Линейная алгебра

Линейные пространства

Определения линейного пространства, подпространства и линейной оболочки векторов. Линейная зависимость векторов, критерий линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Матрица системы векторов. Матрица перехода от базиса к базису. Преобразование координат вектора. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Критерий равенства нулю определителя. Теорема о базисном миноре.

1. Показать, что все многочлены степени не выше n образуют линейное пространство.

2. Доказать, что множество всех матриц размером $m \times n$ с определенными ранее операциями над матрицами является линейным пространством. Найти размерность этого пространства и указать простейший базис.

Ответ: размерность равна mn.

3. Образуют ли линейное пространство векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат: OX или OY?

Ответ: нет.

4. Является ли линейным пространством множество Z всех целых чисел с обычными операциями сложения и умножения?

Ответ: нет.

5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

а) $\bar{a} = (2; 1; -1),\ \bar{b} = (-1; 3; 4),\ \bar{c} = (1; 2; -3)$;

б) $\bar{a} = (-1; 2; 0),\ \bar{b} = (1; 2; -1),\ \bar{c} = (3; 0; 1)$;

в) $\bar{x}_1 = \sin t,\ \bar{x}_2 = \sin 2t,\ \bar{x}_3 = \sin 3t.$

Ответ: а) независима; б) зависима; в) независима.

6. Доказать линейную зависимость векторов $\bar{a} = (1; 2; -1; 0)$, $\bar{b} = (1; -1; 2; -2)$, $\bar{c} = (3; 3; 0; -2)$.

7. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$ в базисе $(\bar{a}, \bar{b})$.

Ответ: $(-2; 2)$.

8. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка векторы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(3; 4; -2; 1)$.

9. Используя определение ранга матрицы, найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r=3$; б) $r=2$.

10. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r=2$; б) $r=3$.

11. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 23 & 5 & -18 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r=2$; б) $r=3$.

12. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ, и чему он равен при других значениях λ?

Ответ: при $\lambda=0$ $r=2$; при $\lambda\neq 0$ $r=3$.

13. В R^4 даны векторы $\bar{x}_1=(1;2;0;6)$, $\bar{x}_2=(2;0;3;1)$, $\bar{x}_3=(3;2;3;7)$, $\bar{x}_4=(7;2;9;9)$. Найти ранг системы векторов и указать базисные векторы.

Ответ: $r=2$. Любые два вектора системы векторов образуют базис.

14. Пусть даны векторы $\bar{x}_1=(1;1;1)$, $\bar{x}_2=(1;2;3)$, $\bar{x}_3=(2;1;0)$, $\bar{x}_4=(3;4;5)$. Доказать, что $L(\bar{x}_1;\bar{x}_2)=L(\bar{x}_3;\bar{x}_4)$.

15. Доказать, что вектор $\bar{a}=(2,-1,6,4)\in L(\bar{x}_1;\bar{x}_2)$, где $\bar{x}_1=(1;5;-2;1)$, $\bar{x}_2=(11;11;18;19)$.

16. Найти матрицу перехода от базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ к базису $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ и матрицу перехода от базиса $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ к базису $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, если $\bar{a}=2\bar{e}_1+2\bar{e}_3$, $\bar{b}=3\bar{e}_3-\bar{e}_2$, $\bar{c}=3\bar{e}_1+\bar{e}_3$.

Ответ: $T=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $T^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 3\\ 0 & -4 & 0\\ 2 & -6 & -2\end{pmatrix}$.

Системы линейных уравнений

Общие понятия систем линейных уравнений. Матричный способ решения СЛУ. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Совместность произвольных СЛУ. Теорема Кронекера – Капелли и следствие из нее. Однородные системы уравнений. Существование ненулевого решения. Общее решение однородных систем. Неоднородные СЛУ. Структура общего решения неоднородных систем.

