно покидает систему.

В СМО с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а ставится в очередь и при освобождении одного из каналов обслуживается. В СМО с ожиданием на процесс ожидания заявок в очереди могут накладываться или не накладываться какие-либо ограничения. В последнем случае говорят, что имеем дело с "чистой" СМО с ожиданием. Если же на процесс ожидания накладываются какие либо ограничения, то СМО называют "системой смешанного типа". В таких системах из-за наложенных ограничений возможны случаи, когда заявка получит отказ в обслуживании, т.е. СМО смешанного типа проявляет также признаки СМО с отказом. В системах смешанного типа могут накладываться следующие ограничения:

а) на количество заявок, стоящих в очереди;

б) на время пребывания заявки в очереди;

в) на общее время нахождения заявки в СМО.

В технологии РЭУ чаще всего встречаются СМО смешанного типа.

8.4. Математическое описание СМО с отказом

Рассмотрим систему массового обслуживания с отказом, имеющую n каналов.

Предположим, что поток заявок, поступающих в СМО, простейший и имеет плотность λ. Кроме того, будем считать, что время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{M\,(T_{\text{об}}\,)}, \tag{8.3}$$

где $M(T_{\text{об}})$ — математическое ожидание времени обслуживания заявки.

Следовательно, плотность распределения времени обслуживания

$$w(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{8.4}$$

Для рассматриваемой системы возможны следующие состояния:

x_0 — свободны все каналы;
x_1 — занят один канал;
…
x_k — занято k каналов;
…
x_n — заняты n каналов.

Данные состояния СМО могут быть описаны дифференциальными уравнениями Эрланга [7]. Решение их позволяет получить формулы для расчета вероятностей состояний, которые постоянны для установившегося режима работы СМО. Такой режим для системы данного вида наступает всегда при времени $t \to \infty$ [7].

$$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^{n} \alpha^i / i!}; \qquad 0 \le k \le n; \tag{8.5}$$

где p_k — вероятность состояния x_k;
α — приведенная плотность заявок или коэффициент загрузки канала.

Коэффициент α определяют как

$$\alpha = \lambda M(T_{\text{об}}), \tag{8.6}$$

где $M(T_{\text{об}})$ — математическое ожидание времени обслуживания одной заявки.

Формулы Эрланга (8.5) получены для случая экспоненциального распределения времени обслуживания, однако, как отмечается в [7], они справедливы при любом другом законе, лишь бы поток заявок был простейшим.

Вероятность необслуживания заявки определяется как

$$P_{\text{необ}} = p(x_n) = p_n. \tag{8.7}$$

Относительная пропускная способность q может быть подсчитана как

$$q = 1 - P_{\text{необ}}. \tag{8.8}$$

При необходимости величину q можно выразить в процентах. Абсолютную пропускную способность подсчитывают так:

$$Q = \lambda q. \tag{8.9}$$

Среднюю долю времени, которое СМО будет простаивать, можно определить вероятностью состояния x_0, т.е.

$$P_{\text{простоя}} = p(x_0) = p_0 . \tag{8.10}$$

Пример 8.1. На участок ремонта технологического оборудования поступают приборы со средней плотностью λ = 2 ед/ч. Среднее время обслуживания одной единицы оборудования равно 24 мин. Заявка, заставшая все каналы заснятыми получает отказ в обслуживании.

Требуется определить характеристики СМО в предположении наличия одного рабочего места. Кроме того, надо проследить, как меняются характеристики СМО при введении второго рабочего места.

Решение. По условию задачи имеем СМО с отказом.

Будем предполагать, что поток заявок, поступающих в СМО, простейший со средней плотностью λ.

1. Подсчитаем коэффициент загрузки канала или приведенную плотность заявок, используя формулу (8.6)

$$\alpha = \lambda M(T_{\text{об}}) = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8.$$

При расчете значения величины α учтено, что 24 мин = 0,4 ч.

2. Найдем характеристики СМО при числе каналов $n=1$. Найдем основные характеристики СМО для случая установившегося режима функционирования. Применяя формулу (8.5), для вероятности необслуживания заявок получим:

$$P_{\text{необ}} = p_n = p_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{0{,}8}{1+0{,}8} \approx 0{,}44 \; .$$

Относительную пропускную способность q определим как

$$q = 1 - P_{\text{необ}} = 1 - 0{,}44 = 0{,}56.$$

Следовательно, примерно 56% заявок, поступивших в СМО, будут обслужены.

Найдем вероятность простоя канала p_0. Применяя формулу (8.10), получим:

$$p_0 = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+0{,}8} \approx 0{,}56 \; .$$

3. Проследим, как меняются характеристики системы с введением второго канала. Для этого подсчитаем характеристики СМО при значении $n = 2$. Получим:

$$P_{\text{необ}} = p_2 = \frac{0{,}8^2/2}{1+0{,}8+0{,}8^2/2} \approx 0{,}15 \; ; \quad q = 1 - P_{\text{необ}} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85;$$

$$p_0 = \frac{1}{1+0{,}8+0{,}8^2/2} \approx 0{,}47 \; .$$

Относительная пропускная способность $q = 0{,}85$ или 85%. Доля времени простоя системы уменьшилась до 47%.

