

## Комплексные числа

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Правила действий с комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.

1. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

а)  $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$ .

**Ответ:** 0;

б)  $\frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}$ .

**Ответ:**  $-\frac{18}{25} + \frac{23}{50}i$ .

2. Решить уравнение

$$(1+2i)(z-i) + (4i-3)(1+iz) + 1 + 7i = 0.$$

**Ответ:**  $-1-i$ .

3. Решить систему

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 2 + i; \\ 3z_1 - iz_2 = 5 - 3i. \end{cases}$$

**Ответ:**  $z_1 = \frac{50-33i}{37}$ ,  $z_2 = \frac{12+35i}{37}$ .

4. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а)  $z = -i$ ;      б)  $z = \frac{1-i}{1+i}$ ;      в)  $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ .

**Ответ:** а)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ; б)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ;

в)  $\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}$ .

5. Решить уравнения:

а)  $|z| - z = 1 + 2i$ ;      б)  $|z| + z = 2 + i$ .

**Ответ:** а)  $\frac{3}{2} - 2i$ ; б)  $\frac{3}{4} + i$ .

6. Найти  $|z|$  и  $\arg z$ , если

а)  $z = 2ie^{\frac{\pi i}{5}}$ ; б)  $z = -3e^{\frac{\pi i}{5}}$ .

**Ответ:** а) 2;  $\frac{3\pi}{10}$ ; б) 3;  $-\frac{4\pi}{5}$ .

7. Представить в показательной форме комплексное число  $z = (-1+i)^5$ .

**Ответ:**  $4\sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}$ .

**8.** Найти все значения  $n$ , при которых справедливо равенство

$$(1+i)^n = (1-i)^n.$$

**Ответ:**  $n=4k$  при  $k \in \mathbb{Z}$ .

**9.** Найти все значения  $\sqrt[4]{-81}$ .

**Ответ:**  $w_0 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ ,  $w_1 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ ,  $w_2 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ ,  $w_3 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ .

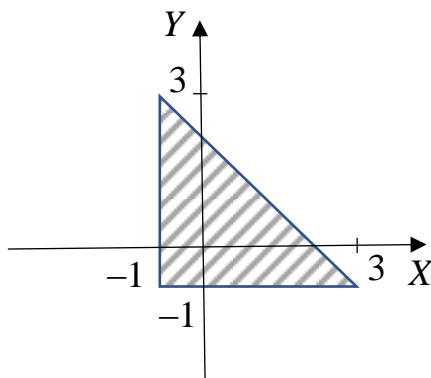
**10.** Используя формулу Муавра, выразить через  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  следующие функции: а)  $\cos 4\varphi$ ; б)  $\sin 4\varphi$ .

**Ответ:** а)  $\cos^4 \varphi - 6\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$ ; б)  $4\sin \varphi \cos^3 \varphi - 4\cos \varphi \sin^3 \varphi$ .

**11.** Используя формулы Эйлера, доказать равенство  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

**12.** Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям  $0 \leq \arg(z+1+i) \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Re} iz \geq \operatorname{Re}(z-2)$ .

**Ответ:**



**13.** Определите вид кривой, заданной соотношением  $|z+4-10i| = |z-4-2i|$ .

**Ответ:**  $y = x + 6$ .