Глава 4. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Серийнопригодность конструкций

Чтобы использовать конструкцию РЭУ по назначению, надо чтобы ее выходной параметр y лежал в определенных пределах от $y_{\min}$ до $y_{\max}$, т.е. должно выполняться условие

$$y_{\min} \le y \le y_{\max}. \tag{4.1}$$

Из-за наличия производственного разброса параметров элементов в ряде случаев выходной параметр может выходить за пределы указанного диапазона. Свойство конструкции РЭУ иметь его в диапазоне, описанным выражением (4.1), непосредственно после сборки конструкции называют серийнопригодностью.

На практике серийнопригодность описывают процентом выхода годных к эксплуатации устройств непосредственно после процесса их сборки и регулировки, если последняя предусмотрена технологией. При этом предполагается, что комплектующие элементы исправны, а технология сборочных и регулировочных работ совершенна. Негодные изделия возникают вследствие неблагоприятного сочетания разброса первичных параметров. Пример – усилительный каскад с использованием транзистора (рис.4.1.) За счет неудачного сочетания производственных отклонений параметров элементов (резисторов, транзистора, конденсатора) коэффициент усиления каскада $K_у$ может выйти за пределы заранее оговоренных норм.

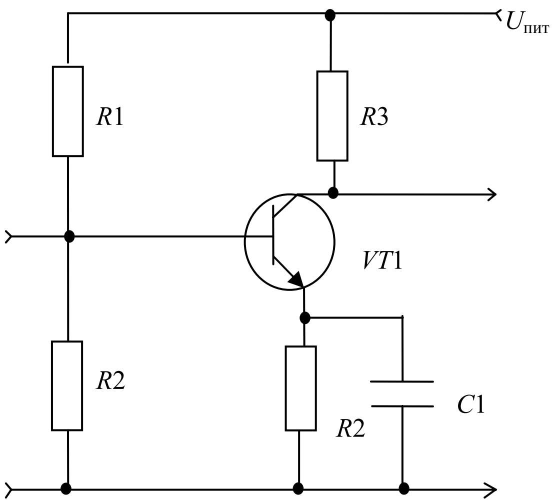


Рис.4.1.Усилительный каскад

Для количественной оценки процента выхода годных к эксплуатации устройств используют вероятность

$$P(y_{\min} \le y \le y_{\max}). \tag{4.2}$$

Для ее нахождения в инженерной практике обычно используют гипотезу о нормальном законе распределения выходного параметра. С учетом этой гипотезы вероятность численно равна заштрихованной площади на рис.4.2.

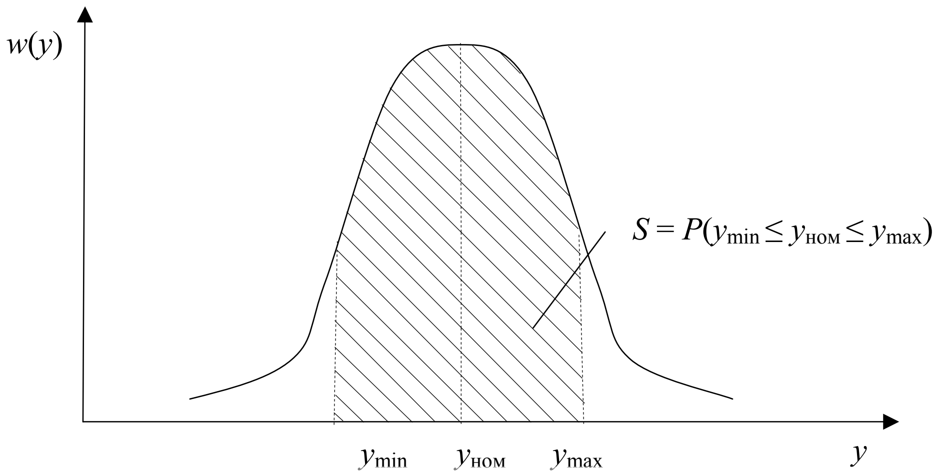


Рис.4.2. К вопросу об определении процента выхода годных к эксплуатации устройств

Указанную вероятность можно подсчитать как

$$P(y_{\min} \le y \le y_{\max}) = \Phi\left(\frac{y_{\max} - y_{\text{ном}}}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_{\min} - y_{\text{ном}}}{\sigma_y}\right), \qquad (4.3)$$

где σ_y – среднее квадратическое отклонение выходного параметра y; предполагается, что отклонения вызываются производственной погрешностью первичных параметров, а величина σ_y и есть характеристика отклонений параметра y, обусловленных производственной погрешностью первичных параметров;

Φ – функция стандартного нормального распределения.

4.2. Виды допусков, устанавливаемых на параметры

В общем случае под допуском понимают характеристику параметра, которая ограничивает (регламентирует) его предельные отклонения.

В конструировании и технологии РЭУ различают электрические и механические допуски в зависимости от того, на какие параметры они устанавливаются. Кроме того, различают производственный, ремонтный и эксплуатационный допуски.

Производственный допуск регламентирует предельные отклонения (разброс, погрешность) параметра, обусловленные чисто производственными причинами. Производственные отклонения параметров иногда называют также начальными отклонениями или технологическими отклонениями. По этой причине производственные допуски называют также *технологическими допусками*.

Эксплуатационный допуск регламентирует предельные отклонения параметра, обусловленные как чисто производственными причинами, так и действием факторов окружающей среды и процессов старения. Значение эксплуатационного допуска на изделие обычно указывается в технической документации.

Ремонтный допуск, в отличие от эксплуатационного, не учитывает процессы старения. По значению этого допуска выполняется приемка изделий в условиях производства.

Допуски могут ограничивать разброс параметров, вызываемый действием отдельных эксплуатационных факторов. В зависимости от того какой фактор рассматривается, различают: температурный допуск, допуск старения (здесь фактор — время) и т.д.

Температурный допуск на параметр — это характеристика параметра, регламентирующая его разброс, обусловленный действием температуры в заданном диапазоне. Аналогично может быть дано определение и другим допускам (допуску старения и т.п.).

В КиТРЭУ используют как симметричные относительно номинального значения так и несимметричные допуски.

Примеры симметричных допусков: R = 1 кОм ± 10%; U = (5 ± 0,25) В.

Примеры несимметричных допусков: $C = 1$ мкФ$^{+30\%}_{-10\%}$; $l = 100^{+0,5}_{-0,1}$ мм; $d = 10^{+0,2}$ мм.

На параметры могут устанавливаться как двухсторонние, так и односторонние допуски.

Приведенные выше примеры симметричных и несимметричных допусков являются также примерами двухсторонних допусков. В случае параметра d ограничение с левой стороны (снизу) также имеет место, но значение этой характеристики равно нулю и поэтому может не записываться.

Односторонние допуски устанавливают в тех случаях, когда одна из границ параметра (верхняя или нижняя) не играет принципиальной роли. Например, для биполярного транзистора требование к параметру $h_{21э}$ может указываться в виде $h_{21э} \geq 20$, а для коэффициента пульсации $K_п$ источника питания — в виде $K_п < K_{пдоп}$, где $K_{пдоп}$ — допустимое значение коэффициента пульсации.

На практике для задания допусков используются следующие характеристики (рис.4.3)

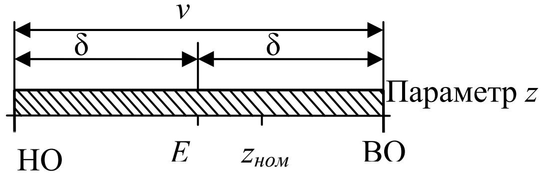


Рис.4.3. Параметры поля допуска

1. Нижнее (НО) и верхнее (ВО) предельные отклонения.
2. Ширина поля допуска v.
3. Половина поля допуска δ.
4. Координата середины поля допуска E.

Характеристики связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &v = \text{ВО} - \text{НО}, \\ &\delta = v/2, \\ &E = (\text{НО} + \text{ВО})/2, \\ &\text{ВО} = E + \delta, \\ &\text{НО} = E - \delta. \end{aligned}\right\}$$

Следует помнить, что характеристики υ и δ всегда положительные. Координата E в общем случае может не совпадать с номинальным значением параметра.

Для задания допуска на параметр используется одна или несколько из перечисленных характеристик. Указанные характеристики могут быть заданы натуральными значениями параметра, либо абсолютными отклонениями параметра относительно номинального значения, либо относительными отклонениями, выраженными обычно в процентах относительно номинального значения параметра.

В качестве примера укажем с помощью перечисленных характеристик допуск на емкость конденсатора, для которого $C = 20\ \text{мкФ}^{+30\%}_{-10\%}$.

В табл. 4.1 приведены значения характеристик с учетом различных способов их задания и значения $C_{\text{ном}} = 20$ мкФ.

Таблица 4.1

Пример записи характеристик, задающих допуски

Характеристика, задаваемая допуск	Способ задания характеристики		
	натуральным значением параметра C, мкФ	абсолютным отклонением ΔC, мкФ	относительным отклонением $\Delta C/C$, %
НО	18	–2	–10
ВО	26	+6	+30
v	8	8	40
δ	4	4	20
E	22	2	10

Для линейных и угловых размеров допуски задают, как правило, с помощью абсолютных отклонений соответствующих параметров.

4.3. Точность и стабильность параметров

4.3.1. Точность выходных параметров

Точность выходного параметра характеризует степень приближения его истинного значения к номинальному при отклонениях первичных параметров, соответствующих производственным погрешностям. Неточность выходных параметров обуславливается производственными отклонениями первичных параметров, иногда говорят начальными или технологическими отклонениями. Наличие производственных погрешностей первичных параметров — объективная закономерность [1, 6, 14 и др.], поэтому всегда может иметь место отклонение истинного значения выходного параметра от номинального.

На практике для оценки точности как свойства пользуются производственной погрешностью выходного параметра. В силу того, что производственные погрешности первичных параметров являются случайными, случайной является также и производственная погрешность выходного параметра. Отметим, что понятие случайности производственных погрешностей как первичных, так и выходных параметров, не означает "полный хаос". Значения параметров или их погрешностей всегда ограничиваются характеристиками, называемыми производственными допусками.

В практике нередко под точностью параметра понимают близость рассматриваемого параметра к его номинальному значению, не уточняя причин, которые вызвали отклонение от номинального уровня.

4.3.2. Стабильность выходных параметров

При эксплуатации РЭУ на них оказывают влияние фактор времени и различные внешние воздействия. Наиболее характерные виды воздействий — тепловые, механические, действие влаги. Под влиянием времени и внешних воздействий в физических структурах элементов РЭУ происходят явления, приводящие к изменению их параметров. Это вызывает изменение выходных параметров. Степень изменения выходных параметров под влиянием времени и воздействующих факторов оценивают таким свойством, как стабильность.

Стабильность — это свойство параметра сохранять свое значение неизменным (постоянным) относительно начального значения при воздействии факторов среды и с течением времени. Когда говорят “низкая стабильность выходного параметра”, то имеют в виду, что этот параметр заметно изменяется при воздействии указанных причин. В зависимости от того, какой дестабилизирующий фактор рассматривается при анализе, можно говорить о температурной стабильности, стабильности при действии

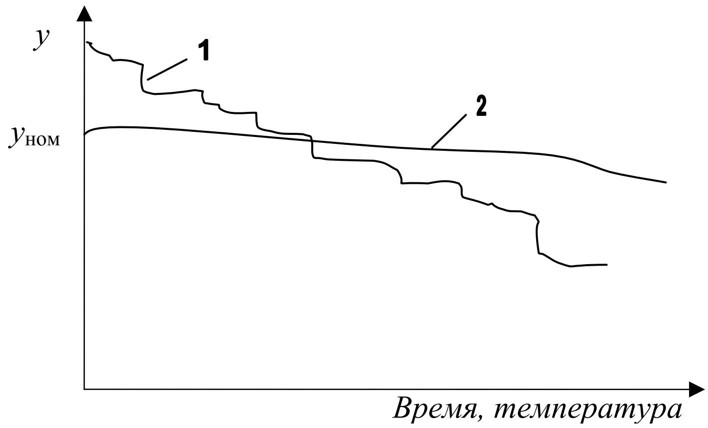


Рис.4.4. Реализации изменения выходного параметра: 1 — параметр относительно точен, но имеет низкую стабильность; 2 — параметр менее точен, но обладает заметно большей стабильностью; $y_{ном}$ — номинальное (среднее) значение выходного параметра

влаги и т.д. Если во внимание принимаются лишь процессы старения, то можно говорить о временной стабильности.

