Глава 7. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

7.1. Понятие задач оптимизации

Любое конструкторско-технологическое решение РЭУ определяется совокупностью параметров. В качестве таких параметров могут рассматриваться параметры электрорадиоэлементов, их свойства, габариты, масса, свойства используемых в конструкции материалов и т.п.

Параметры, определяющие конструкцию, позволяют достигать определенных значений технико-экономических показателей РЭУ. В этом качестве могут рассматриваться надежность, масса, габариты, стоимость и т.п.

Такое конструкторско-технологическое решение, при котором достигается экстремальное (но лучшее) значение интересующего технико-экономического показателя (одного или нескольких), называют оптимальным.

Технико-экономический показатель (один или несколько), по значению которого судят об оптимальности решения, называют целевой функцией. Иногда вместо термина "целевая функция" используют также такие термины, как "критерий оптимизации", "критериальная функция", "функция качества" и т.п.

Параметры конструкторско-технологического решения, от значений которых в значительной степени зависит целевая функция, рассматриваются как оптимизируемые параметры. Их значения, обеспечивающие экстремум целевой функции, называют оптимальными значениями оптимизируемых параметров.

Иногда вместо термина "оптимальное решение" употребляют термин "квазиоптимальное решение" или "псевдооптимальное решение", имея ввиду, что истинное значение оптимума достичь сложно и на практике получают некоторое его приближение.

Обозначим целевую функцию F, а параметры, характеризующие конструкторско-технологическое решение и в то же время заметно влияющие на значение функции F, как $x_1, ..., x_n$. Тогда условие оптимальности можно записать как

$$F(x_1, ..., x_n) \to \text{ext}, \qquad (7.1)$$

где ext — минимум либо максимум значения функции в зависимости от того, что является лучшим;

n — количества оптимизируемых параметров.

В реальных задачах потребителя интересуют многие технико-экономические показатели. Часть из них может войти в состав целевой функции F, на остальные же могут быть наложены ограничения. Вид этих ограничений обычно таков:

$$Q_j \le Q_{j\text{доп}}; \quad (7.2)$$

$$Q_j \ge Q_{j\text{доп}}, \quad (7.3)$$

где $Q_{j\text{доп}}$ — допустимое значение j-го технико-экономического показателя, не вошедшего в состав целевой функции F.

В задачах оптимизации на параметры, характеризующие конструкторско-технологическое решение, могут также накладываться ограничения, исходя из конструкторско-технологических или физических особенностей параметров. Эти ограничения имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} x_{1\min} \le x_1 \le x_{1\max} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n\min} \le x_n \le x_{n\max} \end{array}\right\}, \quad (7.4)$$

где $x_{i\min}$, $x_{i\max}$ — минимальное и максимальное допустимые значения i-го оптимизируемого параметра; $i = 1, \dots, n$.

В отдельных случаях ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры, могут быть односторонними.

Следует помнить, что когда говорят об оптимальном решении, эти слова надо обязательно связывать с целевой функцией, которую имеют ввиду. Ибо оптимальное решение с точки зрения одной целевой функции, например, уровня надежности РЭУ, может оказаться далеко не лучшим с точки зрения другой целевой функции, например стоимости, на значение которой оказывают влияние те же оптимизируемые параметры, что и в случае первой функции.

7.2. Общий порядок решения задач оптимизации

Порядок решения задачи оптимизации в конструировании и технологии РЭУ зависит от ее специфических особенностей. Однако можно сформулировать примерный общий порядок этой процедуры применительно к РЭУ.

1. Выявляются технико-экономические показатели, важнейшие для данного вида РЭУ с позиций создания этого устройства и его использования по назначению.

2. Из выявленных показателей выбираются важнейшие (один или несколько). На их основе строится общий вид целевой функции F. На остальные технико-экономические показатели Q_j, из числа не включенных в целевую функцию F, накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3). Причем необходимо уточнить, какой конкретно вид ограничения должен быть наложен на технико-экономический показатель Q_j, $j = 1, \dots$

3. На основе анализа конструкции РЭУ выявляются параметры конструкторско-технологического решения, которые в наибольшей степени влияют на целевую функцию F и на технико-экономические показатели Q_i, не вошедшие в нее. Эти параметры в дальнейшем рассматриваются в качестве оптимизируемых.

Следует помнить, что в дальнейшем конструкторско-технологическое решение будет воплощаться в реальное устройство значениями своих оптимизируемых параметров. На этом же этапе необходимо выявить ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры, исходя из их конструкторских и физических особенностей.

4. Проводят работу по представлению в математической форме целевой функции F и технико-экономических показателей Q_i через оптимизируемые параметры, то есть находят выражения вида

$$\left.\begin{aligned} F &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ Q_1 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ Q_l &= \varphi_{l+1}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\}, \tag{7.5}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{l+1}$ — символы функциональных связей;

l — количество технико-экономических показателей, принятых во внимание, но не вошедших в целевую функцию;

$x_1, \ldots, x_n$ — оптимизируемые параметры из числа конструкторско-технологических параметров РЭУ;

n — количество конструкторско-технологических параметров, рассматриваемых в качестве оптимизируемых.