8.5. Математическое описание "чистой" СМО с ожиданием

Пусть для этой системы имеют место те же условия (предпосылки), что и для рассмотренной СМО с отказом. Но здесь характерно то, что на процесс ожидания заявок в очереди не накладывается никаких ограничении. Поэтому данная система имеет бесконечное, но счетное число состояний, а именно:

x_0 — свободны все n каналов;
x_1 — занят ровно один канал;
…
x_k — занято k каналов;
…
x — заняты все n каналов;
x_{n+1} — все каналы заняты и одна заявка в очереди;
x_{n+2} — все каналы заняты и две заявки в очереди;
…
x_{n+s} — все каналы заняты и s заявок в очереди;
…

Решение дифференциальных уравнений Эрланга, описывающих указанные состояния системы, дает следующие формулы для расчета вероятностей состояний для установившегося режима:

$$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad 0 \le k \le n; \quad \alpha < n; \tag{8.11}$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad s \ge 0; \quad \alpha < n. \tag{8.12}$$

Для рассматриваемой СМО установившийся режим наступает в случае, когда коэффициент загрузки канала $\alpha < n$. Если указанное условие не выполняется, то число заявок, стоящих в очереди, будет неограниченно возрастать, и установившийся режим не наступит.

Для "чистой" СМО с ожиданием иногда интересуются такой характеристикой, как среднее время ожидания заявки в очереди $M(T_{\text{ож}})$.

Для установившегося режима, т.е. когда $\alpha < n$, получена следующая формула [14]:

$$M\,(T_{\text{ож}}) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}; \quad \lambda < \mu, \tag{8.13}$$

где μ — плотность потока обслуживания заявок.

Предполагая, что время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону, плотность их обслуживания можно найти, как

$$\mu = \frac{1}{M\,(T_{\text{об}})}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется как

$$m_s = \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!(1-\alpha/n)^2}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad \alpha < n. \tag{8.14}$$

8.6. Математическое описание СМО смешанного типа с ограничением длины очереди

Пусть имеем СМО с n каналами, а число заявок, стоящих в очереди в СМО, ограничено значением m.

Как и ранее, поток поступающих заявок будем считать простейшим с плотностью λ. Пусть также известно среднее время обслуживания одной заявки $M(T_{\text{об}})$. Данная система может иметь следующие состояния:

x_0 — свободны все каналы;
x_1 — занят один канал;
…
x_k — заняты k каналов;
…
x_n — заняты все n каналов;
x_{n+1} — заняты n каналов и одна заявка в очереди;
…
x_{n+s} — заняты n каналов и s заявок в очереди;
…
x_{n+m} — заняты n каналов и m заявок в очереди.

Решение дифференциальных уравнений Эрланга, описывающих указанные состояния системы, дает следующие расчетные формулы для вероятностей состояний этой системы в случае установившегося режима, который наступает при $t \to \infty$ [7]:

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 0 \le k \le n; \tag{8.15}$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 0 \le s \le m. \tag{8.16}$$

Нетрудно понять, что вероятность необслуживания заявки определяется вероятностью состояния x_{n+m} т.е.

$$P_{\text{необ}} = p(x_{n+m}) = p_{n+m}. \tag{8.17}$$

Доля времени, которое СМО будет простаивать, как и ранее, определится вероятностью p_0.

Пример 8.2. На участок ремонта радиоэлектронных блоков поступают устройства со средней плотностью 2 блока в час. Среднее время ремонта одного блока равно 27 мин.

Требуется определить характеристики системы в случае одного и двух рабочих мест при условии, что в помещении дополнительно для ожидания можно поставить три блока.

Решение. Согласно условию примера участок ремонта может рассматриваться как СМО смешанного типа с ограничением числа заявок, стоящих в очереди.

Будем считать, что поток заявок, поступающих в СМО, является простейшим, со средней плотностью λ.

1. По условию примера имеем

$$m = 3;$$

$$\lambda = 2 \text{ бл/ч};$$

$$M(T_{\text{об}}) = 27 \text{ мин} = 0{,}45 \text{ ч}.$$

Следовательно

$$\alpha = \lambda M(T_{\text{об}}) = 2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9.$$

2. Подсчитаем характеристики СМО при количестве каналов n=1 для случая установившегося режима. Воспользуемся формулами (8.16) и (8.17). Вероятность необслуживания

$$P_{\text{необ}} = p_{1+3} \approx 0{,}16.$$

3. Относительная пропускная способность СМО

$$q = 1 - P_{\text{необ}} = 0{,}84,$$

т.е. обслужено будет примерно 84% заявок.

4. Абсолютная пропускная способность

$$Q = q\lambda = 1{,}68 \text{ бл/ч}.$$

5. Средняя доля времени, которое СМО будет простаивать

$$p_0 = p(x_0) = 0{,}24,$$

т.е. примерно четверть.

6. Если количество каналов $n = 2$, то характеристики СМО для случая установившегося режима будут иметь следующие значения:

$$P_{\text{необ}} \approx 0{,}009;$$

$$q = 0{,}991;$$

$$Q \approx 1{,}98 \text{ бл/ч};$$

$$p_0 = 0{,}34.$$

Из приведенных характеристик видно, что примерно 99% заявок будет обслужено, но, в то же время, примерно 2,5 часа при продолжительности рабочей смены 7 часов СМО будет простаивать.