Высокая точность выходного параметра вовсе не означает его высокую стабильность и, наоборот, высокая стабильность выходного параметра не есть гарантия его точности (рис.4.4).

На практике стабильность выходных параметров обычно оценивают по отдельным эксплуатационным факторам. При рассмотрении таких факторов, как температура и время, используют температурный допуск и допуск старения. При рассмотрении других факторов используют допуски, ограничивающие отклонения выходного параметра, обусловленные действием рассматриваемых факторов.

Совместную оценку точности и стабильности выходных параметров выполняют с помощью эксплуатационного допуска.

Рассмотренные свойства точности и стабильности характерны не только для выходных, но и для любых параметров вообще, в том числе и для первичных.

4.3.3. Описание точности и стабильности параметров элементов

Для описания точности параметров элементов на практике пользуются производственным допуском. Например, в записи на этикетке резистора “сопротивление 1 кОм ± 10%”, допуск 10% есть производственный допуск. Он характеризует начальные, или технологические отклонения сопротивления резистора.

Стабильность параметров элементов оценивают по отдельным эксплуатационным факторам. Важнейшие эксплуатационные факторы — температура и время. Для описания температурной и временной стабильности параметров элементов на практике пользуются температурными коэффициентами (ТК) и коэффициентами старения (КС).

ТК показывает, как изменяется параметр элемента с изменением температуры на один градус. Обычно ТК показывает относительное изменение, выраженное в процентах. В этом случае размерность ТК: [ТК] = % / °С.

КС показывает, как изменяется параметр элемента при эксплуатации элемента в течение 1 ч. Обычно для КС используется размерность: [КС] = % / ч.

В силу объективно действующих причин ТК и КС параметров элементов являются случайными величинами. Поэтому для элементов данного типа можно говорить о среднем значении коэффициента и о степени рассеивания коэффициента. Практика показывает, что ТК и КС имеют распределение, близкое к нормальному закону (рис.4.5).

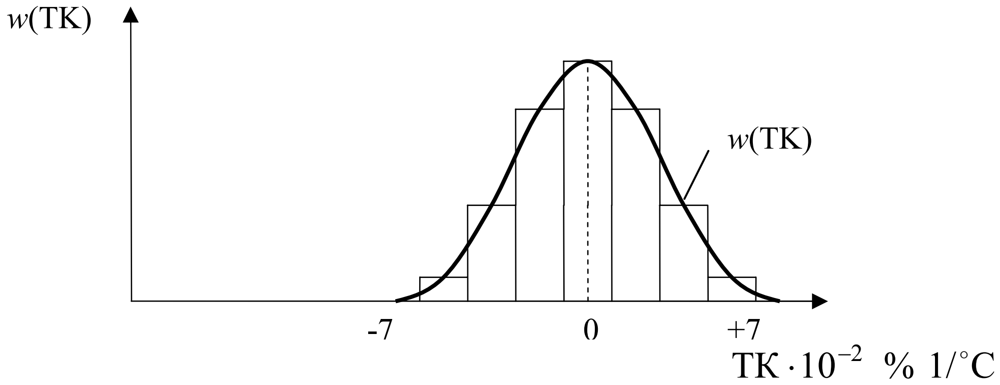


Рис.4.5. Гистограмма распределения температурного коэффициента резисторов типа МЛТ

Замечено, что ТК могут иметь различные значения для диапазона отрицательных (+20° С и ниже) и положительных (+20° С и выше) температур. Например, для резисторов типа МЛТ:

ТК = ± 7 · 10^{-2} % 1/град С при t = +20°...+100 °C;

ТК = ± 12 · 10^{-2} % 1/град С при t = –60°...+20 °С.

В технической документации не редко информация о КС задается не в явном виде, а, например, в виде записи “изменение емкости конденсатора при эксплуатации в течение 2000 ч не более чем на минус 5%”. Из указанной записи легко определить численное значение КС. Предельные отклонения емкости составляют:

$$\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\min} = -5\%; \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\max} = 0\%;$$

Тогда предельными отклонениями КС емкости будут значения:

$$KC_{\min} = \frac{(\Delta C / C)_{\min}}{t_{\text{экс}}} = \frac{-5}{2000} = -2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \%\ 1/\text{ч};$$

$$KC_{\max} = \frac{(\Delta C / C)_{\max}}{t_{\text{экс}}} = \frac{0}{2000} = 0\ \%\ 1/\text{ч}.$$

Принимая гипотезу о нормальном распределении КС, можно определить такие характеристики, как среднее значение и половина поля рассеивания КС.

$$M(KC) = \frac{KC_{\min} + KC_{\max}}{2} = -1{,}25 \cdot 10^{-3}\% \ \ 1/\text{ч};$$

$$\delta(KC) = KC_{\max} - M(KC) = 0 - (-1{,}25 \cdot 10^{-3}) = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\% \ \ 1/\text{ч}.$$

4.4. Методы анализа точности выходных параметров

4.4.1. Уравнения производственных погрешностей выходных параметров

Пусть для РЭУ или технологического процесса известна математическая модель вида

$$y = \varphi(x_1, ..., x_n), \tag{4.4}$$

где y — выходной параметр;
$x_1, \ldots, x_n$ — первичные параметры;
n — количество учитываемых первичных параметров.

Будем считать, что абсолютные производственные отклонения первичных параметров значительно меньше, чем сами параметры, т.е.

$$\Delta x_i << x_i.$$

Тогда можно записать

$$y + \Delta y \approx \varphi(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n). \tag{4.5}$$

Разложим уравнение (4.5) в ряд Тейлора в точке

$$X_0 = \{x_{10}, \ldots, x_{n0}\},$$

где x_{i0} — среднее значение i-го первичного параметра; i=1, …, n.

Получим

$$y + \Delta y = \varphi(x_{10}, ..., x_{n0}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\Delta x_i)^2 + ... \tag{4.6}$$

Вычтя из уравнения (4.6) уравнение (4.4) и отбросив члены 2-го и высшего порядков малости, получим

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i . \tag{4.7}$$

Это выражение называется уравнением абсолютной производственной погрешности выходного параметра. В приведенном уравнении Δx_i есть абсолютные производственные погрешности первичных параметров, i = 1, …, n.

Величины $\partial\varphi/\partial x_i$ называют абсолютными коэффициентами чувствительности, они показывают, как реагирует величина ∂y на значение отклонений Δx_i.

Разделив уравнение (4.7) на выражение (4.4), получим уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\varphi} \cdot \frac{x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\Delta x_i}{x_i}. \qquad (4.8)$$

При выполнении этой операции с целью выявления величины $\Delta x_i/x_i$ произведено умножение и деление на x_i.

Отношение

$$B_i = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{\varphi}\right]_0 \qquad (4.9)$$

называют относительным коэффициентом чувствительности или **коэффициентом влияния**. Он характеризует степень влияния относительной погрешности первичного параметра на относительную погрешность выходного параметра. Нижний индекс “ноль” указывает, что после дифференцирования и до умножения на x_i/φ в полученное уравнение необходимо подставить средние значения x_1, ..., x_n, если в выражении они еще останутся.

4.4.2. Методы определения производственных допусков на выходные параметры

Для количественной оценки точности выходных параметров можно использовать $M(y)$ — математическое ожидание (среднее значение) выходного параметра y и $\sigma(y)$ — среднее квадратическое отклонение выходного параметра y, причем $\sigma(y)$ характеризует разброс выходного параметра, обусловленный только производственными погрешностями первичных параметров (иногда говорят начальными или технологическими отклонениями).

В инженерной практике чаще пользуются характеристиками вида

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right), \ \sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right).$$

Они имеют тот же самый смысл, что и характеристики $M(y)$ и $\sigma(y)$, но относятся к $\Delta y/y$.

В промышленности вместо характеристики $\sigma(\Delta y/y)$ обычно применяют $\delta(\Delta y/y)$, представляющую собой половину поля рассеивания относительного производственного отклонения выходного параметра.

Характеристика $\sigma(\Delta y/y)$ используется в качестве половины поля производственного допуска.

Производственный допуск на выходной параметр может устанавливаться, исходя из служебного назначения радиоэлектронного устройства или технологического процесса. Но при инженерном проектировании часто поступают следующим образом.

Вначале определяют, какой производственный разброс выходного параметра будет иметь место при заданной вероятности. Затем полагают допуск численно равным значению этого разброса. Если заказчика значение допуска устраивает, то задача его установления решена, и допуск будет гарантироваться с такой вероятностью, с которой подсчитывался производственный разброс выходного параметра.

Производственный допуск на выходной параметр может рассматриваться как характеристика оценки его точности. В настоящее время в инженерной практике существует два основных метода определения производственных допусков на выходные параметры:

а) расчетно-аналитический метод с учетом вероятностного рассеивания первичных параметров;

б) метод Монте-Карло (метод статистических испытаний).

Кроме указанных методов иногда используют метод "min-max". Этот метод широко использовался ранее, но не оправдал себя, и сейчас его применяют в основном для поверочных расчетов (предварительных прикидок).

4.5. Определение производственного допуска методом "min-max"

Этот метод иначе называют “определением допусков, исходя из наихудшего случая рассеивания первичных параметров”. Исходными данными являются:

а) производственные (технологические) допуски первичных параметров, обычно в виде значений относительных производственных погрешностей $\Delta x_i/x_i$; $i = 1, \ldots, n$;

б) уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра в виде

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

где B_i — коэффициент влияния i-го первичного параметра;

$\Delta x_i/x_i$ — относительное производственное отклонение (разброс, погрешность) i-го первичного параметра;

n — количество учитываемых первичных параметров.

Суть метода состоит в следующем.

Вначале определяется максимальное отклонение выходного параметра, которое он может принять в левой (отрицательной) стороне относительно номинального значения. Затем определяют максимальное отклонение выходного параметра в правой (положительной) стороне.

При подсчете указанных отклонений пользуются непосредственно уравнением относительной производственной погрешности выходного параметра, подставляя в него предельные (наихудшие) значения относительных отклонений первичных параметров. При этом предполагается, что известны или каким-либо образом найдены значения коэффициентов влияния B_i.

Допуск на выходной параметр устанавливается с учетом рассчитанных отклонений для левой и правой стороны. Проиллюстрируем это примером.

Пример 4.1. В качестве выходного параметра делителя напряжения (рис.4.6) будем рассматривать коэффициент деления $K_{\text{д}}$.

Не трудно убедиться, что для этого параметра справедливо

$$y \to K_{\text{Д}} = \frac{U1}{U2} = \frac{R1 + R2}{R2} = \frac{R1}{R2} + 1.$$

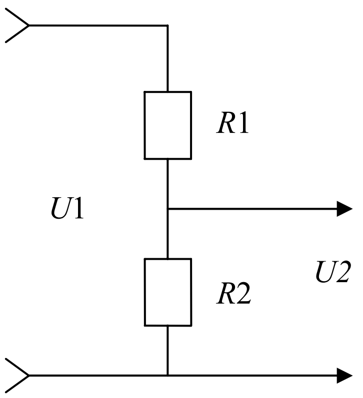


Рис.4.6.Электричесая схема делителя напряжения

Пусть информация о первичных параметрах (резисторах R_1, R_2) задана в виде:

$R1$ = 3 кОм ± 10% ;

$R2$ = 2 кОм ± 10%.

Установим, используя метод "min-max", допуск на коэффициент деления рассматриваемого делителя.

Решение. 1. Получаем уравнение относительной производственной погрешности для коэффициента деления.

Для этого вначале определим коэффициенты влияния резисторов $R1$ и $R2$, воспользовавшись выражением (4.9). Получим

$$B_{R1} = \frac{1}{R2} \cdot \frac{R1 \cdot R2}{(R1 + R2)} = \frac{R1}{R1 + R2} = \frac{3}{3 + 2} = 0{,}6.$$

Аналогично

$$B_{R2} = -\frac{R1}{(R2)^2} \cdot \frac{R2 \cdot R2}{(R1 + R2)} = -\frac{R1}{R1 + R2} = -0{,}6.$$

Заметим, что коэффициенты влияния первичных параметров могут быть как положительными, так и отрицательными; как меньше единицы, так и больше единицы.