Необходимо заметить, что не обязательно в каждое построенное математическое выражение вида (7.5) должны войти все оптимизируемые параметры. Однако каждый из них должен присутствовать хотя бы в одном из выражений. В противном случае параметр не может рассматриваться в качестве оптимизируемого.

5. Выясняется условие оптимальности решения, т.е. в выражении вида (7.1) уточняют характер экстремума.

Следует знать, что большинство математических методов оптимизации предполагает минимизацию целевой функции F. Если в конкретной задаче необходимо искать максимум функции F, то условие поиска оптимума $F(x_1, \ldots, x_n) \to \max$ заменяют условием

$$-F(x_1, \ldots, x_n) \to \min.$$

6. Выбирают математический метод решения задачи оптимизации с учетом ограничений, накладываемых как на технико-экономические показатели, не вошедшие в целевую функцию, так и на сами оптимизируемые параметры $x_1, \ldots, x_n$.

Решив математически задачу оптимизации, получают оптимальные значения оптимизируемых параметров $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_{1\,\text{опт}}, \ldots, x_{n\,\text{опт}}) = \operatorname{ext} F(x_1, \ldots, x_n).$$

7. Выполняется интерпретация результатов решения с учетом особенностей рассматриваемого конструкторско-технологического решения.

На этом этапе возможна корректировка оптимальных значений оптимизируемых параметров с учетом их физических особенностей. Однако следует помнить, что корректировка не должна, с одной стороны, заметно увести нас от оптимума, а с другой — нарушить ограничения, наложенные на технико-экономические показатели Q_j, и сами оптимизируемые параметры $x_1, \ldots, x_n$.

7.3. Способы построения целевой функции

В инженерной практике широко используют способ, называемый методом главного критерия или принципом главного критерия [6].

Суть его состоит в том, что из m важнейших технико-экономических показателей выбирается один, наиболее важный (главный). Он используется в качестве целевой функции, т.е.

$$F = Q_1.$$

На остальные технико-экономические показатели $Q_2,\ldots,Q_m$ накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3):

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 <> Q_{2\,\text{доп}} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots. \\ Q_m <> Q_{m\,\text{доп}} \end{array}\right\}. \qquad (7.6)$$

В выражениях (7.6) знак <> означает, что конкретный вид соотношения уточняется с учетом физических особенностей технико-экономического показателя и его лучшего значения для рассматриваемого вида РЭУ.

Как отмечается в работе [6], практически выделить главный технико-экономический показатель и проранжировать показатели, не вышедшие в целевую функцию F, весьма затруднительно. Установить, какие из них наиболее точно характеризуют качество РЭУ, как правило, нетрудно. Сложнее получить количественную меру их влияния на качество. Решение задач оптимизации в таких случаях может осуществляться с помощью принципа взвешивания показателей. Этот принцип базируется на приведении показателей к относительным величинам (относительно априорно назначенного некоторого их уровня, исходя из функционирования и потребительских свойств РЭУ). Наиболее простым является подход, при котором целевая функция F формируется в виде выражения

$$F = \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{Q}_j^{(i)}/\mathrm{Q}_{j0})^{\alpha_j}\ , \qquad (7.7)$$

где $\mathrm{Q}_j^{(i)}$ — значение j-го показателя в текущем (i-м) варианте;

Q_{j0} — экстремальное, но реально достижимое значение j-го показателя;

α_j — весовой коэффициент j-го показателя ($0 < \alpha < 1$);

m — число принятых во внимание показателей.

Весовые коэффициенты α_j назначаются, как правило, на основании экспертных оценок. Недостатком выражения (7.7) является, то, что экстремальные (лучшие) значения всех технико-экономических показателей, входящие в него, должны соответствовать либо минимуму, либо максимуму.

Указанного недостатка лишено выражение

$$F = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j\ , \text{ или } F = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} q_j^{\alpha_j}}\ , \qquad (7.8)$$

где q_j — безразмерное нормированное значение j-го показателя.

Значение q_j могут быть определены, например, с использованием соотношения

$$q_j = \frac{Q_j^{(i)} - Q_j^*}{Q_{je} - Q_j^*}, \qquad (7.9)$$

где $Q_j^{(i)}$ — текущее (в i-м варианте) значение j-го показателя;

Q_j^* — критическое (допустимое) значение j-го показателя;

Q_{je} — экстремальное, но реально достижимое значение j-го показателя.

Достоинством выражений (7.8) является то, что показатели q_j изменяются в диапазоне (0...1), причем лучшее (экстремальное) значение соответствует точке $q_j = 1$. Поэтому при использовании в качестве целевой функции выражений (7.8) условием оптимальности решения является

$$F \to \max.$$

Если на весовые коэффициенты α_j наложено условие вида

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1,$$

то экстремальное значение целевой функции F равно

$$F=1.$$

7.4. Краткая характеристика математических методов решения задач оптимизации

Практическое решение задач оптимизации предполагает вначале подготовку исходных данных и получение математических выражений для целевой функции F и для технико-экономических показателей Q_j, не вошедших в целевую функцию F. После этого возникает вопрос о выборе математического метода решения задачи оптимизации.

Выбор этого метода, прежде всего, зависит от наличия либо отсутствия ограничений, накладываемых на технико-экономические показатели Q_j, а также на сами оптимизируемые параметры x_1, …, x_n.

