Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Векторная алгебра

Векторные и скалярные величины. Линейные операции и их свойства. Ортогональная проекция. Линейная зависимость векторов. Базис. Вычисления в координатах. Деление отрезка в данном отношении. Определение скалярного произведения, его свойства и приложения. Условие ортогональности двух векторов. Скалярное произведение в координатной форме. Векторное произведение двух векторов и его свойства. Векторное произведение в координатной форме. Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие компланарности ненулевых векторов. Смешанное произведение в координатной форме.

1. Заданы три вершины $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;3;0)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки D.

Ответ: $D(1;4;-3)$.

2. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм, если $\overline{AB}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{AC}=\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c}$, $\overline{AD}=-\overline{a}+2\overline{b}+\overline{c}$.

3. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(4,-5,2)$, $B(2,-3,1)$.

Ответ: $\overline{AB}(-2,2,-1)$, $\left|\overline{AB}\right|=3$, $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{3}$.

4. Найти координаты вектора $\overline{a}$, если его длина равна 2 и он образует с осями OX, OY и OZ углы $135°$, $60°$ и $60°$ соответственно.

Ответ: $\overline{a}(-\sqrt{2},1,1)$.

5. Найти угол, образованный единичными векторами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, если известно, что векторы $\overline{a}=\overline{e}_1+2\overline{e}_2$ и $\overline{b}=5\overline{e}_1-4\overline{e}_2$ перпендикулярны.

Ответ: $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

6. В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот. Известно, что $\overline{AB}=(6;-2)$, $\overline{AC}=(3;4)$. Найти координаты вектора $\overline{AH}$.

Ответ: (2; 1).

7. Найти вектор $\overline{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\overline{a}=7\overline{i}-4\overline{j}-4\overline{k}$ и $\overline{b}=-2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, если $\left|\overline{x}\right|=5\sqrt{6}$.

Ответ: $\overline{x}=\dfrac{5}{3}\left(\overline{i}-7\overline{j}+2\overline{k}\right)$.

8. Дан треугольник с вершинами: $A(4;1)$, $B(7;5)$ и $C(-4;7)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Ответ: $D\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right)$.

9. Дан треугольник ABC, $A(-2,3,6)$, $B(-3,5,8)$, $C(2,3,3)$. Найти:

а) вектор $\overline{b}$, направленный по биссектрисе внутреннего угла при вершине A, если $\left|\overline{b}\right| = 5\sqrt{6}$;

б) координаты точки D пересечения этой биссектрисы со стороной BC.

Ответ: а) $\overline{b}(7,10,1)$; б) $D\left(-1\frac{1}{8}, 4\frac{1}{4}, 6\frac{1}{8}\right)$.

10. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из одной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Ответ: 5.

11. Доказать, что векторы $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}, \overline{b} = i - 3\overline{j}$ и $\overline{c} = 2\overline{i} + 4\overline{j}$ линейно зависимы. Можно ли выразить вектор $\overline{b}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$?

Ответ: нет.

12. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{b} = \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, где $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ – базис. Показать, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{c} = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$.

Ответ: $\overline{c} = \left(\frac{11}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

13. Найти работу силы $\overline{F} = \overline{i} + \overline{k}$ при перемещении материальной точки на вектор $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

Ответ: 4.

14. Длины базисных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ равны соответственно $1, 1, 2$; углы между ними следующие: $\angle(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = 90°$, $\angle(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = \angle(\overline{e}_2, \overline{e}_3) = 60°$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-1; 0; 2)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$. **Ответ:** $\sqrt{94}$.

15. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\overline{a} + \overline{b}$ и $3\overline{a} + \lambda\overline{b}$?

Ответ: $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

16. Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\overline{a} + 2\overline{b} + \lambda\overline{c}$, $4\overline{a} + 5\overline{b} + 6\overline{c}$, $7\overline{a} + 8\overline{b} + \lambda^2\overline{c}$?

Ответ: $\lambda = 3, \lambda = -4$.

17. Может ли некоторый ненулевой вектор образовывать с векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ углы, равные соответственно: а) $120°, 135°, 45°$; б) $120°, 135°, 60°$?

Ответ: а) нет; б) да.

18. Даны точки $A(1,-1,0)$, $B(5,3,-7)$, $C(8,-1,-1)$, $D(1,2,3)$. Найти:

а) скалярное произведение $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)$;

б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) векторное произведение $\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]$;

г) смешанное произведение $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)$.