1. Решить системы линейных уравнений: а) матричным методом; б) по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+5y=1.\end{cases}$ **Ответ:** $x=2, y=-1$;

б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-x_3=9,\\ x_1-4x_2+3x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=2, x_2=1, x_3=-1$;

в) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-3, x_2=2, x_3=1$;

г) $\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2, x_2=0, x_3=1, x_4=-1$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x_1-8x_2=3,\\ 2x_1+x_2=1,\\ 4x_1+7x_2=-4.\end{cases}$ **Ответ:** система несовместна;

б) $\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=4,\\ 4x_1-x_2-3x_3=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3=4.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2, x_2=3, x_3=-4$;

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad - 4x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - \ x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$;

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4, \end{cases} \quad x_3, x_4, x_5 \in \boldsymbol{R}$;

д) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4. \end{cases} \quad x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$;

е) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{5}c, \ x_2 = \frac{3}{5}c, \ x_3 = c$;

б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+x_3+9x_4=0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=-3c_1+5c_2, \\ x_2=c_1-3c_2, \\ x_3=c_1,\ x_4=c_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=\frac{3}{17}c_1-\frac{13}{17}c_2, \\ x_2=\frac{19}{17}c_1-\frac{20}{17}c_2, \\ x_3=c_1\ \ x_4=c_2. \end{cases}$

4. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ и укажите размерность пространства решений системы:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_3+5x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений совместна, и найти ее общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=-1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 = 1 + 5c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$

6. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, используя фундаментальную систему решений, соответствующей однородной:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. При каком значении параметра t совместна система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = t, \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 15x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ: 8.

8. Существует ли система линейных уравнений, для которой каждая из следующих формул является общим решением:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3/5 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

Ответ: да.

Линейные операторы

Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Характеристическое уравнение линейного оператора. Произведение линейных операторов. Собственные числа линейного оператора. Диагонализация линейного оператора. Ортогональные операторы. Самосопряженные операторы.

1. Доказать линейность оператора и записать его матрицу:

а) $f(\overline{x}) = (x_1 + x_3,\ 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;

б) $f(\overline{x}) = (0,\ x_2 + x_3, 0)$.

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1 + x_2, x_3 - x_1, x_2 + 1)$ не является линейным.

3. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$ не является линейным.

4. Являются ли линейными следующие операторы:

а) $f(\overline{x}) = (x_2 + 3x_3, 5x_1, 2x_3 - 3x_1)$;

б) $f(\overline{x}) = (4x_1 + x_2 - 1, x_1 - 2x_2, 3)$.

Ответ: а) да; б) нет.

5. Найти в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ матрицу линейного оператора f, переводящего каждый вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y} = [\bar{x}, \bar{a}]$, если $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Записать в базисе $(1, x, x^2)$ линейного пространства многочленов степени не выше двух матрицу оператора дифференцирования.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найти в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ матрицу оператора f, если f – проектирование:

а) на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{\sqrt{3}}$;

б) на плоскость $2x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ: а) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

8. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $2x + 3y + 4z = 0$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\bar{e}_1 = (1; 0; 0), \bar{e}_2 = (0; 1; 0), \bar{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Ответ: $A = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 25 & -6 & -8 \\ -6 & 20 & -12 \\ -8 & -12 & 13 \end{pmatrix}$.

9. В базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, если $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = -5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -19 & 9 & -16 \\ -36 & 18 & -24 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Определить, могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в разных базисах.

Ответ: нет.

11. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\bar{a}_1 = (2; 0; 3)$, $\bar{a}_2 = (4; 1; 5)$, $\bar{a}_3 = (3; 1; 2)$ в векторы $\bar{b}_1 = (1; 2; -1)$, $\bar{b}_2 = (4; 5; -2)$, $\bar{b}_3 = (1; -1; 1)$, в том же базисе, в котором даны координаты векторов.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

12. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $3x - y + 2z = 0$. Определить матрицу этого линейного оператора в базисе $\bar{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\bar{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Ответ: $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

13. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

а) $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = (2; -1)$; $\lambda_2 = -4, \bar{x}_2 = (1; 1)$;

б) $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = \lambda_3 = 9, \bar{x}_1 = (2; 1; 2)$; $\bar{x}_2 = (1; -2; 0)$; $\bar{x}_3 = (0; -2; 1)$.

14. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: нет.

15. В некотором базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид.

Ответ: $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$.

16. Привести матрицу A линейного оператора f к диагональному виду. Указать соответствующую матрицу перехода, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$ ортогональной, и если является, то найти обратную ей.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$.

18. Найти ортогональную матрицу Q, диагонализирующую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, и записать диагональный вид этой матрицы.

Ответ: $Q=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad Q^T AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

19. Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Ответ: да.

20. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Ответ: $Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$.

21. Известно, что симметрическая матрица третьего порядка имеет единственное трехкратное собственное значение $\lambda = a$. Найти эту матрицу.