2. Пользуясь выражением (4.8) записываем уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра (коэффициента деления $K_д$).

$$\frac{\Delta K_д}{K_д} = 0{,}6\frac{\Delta R1}{R1} - 0{,}6\frac{\Delta R2}{R2}.$$

3. С учетом предельных отклонений относительных производственных погрешностей сопротивлений резисторов, т.е. величин $\Delta R1/R1$ и $\Delta R2/R2$, находим максимальное значение относительной погрешности коэффициента деления в левой стороне (или, как говорят иначе, "в минимуме"). Получим

$$\left(\frac{\Delta K_д}{K_д}\right)_{\max-\min} = \begin{vmatrix} \Delta R1/R1 = -10\% \\ \Delta R2/R2 = +10\% \end{vmatrix} = 0{,}6(-10) - 0{,}6(+10) = -12\%.$$

Обратим внимание, что максимальному отклонению выходного параметра "в минимуме" соответствуют относительное отклонение -10% для сопротивления резистора $R1$ и значение $+10\%$ — для сопротивления резистора $R2$.

4. Аналогично находим максимальное значение величины $\Delta K_д/K_д$ в правой стороне (иначе, "в максимуме"). Получим

$$\left(\frac{\Delta K_д}{K_д}\right)_{\max-\max} = 0{,}6(+10) - 0{,}6(-10) = +12\%.$$

Здесь использованы значения относительных отклонений $+10\%$ для параметра $R1$ и значение -10% для параметра $R2$.

5. Производственный допуск на коэффициент деления в окончательном виде может быть установлен, как

$$\Delta_{пр} = (-12 ... +12)\% = \pm 12\%.$$

Основным недостатком метода "min-max" является то, что он дает в большинстве случаев завышенное значение допуска, причем, допуск завышен тем больше, чем большее число первичных параметров входит в математическую модель устройства или процесса. Следствием этого являются неоправданно жесткие требования к диапазонам изменения (допускам) первичных параметров. Вероятность возникновения наихудшего случая, как правило, крайне мала и реальный разброс выходных параметров оказывается намного меньше, чем предсказанный по методу "min-max".

Достоинством метода является его простота. Если полученный допуск устраивает заказчика, то нет необходимости применять более сложные методы.

4.6. Анализ точности выходных параметров вероятностным методом

4.6.1. Выбор критериев оценки точности

Расчетно-аналитический метод определения производственных допусков с учетом вероятностного рассеивания первичных параметров кратко называют иногда вероятностным методом расчета допусков.

Обратимся к уравнению относительной производственной погрешности выходного параметра

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} \approx \sum_{i=1}^{n} B_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}},$$

где B_i – коэффициент влияния i-го первичного параметра.

Знак "пр" — подчеркивает производственный характер относительных погрешностей.

При вероятностном методе записанным уравнением воспользоваться сразу не представляется возможным, так как неясно, какие конкретно численные значения $(\Delta x_i/x_i)_{\text{пр}}$ необходимо подставлять в записанное уравнение в силу случайности этих величин.

В силу этого $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ также оказывается случайной, и для количественного ее описания используют две характеристики:

$M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ – математическое ожидание (среднее значение) относительной производственной погрешности выходного параметра;

$\sigma(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ – среднее квадратическое отклонение $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$.

Указанные характеристики могут использоваться для оценки точности выходного параметра. В промышленности в качестве комплексной оценки точности выходных параметров используется производственный допуск на выходной параметр, который устанавливается на основе двух выше записанных характеристик.

4.6.2. Расчетные соотношения, используемые для оценки точности выходных параметров

Эти соотношения получают для характеристик $M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ и $\sigma(\Delta y/y)_{\text{пр}}$. Используют записанное выше уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра.

При получении инженерных формул принимают во внимание теоремы теории вероятностей, смысл которых можно выразить следующими формулами [7]:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i);$$

$$M(\alpha x) = \alpha M(x), \ \alpha = \text{const};$$

$$D(x+z) = D(x) + D(z) + 2r_{xz}\sigma(x)\sigma(z),$$

где x_i, x, z – случайный величины;
n – количество случайных величин;
r_{xz} – коэффициент парной корреляции между параметрами x и z.
M – знак математического ожидания случайных величин;
D, σ – знаки дисперсии и среднего квадратического отклонения случайных величин.

Последняя из формул записана для случая двух случайных величин, однако подобное справедливо и для случая любого их количества.

С учетом записанных выше формул, интересующие нас расчетные соотношения запишутся в виде

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n} B_i M\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}; \tag{4.10}$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \sigma^2\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\\ i<j}}^{n} r_{ij} B_i B_j \sigma\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} \sigma\left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)_{\text{пр}}}, \tag{4.11}$$

где $M\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}$ – математическое ожидание (среднее значение) относительной производственной погрешности i-го первичного параметра;

$\sigma\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}$ – среднее квадратическое отклонение относительной производственной погрешности i-го первичного параметра;

B_i – коэффициент влияния i-го первичного параметра;

r_{ij} – коэффициент парной корреляции между i-м и j-м первичным параметром.

Смысл $\sigma(\Delta x_j/x_j)_{пр}$ и B_j аналогичен вышеуказанным, но только для j-го первичного параметра.

Запись $i<j$ под знаком второй суммы означает, что берутся неповторяющиеся сочетания пар параметров x_i и x_j.

В промышленности при определении производственного допуска вместо характеристики $\sigma(\Delta y/y)_{пр}$ пользуются характеристикой $\delta(\Delta y/y)_{пр}$, представляющей собой половину поля рассеивания относительной производственной погрешности выходного параметра. Эта величина с учетом выражения (4.11) может быть определена как

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{пр} = \rho\sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \delta^2\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{пр} K_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\\ i<j}}^{n} r_{ij} B_i B_j \delta\left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)_{пр} \delta\left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)_{пр} K_i K_j}\,, \quad (4.12)$$

где $\delta(\Delta x_i/x_i)_{пр}$ – половина поля рассеивания относительной производственной погрешности i-го первичного параметра (половина поля производственного допуска на первичный параметр);

ρ – коэффициент гарантированного обеспечения допуска; зависит от вероятности $P_г$, с которой гарантируется производственный допуск (табл. 4.2);

K_i – коэффициент относительного рассеивания i-го первичного параметра; показывает, в какой степени рассеивание i-го первичного параметра отличается от нормального закона распределения (табл.4.3).

Смысл $\delta(\Delta x_j/x_j)_{пр}$, B_j, K_j аналогичен вышеуказанным, но только для j-го первичного параметра.

Запись $i<j$ под знаком второй суммы, как и ранее, означает, что берутся неповторяющиеся сочетания пар параметров x_i и x_j.

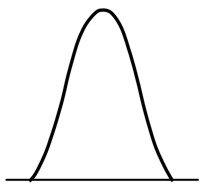
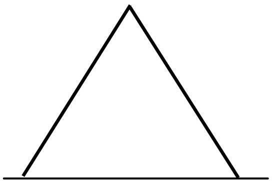
Таблица 4.2

Значение коэффициента ρ в зависимости от вероятности $P_г$

Вероятность $P_г$	0,80	0,90	0,95	0,99
Коэффициент ρ	0,43	0,59	0,65	0,86
Вероятность $P_г$	0,9973	0,999	0,9999	0,99999
Коэффициент ρ	1	1,1	1,3	1,47

Таблица 4.3

Значение коэффициентов относительного рассеивания первичных параметров

Закон распределения первичного параметра	Нормальный 	“Треугольника” 	Равномерный 
Коэффициент относительного рассеивания, K_i, K_j	1	1,225	$\sqrt{3}\approx 1{,}73$

В окончательном виде производственный допуск устанавливается как

$$\Delta_{\text{пр}} = \underbrace{M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}}_{\substack{\text{систематическая}\\ \text{составляющая}\\ \text{допуска}}} \pm \underbrace{\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}}_{\substack{\text{случайная}\\ \text{составляющая}\\ \text{допуска}}}. \qquad (4.13)$$

Сопоставляя уравнения (4.12) и (4.13) можно заметить, что половина поля рассеивания $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ используется в качестве половины поля производственного допуска. Поэтому допуск $\Delta_{\text{пр}}$ гарантируется с такой вероятностью $P_{\text{г}}$, которая соответствует случайной составляющей допуска $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$.

4.6.3. Примеры анализа точности выходного параметра

Пример 4.2. Выполним анализ точности постоянной RC-цепи при следующих исходных данных:

$$R = 1 \text{ кОм} \pm 10\%; \; C = 10 \text{ мкФ}^{+30\%}_{-10\%}.$$

Кроме того, установим производственный допуск на постоянную RC-цепи, который бы гарантировался с вероятностью $P_{\text{г}}$=0,9973. Используемые для RC-цепи элементы дискретные.

Решение. 1. В качестве выходного параметра в данном случае выступает постоянная цепи τ:

$$y \to \tau = RC.$$

2. Определим коэффициенты влияния параметров R и C. Воспользуемся формулой (4.9). В нашем случае $\varphi\to\tau$. Получим

$$B_R = C\frac{R}{RC} = 1; \;\; B_C = R\frac{C}{RC} = 1.$$

3. Запишем исходные данные, необходимые для подсчета характеристик $M(\Delta\tau/\tau)_{пр}$, $\delta(\Delta\tau/\tau)_{пр}$. Воспользуемся рис.4.7.

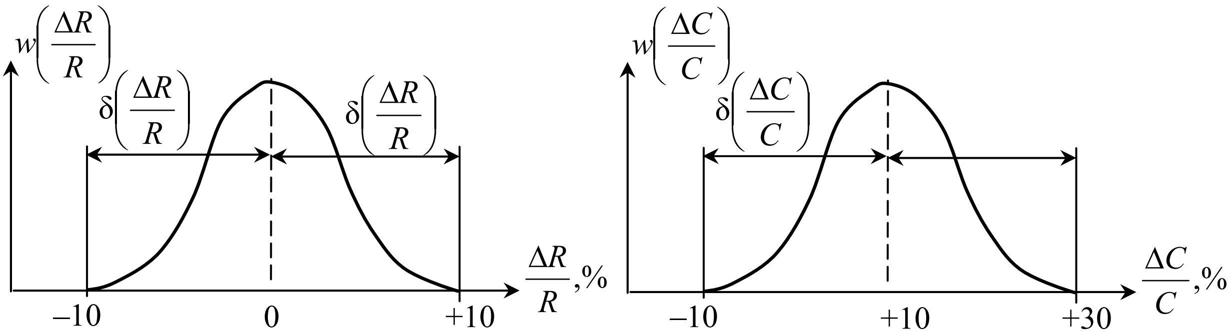


Рис.4.7. Кривые распределения параметров

Из условий примера и рис.4.7. находим

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right)=0;\ \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)=10\%;$$

$$M\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=\frac{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{н}+\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{в}}{2}=\frac{-10+(+30)}{2}=+10\%$$

$$\delta\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{в}-M\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=30-10=20\%$$

где $(\Delta C/C)_{н}$, $(\Delta C/C)_{в}$ – нижнее и верхнее предельные отклонения параметра $\Delta C/C$.

K_{R1} = 1, так как можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении параметра R. Аналогично K_C = 1.

Коэффициент ρ = 1, так как $P_{г}$ = 0,9973. Коэффициент парной корреляции $r_{R,C}$ = 0, так как элементы дискретные.

4. По выражению (4.10) рассчитываем значение $M(\Delta\tau/\tau)_{пр}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_{пр}=1\cdot 0+1\cdot(+10)=+10\%.$$

5. По формуле (4.12) рассчитываем значение $\delta(\Delta\tau/\tau)_{пр}$. Получим

$$\delta\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_{пр}=1\sqrt{1^2\cdot 10^2\cdot 1^2+1^2\cdot 20^2\cdot 1^2}=\sqrt{500}\approx 22{,}4\%.$$

6. Записываем производственный допуск на постоянную RC-цепи.

$$\Delta_{пр}=(10\pm 22{,}4\%)=(-12{,}4...+32{,}4)\%.$$

При этом допуск $\Delta_{пр}$ гарантируется с вероятностью $P_г$=0,9973.