Ответ: а) 35; б) $\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$; в) $(-4, -45, -28)$; г) -219.

19. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

20. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ разделен на три равные части.

Ответ: $(-1; 2; 4)$ и $(8; -4; -2)$.

21. Найти две точки A и B, если известно, что точка $C(-5; 4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6; -5)$ – в отношении $2:3$.

Ответ: $A(160; -131), B(-225; 184)$.

22. Даны векторы $\overline{a} = (1; 1)$ и $\overline{b} = (1; -1)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases} 2\overline{x} + \overline{y} = \overline{a} \\ \overline{x} + 2\overline{y} = \overline{b} \end{cases}$.

Ответ: $-\dfrac{4}{5}$.

23. Даны векторы $\overline{a} = (1; 3)$, $\overline{b} = (2; -1)$ и $\overline{c} = (-4; 1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{2}{7}$, $\beta = \dfrac{13}{7}$.

24. Проверить, что векторы $\overline{a} = (-5; -1)$ и $\overline{b} = (-1; 3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\overline{c} = (-1; 2)$ и $\overline{d} = (2; -6)$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{c} = \left(\dfrac{1}{16}; \dfrac{11}{16}\right)$, $\overline{d} = (0; -2)$.

25. Проверить, образуют ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$. Если да, то найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:

а) $\overline{a}(2, -1, 4), \overline{b}(1, -1, 0), \overline{c}(-1, 3, -3), \overline{d}(2, 1, 12)$;

б) $\overline{a}(1, 2, 5), \overline{b}(1, 3, 2), \overline{c}(-2, -7, 1), \overline{d}(6, 16, 16)$.

Ответ: а) да, $\overline{d} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$; б) да, $\overline{d} = 3\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.

26. Даны вершины тетраэдра $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Каноническое уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Условие параллельности двух прямых. Условие перпендикулярности двух прямых. Нормальное уравнение прямой. Отклонение и расстояние от точки до прямой.

1. Прямая L задана общим уравнением $x-3y+6=0$. Записать уравнение прямой L: а) с угловым коэффициентом; б) в отрезках; в) каноническое; г) параметрическое; д) нормальное.

Ответ: 1) $y=\frac{1}{3}x+2$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$; 3) $x-6=3y$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}$; 4) $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}=t$, $x=3t+6$, $y=t$; 5) $-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{6}{\sqrt{10}}=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и параллельной прямой:

а) $x-2y+5=0$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; в) $x=2$; г) $y=-1$; д) $x=3+t, y=4-7t$.

Ответ: а) $x-2y+11=0$; б) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$; в) $x=-3$; г) $y=4$; д) $x=-3+t$, $y=4-7t$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и перпендикулярной прямой: а) $x-2y+5=0$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; в) $x=2$; г) $y=-1$; д) $x=3+t, y=4-7t$.

Ответ: а) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{-2}$; б) $2x+3y-6=0$; в) $y=4$; г) $x=-3$; д) $x-7y+31=0$.

4. Составить уравнение прямой L, которая проходит через точку $M_0(2;10)$ и отсекает от второго координатного угла треугольник с площадью, равной 5.

Ответ: $5x-2y+10=0$.

5. Найти угол между прямыми $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$.

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{130}}$.

6. Даны две точки: $P(2;3)$ и $Q(-1;0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

Ответ: $x+y+1=0$.

7. Через точку $M(3;5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

Ответ: $x+y-8=0, x-y+2=0$.

8. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, при уравнении гипотенузы $y=7x-4$ и вершине прямого угла $C(3;4)$.

Ответ: $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}, y=-\frac{4}{3}x+8$.

9. Дан треугольник ABC с вершинами $A(6;4)$, $B(-3;5)$, $C(-2;-6)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проходящей через вершину B.

Ответ: $6x+5y-56=0$.

10. Стороны треугольника расположены на прямых $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Составить уравнения высот треугольника.

Ответ: $2x-y+1=0$, $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$.

11. Из точки $M(5;4)$ выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg}2$ к оси OX и отражается от нее. Написать уравнение падающего и отраженного лучей.

Ответ: $y=2x-6, y=-2x+6$.

12. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7;15)$, а середина его основания – в точке $(1;3)$. Составить уравнения сторон треугольника, если тангенс угла при основании равен 4.

Ответ: $2x-3y+7=0$, $14x+5y+23=0$, $10x+11y-95=0$.

13. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$, и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

Ответ: $x+7y-6=0, x-y-6=0, 7x+y-10=0$.

14. Установить взаимное расположение двух данных прямых на плоскости (совпадают, параллельны, пересекаются); в случае пересечения найти общую точку прямых и косинус угла между ними:

а) $2x+3y=0$ и $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2-t; \end{cases}$

б) $x+2y=15$ и $\begin{cases} x=5+4t, \\ y=-2-2t; \end{cases}$

в) $3x+4y-20=0$ и $\begin{cases} x=4-8t, \\ y=2+6t; \end{cases}$

г) $x-5y+9=0$ и $x+y-3=0$.

Ответ: а) $(15;-10)$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$; б) параллельны; в) совпадают; г) $(1;2)$, $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3;1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1=0$ под углом $45°$.

Ответ: $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$.

16. Составить уравнение прямой L_3, симметричной прямой L_1 $(3x-y+5=0)$, относительно прямой L_2 $(x+y-1=0)$.

Ответ: $x-3y+7=0$.

17. Найти длину h высоты, опущенной из вершины $A(4;4)$ треугольника ABC, если $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$.

Ответ: 10.

18. Записать уравнение биссектрисы L_0 угла, образованного прямыми L_1 $(x+7y=0)$ и L_2 $(x-y-4=0)$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

Ответ: $3x+y-10=0$.

19. Найти точку $B(x_1;y_1)$, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой $L\,(x-2y+6=0)$.

Ответ: $B(12;4)$.

Плоскость и прямая в пространстве

Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости. Векторное уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости. Уравнение прямой, проходящей через три заданные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Общее уравнение прямой в пространстве. Векторные уравнения прямой. Параметрическое уравнение прямой в пространстве. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Условие параллельности двух прямых. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя прямыми. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через ось OX и точку $M_1(4;-1;2)$;

б) через ось OY и точку $M_2(1;4;-3)$;

в) через ось OZ и точку $M_3(3;-4;7)$.

Ответ: а) $2y+z=0$; б) $x-z-1=0$; в) $5x+y-13=0$.

2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;-1)$ параллельно векторам $\bar{a}=(4;2;1)$ и $\bar{b}=(-5;1;2)$.

Ответ: $3x-13y+14z-5=0$.

3. Составить общее уравнение плоскости, заданной параметрически: $x=2+3u-4v$, $y=4-v$, $z=2+3u$.

Ответ: $x-4y-z+16=0$.

4. Плоскость P задана общим уравнением $x+3y-4z+10=0$. Записать нормальное уравнение этой плоскости.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{26}}x-\frac{3}{\sqrt{26}}y+\frac{4}{\sqrt{26}}z-\frac{10}{\sqrt{26}}=0$.

5. Определить, при каких значениях l и m плоскости $2x+ly+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны.

Ответ: $l=3,\ m=-4$.

6. Определить, при каком значении l плоскости $3x-5y+lz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

Ответ: $l=6$.

7. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

8. Установить взаимное расположение двух данных плоскостей (пересекаются, параллельны, совпадают):

а) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=0$;

б) $x-2y+z+4=0$ и $-2x+4y-2z-8=0$.

Ответ: а) пересекаются; б) совпадают.

9. Доказать, что плоскости $x=-1+8v,\ y=1+u+v,\ z=-u+3v$ и $x=1+2t+4s,\ y=4-y-3s,\ z=4+2t+5s$ параллельны, и найти расстояние d между ними.

Ответ: 4.

10. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях OX и OY отрезки $a=-2,\ b=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x-3y-2z+2=0$.

11. Прямая L задана следующими общими уравнениями:

$$\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0.\end{cases}$$

Написать канонические уравнения прямой.

Ответ: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-7}=\frac{z+2}{-19}$.

12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;\,2;\,3)$ и $M_2(2;\,4;\,7)$.

Ответ: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{4}$.

13. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\,2;\,5)$ перпендикулярно плоскости

$2x-3y+4z-5=0$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}=t,\ \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=4t+5. \end{cases}$

14. Доказать параллельность прямых $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

15. Установить взаимное расположение прямых $x=-t,\ y=-4-5t,$ $z=3+3t$ и $\begin{cases} 4x+y+3z-5=0, \\ 7x-2y-z-5=0. \end{cases}$

Ответ: совпадают.

16. Доказать, что прямые параллельны, и найти расстояние между ними: $x=2t,\ \ y=0,\ \ z=3+3t,\ \ z=-2t$ и $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0. \end{cases}$

Ответ: $\sqrt{3}$.

17. Даны прямые $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ и $\dfrac{x-3}{l}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?

Ответ: $l=3$.

18. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

Ответ: $(2;-3;6)$.

19. Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты их точки (точек) пересечения при $x=-3t,\ \ y=2+3t,\ \ z=1$ и $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{13}=\dfrac{z-1}{10}$.

Ответ: $(1,1,1)$.

20. Доказать, что прямые скрещиваются, и найти расстояние между ними: $\dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{1}$ и $x=-2+3t,\ \ y=4,\ \ z=3-t$.

Ответ: 31/13.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Ответ: $6x-20y-11z+1=0$.

22. Убедиться, что прямые L_1 $\left(\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}\right)$ и

$L_2\left(\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}\right)$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

Ответ: $2x-16y-13z+31=0$.

23. Точка A лежит на прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x+y+z+3=0$ равно $\sqrt{3}$. Найти координаты точки A.

Ответ: $A(1;0;-1)$ или $A(-1;-3;-2)$.

24. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найти координаты точки, симметричной точке A относительно этой плоскости.

Ответ: $(1;-5;-3)$.

25. Составьте уравнение плоскости, проецирующей прямую $\begin{cases}2x-3y-4z+5=0,\\ x+y+z-2=0\end{cases}$ на плоскость XOZ.

Ответ: $5x-z-1=0$.

26. Составить канонические уравнения проекции прямой $x=1+2t$, $y=3+7$, $z=2+t$ на плоскость $3x-2y-z+14=0$.

Ответ: $\dfrac{x+5}{19}=\dfrac{y}{20}=\dfrac{z+1}{17}$.

27. Написать каноническое уравнение прямой L_1, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $P_1(3x-2y-3z-7=0)$ и пересекает прямую $L_2\left(\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}\right)$.

Ответ: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$.

28. На плоскости OXY найти такую точку M, сумма расстояний от которой до точек $A(-1;2;5)$ и $B(11;-16;-10)$ была бы наименьшей.

Ответ: $M(3;-4;0)$.

29. При каком значении m угол φ между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ и плоскостью $mx+y+z+4=0$ равен $45°$?

Ответ: $m=\pm\sqrt{6}$.

Кривые и поверхности второго порядка

Понятие кривой второго порядка. Определение эллипса. Каноническое уравнение эллипса. Параметрическое уравнение эллипса. Фокусы эллипса, вершины, полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, уравнения директрис, уравнение касательной в заданной точке. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты гиперболы. Фокусы гиперболы, вершины, полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, уравнения директрис, уравнение касательной в заданной точке. Определение параболы. Каноническое уравнение параболы. Фокус параболы, вершина, эксцентриситет, фокальный радиус, уравнение директрисы, уравнение касательной в заданной точке. Оптические свойства кривых второго порядка. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка в случае отсутствия члена с произведением xy. Канонические уравнения и изображения поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конус, эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр. Исследование формы поверхности второго порядка методом сечений.

1. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

б) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

в) фокусами эллипса являются точки $(\pm1;\,0)$, а точка $\left(\sqrt{3};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;

г) фокусами эллипса являются точки $(\pm2;\,0)$, а директрисами являются прямые $x=\pm18$;

д) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси OY, равно 8.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

2. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

б) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1;\,3)$ принадлежит гиперболе;

в) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

г) эксцентриситет гиперболы равен $\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$; 2) $\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{3}=1$; 3) $\frac{x^2}{1/3}-\frac{y^2}{1}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

3. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

а) точка $(5;-5)$ принадлежит параболе;

б) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

в) длина хорды, проходящей через фокус под углом $45°$ к оси параболы, равна 18.

Ответ: 1) $y^2=5x$; 2) $y^2=24x$; 3) $y^2=9x$.