Вторым важнейшим фактором, определяющим выбор метода решения задачи оптимизации, является линейный или нелинейный вид уравнений, задающих математические выражения для функций F и Q_j. Если хотя бы одна из функций F или Q_j, имеет нелинейный вид, то это потребует выбора одного из методов, ориентированных на решение задач нелинейного математического программирования.

Напомним, что математическое программирование — раздел математики, занимающийся разработкой методов решения задач оптимизации.

Различают линейное и нелинейное математическое программирование. Линейное рассматривает решение задач оптимизации в случае, когда целевая функция F и функции Q_j , задающие ограничения, имеют линейный характер. Нелинейное рассматривает решение задач оптимизации в случае нелинейного вида хотя бы одной из функций F и Q_j , j=1, 2, … Третьим важнейшим фактором, определяющим выбор математического метода решения задач оптимизации, является количество оптимизируемых параметров, участвующих в задаче оптимизации.

Четвертый фактор — наличие или отсутствие ЭВМ большой производительности, что определяет возможность использования численных методов оптимизации.

В случае отсутствия каких-либо ограничений, накладываемых на функцию F и на оптимизируемые параметры x_1, …, x_n, а также отсутствие функций Q_j, задача оптимизации может быть решена классическими приемами математического анализа. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}=0 \end{array}\right\}. \tag{7.10}$$

Однако при этом надо доказать, что для решаемой задачи экстремум функции соответствует оптимуму.

При линейном виде целевой функции F на практике широко используют так называемый симплексный метод [32].

Для решения задач оптимизации в случаях наличия функций Q_j и любом виде этих функций и целевой функции F широко используют численные методы оптимизации, являющиеся разновидностью методов нелинейного программирования. Из них на практике широко используют методы штрафных функций, методы случайного поиска, градиентные методы.

Указанные методы имеют много разновидностей, что находит свое отражение даже в их названиях.

Особое место среди методов оптимизации занимает так называемое динамическое программирование. Оно напоминает простой перебор вариантов решения, однако является более эффективным.

7.5. Метод динамического программирования

Этот метод отличается от простого перебора тем, что промежуточные заведомо неудачные решения отбрасываются еще на начальных этапах движения к оптимуму.

Динамическое программирование — шаговый процесс.

Рассматриваемое устройство или процесс разбиваются на составные части (компоненты), и на каждом шаге принимаются во внимание лишь две компоненты.

На первом шаге на основе анализа двух взятых компонент выделяются варианты (ситуации), которые предположительно еще могут привести к получению оптимального решения в целом. Эти выделенные варианты на втором шаге уже рассматриваются как одна новая компонента, а в качестве второй к ним добавляется следующая составная часть устройства или процесса. Так как новых компонент после первого шага может быть несколько, то на втором, а далее и на последующих шагах число рассматриваемых пар компонент также растет.

Проиллюстрируем метод на примере задачи оптимального резервирования.

Пример 7.1. РЭУ включает три составных элемента (функциональных узлов, блоков и т.п.). Требуется определить количество резервных элементов каждого вида, обеспечивающих заданный уровень надежности РЭУ, а именно: для вероятности отказа q должно выполняться условие $q \leq 0{,}025$, но суммарная стоимость резервируемого устройства Ц должна быть минимальной.

Показатели надежности в виде вероятностей отказа элементов каждого вида и их стоимость, приходящиеся на один элемент (функциональный узел, блок), приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1

Элемент	Вероятность отказа элемента, q_i	Стоимость элемента, Ц$_i$ усл. ед.
1	0,2	5
2	0,1	4
3	0,15	3

Решение. Схема расчета надежности устройства с учетом резервирования приведена на рис. 7.1.

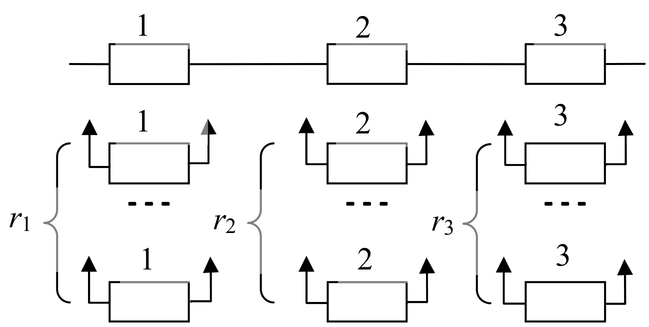

Рис. 7.1. Схема расчета надежности устройства

Из условия примера видно, что в качестве целевой функции F рассматривается суммарная стоимость резервируемого устройства, т.е. F = Ц .

Оптимальному решению будет соответствовать условие $F \rightarrow \min$.

Технико-экономическим показателем, не вошедшим в целевую функцию F, является уровень надежности резервируемого устройства. В этом качестве рассматривается вероятность отказа устройства, причем должно выполняться условие $q \leq 0{,}025$.

При реализации метода динамического программирования на первом шаге в анализ включаем элементы 1-го и 2-го видов.

Далее рассматривают варианты решений, построенных из элементов 1-го и 2-го видов, и строят табл.7.2.