Пример 4.3. Требуется установить производственный допуск на коэффициент деления делителя напряжения, выполненного на дискретных элементах и в интегральном исполнении. Электрическая схема, значения параметров элементов $R1$ и $R2$ соответствуют исходным данным примера 4.1 (разд.4.5).

Решение. 1. Выполним анализ для делителя, построенного на дискретных элементах.

Определим коэффициенты влияния параметров $R1$ и $R2$.

Ранее было найдено (см. пример 4.1), что B_{R1}= 0,6, а B_{R2}=–0,6.

Исходные данные для определения производственного допуска таковы:

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{пр} = M\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{пр} = 0;\ \delta\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)_{пр} = \delta\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{пр} = 10\%$$

Выберем вероятность $P_г$ = 0,9973, тогда ρ = 1.

Допуски на сопротивления резисторов относительно велики, поэтому можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении параметров. Следовательно, коэффициенты относительного рассеивания $K_{R1} = K_{R2} = 1$.

Коэффициент корреляции r_{R1R2} принимаем равным нулю, так как резисторы дискретные.

Применяя формулы (4.10) и (4.12), находим

$$M\left(\frac{\Delta K_д}{K_д}\right)_{пр} = 0, \text{ так как } M\left(\frac{\Delta R_i}{R_i}\right) = 0,\ i = 1;\ 2;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta K_д}{K_д}\right)_{пр} = 1\cdot\sqrt{0{,}6^2\cdot 10^2\cdot 1^2 + (-0{,}6)^2\cdot 10^2\cdot 1^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5\%.$$

Тогда

$$\Delta_{пр} = (0 \pm 8{,}5)\% = \pm 8{,}5\ \%.$$

2. Выполним анализ точности для случая интегрального исполнения делителя.

Известно, что при интегральной технологии резисторы получают в одном технологическом цикле, поэтому между параметрами резисторов существует тесная, близкая к функциональной зависимости, корреляционная связь.

Экспериментально установлено, что для интегральных резисторов коэффициент корреляции $r \to 0{,}85\ldots0{,}95$. Примем в расчетах $r_{R1,R2}$ = 0,9.

Остальные исходные данные такие же, как и для случая исполнения делителя на дискретных элементах:

$$M\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{\text{пр}} = 0\,;\ \delta\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)_{\text{пр}} = \delta\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{\text{пр}} = 10\%\,.$$

K_{R1}=K_{R2} = 1, ибо распределение параметров интегральных элементов, как правило, близко к нормальному закону. Как и ранее, примем $P_{\text{г}}$ = 0,9973, тогда ρ = 1.

Как и в п.1, $M(\Delta K_{\text{д}}/K_{\text{д}})_{\text{пр}}$ = 0, так как допуски на параметры резисторов R1 и R2 симметричны.

По формуле (4.12) подсчитаем значение величины $\delta(K_{\text{д}}/K_{\text{д}})_{\text{пр}}$.

$$\delta\left(\frac{\Delta K_{\text{д}}}{K_{\text{д}}}\right)_{\text{пр}} = \left|\begin{matrix}\rho = 1,\text{т.к.}\\ P_{Г} = 0{,}9973\end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{0{,}6^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + (-0{,}6)^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot (-0{,}6) \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1} =$$

$$= \sqrt{7{,}2} \approx 2{,}7\ \%.$$

3. В случае дискретного исполнения резисторов, допуск на коэффициент деления делителя установим в виде

$$\Delta_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta K_{\text{д}}}{K_{\text{д}}}\right)_{\text{пр}} \pm \delta\left(\frac{\Delta K_{\text{д}}}{K_{\text{д}}}\right)_{\text{пр}} = (0 \pm 8{,}5)\ \%.$$

В случае интегрального исполнения делителя получим

$$\Delta_{\text{пр}} = (0 \pm 2{,}7)\ \% = \pm 2{,}7\ \%.$$

Таким образом, корреляция параметров в данном случае сыграла положительную роль. При одной и той же гарантированной вероятности допуск на коэффициент деления интегрального делителя может быть установлен заметно жестче, чем в случае делителя на дискретных элементах.

4.7. Анализ точности выходных параметров методом Монте-Карло

4.7.1. Назначение метода

Этот метод иначе называют методом статистических испытаний.

Применительно к анализу точности выходных параметров позволяет оценить $M(y)$ — математическое ожидание (среднее значение) выходного параметра и $\sigma(y)$ — среднее квадратическое отклонение выходного параметра.

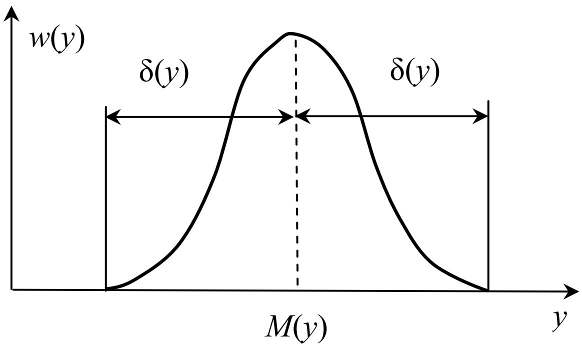


Рис.4.8. Кривая распределения выходного параметра

Зная $M(y)$ и $\sigma(y)$, можно назначить допуск на выходной параметр y, выраженный размерностью самого параметра или его относительным отклонением, отклонением, обычно выражаемым в процентах.

На практике при назначении допуска пользуются гипотезой о нормальном распределении выходного параметра (рис.4.8).

Тогда по "правилу трех сигм" половина поля допуска $\delta(y)$ на выходной параметр может быть записана как

$$\delta(y) \approx 3\sigma(y). \tag{4.14}$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{\delta(y)}{M(y)}100\%. \tag{4.15}$$

Так как мы воспользовались "правилом трех сигм", то этот допуск будет гарантироваться с вероятностью $P_{г} = 0{,}9973$.

4.7.2. Сущность метода

Основу метода Монте-Карло составляет процесс получения случайных реализаций устройства или процесса [16]. Каждая реализация описывается значением выходного параметра рассматриваемого устройства или процесса. Ей соответствует определенное сочетание первичных параметров и новое значение выходного параметра.

Значения первичных параметров для той или иной реализации устанавливают не произвольно, а с учетом их вероятностного описания, т.е. используют характеристики

$$M(x_i),\ \sigma(x_i),\ w(x_i);\ i=1,\ldots,n,$$

где n – число первичных параметров, принимаемых во внимание при рассмотрении устройства или процесса.

Значения выходного параметра в каждой реализации определяются, как правило, новой комбинацией (сочетанием) первичных параметров (рис.4.9).

На рис.4.9 штриховкой обозначены поля допусков первичных параметров.

Получив N реализаций устройства или процесса, можно сформировать ряд

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_N.$$

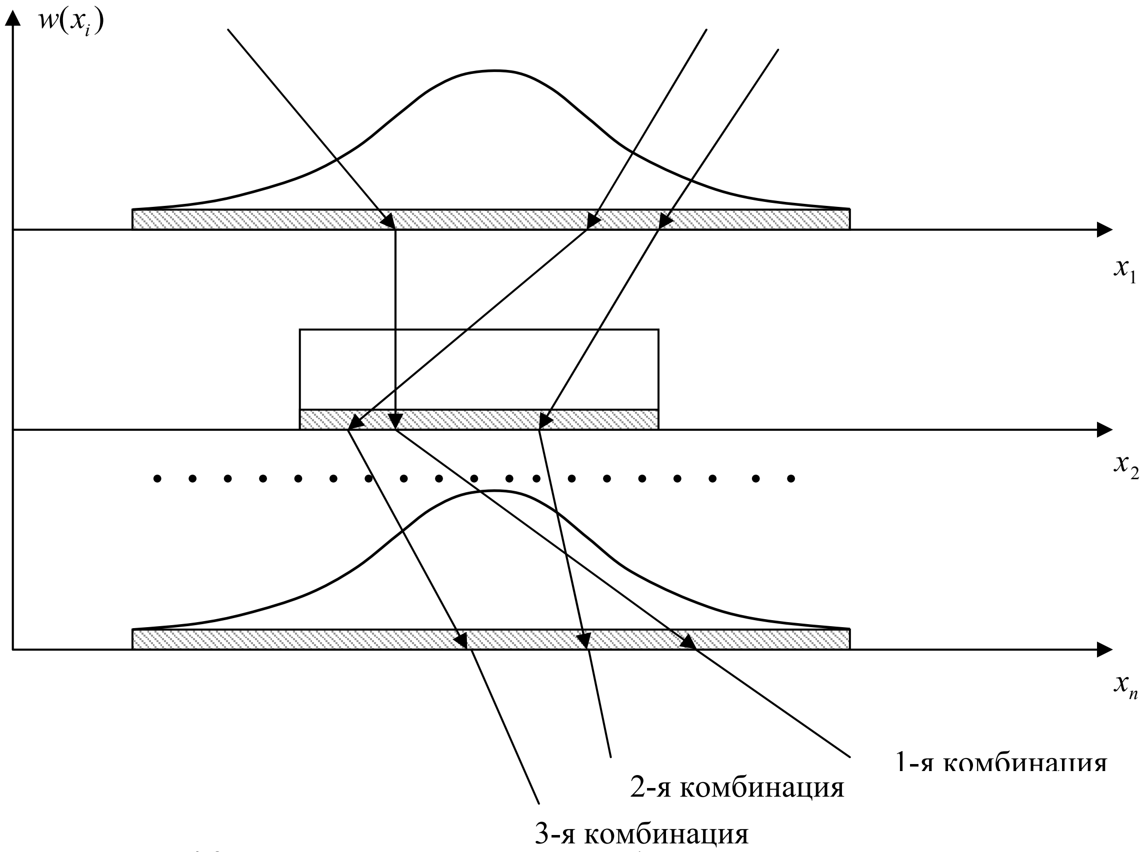


Рис.4.9. Получение случайной комбинации первичных параметров

Статистическая обработка этого ряда позволяет определить характеристики $M(y)$ и $\sigma(y)$.

При практической реализации метода Монте-Карло используют математическое или физическое моделирование устройств или процессов.

4.7.3. Метод Монте-Карло с использованием математического моделирования

При математическом моделировании используют модель устройства или процесса в виде выражения

$$y=\varphi(x_1,\ldots,x_n), \tag{4.16}$$

где n — количество принятых во внимание первичных параметров.

Метод Монте-Карло с использованием математического моделирования реализуют, как правило, на ЭВМ. Исходными данными должны быть:

а) количество первичных параметров n;

б) вероятностное описание первичных параметров, т.е. характеристики $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$; $i=1,\ldots,n$;

в) требуемое число реализации устройства или процесса N.

Последовательность действий на практике такова:

1. Уточняют требуемое число N. В инженерной практике для определения этой величины часто пользуются выражением

$$N \geq \frac{4[\sigma(y)]^2}{\Delta^2}, \tag{4.17}$$

где Δ — заданная до проведения моделирования допустимая погрешность (ошибка) в определении характеристики $M(y)$;

σ(y) — среднее квадратическое отклонение выходного параметра.

Формула (4.17) предполагает, что по результатам испытаний математическое ожидание $M(y)$ с ошибкой Δ гарантируется с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$; число 4 в указанной формуле есть не что иное, как t_γ^2, так как при $\gamma = 0{,}95$ $t_\gamma = 1{,}96 \approx 2$ (см. табл.2.3).

2. Используя генераторы случайных чисел (подпрограммы для ЭВМ), получают случайную комбинацию первичных параметров для первой реализации устройства или процесса.

3. Подставляют полученную комбинацию значений первичных параметров в математическую модель $y = \varphi(x_1,...,x_n)$ и рассчитывают значение y, соответствующее первой реализации.

4. Действия, описанные в пунктах 2...3, повторяют N раз. В итоге получают ряд

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_N.$$

5. Выполняют статистическую обработку полученного ряда и находят характеристики $M(y)$, $\sigma(y)$.

6. При необходимости устанавливают значение допуска на выходной параметр.

При определении значения N предполагается известным $\sigma(y)$. Если же $\sigma(y)$ неизвестно, то поступают следующим образом. Задаются определенным числом реализаций устройства или процесса $N_1(N_1 \geq 500...1000)$.

Выполняют N_1 реализаций. Оценивают значение $\sigma(y)$ и проверяют условие (4.17). Если оно выполняется, то заданная точность в определении $M(y)$ уже достигнута. В противном случае увеличивают число реализаций процесса или устройства, корректируют значение $\sigma(y)$ и вновь по условию (4.17) проверяют, достигнута ли заданная точность.

