Теория функций нескольких переменных

Основные понятия функции нескольких переменных

Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространств. Открытые и замкнутые множества. Понятие функции n переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных. Основные теоремы о пределах и непрерывных функциях. Определение частной производной. Физический смысл частной производной. Определение дифференцируемости функции. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух независимых переменных. Дифференцируемость сложной функции. Правило дифференцирования сложной функции. Полный дифференциал функции многих переменных. Геометрический смысл и инвариантность формы записи дифференциала. Геометрические приложения: производная по направлению, градиент, касательная плоскость и нормаль.

1. Найти область определения функций:

а) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Ответ: $x\le x^2+y^2<2x$;

б) $z=x\sqrt{\cos y}$.

Ответ: $2k\pi-\dfrac{n}{2}\le y\le\dfrac{n}{2}+2k\pi,\ \ k=0;\pm1;\ \ldots;$

в) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

Ответ: угол, ограниченный лучами $y=x,\ x\ge 0,\ y=-x,\ x\ge 0;$

г) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

Ответ: семейство концентрических колец

$2\pi k\le x^2+y^2\le\pi(2k+1),\ \ (k=0;\ 1;\ 2;\ldots);$

д) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}}$.

Ответ: часть пространства над плоскостью $x+y+z=0$.

2. Найти множество значений функций:

а) $z=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$. **Ответ:** $[-4;+\infty]$.

б) $u=x^2+2y^2+z^2+4x-4y-6z-5$. **Ответ:** $[-20;+\infty]$.

3. Найти линии уровня функции $z=x^y,\ \ x>0$.

Ответ: $y=\dfrac{c}{\ln x}$.

4. Найти поверхности уровня функции $u=x^2-y^2-z^2$.

Ответ: семейство двуполостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c>0$); семейство однополостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c<0$); конус $x^2-y^2-z^2=c$ (при $c=0$).

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to b}}\dfrac{\sin xy}{y}$. **Ответ:** b;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$. **Ответ:** 0.

6. Доказать, что указанные пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y^2}{x+y^4}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $\begin{cases}\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$

в точке $O\,(0;0)$.

Ответ: в точке $O\,(0;0)$ функция является непрерывной.

8. Найти точки разрыва функций:

а) $z=\dfrac{1}{\sin x\,\sin y}$.

Ответ: $x=k\pi,\;\; y=m\pi,\;\; k,m\in\mathbb{Z}$ – точки бесконечного разрыва;

б) $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Ответ: $y=x-$ точки разрыва; $y=x\;(x\neq 0)-$ точки устранимого разрыва; точка $O\,(0;0)-$ точка бесконечного разрыва;

в) $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Ответ: в точке $O\,(0;0)$ и ее окрестности функция определена, но не является непрерывной в этой точке, так как в ней не имеет предела.

Частные производные, дифференциал. Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению

1. Пользуясь определением, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=\frac{x}{y}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$.

2. Найти частные производные следующих функций:

а) $z=xy+\frac{x}{y}$. **Ответ:** $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$;

б) $z=x\sin(x+y)$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$;

в) $u=x^{\frac{y}{z}}$.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^2}\ln z$, $u=x^{\frac{y}{z}}$;

г) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **Ответ:** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$;

д) $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **Ответ:** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}$.

3. Найти полное приращение и дифференциал функции $z=x^2-xy+y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

Ответ: $\Delta z=0{,}33$, $dz=0{,}3$.

4. Найти дифференциалы функций:

а) $z=x^y$. **Ответ:** $dz=x^y\left(\frac{y}{x}dx+\ln x dy\right)$;

б) $z=\ln\cos\frac{x}{y}$. **Ответ:** $dz=\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}\frac{x}{y}(xdy-ydx)$.

5. Найти дифференциалы функций в указанных точках:

а) $u=\operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$ в точке $M(3;2;1)$. **Ответ:** $\frac{2dx+3dy-12dz}{37}$;

б) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M(0;1;2)$. **Ответ:** $2e^5dy+4e^5dz$.

6. С посощью полного дифференциала функции вычислить приближенно:

а) $(2,01)^{3,03}$. **Ответ:** $8,29$;

б) $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$. **Ответ:** $5,08$.

7. Вывести приближенную формулу $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)=xy$, (x и y малы по абсолютной величине).

8. В усеченном конусе радиусы оснований $R=20$см, $r=10$см, высота $h=30$см. Как приближенно изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r – на 3 мм и h уменьшить на 1 мм?

Ответ: увеличится на 617,5 см^3.

9. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

10. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^2-y^2$, где $y=\cos t$, $x=\sin t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dt}=2\cos 2t$.

11. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2v-uv^2$, где $u=x+2y$, $v=x-2y$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=8xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4(x^2-12y^2)$.

12. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dy}$, если $z=\ln(e^x+e^y)$, где $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$, $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

13. Доказать равенства:

а) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\varphi(x^2+y^2)$;

б) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$, если $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

14. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке $M(2;1)$ в направлении, идущим от этой точки к точке $N(5;5)$.

Ответ: $9,4$.

15. Показать, что производная функции $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$ в точке $M\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ по любому направлению имеет одно и то же значение.

16. Найти угол φ между градиентами функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точках $M_1(1;1)$ и $M_2(-1;-1)$.

Ответ: $\varphi = \pi$.

17. Найти в точке $M_0(1;1;1)$ направление наибольшего роста функции $u = xy + yz + xz$ и величину наибольшего роста в этой точке.

Ответ: $\operatorname{grad} u(M_0) = 2(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$; $\max \dfrac{\partial u}{\partial e} = 2\sqrt{3}$.

18. Найти точки, в которых градиент функции $z = \sin(x + y)$ равен $\bar{i} + \bar{j}$.

Ответ: $y = -x + 2k\pi$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

19. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = (x - y)^2 - x + 2y$ в точке $M_0(1;1;1)$.

Ответ: $x - 2y + z = 0$, $x - 1 = \dfrac{y-1}{-2} = z - 1$.

20. Для поверхности, заданной в неявном виде, $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(2;3;4)$.

Ответ: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2/3} = \dfrac{z-4}{-1/2}$.

21. Доказать, что гиперболоид $x^2 - y^2 + z^2 = 3$ и эллипсоид $4x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ касаются друг друга в точке $M_0(0;1;2)$.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Дифференцирование неявно заданных функций

Частные производные второго порядка. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных функции от порядка дифференцирования. Дифференциал второго порядка. Матричная запись дифференциала второго порядка. Матрица Гессе. Нарушение инвариантности формы для дифференциала второго порядка. Дифференциалы k-го порядка. Операторная формула записи дифференциала k-го порядка. Многочлен Тейлора для функции многих переменных. Формула Тейлора с остаточным

членом в форме Пеано, Лагранжа и в интегральной форме. Понятие неявной функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявной функции. Производные и дифференциалы высших порядков неявно заданных функций.

1. Для функции $z = x^2 \ln(x+y)$ найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ответ: $\dfrac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$.

2. Для функции $z = x \sin xy + y \cos xy$ найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Ответ: $y(2-y^2)\cos xy - xy^2 \sin xy$.

3. Для функции $z = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ найти частные производные второго порядка.

Ответ: $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2 y^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$.

4. Вычислить частные производные второго порядка в указанных точках:

а) $z = \dfrac{x}{x+y}$, $M_0(1;0)$.

Ответ: $z''_{xx}(M_0) = 0$, $z''_{xy}(M_0) = 1$, $z''_{yy}(M_0) = 2$;

б) $z = \ln(x^2 + y)$, $M_0(0;1)$.

Ответ: $z''_{xx}(M_0) = 2$, $z''_{xy}(M_0) = 0$, $z''_{yy}(M_0) = -1$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \sin xy$.

Ответ: $-2y \sin xy - xy^2 \cos xy$.

6. Найти $\dfrac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}$, если $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$.

Ответ: $24(\cos y + \cos x)$.

7. Найти $\dfrac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}$, если $u = (x^2+y)^{10} \operatorname{tg} x$.

Ответ: $10!\left(2x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2+y}{\cos^2 x}\right)$.

8. Показать, что функция $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. С помощью оператора найти d^3z в точке $M_0(0;1)$ для функции $z=e^{x^2y}$.

Ответ: $d^3z(M_0)=6dx^2dy.$

10. Найти d^2z, если $z=\varphi(t),$ где $t=x^2+y^2.$

Ответ: $d^2z=4\varphi''(t)(xdx+ydy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2).$

11. Функцию $f(x;y)=x-2y+x^2-3xy+4y^2$ разложить по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(1;2).$

Ответ: $f(x;y)=8+(-3(x-1)+11(y-2))+(x-1)^2-3(x-1)(y-2)+4(y-2)^2).$

12. Разложить функцию $z=x^y$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(1;1)$ до ленов второго порядка.