Таблица 7.2

Варианты решений на первом шаге
(с учетом элементов 1-го и 2-го видов)

Характеристики для элемента вида 1	Характеристики для элемента вида 2		
	$r_2 = 0$ 1/4	$r_2=1$ 0,01/8	$r_2=2$ 0,001/12
$r_1 = 0$ 0,2/5	0,3/9	0,21/13	0,201/17
$r_1= 1$ 0,04/10	0,14/14	0,05/18	0,041/22
$r_1= 2$ 0,008/15	0,108/19	0,018/23 *	0,009/27 *

В ячейках табл.7.2 информация записана в виде простой дроби, означает следующее:

числитель — суммарная вероятность отказа элементов 1-го и 2-го видов с учетом резервирования, обозначим как $q_{1,2}$;

знаменатель — суммарная стоимость элементов 1-го и 2-го видов с учетом резервирования, обозначим как $Ц_{1,2}$.

Значения $q_{1,2}$ и $Ц_{1,2}$ подсчитаны по формулам

$$q_{1,2} = q_1^{r_1+1} + q_2^{r_2+1} - q_1^{r_1+1} q_2^{r_2+1} \approx q_1^{r_1+1} + q_2^{r_2+1};$$

$$Ц_{1,2} = Ц_1(1 + r_1) + Ц_2(1 + r_2),$$

где r_1, r_2 — количество резервных элементов соответственно 1-го и 2-го видов.

Из табл. 7.2 видно, что в анализ на 2-м шаге следует включить ячейки (ситуации), помеченные знаками "*". Каждая из этих ситуаций на втором шаге будет рассматриваться как одна компонента.

На втором шаге в анализ включаем элемент вида 3 и снова рассматриваем компоненты, а именно: совместное решение по элементам 1 и 2 и элемент вида 3. Затем строим таблицу с учетом этих двух компонент (табл.7.3).

Таблица 7.3

Характеристики для элемента вида 3	Варианты из табл. 7.2	
	$r_1 = 2$; $r_2 = 1$ 0,018/23	$r_1 = 2$; $r_2 = 2$ 0,009/27
$r_3 = 0$ 0,15/3	0,168/26	0,159/30
$r_3 = 1$ 0,023/6	0,041/29	0,032/33
$r_3 = 2$ 0,003/9	0,021/32	0,012/36

Информация, представленная в табл.7.3, получена с использованием формул

$$q_{1,2,3} = q_{\Sigma} = q_{1,2} + q_3^{r_3+1} - q_{1,2}q_3^{r_3+1} \approx q_{1,2} + q_3^{r_3+1};$$

$$Ц_{1,2,3} = Ц_{\Sigma} = Ц_{1,2} + Ц_3(1 + r_3),$$

где r_3 — количество резервных элементов 3-го вида.

Из табл.7.3 видно, что оптимальному решению отвечают ситуация

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 2.$$

При этом суммарная стоимость резервируемого устройства составляют 32 усл. ед, а вероятность отказа устройства $q = 0{,}021$.

7.6. Алгоритм оптимизации методом случайного поиска

Наиболее простой алгоритм случайного поиска для случая минимизации целевой функции F задается итеративным выражением [33]

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \begin{cases} hs_i r_i, \text{если } F\left[x_i^{(k)} + hS_i r_i\right] \le F\left[x_i^{(k)}\right] \\ 0, \text{если } \quad F\left[x_i^{(k)} + hS_i r_i\right] > F\left[x_i^{(k)}\right], \end{cases} \qquad (7.11)$$

где k — номер итерации (приближения к оптимуму);

$x_1^{(k)}$ — значение i-го оптимизируемого параметра в k-й интеграции;

$x_i^{(k+1)}$ — значение i-го оптимизируемого параметра в k+1 интеграции;

h — шаг поиска оптимума

r_i — случайное число с равномерным законом распределения в диапазоне (–1... + 1), используемое для определения значения и направления смещения (рабочего шага) i-го оптимизируемого параметра;

S_i — приращение, установленное для i-го оптимизируемого параметра, называемое также шкальным коэффициентом.

Шкальные коэффициенты S_i определяют по выражению

$$S_i = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{C_i}, \qquad (7.12)$$

где C_i — константы, в общем случае различные по значению для каждого оптимизируемого параметра (C_i = 5...30);

$x_{i\max}$, $x_{i\min}$ — максимальное и минимальное ограничения, накладываемые на i-й оптимизируемый параметр.

$$x_{1\min} \le x_i \le x_{i\max}. \quad (7.13)$$

Если при оптимизации значение i-го оптимизируемого параметра выходит за допустимые границы ($x_{i\min}$ ... $x_{i\max}$), то этому параметру присваивается граничное значение

$$x_i = \begin{cases} x_{i\min}, \text{ если } x_i < x_{i\min} \\ x_{i\max}, \text{ если } x_i > x_{i\max} \end{cases} \quad (7.14)$$

В реальных ситуациях на технико-экономических показатели, не вошедшие в целевую функцию F, могут накладываться ограничения вида

$$g_j(x_1,..., x_n) \le b_j; \quad j = 1,..., \ell, \quad (7.15)$$

или

$$g_j(x_1,..., x_n) \ge b_j; \quad j = 1,..., \ell, \quad (7.16)$$

где g_i — технико-экономический показатель, являющийся некоторой функцией оптимизируемых параметров; $x_1,\ldots,x_n$;
b_i — допустимое значение j-го показателя, представляющее собой константу, не зависящую от параметров x_1, ..., x_n;
l — количество показателей, на которые наложены ограничения.