4.7.4. Метод Монте-Карло с использованием физического моделирования

В тех случаях, когда трудно получить математическую модель $y=\varphi(x_1, \ldots x_n)$ или же когда она не отражает действительной картины процесса (объекта), используют физические модели. При реализации метода Монте-Карло на таких моделях область рассеивания первичных параметров разбивается на 4-6 интервалов и в качестве представителя интервала выбирается значение, близкое к его середине (рис.4.10).

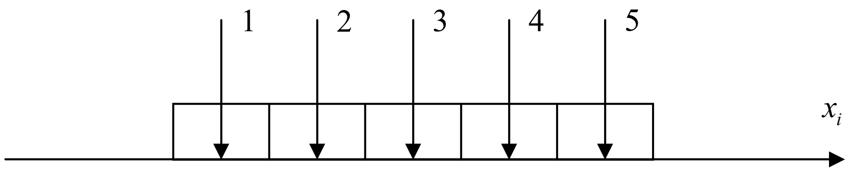


Рис.4.10. Разбиение диапазона рассеивания первичного параметра на интервалы

При физическом моделировании для получения случайной комбинации значений первичных параметров используются лишь эти 4-6 значений первичного параметра. Такого разбиения области рассеивания первичного параметра вполне достаточно для решения практических задач.

При физическом моделировании с учетом полученной случайной комбинации значений первичных параметров, осуществляют их изменение на физической модели и измеряют значение выходного параметра, соответствующее той или иной реализации объекта. Для таких РЭУ, как резисторы и конденсаторы, осуществить изменение параметров можно путем параллельного или последовательного включения дополнительных элементов такого номинального значения, чтобы суммарное значение интересующего параметра соответствовало значениям при моделировании (точкам 1-5 на рис.4.10).

Для некоторых элементов РЭУ (отдельные типы диодов и др.) осуществляют имитирование, т.е. подключают к рассматриваемому элементу элементы другого функционального назначения, приводящие к изменению параметра рассматриваемого элемента.

Если по каким-либо причинам воздействовать на изменение первичных параметров нельзя и не удается имитировать изменение, то осуществляют случайную замену элементов устройства (модели).

При реализации метода Монте-Карло на физических моделях осуществляют замену таких элементов как транзисторы, интегральные микросхемы, импульсные трансформаторы и др.

4.8. Анализ стабильности выходных параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов

4.8.1. Стабильность выходных параметров и принцип ее оценки

Стабильность выходных параметров — это свойство РЭУ или ТП. Она характеризует степень неизменности (постоянство) выходного параметра в условиях воздействия факторов окружающей среды и процессов старения (фактор — время), причем подразумевается неизменность выходного параметра относительно своего начального значения в нормальных условиях эксплуатации.

Замечено, что применительно к многим видам РЭУ нестабильность, обусловленная такими факторами, как температура и время, составляет не менее 90...95% общей нестабильности выходных параметров, причем на долю температуры приходится до 60...70%. Поэтому, если изделие эксплуатируется не в каких-то специфических условиях, то в инженерных расчетах, как правило, принимают во внимание эти два важнейших фактора — температуру и время.

Известно, что для количественной оценки температурной и временной стабильности первичных параметров (параметров элементов, каскадов и т.п.) могут использоваться температурные коэффициенты и коэффициенты старения. В принципе подобные коэффициенты можно было бы использовать и для количественной оценки температурной и временной стабильности выходных параметров РЭУ и ТП. Однако в промышленности для этого пользуются температурными допусками, допусками старения и т.д., в зависимости от того, влияние каких факторов необходимо описать.

В основу оценки стабильности выходного параметра положено уравнение относительной погрешности, обусловленной действием того или иного эксплуатационного фактора.

Предположим, что известна математическая модель РЭУ или ТП в виде выражения

$$y=\varphi(x_{1,\ \dots,}\ x_n).$$

Тогда, по аналогии с получением уравнения относительной производной погрешности выходного параметра, можно получить уравнение относительной погрешности выходного параметра, обусловленной действием эксплуатационных факторов. Вид интересующего нас уравнения таков:

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j=\sum_{i=1}^{n}B_i\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_j, \qquad (4.18)$$

где B_i — коэффициент влияния i-го первичного параметра;

$(\Delta x_i/x_i)_j$ — относительное изменение i-го первичного параметра, вызываемое действием j-го эксплуатационного фактора.

Индекс j подчеркивает конкретный эксплуатационный фактор. Приведенное уравнение относительной погрешности использовать сразу для оценки стабильности выходных параметров не представляется возможным в силу случайного характера $(\Delta x_i/x_i)_j$. Однако это уравнение позволяет получить рабочие формулы, используемые при определении температурных допусков, допусков старения и т.п.

4.8.2. Определение температурных допусков и допусков старения

Здесь и далее при анализе стабильности выходных параметров примем во внимание два важнейших фактора: температуру и время. Экспериментально установлено, что температурные и временные изменения первичных параметров носят случайный характер и сопровождаются различного рода выбросами (флуктуациями), как показано на рис.4.11.

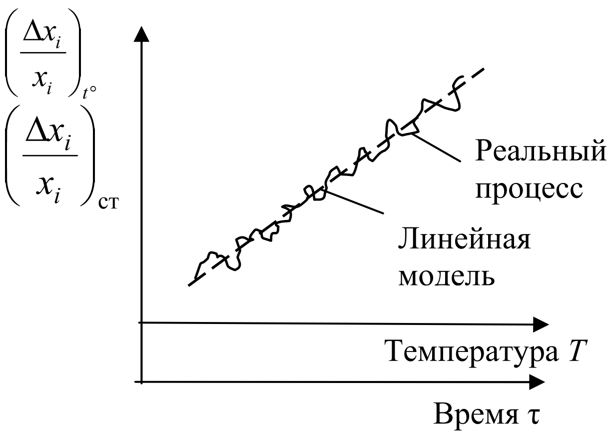


Рис.4.11. Случайный характер температурных и временных изменений первичных параметров

Чтобы выполнять инженерные расчеты, указанные изменения принимают за квазидетерминированные процессы, в которых прослеживается тенденция изменения параметров, и аппроксимируют какими-либо математическими моделями. В инженерной практике популярна аппроксимация линейными моделями. С учетом линейной аппроксимации можно записать

$$\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{t^\circ} = \alpha_i \Delta t; \tag{4.19}$$

$$\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{ст}} = c_i \Delta\tau, \tag{4.20}$$

где α_i — температурный коэффициент i-го первичного параметра, показывающий, как изменяется первичный параметр при изменении температуры на один градус; обычно имеет размерность [%/град С];

$$\Delta t = t_{\text{ср}} - 20°\text{C},$$

где $t_{\text{ср}}$ – температура окружающей среды;

c_i – коэффициент старения i-го первичного параметра; характеризует степень изменения первичного параметра за каждый час времени эксплуатации, имеет размерность [% / ч];

$\Delta\tau$ – рассматриваемый интервал времени.

Так как для РЭУ обычно задается диапазон рабочих температур, то условно различают две их области: положительную и отрицательную (рис.4.12).

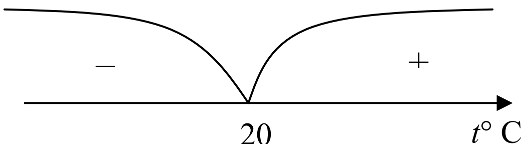


Рис.4.12. Положительная и отрицательная области температур

В инженерных расчетах в качестве $t_{\text{ср}}$ принимают: для отрицательной области – наименьшую, а для положительной – наибольшую из возможных температур.

Следует помнить, что значения коэффициентов α_i для этих областей могут отличаться. Например, для резисторов типа МЛТ:

$$\alpha_i = \pm 7 \cdot 10^{-2} \% / {}^\circ C \text{ при } t = +20 \ldots 100^\circ\text{C};$$

$$\alpha_i = \pm 12 \cdot 10^{-2} \% / {}^\circ C \text{ при } t = -60 \ldots +20^\circ\text{C}.$$

В таких случаях анализ температурной стабильности выходных параметров будет идти по двум ветвям, а окончательное решение о температурном допуске должно приниматься с учетом допуска как для области отрицательных, так и для области положительных температур.

В справочной литературе коэффициенты старения c_i иногда в явном виде не указываются. Приводятся лишь изменения первичного параметра, приходящиеся, например, на 5000 ч.

Подставив (4.19) и (4.20) в уравнение относительных погрешностей, обусловленных действием j-го эксплуатационного фактора, можно записать

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t^\circ} = \sum_{i=1}^{n} B_i \alpha_i \Delta t = \Delta t \sum_{i=1}^{n} B_i \alpha_i = \Delta t \cdot \alpha_\Sigma ; \quad (4.21)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} = \sum_{i=1}^{n} B_i c_i \Delta \tau = \Delta \tau \sum_{i=1}^{n} B_i c_i = \Delta t \cdot c_\Sigma \quad (4.22)$$

В выражениях (4.21) и (4.22) величины α_Σ и c_Σ, могут рассматриваться соответственно как суммарный температурный коэффициент и суммарный коэффициент старения функционального узла при условии, что первичными параметрами являлись параметры элементов.

В этих выражениях случайными являются α_Σ и c_Σ, поэтому для их описания используют две характеристики: математическое ожидание и половину поля рассеивания соответствующего коэффициента.

Математические выражения для определения характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(\alpha_\Sigma)$ могут быть получены с использованием теорем теории вероятностей по аналогии с получением характеристик $M(\Delta y/y)_{пр}$, $\delta\ (\Delta y/y)_{пр}$, используемых при анализе точности выходных параметров (см. подразд.4.6.2):

$$M(\alpha_\Sigma)=\sum_{i=1}^{n}B_i M(\alpha_i); \tag{4.23}$$

$$\delta(\alpha_\Sigma)=\rho\sqrt{\sum_{i=1}^{n}B_i^2\delta^2(\alpha_i)K_i^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\\ i<j}}^{n}r_{ij}B_iB_j\delta(\alpha_i)\delta(\alpha_j)K_iK_j}\,, \tag{4.24}$$

где $M(\alpha_i)$ – математическое ожидание (среднее значение) температурного коэффициента i-го первичного параметра;

$\delta(\alpha_i)$, $\delta(\alpha_j)$ – половина поля рассеивания температурного коэффициента i-го и j-го первичных параметров;

B_i, B_j – коэффициенты влияния i-го и j-го первичных параметров;

K_i, K_j – коэффициенты относительного рассеивания температурных коэффициентов i-го и j-го первичных параметров(см.табл.4.3);

ρ – коэффициент гарантированного обеспечения допуска; зависит от вероятности, с которой гарантируется допуск (см. табл.4.2);

r_{ij} – коэффициент парной корреляции между температурными коэффициентами i-го и j-го первичных параметров.

Запись $i < j$ под знаком второй суммы означает, что берутся неповторяющиеся сочетания первичных параметров, причем $i\neq j$.

Формулы для расчета характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(c_\Sigma)$ могут быть получены из выражений (4.23) и (4.24) путем замены величины α_Σ на c_Σ, а величин α_i на c_i. Смысл параметров в новых формулах аналогичен параметрам формул (4.23) и (4.24).

Температурный допуск Δ_t и допуск старения $\Delta_{ст}$ определяют как

$$\Delta_t=\left[M(\alpha_\Sigma)_\pm\pm\delta(\alpha_\Sigma)_\pm\right]; \tag{4.25}$$

$$\Delta_{ст}=\Delta\tau\left[M(\alpha_\Sigma)\pm\delta(c_\Sigma)\right]. \tag{4.26}$$

Нижние индексы ± в выражении (4.25) означают, что температурный допуск Δ_t определяется отдельно для областей отрицательных (Δ_{t-}) и положительных (Δ_{t+}) температур, а окончательное решение о температурном допуске принимается на основе анализа этих значений.

Температурный допуск Δ_t и допуск старения $\Delta_{\text{ст}}$ гарантируется с такой вероятностью, с которой подсчитывались половины полей рассеивания коэффициентов α_Σ и c_Σ.

