ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

10.1. Цель работы

Цель работы: применение метода наименьших квадратов (МНК) для выбора математической модели, используемой для прогнозирования функционального параметра элемента или РЭУ методом экстраполяции.

10.2. Теоретические сведения

Предположим, что изменялись значения аргумента x и контролировался уровень функционального параметра y. Нанесём экспериментальные точки на координатную сетку (рис. 10.1).

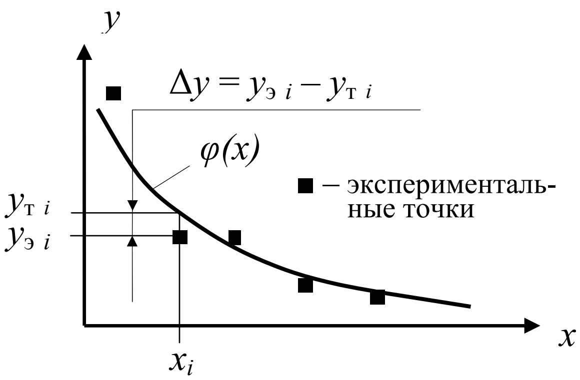

Рис. 10.1. Подбор линии методом наименьших квадратов

Совокупность точек на координатной плоскости можно рассматривать как корреляционное поле (диаграмму разброса) параметров x и y. Проведём в этом поле линию, которая в среднем характеризует изменения параметра y в зависимости от параметра x. Для ответа на вопрос, какая линия в корреляционном поле является лучшей, используется МНК, согласно которому лучшей считается такая линия (функция), для которой выполняется условие

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{эi} - y_{тi})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \min, \qquad (10.1)$$

где $y_{э\,i}$ – экспериментальное значение y в i-й точке;

$y_{т\,i}$ – теоретическое значение y в i-й точке;

n – число экспериментальных точек.

Для получения $y_{т\,i}$ необходимо в функцию $\varphi(x)$, предположительно хорошо описывающую изменение y, подставить в качестве аргумента x значение x_i:

$$y_{т\,i} = \varphi(x = x_i). \qquad (10.2)$$

Применение МНК сводится к определению коэффициентов функции $\varphi(x)$ по координатам экспериментальных точек. С получением приближающих математических моделей в виде двухпараметрических элементарных функций $y = \varphi(x, a, b)$, где a, b – коэффициенты, можно ознакомиться в [1, с. 61].

На практике при выборе лучшей функции $\varphi(x)$ обычно исследуют несколько функций из числа, предположительно хорошо описывающих изменение y. В качестве искомой модели берут ту функцию, которая отвечает критерию (10.1).

В задачах прогнозирования функциональных параметров методом экстраполяции в качестве x рассматривается время наблюдения параметра y. Исходной информацией является предыстория этого параметра, то есть результаты наблюдения y в некоторые начальные моменты времени от t_1 до t_k (рис. 10.2).

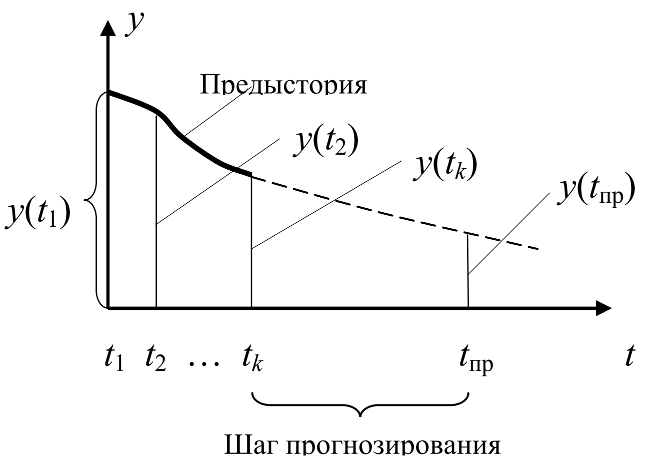

Рис. 10.2. К вопросу о прогнозировании методом экстраполяции

Обозначения на рис. 10.2:

$y(t_i)$ – наблюдаемое значение функционального параметра y, соответствующее моменту времени t_i; $i = 1, 2, \ldots, k$;

k – число точек наблюдения y;

$t_{пр}$ – заданное время прогнозирования, то есть момент времени, для которого интересуются значением y.

Цель прогнозирования состоит в том, чтобы по предыстории изменения y конкретного экземпляра РЭУ или элемента (см. рис. 10.2) указать значение y для будущего момента времени $t_{пр}$.

Решение задачи прогнозирования условно можно разбить на три этапа.

1. **Выбор математической модели прогнозирования**, в качестве которой используют математическое выражение, достаточно хорошо описывающее предысторию функционального параметра y. При этом необходимо, если представляется возможным, учесть физические закономерности изменения y.

2. **Экстраполяция функционального параметра** y. Состоит в предположении, что за пределами предыстории y будет изменяться по такому же закону, как и на участке предыстории. Заканчивается экстраполяция расчётом по выбранной модели прогнозирования значения y, соответствующего времени $t_{пр}$:

$$y(t_{пр}) = \varphi(t = t_{пр}), \tag{10.3}$$

где $\varphi(t)$ – математическая модель прогнозирования, выбираемая с использованием критерия (10.1).

3. **Определение достоверности прогнозирования** [1]. О ней судят по интервальному прогнозу функционального параметра y, описываемому с помощью доверительного интервала величины $y(t_{пр})$.