Если на любой итерации делается подряд m неудачных попыток, то шаг поиска h уменьшается и дальнейший поиск ведется с новым шагом. Неудачными считаются попытки в следующих случаях:

целевая функция F не убывает, т.е. не имеет место процесс приближения к оптимуму;

значения всех оптимизируемых параметров выходят за допустимые границы $x_{i\min}$, $x_{i\max}$;

нарушаются ограничения вида (7.15) или (7.16), накладываемые на технико-экономические показатели, не вошедшие в целевую функцию F.

Процесс оптимизации прекращается, если выполняется условие

$$h \le h_{\min}, \quad (7.17)$$

где $h_{\min}$ — заданная константа, определяющая конец и точность оптимизации.

Чтобы решить задачу оптимизации с помощью описанного алгоритма, начальные значения оптимизируемых параметров в итерации с номером $k = 0$ **не должны нарушать ограничения**

вида (7.13), (7.15) или (7.16). Структурная схема алгоритма оптимизации методом случайного поиска применительно к решению задач с указанными ограничениями приведена на рис. 7.2. Пояснения некоторых функциональных частей (блоков) структурной схемы приведены в табл. 7.4. В структурной схеме алгоритма и табл. 7.4 использованы обозначения переменных (аргументов), принятые при описании вычислительного алгоритма случайного поиска.

Таблица 7.4

Пояснения функциональных частей структурной схемы алгоритма

Номер функциональной части	Пояснение
1	Ввод исходных данных: n, m, h, $h_{\min}$; ввод массивов $x_{i\min}$, $x_{i\max}$; ввод выбранных начальных значений оптимизируемых параметров x_i; $i=1,\ldots,n$.
2	Подсчет целевой функции для начальных значений оптимизируемых параметров (в нулевой итерации).
3, 20, 21	Организация счета и проверки количества неудачных попыток в k-й итерации.
4,10, 13	Организация счета и проверки количества оптимизируемых параметров, вышедших в k-й итерации за допустимые границы $x_{i\min}$, $x_{i\max}$.
5	Формирование (генерирование) равномерно распределенного случайного числа в диапазоне (-1...+1) и определение значения оптимизируемого параметра в k -и итерации.
6-9	Проверка выполнения ограничений вида (7.13) и корректировка (при необходимости) значений оптимизируемых параметров в k-й итерации.
14	Проверка выполнения ограничений вида (7.15) или (7.16).
15	Подсчет значения целевой функции в k -й итерации ($k\neq 0$).
16	Проверка характера изменения целевой функции.
22, 23	Проверка условия прекращения поиска, изменение шага поиска оптимума.
11, 12, 18, 19	Организация циклов по переменной i; i — счетчик оптимизируемых параметров.
24	Печать результатов поиска оптимума.