Пример 4.4. Предположим, что с использованием формул (4.23) и (4.24) для выходного параметра узла получены значения характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(c_\Sigma)$ для области положительных температур:

$$M(\alpha_\Sigma)_+ = -5\cdot 10^{-2}\%/{}^\circ\text{C};\quad \delta(\alpha_\Sigma)_+ = 9\cdot 10^{-2}\%/{}^\circ\text{C};$$

для области отрицательных температур:

$$M(\alpha_\Sigma)_- = -4\cdot 10^{-2}\%/{}^\circ\text{C};\quad \delta(\alpha_\Sigma)_- = 12\cdot 10^{-2}\%/{}^\circ\text{C};$$

Требуется определить значение температурного допуска на выходной параметр узла при его работе в диапазоне температур от –10 до +40° С.

Решение. Определяем пределы температурных отклонений выходного параметра, пользуясь формулой (4.25). Получим для области положительных температур при t = +40° С:

$$\Delta t_+ = \Delta t\cdot\alpha_{\Sigma+} = \Delta t\left[M(\alpha_\Sigma)_+ \pm \delta(\alpha_\Sigma)_+\right] =$$

$$(40-20)\cdot(-5\pm 9)\cdot 10^{-2} = (-1{,}0\pm 1{,}8)\% = (-2{,}8\ldots+0{,}8)\%;$$

для области отрицательных температур при t = –10° С:

$$\Delta t_- = \Delta t\cdot\alpha_{\Sigma-} = \Delta t\left[M(\alpha_\Sigma)_- \pm \delta(\alpha_\Sigma)_-\right] =$$

$$(-10-20)\cdot(-5\pm 9)\cdot 10^{-2} = (1{,}2\pm 3{,}6)\% = (-2{,}4\ldots+4{,}8)\%.$$

Тогда значение общего температурного допуска определится как

$$\Delta_t = (-2{,}8\ldots+4{,}8)\%.$$

Нетрудно установить, что

$$\Delta_t = (-2{,}8\ldots+4{,}8)\% = (1\pm 3{,}8)\%.$$

Следовательно, среднее значение $M(\Delta y/y)_t$ и половина поля рассеивания $\delta(\Delta y/y)_t$ относительной температурной погрешности выходного параметра будут иметь значения

$$M(\Delta y/y)_t = +1\%\ ;\quad \delta(\Delta y/y)_t = 3{,}8\%\ .$$

Подробный пример определения температурного допуска на выходной параметр приведен выше (см. подразд.4.9.3) при рассмотрении примера установления эксплуатационного допуска.

На рис.4.13 пояснено действие температуры. Из него видно, что при каждой конкретной температуре из заданного диапазона (–10...+40° С) плотность распределения относительной температурной погрешности $(\Delta y/y)_t$ примерно соответствует нормальному закону распределения. При изменении температуры в любую сторону от значения +20° С происходит смещение и увеличение поля рассеивания относительных температурных погрешностей. Так, в рассмотренном примере при изменении температуры от –10 до +40° С среднее значение температурной погрешности перемещается от +1,2 до –1,0%, а половина поля рассеивания увеличивается от нуля при t =+20° С до 3,6% при t = –40° С.

Результирующее распределение температурных погрешностей при определенном диапазоне температур (–10...+40° С) показано на рис.4.13 (кривая *а*). Правая и левая ветви образованы кривыми нормального распределения, но с различными значениями параметра σ. При определении допусков требуется установить пределы изменения выходных параметров РЭУ или

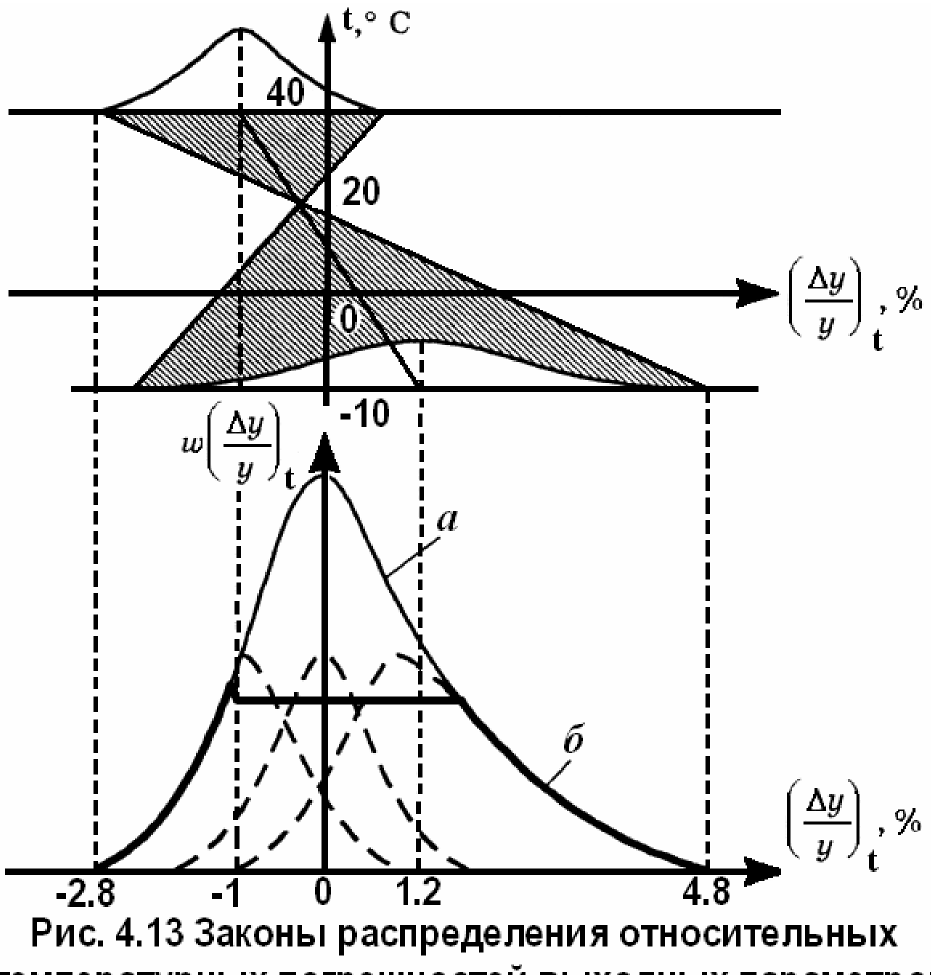


Рис. 4.13 Законы распределения относительных температурных погрешностей выходных параметров РЭУ:
***а*–реальный закон; *б*–аппроксимирующий закон**

технологических процессов под воздействием температуры, а не закон распределения температурных погрешностей. Из примера видно, что для такого расчета достаточно лишь знать количественные характеристики нормальных распределений при крайних рабочих температурах. Это позволяет для простоты аппроксимировать реальный закон распределения относительных температурных погрешностей выходного параметра композицией закона равной вероятности и двух законов нормального распределения с различными значениями σ (рис.4.13, кривая *б)*.

Отметим, что в основу определения температурного допуска было положено предположение о линейном изменении первичных параметров под воздействием температуры.

В работе [17] показано, что в случае, когда температурные изменения первичных параметров нелинейны и в заданном диапазоне температур выше, нежели при линейном характере изменения, то дли исключения ошибок при определении температурных допусков необходимо температурные коэффициенты первичных параметров определить по формуле

$$\alpha_i = \frac{\left(\dfrac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\max}}{\Delta t_{\text{РЭУ}}}, \tag{4.27}$$

где $(\Delta x_i/x_i)_{\max}$ — максимальное значение относительного изменения первичного параметра x_i в крайних точках рабочего диапазона температур, указанное в документации на элемент;

$\Delta t_{\text{РЭУ}}$ — максимальный перепад температур относительно нормальной (+20° С) для РЭУ, в котором применяется элемент, характеризуемый первичным параметром x_i.

Ясно, что должно выполнятся условие

$$\Delta t_{\text{эл}} > \Delta t_{\text{РЭУ}},$$

где $\Delta t_{\text{эл}}$ — максимальный перепад температур относительно нормальной, указанный в технических условиях на элемент.

Во время эксплуатации РЭУ (ТП) под воздействием непрерывно меняющейся температуры и других факторов среды происходит смещение и изменение полей рассеивания суммарных погрешностей выходных параметров. В этом случае суммарный закон распределения выходных параметров случаен и может принимать любую форму. Однако для определения эксплуатационного допуска, как показано в работе [17], важно знать лишь возможные пределы изменения выходных параметров под воздействием эксплуатационных факторов и старения.

4.9. Определение эксплуатационных допусков

4.9.1.Исходные предпосылки

Эксплуатационный допуск обычно устанавливают на основе знания производственного допуска, температурного допуска, допуска старения и других в зависимости от того, какие факторы принимаются во внимание.

Для аппаратуры, работающей в обычных условиях, в большинстве случаев принимают во внимание два важнейших фактора — температуру и старение (время). Если аппаратура должна функционировать в специфических условиях, то факторы, характеризующие эти условия, должны быть приняты во внимание в первую очередь.

Аналогично находят ремонтный допуск, только при этом не учитывают допуск старения. Так как эксплуатационный и ремонтный допуски ограничивают разброс, вызванный действием совокупности факторов, то их иногда называют суммарными допусками.

При эксплуатации РЭУ под воздействием меняющихся сочетаний дестабилизирующих факторов происходит смещение и изменение поля рассеивания суммарного разброса выходного параметра. В этом случае закон распределения суммарной погрешности выходного параметра оказывается случайным и в зависимости от сочетания эксплуатационных факторов может принимать любую форму. Однако, для определения эксплуатационных и ремонтных допусков важно лишь знать предельный разброс выходного параметра. Поэтому при расчетах суммарных допусков необходимо учесть возможные сочетания эксплуатационных факторов, наиболее неудачные с точки зрения разброса выходного параметра.

Эксплутационный допуск может рассматриваться в качестве комплексной оценки точности и стабильности выходных параметров.

Его значение обычно включается в техническую документацию на устройство или технологический процесс.

В дальнейшем, при иллюстрации методики установления эксплуатационного допуска примем во внимание два важнейших эксплуатационных фактора — температуру и старение.

4.9.2. Методика определения эксплуатационного допуска

Рекомендуемая последовательность действий такова.

1. Определяют максимальные пределы смещения среднего значения суммарной относительной погрешности выходного параметра, относительно среднего значения производственного

допуска. Суммирование ведется отдельно для положительных и отрицательных средних значений допусков старения и температурных допусков.

Применять общее суммирование с компенсацией средних значений здесь будет неправильным, так как компенсация характерна лишь для частных случаев (отдельных временных или температурных сечений).

Расчет ведут по формулам

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+}=M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}+M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}+}+M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t+} \tag{4.29}$$

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-}=M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}+M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}-}+M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t-} \tag{4.30}$$

где $M(\Delta y/y)_{\Sigma+}$ — сумма положительных средних значений;
$M(\Delta y/y)_{\Sigma-}$ — сумма отрицательных средних значений.

Если $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$ является положительной, то она подставляется в формулу (4.29). В формулу же (4.30) в этом случае подставляется значение $M(\Delta y/y)_{\text{ст}} = 0$. Если $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$ отрицательна, то ее значение используется в формуле (4.30), в формулу (4.29) в этом случае подставляется значение $M(\Delta y/y)_{\text{ст}} = 0$.

Что касается $M(\Delta y/y)_t$, то принимают во внимание значения, получаемые при крайних положительный и отрицательных температурах. В формулу (4.29) подставляют положительное значение $M(\Delta y/y)_t$, а в формулу (4.30) отрицательное значение, независимо от того, какой области температур они соответствуют. Если же $M(\Delta y/y)_t$, найденные для областей положительной и отрицательной температур одного знака, то поступают по аналогии с $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$.

2. Определяют половину поля рассеивания суммарной относительной погрешности выходного параметра, пользуясь формулой

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}=\sqrt{\delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}+\delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}+\delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t\pm}}\,. \tag{4.31}$$

Индексы “пр”, “t” “ст” имеют тот же смысл, что и выше.

Знаки ± при нижнем индексе t означают, что из значений $\delta(\Delta y/y)_t$, найденных для области положительных и отрицательных температур, берется большее.

Характеристика $\delta(\Delta y/y)_\Sigma$ гарантируется с такой же вероятностью, с которой подсчитывались составляющие подкоренного выражения. Если эти составляющие подсчитывались с разными вероятностями, формула (4.31) принимает другой, более сложный вид.