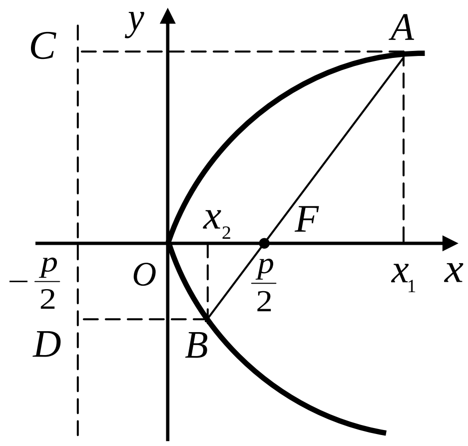

Рис. 1

4. Дана окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Составить уравнение ее касательной в точке $A(5;5)$.

Ответ: $4x+3y-35=0$.

5. Определить, какая линия определяется следующим уравнением: $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$. Изобразить ее на чертеже.

Ответ: правая половина эллипса с центром в $M_0(-5;1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$.

6. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;0)$ вдвое меньше расстояния до прямой $x=-4$.

Ответ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$.

7. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;0)$ и до прямой $5x+8=0$ относятся как $5:4$.

Ответ: $\frac{(x-8)^2}{8^2}-\frac{y^2}{24^2}=1$.

8. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;2)$ и от прямой $y=4$.

Ответ: $x^2=-4(y-3)$.

9. Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями:

а) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

б) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$;

в) $2x^2-4x+2y-3=0$.

Построить чертежи.

Ответ:

а) эллипс $\frac{x'^2}{225}+\frac{y'^2}{16}=1$, новое начало координат $0'(1;-1)$;

б) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, новое начало координат $0'(2;3)$;

в) парабола $x'^2=-y'$, новое начало $0'\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

10. Написать каноническое уравнение кривой $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

Ответ: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Правая ветвь гиперболы.

11. Установить, какие кривые заданы уравнениями в полярных координатах:

а) $r=\frac{15}{3-7\cos\varphi}$; б) $r=\frac{7}{5-2\cos\varphi}$; в) $r=\frac{3}{4-4\cos\varphi}$; г) $r=\frac{6}{2-\cos\varphi}$.

Ответ: а) гипербола; б) эллипс; в) парабола; г) эллипс.

12. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $\lambda x^2+y^2=z$; б) $\lambda(x^2+y^2)=z$; в) $x^2+\lambda y^2=\lambda z$.

Ответ:

а) при $\lambda>0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda=0$ – параболический цилиндр, при $\lambda<0$ – гиперболический параболоид;

б) при $\lambda\neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda=0$ – плоскость;

в) при $\lambda>0$ – эллиптический параболоид; при $\lambda=0$ – плоскость, при $\lambda<0$ – гиперболический параболоид.

13. Определить вид и параметры поверхности, а также схематически изобразить ее:

а) $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$;

б) $2x^2+3y^2+6z^2-8x-6y-12z-1=0$;

в) $x^2-4y^2+z^2-2x+12y-4z-3=0$;

г) $6x^2+3y^2-2z^2+24x-6y-36z-4z+25=0$;

д) $2x^2+3y^2+16x-18y-12z+47=0$;

е) $2x^2-3y^2-12x-6y+3=0$;

ж) $9x^2+4y^2+18x-16y+21=0$.

Ответ:

а) эллипсоид $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+2)^2}{6}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$;

б) однополостный гиперболоид $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{1}=1$;

в) двуполостный гиперболоид $(x-1)^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=-1$;

г) конус $\frac{(x+2)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{3}=0$;

д) эллиптический параболоид $\frac{(x+4)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{2}=2(z+1)$;

е) гиперболический цилиндр $\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$;

ж) эллиптический цилиндр $9(x+1)^2+4(y+2)^2=4$.

14. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе. Найти ее параметр и вершину.

Ответ: $15;\left(0;-6;-\frac{3}{2}\right)$.

15. Установить, при каких значениях m плоскость $x+my-2=0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$: а) по эллипсу; б) по параболе.

Ответ: а) $m\neq 0$ и $m>-\frac{1}{4}$; б) $m=0$.

16. Доказать, что через точку $A(4;3;0)$, принадлежащую гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$, можно провести две прямые, целиком лежащие на параболоиде. Составить канонические уравнения этих прямых.

Ответ: $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{0}$; $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$.