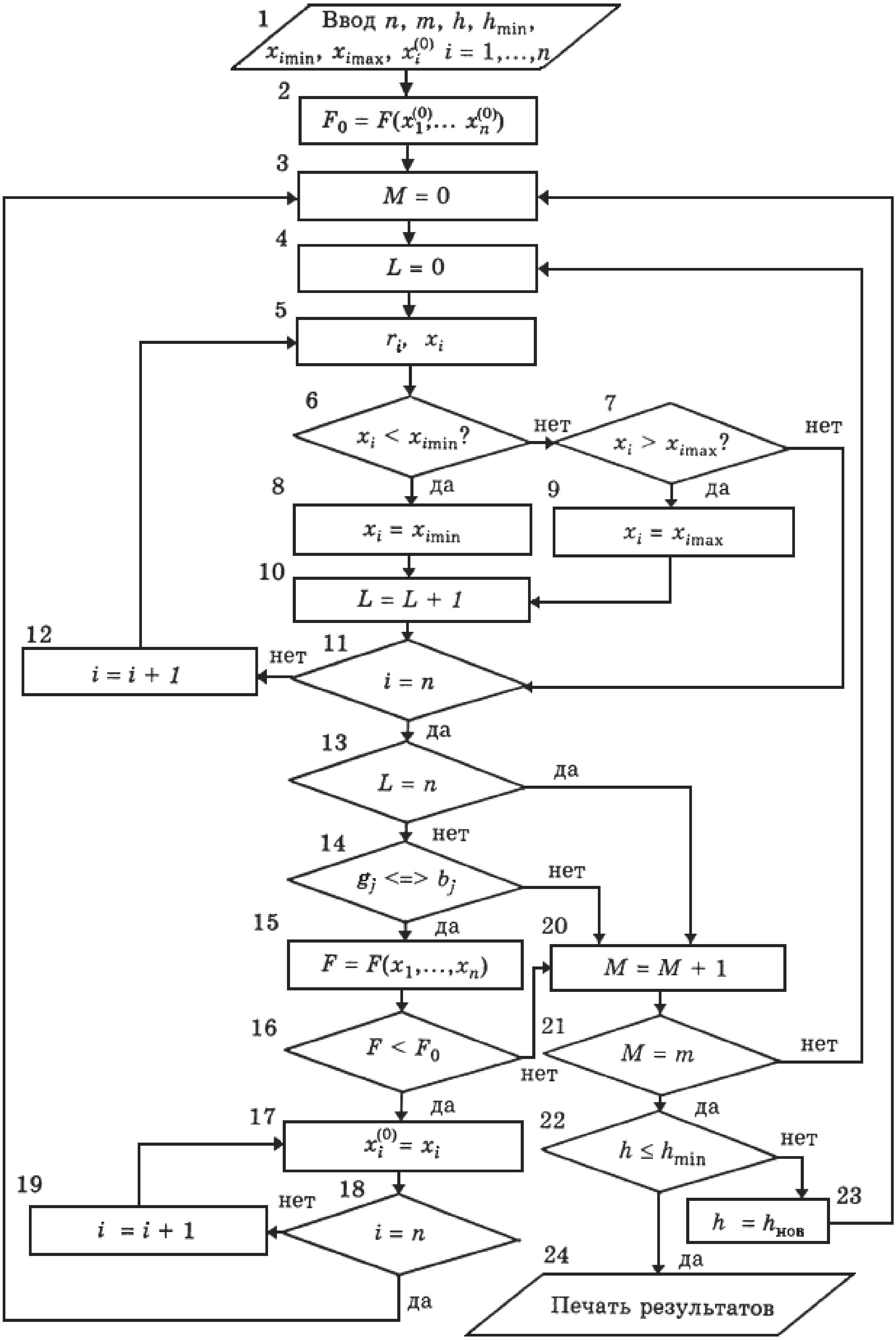

Рис 7.2. Структурная схема алгоритма

Программа для ЭВМ должна предусматривать ввод в нее математических выражений целевой функции F и функций, задающих ограничения вида (7.15) и (7.16). С описанием программы и ее использованием для персональных ЭВМ можно ознакомиться в [34].

7.7. Примеры решения задач оптимизации

Пример 7.2. Предприятие получило заказ на изготовление 1000 печатных плат. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При изготовлении первым способом затраты S для предприятия равны

$$S_1 = 2 + 0{,}4x_1 + 0{,}3x_1^2 \quad \text{усл. ед.,} \tag{7.18}$$

а при изготовлении вторым способом

$$S_2 = 1 + 1{,}2x_2 + 0{,}1x_2^2 \ \text{усл. ед.,} \tag{7.19}$$

где x_1, x_2 — количество печатных плат, изготовленных соответственно первым и вторым способами.

Требуется определить, сколько плат следует изготовить каждым из способов, чтобы суммарные затраты предприятия были минимальными.

Решение. 1. Из условия примера видно, что в качестве целевой функции F выступают суммарные затраты предприятия на изготовление партии печатных плат в количестве 1000 шт. Причем должно выполняться условие

$$F = S_1 + S_2 \to \min.$$

2. Технико-экономических показателей, на которые накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3) в данном случае нет.

3.Оптимизируемыми параметрами являются x_1 и x_2. Согласно условию примера на параметры x_1 и x_2 должны быть наложены ограничения

$$x_1 + x_2 = 1000, \tag{7.20}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0. \tag{7.21}$$

4.С учетом затрат S_1 и S_2 целевая функция F представляется через оптимизируемые параметры x_1 и x_2 выражением

$$F = S_1 + S_2 = 2 + 0{,}4x_1 + 0{,}3\,x_1^2 + 1 + 1{,}2x_2 + 0{,}1\,x_2^2 =$$

$$= 3 + 0{,}4x_1 + 0{,}3\,x_1^2 + 1{,}2x_2 + 0{,}1x_2^2. \tag{7.22}$$

5.Математическая постановка задачи состоит в определении таких значений x_1 и x_2, при которых целевая функция (7.22) минимальна при условиях (7.20) и (7.21).

6.Сначала найдем решение задачи чисто аналитическим способом, сводя исследование на условный экстремум функции F к исследованию на безусловный экстремум функции

$$F_1=3 + 0{,}4x_1 + 0{,}3\,x_1^2 + 1{,}2(1000 - x_1) + 0{,}1(1000 - x_1)^2.$$

Функция F_1 получена путем подстановки в функцию (7.22) выражения $x_2 = 1000 - x_1$, найденного из условия (7.20).

Найдем стационарную точку x_1^* функции F_1 из условия

$$dF_1 / dx_1 = 0$$

$$dF_1 / dx_1 = 0{,}4 + 0{,}6x_1 - 1{,}2 - 0{,}2(1000 - x_1) = 0 \quad \text{или}$$

$$0{,}8x_1 - 200{,}8 = 0.$$

откуда x_1^*=251.

Следовательно, $x_2^* = 1000 - x_1^* = 749$.

Так как $\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^*, x_2^*) > 0$, то функция F в найденных точках имеет минимальное значение.

7.Найдем решение задачи методом случайного поиска на ЭВМ [34] .

Результаты решения при шаге поиска $h = 0{,}0001$:

$$x_1= 251{,}06; \quad x_2 = 748{,}94; \quad F = 76002{,}6.$$

С учетом целочисленности величин x_1 и x_2 принимаем

$$x_{1\text{опт}} = 251; \quad x_{2\text{опт}}=749.$$

Как видим, эти значения совпадают с результатами решения, полученными расчетно-аналитическим способом.