Ответ: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Квадратичные формы

Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду ортогональным преобразованием. Метод Лагранжа. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Применение квадратичных форм к задаче упрощения уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

1. Составить матрицу квадратичной формы и найти собственные значения матрицы:

а) $L(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2)=17x_1^2+12x_1x_2+8x_2^2$;

г) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$;

д) $L(x_1,x_2)=14x_1^2+21x_2^2+24x_1x_2$.

Ответ:

а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=7$;

в) $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\lambda_1=5,\ \lambda_2=20$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$;

д) $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 30,\ \lambda_2 = 5$.

2. По данной матрице написать соответствующую ей квадратичную форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

а) $L(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$;

б) $L(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2yz$.

3. В базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ задана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) =$ $= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Записать эту квадратичную форму в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, если $\bar{e}_1' = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3,\ \bar{e}_3' = 5\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$.

Ответ: $Q(x_1', x_2', x_3') = 6x_1'^2 + 5x_2'^2 + 118x_3'^2 + 8x_1'x_2' + 50x_1'x_3' + 42x_2'x_3'$.

4. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$.

Ответ:

а) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2,\ y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3,\ y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3,$ $y_3 = x_3$;

б) $L(y_1, y_2) = 5y_1^2 - y_2^2,\ y_1 = x_1,\ y_2 = \sqrt{2}\,x_1 + 2x_2$;

в) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2,\ y_1 = x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_2 + x_3,\ y_3 = x_3$;

г) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2,\ y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3),\ y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3),\ y_3 = x_3$;

д) $L(y_1, y_2) = -7y_1^2 + y_2^2,\ y_1 = x_1,\ y_2 = 3x_1 + x_2$.

5. Привести квадратичную форму к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2x_3 - 4x_1x_2 + x_2^2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_3 + 6x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_3^2$;

г) $L(x_1, x_2) = -x_2^2 - 16x_1x_2 + 11x_1^2$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Ответ: а) $L(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 2y_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(-2y_1 + 2y_2 + y_3); \end{cases}$

б) $L(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\left(y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3\right), \\ x_2 = -\frac{2}{3}\left(y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3\right), \\ x_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}y_1 - y_2 + y_3\right); \end{cases}$

в) $L(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3), \\ x_3 = -\frac{1}{3}(y_1 - 2y_2 - 2y_3); \end{cases}$

г) $L(y_1, y_2) = -5y_1^2 + 15y_2^2$; $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2); \end{cases}$

д) $L(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3). \end{cases}$

6. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы с матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) положительно определенная; б) отрицательно определенная; в) положительно полуопределенная; г) отрицательно полуопределенная; д) неопределенная.

7. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = -6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

Ответ: а) отрицательно определенная; б) положительно определенная; в) неопределенная; г) положительно определенная; д) неопределенная.

8. Не приводя квадратичную форму к каноническому виду, найти все значения параметра λ, при которых она является положительно определенной и отрицательно определенной:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + (\lambda - 3)x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$.

Ответ: а) положительно определена при $\lambda > 5$, отрицательно определена при $\lambda < -1$; б) положительно определена при $\lambda > 1$, отрицательно определена при $\lambda < -4$.

9. Найти каноническое уравнение кривой второго порядка, записать все использованные преобразования и построить кривую в исходной системе координат:

а) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

б) $-7x^2+48xy+7y^2-625=0$;

в) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

г) $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0$.

Ответ: а) $\dfrac{(x')^2}{5}+\dfrac{(y')^2}{30}=1$ – эллипс; б) $\dfrac{(x')^2}{25}-\dfrac{(y')^2}{25}=1$ – гипербола; в) парабола $y'^2=4\sqrt{2}\,x'$; г) две пересекающиеся прямые $\left[\begin{array}{l}2x'-3y'+1=0,\\ 4x'-3y'-1=0.\end{array}\right.$

10. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

а) $4x^2+4y^2+z^2+12xy-20=0$; б) $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz=18$.

Ответ: а) $\dfrac{x'^2}{20}+\dfrac{y'^2}{2}-\dfrac{z'^2}{10}=1$; б) $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{3}+\dfrac{z'^2}{2}=1$.

11. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат:

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0.$$

Ответ: Эллипсоид $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}+\dfrac{z'^2}{2/3}=1$, $0'(1;2;-1)$, $\bar{e}_1=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_3=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.