3. Устанавливают значение эксплуатационного допуска как

$$\Delta_э=\xi\{[M(\Delta y/y)_{\Sigma-}-\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}] \ldots [M(\Delta y/y)_{\Sigma+}+\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}]\}, \qquad (4.32)$$

где ξ – коэффициент запаса, учитывающий влияние неучтенных факторов (давление, влажность и т.д.).

Согласно работе [17], нестабильность выходных параметров РЭУ, обусловленная неучтёнными при расчете факторами, не превышает 5...10%. На этом основании значение коэффициента ξ берут с некоторым запасом: ξ = 1,05...1,2.

Эксплуатационный допуск гарантируется с такой вероятностью, с которой определялось значение $\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$.

4.9.3. Пример расчета эксплуатационного допуска

Пример 4.5. Определим эксплуатационный допуск на выходной параметр RC–цепи (постоянную τ) при следующих исходных данных:

$$R = 1 \text{ кОм} \pm 5\%;\ C = 1\text{мкФ}^{+20\%}_{-10\%}.$$

В RC–цепи будут использованы дискретные элементы. Диапазон рабочих температур t = –10...+40°С. Интервал времени ΔT = 10000ч. Вероятность гарантированного обеспечения допуска $P_Г$ = 0,9973.

Решение. 1. Определяем производственный допуск.

Математическая модель RC-цепи имеет вид

$$y \to \tau = RC.$$

Находим коэффициенты влияния параметров R и C, применяя формулу (4.9). Нетрудно убедится, что

$$B_R = B_C = 1.$$

На основании исходных данных получаем сведения, необходимые для определения производственного допуска

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right)=0;\ \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)=5\%;$$

$$M\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=\frac{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_н+\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_в}{2}=\frac{-10+20}{2}=5\%;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_в-M\left(\frac{\Delta C}{C}\right)=20-5=15\%,$$

где $(\Delta C/C)_Н$ – нижнее предельное отклонение относительной погрешности емкости конденсатора $\Delta C/C$;

$(\Delta C/C)_В$ – верхнее предельное отклонение $\Delta C/C$.

Для параметра R или, что тоже самое, для параметра $\Delta R/R$, воспользуемся гипотезой о равномерной модели (равномерном законе распределения), так как его предельные отклонения относительно малы. Следовательно, его относительного рассеивания $K_R = \sqrt{3}$ (см. табл.4.3).

Для параметра C воспользуемся гипотезой о нормальной модели, ибо поле допуска достаточно широкое. Следовательно, $K_C = 1$.

Так как элементы R и C дискретные, то считаем, что корреляционная зависимость между ними отсутствует. Поэтому принимаем $r_{R,C} = 0$.

Коэффициент гарантированного обеспечения допуска ρ принимаем равным единице (см. табл.4.2), ибо по условию примера $P_{\text{г}} = 0{,}9973$.

2. Пользуясь формулами (4.10) и (4.12), определяем значение характеристик $M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ и $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5\%;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = 1\sqrt{1^2 \cdot 5^2 \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 \cdot 15^2 \cdot 1^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}3\%.$$

Следовательно, производственный допуск $\Delta_{\text{пр}}$ может быть установлен в виде

$$\Delta_{\text{пр}} = (5 \pm 17{,}3)\%.$$

3. Определяем температурный допуск.

Из справочной информации на элементы R и C, находим их температурные коэффициенты. Предположим, что эти коэффициенты имеют следующие значения:

$$\alpha_{R+} = \pm 7 \cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\ \text{C при } t = +20\ldots+100^\circ\ \text{C};$$

$$\alpha_{R-} = \pm 12 \cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\ \text{C при } t = -60\ldots+20^\circ\ \text{C};$$

$\alpha_C = (-8\ldots-2) \cdot 10^{-2}$ %/° C во всем диапазоне температур.

Анализируя эту информацию, выделяем характеристики, $M(\alpha_i)$ и $\delta(\alpha_i)$, необходимые для определения температурного допуска. Для простоты записи размерность [% /° C] опущена.

Получим

$$M(\alpha_{R+}) = 0;\ \delta(\alpha_{R+}) = 7 \cdot 10^{-2};$$

$$M(\alpha_{R-}) = 0;\ \delta(\alpha_{R-}) = 12 \cdot 10^{-2};$$

$$M(\alpha_C) = -5 \cdot 10^{-2};\ \delta(\alpha_C) = 3 \cdot 10^{-2}.$$

Так как элементы RC-цепи дискретные, будем считать, что корреляционная зависимость между температурными коэффициентами параметров R и C отсутствует. Следовательно, коэффициент корреляции между температурными коэффициентами α_R и α_C можно принять равным нулю, т.е. $r_{R,C}^{(\alpha)} = 0$.

На основе экспериментальных исследований установлено, что распределение температурных коэффициентов α_i и коэффициентов старения c_i для параметров элементов РЭУ близко к нормальному закону. Поэтому воспользуемся гипотезой о нормальном распределении этих коэффициентов. Пользуясь табл.4.3, выбираем значения коэффициентов относительно рассеивания величин α_R и α_C. Получаем

$$K_R^{(\alpha)} = 1;\; K_C^{(\alpha)} = 1.$$

Пользуясь формулами (4.23) и (4.24), определяем значения $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(\alpha_\Sigma)$ для положительной области температур. Используем значение $\rho = 1$, так как $P_г = 0{,}9973$ (см. табл.4.2). Получим

$$M(\alpha_{\Sigma+}) = 1\cdot 0 + 1\cdot(-5)\cdot 10^{-2} = -5\cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\mathrm{C};$$

$$\delta(\alpha_{\Sigma+}) = 1\cdot\sqrt{1^2\cdot\left(7\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 1^2 + 1\cdot\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 1^2} \approx 7{,}6\cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\mathrm{C}.$$

С использованием выражения (4.25) находим температурный допуск для этой области температур.

$$\Delta_{t+} = (40 - 20)\cdot(-5\cdot 10^{-2} \pm 7{,}6\cdot 10^{-2}) \approx (-1{,}0 \pm 1{,}5)\%.$$

Выполняя аналогичные операции для области отрицательных температур, получаем

$$M(\alpha_{\Sigma-}) = 1\cdot 0 + 1\cdot(-5)\cdot 10^{-2} = -5\cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\mathrm{C};$$

$$\delta(\alpha_{\Sigma-}) = 1\cdot\sqrt{1^2\cdot\left(12\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 1^2 + 1\cdot\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 1^2} \approx 12{,}4\cdot 10^{-2}\ \%/^\circ\mathrm{C};$$

$$\Delta_{t-} = (-10 - 20)\cdot(-5\cdot 10^{-2} \pm 12{,}4\cdot 10^{-2}) \approx (1{,}5 \pm 3{,}7)\%.$$

4. Анализируя температурные допуски, соответствующие областям положительных и отрицательных температур, определяем общий температурный допуск на выходной параметр (постоянную τ RC–цепи). Имеем:

$$\Delta_{t+} = (-1{,}0 \pm 1{,}5)\% = (-2{,}5\ldots+0{,}5)\%;$$

$$\Delta_{t-} = (1{,}5 \pm 3{,}7)\% = (-2{,}2\ldots+5{,}2)\%.$$

Следовательно, в качестве общего температурного допуска необходимо принять

$$\Delta_t = (-2{,}5\ldots+5{,}2)\% = (1{,}35 \pm 3{,}85)\%.$$

При определении эксплуатационного допуска необходимо будет определить

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+},\ M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-} \text{ и } \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}.$$

Для подсчета $M(\Delta y/y)_{\Sigma+}$ необходимо взять положительное среднее значение, а для подсчёта $M(\Delta y/y)_{\Sigma-}$ – отрицательное среднее значение температурного допуска из допусков, полученных для областей положительных и отрицательных температур. В качестве значения $\delta(\Delta y/y)_t$ необходимо взять большее значение из $\delta(\Delta y/y)$, полученных для областей положительной и отрицательной температур.

5. Определяем допуск старения.

Для этого по документации на элементы находим коэффициенты старения. Предположим, что найдено:

$$c_R = (1\ldots5)\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч};$$

$$c_C = (-0{,}1\ldots5{,}5)\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч}.$$

Анализируя информацию о коэффициентах старения, выделяем характеристики $M(c_R)$, $\delta(c_R)$, $M(c_C)$, $\delta(c_C)$, используемые в расчетах при определении допуска старения. Получим

$$M(c_R) = 3\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч};\ \delta(c_R)= 2\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч};$$

$$M(c_C) = 2{,}5\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч};\ \delta(c_C)= 3\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч}.$$

Так как по условию примера, элементы R и C дискретные то будем считать, что корреляционная зависимость между коэффициентами старения параметров R и C отсутствует. Поэтому для коэффициента корреляции между коэффициентами старения этих параметров справедливо равенство $r_{R,C}^{(c)} = 0$.

Для коэффициентов относительного рассеивания коэффициентов старения параметров R и C примем

$$K_R^{(c)} = 1;\ K_C^{(c)} = 1,$$

ибо, как отмечалось в п.3 решения данного примера, можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении коэффициентов c_R и c_C.

Подсчитываем, пользуясь выражением, аналогичным (4.23) значения характеристики $M(c_\Sigma)$. Получим

$$M(c_\Sigma) = 1\cdot3\cdot10^{-4} + 1\cdot2{,}5\cdot10^{-4} = 5{,}5\cdot10^{-4}\ \%\ /\text{ч}.$$

Определяем половину поля рассеивания величены c_Σ, обусловленную действием процессов старения (времени). Пользуемся выражением, аналогичным (4.24). Здесь, как и выше, используем значение $\rho = 1$, т.к. $P_г = 0{,}9973$. Получим

$$\delta(\alpha_\Sigma) = 1 \cdot \sqrt{1^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1^2} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-4}\ \%/\text{ч}.$$

Тогда с использованием выражения (4.26) допуск старения можно определить как

$$\Delta_{ст} = 10000 \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-4} \pm 3{,}6 \cdot 10^{-4}) = (5{,}5 \pm 3{,}6)\%.$$

Следовательно, можно записать

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{ст} = 5{,}5\%;\ \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{ст} = 3{,}6\%.$$

6. По формулам (4.29) и (4.30) подсчитываем значения характеристик $M(\Delta y/y)_{\Sigma+}$ и $M(\Delta y/y)_{\Sigma-}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} = 5 + 1{,}5 + 5{,}5 = 12\%;\ M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-} = 5 - 1 + 0 = 4\%.$$

7. Для определения значения $\delta(\Delta y/y)_\Sigma$ пользуемся формулой (4.31), ибо составляющие

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{пр},\ \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_t,\ \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{ст}$$

подсчитывались с одной и той же вероятностью $P_г = 0{,}9973$.

Выше (см.п.2-5) было получено

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{пр} = 17{,}3\%,\ \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_t = 3{,}7\%,\ \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{ст} = 3{,}6\%.$$

Поэтому

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma = \sqrt{17{,}3^2 + 3{,}7^2 + 3{,}6^2} \approx 18{,}1\%.$$

8. Устанавливаем эксплуатационный допуск на выходной параметр, пользуясь выражением (4.32). Выбираем значение коэффициента запаса ξ; причем $\xi = 1{,}1$.

Тогда эксплуатационный допуск

$$\Delta_э = 1{,}1 \cdot [(4 - 18{,}1)\ldots(12 + 18{,}1)] \approx (-15{,}5\ldots33{,}1)\%.$$

При этом эксплуатационный допуск $\Delta_э$ гарантируется с вероятностью $P_г = 0{,}9973$.

Последнюю запись можно представить в виде

$$\Delta_э = (-15{,}5\ldots+33{,}1)\% \approx (8{,}8 \pm 24{,}3)\%.$$

4.10. Обеспечение требований к точности выходных параметров

4.10.1. Разработка требований к точности выходных параметров

Задачи, в которых на основе допусков на первичные параметры определяется допуск на выходной параметр, называют задачами анализа допусков. Задачи, в которых на основе заданных требований к точности выходного параметра необходимо назначить допуски на первичные параметры, называют задачами синтеза допусков [17].

Решение первого вида задач было рассмотрено в разд.4.4-4.9. Сейчас рассмотрим задачи второго вида.