Пример 7.3. РЭС летательного аппарата включает четыре блока. Отказ хотя бы одного из них приводит к отказу РЭС в целом. Для повышения надежности РЭС может использоваться раздельное резервирование по типу замещение для каждого блока. С позиций заказчика (потребителя) РЭС важнейшими являются такие технико-экономические показатели, как надежность (вероятность безотказной работы за заданное время P), масса M, габариты V и стоимость C. Значимость надежности составляет примерно 100%, массы — 80%, габаритов — 60%, стоимости — 30%.

Требуется определить, какое число резервных блоков каждого типа необходимо предусмотреть, чтобы в совокупности обеспечить оптимальные (лучшие) значения указанных технико-экономических показателей для РЭС в целом. В табл. 7.5 приведена информация о блоках.

Таблица 7.5

Значения характеристик, приходящиеся на один блок

Блок	Значение характеристики, приходящееся на один блок			
	Надежность(p_i)	Масса(m_i), кг	Объем(V_i), дм^3	Стоимость (C_i)
1	0,93	2,3	3	75
2	0,80	1,0	5	45
3	0,99	2,5	3,5	35
4	0,95	1,5	4,2	62

В табл.7.6 указаны критические (предельно допустимые) значения технико-экономических показателей Q_i.

Таблица 7.6

Критические значения технико-экономических показателей

Показатель	P	M, кг	V,дм	C, усл.ед.
Значение	0,9	30	50	1000

Решение. 1. Так как по условию примера в той или иной степени важны все четыре технико-экономические показателя, то сформируем целевую функцию в виде первого критерия из числа выражений (7.8), т.е. в виде

$$F = \alpha_P P_0 + \alpha_M M_0 + \alpha_V V_0 + \alpha_C C_0 , \qquad (7.23)$$

где α_j — весовой коэффициент j-го показателя, $j \to P, M, V, C$.

Индекс "0" означает, что берутся нормированные значения соответствующих технико-экономических показателей. Эти значения для текущего (i-го) варианта решения будем определять по выражению (7.9). Текущими будем называть варианты, которые рассматриваются в процессе поиска оптимума.

Нормированные значения технико-экономических показателей P, M, V, C включены в целевую функцию (7.23). Однако на сами показатели P, M, V и C должны быть наложены ограничения. С учетом физической сущности этих показателей и данных табл.7.5 вид этих ограничений должен быть таким:

$$P \geq 0{,}9; \quad M \leq 30 \text{ кг}; \quad V \leq 50 \text{ дм}^3; \quad C \leq 1000 \quad \text{усл. ед.}$$

2. Весовые коэффициенты α_j функции (7.23) определим, исходя из значимости технико-экономических показателей, указанной заказчиком, и условия

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j = 1 .$$

Для подсчета значений α_j воспользуемся выражением

$$\alpha_j = \frac{\alpha_j[\%]}{\sum_{j=1}^{4}\alpha_j[\%]};$$

где α_j — значимость j-го показателя, указанная заказчиком.

Получим: $\alpha_P \approx 0{,}37$; $\alpha_M \approx 0{,}3$; $\alpha_V \approx 0{,}22$; $\alpha_C \approx 0{,}11$.

3. Для подсчета нормированных значений показателей воспользуемся выражением (7.9). Для этого определим Q_{je} для каждого из них. Для показателей M, V и C примем значения, соответствующие случаю отсутствия резервных блоков.

Пользуясь данными табл. 7.5 находим:

M_e=7,3 кг; V_e=15,7 дм3; C_e = 217 усл.ед.

Для показателя P (вероятности безотказной работы) примем P_e=1.

4. Нетрудно установить, что оптимизируемыми параметрами в данном примере будут являться r_i — количество резервных блоков каждого типа, i = 1, ..., 4. Установим на r_1, ..., r_4 ограничения вида (7.4).

Из физических соображений ясно, что $r_{i\min} = 0$. Значения $r_{i\max}$ найдем исходя из того, чтобы не были превышены значения M^*, V^* и C^*, указанные в табл. 7.6 получим

$$r_{1\max}^{(M)} = \frac{M^* - M_e}{m_1} = \frac{30 - 7.3}{2{,}3} = 9{,}87 \Rightarrow 9 .$$

Аналогично $r_{1\max}^{(V)} = 11$; $r_{1\max}^{(C)} = 10$.

В качестве $r_{1\max}$ принимаем меньшее значение из трех полученных, т.е. $r_{1\max} = 9$.

Применяя рассмотренный подход, находим $r_{2\max} = 6$; $r_{3\max} = 9$; $r_{4\max} = 8$.

5. Представим текущее значение P, M, V и C через оптимизируемые параметры r_1, ..., r_4.

Логическая схема (модель) расчета надежности РЭС с учетом резервирования имеет вид, показанный на рис.7.3.

Будем считать, что основные и резервные элементы одинаковы, а резерв нагруженный.