В ряде случаев при прогнозировании методом экстраполяции интересуются не значением $y(t_{пр})$, а моментом времени $t_{пр} = t_{от}$, когда функциональный параметр рассматриваемого экземпляра достигнет нижнего или верхнего критического уровня $y_{кр}$ в зависимости от того, в каком направлении изменяется функциональный параметр y. Тогда, не дожидаясь отказа, используя результаты прогнозирования, заблаговременно, ещё до момента времени отказа $t_{от}$ можно заменить изделие другим экземпляром. Такое **прогнозирование называют обратным.** Чтобы найти время $t_{от}$, нужно решить уравнение вида

[1] Вопросы оценки достоверности прогнозирования в данной лабораторной работе не рассматриваются.

$$\varphi(t = t_{\text{от}}) = y_{\text{кр}}. \qquad (10.4)$$

10.3. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

В экспериментальной части лабораторной работы необходимо:

1. Используя режим «**Моделирование**» программы для ПЭВМ ***lab*10** (папка **ТОКТиН**), получить точки с координатами (x_i, y_i) на координатной сетке, воспроизводимой на экране дисплея (i = 1, 2,…, n); выбрать n = 5 – 7.

2. Анализируя расположение точек на координатной сетке, принять решение, какой элементарной функцией вида y=φ (x, a, b), к которым имеется доступ в программе ***lab*10**, может быть описано изменение параметра y.

3. Изменяя значения коэффициентов a и b функции, выбранной для описания y, попытаться получить линию (функцию), лучшую с точки зрения МНК.

4. Используя возможности программы ***lab*10**, получить линию, которая является в действительности лучшей с точки зрения критерия (10.1) для функции рассматриваемого вида. Уточнить, насколько ваши действия были близки к получению лучшего решения.

5. Проверить, в какой степени хороши с точки зрения МНК другие виды функций из числа тех, к которым имеется доступ в программе для ПЭВМ. Для этого нужно пп. 3 – 4 последовательно повторить для других функций.

6. Принять решение о том, какая функция, к которым имеется доступ в программе ***lab*10**, является лучшей с точки зрения МНК. Для этого надо воспользоваться критерием (10.1).

В порядке приобретения опыта рекомендуется пп.1 – 6 выполнить несколько раз, получая всё новые и новые реализации экспериментальных точек. В отчёт по работе следует включить результаты исследований лишь для одной из реализаций, но по всем функциям из числа, к которым имеется доступ в программе для ПЭВМ ***lab*10**.

7. Уточнить у преподавателя варианты предысторий, используемые для решения задач прогнозирования (табл. 10.1). Выбирается два варианта: нечётный – для определения прогнозного значения $y(t_{\text{пр}})$, чётный – для решения задачи обратного прогнозирования.

Таблица 10.1

Время t, ч	Значение y (усл. ед.) для варианта 1	2	3	4	5	6	7	8
0	150	800	400	9,0	300	4,0	260	200
150	300	790	450	7,0	350	2,5	300	120
300	500	750	500	5,5	390	2,0	350	115
450	1000	730	1500	4,5	395	1,5	380	113
600	1200	710	2000	3,1	400	1,3	400	110
750	1250	708	2050	3,0	410	1,2	401	109
$y_{\text{кр}}$	–	650	–	2,0	–	0,7	–	80

Значение $t_{\text{пр}}$ принять равным 3000 ч, значения $y_{\text{кр}}$, необходимые для решения задачи обратного прогнозирования, указаны в табл. 10.1.

8. Используя режим «**Ручное задание точек**» программы для ПЭВМ ***lab*10**, ввести координаты точек предыстории функционального параметра y согласно варианту табл. 10.1. Используя возможности программы ***lab*10**, выбрать модель

прогнозирования из числа элементарных функций, к которым имеется доступ. При выборе модели апробировать три функции из числа, предположительно неплохо описывающих предысторию.

Примечание. Этот пункт задания выполняется отдельно для нечётного и чётного вариантов.

9. Используя полученные в п. 8 модели прогнозирования, получить прогнозные значения: $y(t_{\text{пр}})$ – для нечётного варианта, $t_{\text{от}}$ – для чётного варианта.

10. Написать отчёт по работе.

10.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.

2. Координатная сетка с нанесёнными на неё экспериментальными точками, полученными в режиме автоматического их задания, и график аппроксимирующей функции.

3. Результаты нахождения лучшей по МНК приближающей функции, систематизированные и сведённые в табл. 10.2.

4. Исходные данные (предысторию), используемые для получения прогнозного значения $y(t_{\text{пр}})$, согласно нечётному варианту табл. 10.1, координатная сетка с нанесёнными на неё точками предыстории и график модели прогнозирования, результаты в виде табл. 10.2 нахождения лучшей по МНК приближающей функции, используемой в качестве модели прогнозирования, и полученное прогнозное значение $y(t_{\text{пр}})$.

Таблица 10.2

Апробируемая функция	Коэффициенты		$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$
	a	b	
1. $y = ax + b$ …	…	…	…

5. Исходные данные (предысторию) с указанием $y_{\text{кр}}$, используемые для решения задачи обратного прогнозирования, согласно чётному варианту табл. 10.1, координатная сетка с нанесённой на неё точками предыстории и график модели прогнозирования, результаты в виде табл. 10.2 нахождения лучшей по МНК приближающей функции, используемой в качестве модели прогнозирования, и полученное прогнозное значение времени отказа $t_{\text{от}}$.

6. Выводы по работе.

Примечание. Если режим автоматического задания точек использовался несколько раз, то в пп. 2, 3 необходимо привести лишь один случай, но с учётом апробирования всех функций, к которым имеется доступ в программе для ПЭВМ ***lab*10** .

ЛИТЕРАТУРА

Боровиков С.М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности: Учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.