Для их решения надо знать, какие требования предъявляются к точности выходного параметра.

Заказчик обычно задаёт требования к эксплуатационному допуску, например, в виде половины поля рассеивания суммарной относительной погрешности выходного параметра

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{э}} \rightarrow \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}.$$

Разработка же требований к точности выходного параметра должна быть произведена инженером конструктором-технологом в процессе проектирования устройства или процесса. Причем следует помнить, что в соответствии с разработанными требованиями к точности выходного параметра будут назначены технологические (начальные или производственные) отклонения первичных параметров.

Задача разработки требований к точности выходного параметра может быть решена на основе использования выражения

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} = \sqrt{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}\right]^2 + \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^{m}\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{j}\right]^2}, \tag{4.33}$$

где индекс “j” – означает j–й эксплуатационный фактор;

m – число принимаемых во внимание факторов окружающей среды.

При инженерном проектировании устройства или технологического процесса могут быть оценены характеристики стабильности выходного параметра. Тогда разработанное требование к точности выходного параметра показывает, какая доля отклонения выходного параметра от начального значения может приходиться на производственный (технологический) разброс, при условии, что разброс параметра при эксплуатации не превысит заданного значения

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{э}} \to \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}.$$

Из формулы (4.33) следует, что требование к точности выходного параметра может быть записано в виде

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}\right]^2 - \left\{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^{m}\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j\right]^2\right\}}. \qquad (4.34)$$

Из выражения (4.34) видно, что задача обеспечения требований к точности выходного параметра имеет смысл, когда подкоренное выражение больше нуля, т.е. когда

$$\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}\right]^2 > \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^{m}\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j\right]^2. \qquad (4.35)$$

В случае невыполнения условия (4.35) надо принять меры по повышению стабильности выходного параметра.

Требование к точности в данном случае разрабатывалось с учетом того, что средние значения относительных отклонений, обусловленные действия старения и факторов окружающей среды, равны нулю. Если это так, то процедура разработки требования усложняется, и её рассмотрения выходит за пределы данного учебника.

4.10.2. Обеспечение требований к точности выходных параметров

Эта задача состоит в назначении таких производственных допусков на первичные параметры, которые обеспечат заданные требования к производственному допуску на выходной параметр.

Нетрудно понять, что данная задача не имеет однозначного решения. Это означает, что найдётся много сочетаний (комбинаций) производственных допусков на первичные параметры, обеспечивающих требований к точности выходного параметра.

Простейшим способом решения рассматриваемой задачи является метод перебора производственных допусков первичных параметров. Реализация этого способа сводится к следующему. Назначают производственные допуски на первичные параметры и рассчитывают допуск на выходной параметр, а далее проверяют соответствие этого допуска требованию к точности последнего. На практике, как правило, определяют несколько сочетаний (комбинаций), обеспечивающих заданное требование к точности, а искомую комбинацию находят с учетом экономических затрат (табл.4.4).

Таблица 4.4

Обеспечение производственного допуска на выходной параметр методом перебора допусков на первичные параметры

Номер сочетания (комбинации)	Допуски на первичные параметры				Производственный допуск на выходной параметр	Затраты (З)
	x_1	x_2	…	x_k		
1	$\delta_1^{(1)}$	$\delta_2^{(1)}$	…	$\delta_k^{(1)}$	$[\delta(\Delta y / y)]^{(1)}$	$З^{(1)}$
…	…	…	…	…	…	…
N	$\delta_1^{(N)}$	$\delta_2^{(N)}$	…	$\delta_k^{(N)}$	$[\delta(\Delta y / y)]^{(N)}$	$З^{(N)}$

Выполняя перебор, следует иметь ввиду два обстоятельства:

а) производственные допуски на параметры отдельных элементов, определяются технологией изготовления, и инженер не в силах повлиять на их значения без организации процедуры отбора элементов с заданным уровнем точности параметров;

б) производственные допуски на параметры некоторые элементов соответствуют значениям из дискретного ряда чисел: ±20, ±10, ±5, …

При реализации этого способа, допуски на первичные параметры должны назначаться с учетом коэффициентов влияния этих параметров. В частности, чем ниже коэффициент влияния этих параметров, тем более грубый допуск может быть назначен. Примерным критерием назначения производственного допуска является обратная величина коэффициента влияния первичного параметра.

Задачи обеспечения требований к точности выходного параметра могут также решаться экспериментально с использованием теории планирования эксперимента [17].

При разработке требований к точности выходного параметра и их обеспечении при проектировании подразумевается, что выполняется увязка вероятности, соответствующей требованию к точности, с вероятностью, с которой гарантируется производственный допуск на выходной параметр.

4.11. Способы определения коэффициентов влияния

4.11.1. Аналитические способы

Коэффициенты влияния необходимы для подсчета характеристик $M(\Delta y/y)$ и $\delta(\Delta y/y)$ при анализе точности и стабильности выходных параметров. Как отмечалось ранее, коэффициенты, используемые в формулах для подсчета этих характеристик, зависят от вида математической модели $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и от номинальных значений первичных параметров.

При заданном виде модели и выбранных номинальных значениях первичных параметров, коэффициенты влияния первичных параметров являются детерминированными величинами, т.е. представляют собой фиксированные числа. Коэффициент влияния может быть как положительным, так и отрицательным, как больше единицы, так и меньше единицы.

На практике для определения коэффициентов влияния используют две группы методов:

а) расчетно-аналитические;

б) экспериментально-расчетные.

Коэффициент влияния B_i i-го первичного параметра при аналитических методах может быть подсчитан с помощью выражения (4.9).

Пример 4.6. Определим коэффициенты влияния резисторов $R1$ и $R2$ делителя напряжения (рис.4.14), рассматривая в качестве выходного параметра y коэффициент деления делителя $К_Д$.

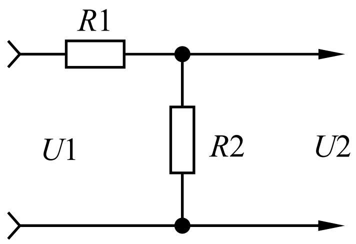


Рис.4.14. Делитель напряжения

$$y \to K_Д = \frac{U1}{U2} = \frac{R1 + R2}{R2}.$$

Параметры элементов:

$R1$ = 2 кОм ± 5%; $R2$ = 3 кОм ± 5%.

Решение. Воспользуемся записанной формулой для коэффициента деления $K_Д$. Принимая во внимание, что $\varphi \to K_Д$, $x_i \to R_i$ (i = 1; 2) получим

$$B_{R1} = \frac{1}{R2} \cdot \frac{R1 \cdot R2}{(R1 + R2)} = \frac{R1}{R1 + R2} = \frac{2}{2+3} = 0{,}4;$$

$$B_{R2} = -\frac{R1}{(R2)^2} \cdot \frac{R2 \cdot R2}{(R1 + R2)} = -\frac{R1}{R1 + R2} = -0{,}4.$$

Пример 4.7. Определим коэффициенты влияния параметров R и C RC-цепи, выходным параметром которой является постоянная времени $\tau = RC$.

Решение. В данном примере $\varphi \to \tau = RC$.

С учетом этого, определяем

$$B_R = C\frac{R}{RC} = 1; \; B_C = R\frac{C}{RC} = 1.$$

Нетрудно показать, что если выходной параметр y может быть представлен в виде выражения

$$y = \mathrm{const} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \; ,$$

то коэффициенты влияния могут быть определены как

$$B_i = \alpha_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n.$$

Пример 4.8. Определим коэффициенты влияния параметров L и C колебательного контура, рассматривая в качестве выходного параметра y резонансную частоту $f_{\text{рез}}$. Значение параметров L и C:

$$L = 10 \text{ мкГн} \pm 10\%;\ C = 100 \text{ пФ} \pm 5\%.$$

Решение. В данном случае $y \to f_{\text{рез}}$.

Известно, что

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi} L^{-0,5} \cdot C^{-0,5}.$$

Из последней записи видно, что

$$B_L = -0{,}5;\ \ B_C = -0{,}5.$$

Если выходной параметр y может быть представлен в виде отношения

$$y = \frac{Q(x_1, \ldots, x_n)}{H(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{Q}{H}, \tag{4.36}$$

где Q, H – многочлены, содержащие не обязательно все x_i, причем их степень может быть любой,

то коэффициент влияния i-го первичного параметра может быть подсчитан с помощью выражения

$$B_i = m\frac{Q(x_1)}{Q} - l\frac{H(x_i)}{H}, \tag{4.37}$$

где $Q(x_i)$ и $H(x_i)$ – части многочленов Q и H, содержащие только x_i;

m, l – максимальные степени x_i соответственно в многочленах $Q(x_i)$ и $H(x_i)$.

Пример 4.9. Определим с помощью последней формулы коэффициентов влияния резисторов $R1$ и $R2$ делителя напряжения, рассмотренного в примере 4.6.

Решение. Ранее было принято, что $\varphi \to K_{\text{Д}}$.

По аналогии с выражением (4.36) можно записать

$$K_{\text{Д}} = \frac{R1 + R2}{R2} = \frac{H}{Q}.$$

В данном случае: $Q = R1 + R2$, $H = R2$.

Применим формулу (4.37), выбрав, например, в качестве x_i параметр $R1$.

Тогда

$$Q(R1) = R1;\ H(R1) = 0;\ m = 1;\ l = 0.$$

Следовательно

$$B_{R1} = 1\frac{R1}{R1+R2} - 0\frac{0}{R2} = \frac{R1}{R1+R2} = \frac{2}{2+3} = 0{,}4\,.$$

Этот результат, как видим, совпадает с результатом, полученным в примере 4.6.

Коэффициенты влияния могут быть также определены методом приращения. В этом случае пользуются формулой

$$B_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_i}\frac{x_{i\,\text{ном}}}{y_{i\,\text{ном}}} = \frac{\varphi(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n) - y_{i\,\text{ном}}}{\Delta x_i}\frac{x_{i\,\text{ном}}}{y_{i\,\text{ном}}}\,. \qquad (4.38)$$

Точность определения коэффициентов B_i тем меньшая, чем сильнее выражено нелинейное влияние первичного параметра x_i на выходной параметр y и чем больше задаваемое приращение Δx_i.

Пример 4.10. Определим коэффициент влияния резистора R2 делителя напряжения (см. рис.4.14), рассмотренного в примере 4.6, и считая выходным параметром коэффициент деления $К_Д$.

Решения. Напомним, что в условиях этого примера

$$y = K_\text{Д} = \frac{R1+R2}{R2};$$

$$R1 = 2\ \text{кОм} \pm 5\%;\ R2 = 3\ \text{кОм} \pm 5\ \%.$$

Для определения коэффициенты влияния B_{R2} первичному параметру $R2$ дадим малое приращение $\Delta R2 = 0{,}1$ кОм и воспользуемся формулой (4.38). Получим

$$B_{R2} \approx \frac{(2+3{,}1)/3{,}1-(2+3)/3}{0{,}1}\cdot\frac{3}{(2+3)/3} \approx -0{,}387\,.$$

Этот результат немного отличается от результата, полученного в примере 4.6 ($B_{R2} = -0{,}4$).

4.11.2. Экспериментально-расчетный способ

При этом способе пользуются макетом устройства или реализацией технологического процесса. Рассматриваемому первичному параметру x_i дают малое приращение. Значения остальных первичных параметров считают соответствующими номинальным уровням, или же, если нет технических сложностей, задают их номинальные значения. После выполнения операции приращения контролируют значение выходного параметра y. Коэффициент влияния первичного параметра определяют по формуле

$$B_i = \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_{i\text{нач}}}{y_{\text{нач}}},$$

где $x_{i\text{нач}}$, $y_{i\text{нач}}$ – соответственно значения первичного параметра x_i и выходного параметра y до выполнения операции приращения;

Δy_i – изменения (приращение) выходного параметра с учетом знака после выполнения операции приращения первичного параметра x_i.

Если все первичные параметры (включая параметр x_i) до выполнения операции приращения x_i устанавливались равными номинальным уровням, то справедливы равенства

$$x_{1\text{нач}} = x_{1\text{ном}},\ \ldots,\ x_{i\text{нач}} = x_{i\text{ном}},\ \ldots,\ x_{n\text{нач}} = x_{n\text{ном}};$$

$$y_{i\text{нач}} = y_{\text{ном}}.$$