Используя приемы, рассмотренные в подразд.5.30, получим

$$P = (1 - (1 - p_1)^{r_1+1})\ldots(1 - (1 - p_4)^{r_4+1}) = \prod_{i=1}^{4}(1 - (1 - p_i)^{r_i+1}) .$$

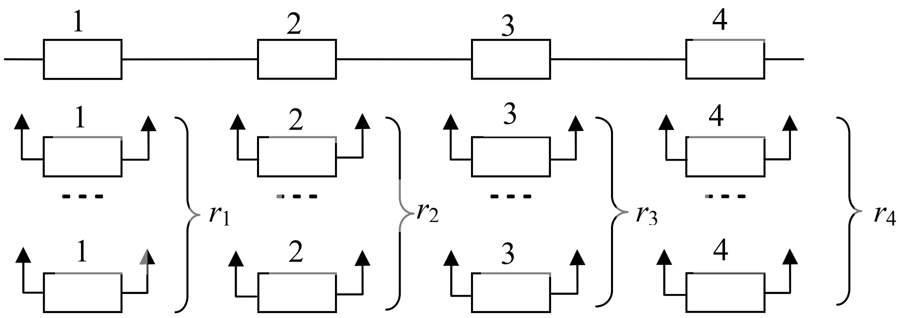

Рис 7.3.Логическая схема резервируемого РЭС

Для показателей M, V и C очевидным является следующее:

$$M = \sum_{i=1}^{4} m_i (1 + r_i); \qquad V = \sum_{i=1}^{4} V_i (1 + r_i); \qquad C = \sum_{i=1}^{4} c_i (1 + r_i);$$

6. Уточняем условие оптимальности для выражения (7.23). Так как в нем использованы нормированные значения P, M, V и C, то условием оптимальности, как отмечалось в подразд.7.3, является $P \rightarrow \max$.

7. В соответствии с [34] реализуем метод случайного поиска, рассмотренный в подразд.7.6.

Результаты решения на ЭВМ с учетом целочисленности параметров r_1, ..., r_4 таковы:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 2; \quad r_3 = 0; \quad r_4 = 1.$$

Пример 7.4. Для изготовления несущих конструкций РЭУ трех типов *(A*, *B*, *C)* необходимо выполнить механические, электрохимические и монтажно-сборочные работы. Средние затраты времени, приходящиеся на одно изделие каждого типа по каждому виду работ, указаны в табл. 7.7. В ней же указан общий месячный фонд рабочего времени по каждому виду работ, а также прибыль от реализации одного изделия.

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию в данном месяце, чтобы прибыль от реализации была максимальной. По госзаказу предприятие должно изготовлять не менее 100 изделий типа *A* в месяц. На изготовление других изделий не имеется никаких ограничений.

Таблица 7.7

Затраты времени, приходящиеся на одно изделие в зависимости от вида работ

Вид работ	Затраты времени (чел.-ч),приходящиеся на одно изделие			Общий месячный фонд рабочего времени (чел.-ч)
	A	*B*	*C*	
1. Механические	5	1	3	1408
2. Электрохимические	4	2	1	704
3. Монтажно-сборочные	3	4	2	880
Прибыль (усл.ед.)	10	14	12	

Решение. 1. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий типа A, x_2 — типа B, x_3— типа C. Тогда для изготовления такого количества изделий потребуются затратить $5x_1 + x_2 + 3x_3$ чел.-ч на выполнение механических работ.

Так как общий месячный фонд рабочего времени для их выполнения не может превышать 1408, должно выполняться ограничение

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1408.$$

Аналогичные рассуждения относительно возможности выполнения электрохимических и монтажно-сборочных работ приведут к неравенствам

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 704; \qquad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 880.$$

Поскольку ежемесячно предприятие обязано изготавливать не менее 100 изделий типа A и количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, то должны выполняться условия

$$x_1 > 100; \quad x_2 > 0; \quad x_3 > 0.$$

Суммарная прибыль П от реализации x_1 изделий типа A, x_2 изделий типа B и x_3 изделий типа C

$$П = 10\,x_1 + 14\,x_2 + 12\,x_3.$$

Таким образом, математическая постановка задачи такова: имеется система

$$\left.\begin{aligned} &5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1408; \\ &4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 704; \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 880; \\ &x_1 \leq 100 \end{aligned}\right\} \qquad (7.24)$$

четырех линейных неравенств с тремя неизвестными $x_1, \ldots, x_3$ и линейная целевая функция относительно этих же переменных

$$F = П = 10\,x_1 + 14\,x_2 + 12\,x_3. \qquad (7.25)$$

Требуется найти такие неотрицательные значения переменных, рассматриваемых как оптимизируемые параметры, при которых функция (7.25) принимает максимальное значение, но при этом выполняются ограничения вида (7.24).

Так как функция (7.25) содержит только линейные неравенства, сформулированная задача является задачей линейного программирования и может быть решена методом линейного программирования.

Однако подобные задачи могут быть решены и методами нелинейного программирования. Решим сформулированную задачу с помощью метода случайного поиска на ЭВМ.

Целевая функция определяется выражением (7.25). Функции, задающие ограничения описываются первыми тремя неравенствами системы (7.24). Аналогично примеру 7.3 определяем ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры x_1, x_2 и x_3.

Результаты решения с учетом целочисленности оптимизируемых параметров x_1, ..., x_3 таковы:

$$x_1 = 100; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 290.$$