Ответ: $x^y=1-y+xy+o((x-1)^2+(y-1)^2).$

13. Доказать, что неявная функция $y=f(x),$ заданная уравнением $x^2-xy+2y^2+x-y=1$ и удовлетворяющая условию $f(0)=1$ дифференцируема в любой окрестности точки $M(0;1).$ Найти $f'(0)$ и $f''(0).$

Ответ: $f'(0)=0,\ \ f''(0)=-\dfrac{2}{3}.$

14. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dy}$ в точке $M(1;-2;2),$ если $z^3-4xz+y^2-4=0.$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}.$

15. Найти дифференциалы первого и второго порядков неявной функции $z=f(x;y),$ заданной уравнением $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1.$

Ответ: $dz=\dfrac{z}{y(x+2)}(ydx+zdy),\ \ d^2z=\dfrac{-z^2}{y^2(x+z)^2}(ydx-xdy)^2.$

16. Неявную функцию $z(x;y),$ определяемую уравнением $z^3+3yz-4x=0,$ если $z(1;1)=1,$ разложить в окрестности точки $M(1;1)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка.

Ответ: $z=1+\dfrac{2}{3}(x-1)-\dfrac{1}{2}(y-1)-\dfrac{2}{5}(x-1)^2-\dfrac{1}{8}(y-1)^2+\ldots.$

Локальный экстремум функции многих переменных. Условный экстремум

Определение и необходимые условия локального экстремума. Квадратичная форма и ее главные миноры. Положительно определенные, отрицательно определенные, квазизнакоопределенные и знакопеременные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Достаточные условия локального экстремума. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Исследование функций на экстремум. Понятие условного экстремума. Общая постановка задачи. Метод исключения части переменных. Необходимое условие условного экстремума. Метод Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

1. Доказать, что функция $f(x;y)=e^{-y^2}(1+x^2)$ имеет единственную критическую точку $(0;0)$, но не имеет локального экстремума в этой точке.

2. Доказать, что функция $f(x;y)=e^{y^2}(1+x^2)$ имеет единственную критическую точку $(0;0)$, которая является точкой локального минимума.

3. Исследовать по определению на экстремум функцию $z=2+(6x-x^2-9)^3+(\cos y-1)^5$ в точке $M_0(3;0)$.

Ответ: точка $M_0(3;0)$ является точкой локального максимума, $z(3;0)=2$.

4. Исследовать на локальный экстремум функцию $z=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}$.

Ответ: функция не имеет критических точек. Точек локального экстремума нет.

5. Для функции $z=3x^2y-x^3-y^4$ проверить выполнение достаточных условий локального экстремума в стационарных точках $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

Ответ: в точке $M_1(6;3)$ функция $z(x;y)$ имеет локальный максимум, в точке $M_2(0;0)$ функция $z(x;y)$ не имеет локального экстремума.

6. Исследовать на экстремум функции:

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

б) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

Ответ: а) $z_{\min}=-9$ при $x=0$, $y=3$; б) $z_{\min}=-\dfrac{4}{3}$ при $x=0$, $y=-\dfrac{2}{3}$. В стационарной точке $\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$ экстремума нет.

7. С помощью критерия Сильвестра исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

Ответ: $u_{\min} = -14$ при $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$.

8. Найти локальные экстремумы неявных функций вида $z = f(x; y)$, заданных уравнением $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Ответ: функция $z = f(x_1; y_2)$ имеет в точке $(1; -1)$ локальный минимум, равный -2, а функция $z = f_2(x; y)$ имеет в точке $(1; -1)$ локальный максимум, равный 6.

9. Исследовать на условный экстремум функции методом исключения части переменных:

а) $z = x^2 + y^2$, при условии связи $2x + y = 2$;

б) $u = x + y + z^2$, при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1; \\ y - xz = 1. \end{cases}$

Ответ: а) $z_{\min} = \frac{4}{5}$, при $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{2}{5}$; б) $u_{\min} = 0$, при $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$.

10. Найти методом Лагранжа условный экстремум функции $z = xy^2$ при условии связи $x + 2y - 1 = 0$.

Ответ: $z_{\min}(1; 0) = 0$, $z_{\max}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

11. Исследовать на условный экстремум функцию $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Ответ: $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$; $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$.

12. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Ответ: длины сторон параллелепипеда – $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

13. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова длина стороны основания призмы, площадь полной поверхности которой наименьшая?

Ответ: $\sqrt[3]{4V}$.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0.$

Ответ: $z_{\text{наим}} = -\frac{16}{3},\ z_{\text{наиб}} = 16.$