Введение в анализ

Числовая последовательность

Понятие последовательности. Предел последовательности. Ограниченные, неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Свойства бесконечно малых последовательностей. Монотонные последовательности. Число e.

1. Записать пять первых членов числовой последовательности (x_n), если:

а) $x_n = \dfrac{4n-1}{3^n}$. **Ответ:** $1, \dfrac{7}{9}, \dfrac{11}{27}, \dfrac{15}{81}, \dfrac{19}{243}$;

б) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n + 1}{n+2}$. **Ответ:** $0, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{5}{6}, -\dfrac{4}{7}$;

в) $x_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (2n+1)}{n!}$. **Ответ:** $-3, -\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{3}{8}, -\dfrac{11}{120}$;

г) $x_1 = x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n = 3, 4, 5, \ldots$ (последовательность Фибоначчи).

Ответ: $1, 1, 2, 3, 5$.

2. Записать формулу общего члена данной последовательности:

а) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{16}, \dfrac{5}{36}, \dfrac{7}{64}, \dfrac{9}{100}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{2n-1}{(2n)^2}$;

б) $\dfrac{2}{7}, -\dfrac{5}{11}, \dfrac{8}{15}, -\dfrac{11}{19}, \dfrac{14}{23}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(3n-1)}{4n+3}$;

в) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{5}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{17}{9}, \dfrac{26}{11}, \ldots$. **Ответ:** $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$;

г) $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \ldots$. **Ответ:** $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

3. Определить, является ли последовательность (x_n) ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной:

а) $x_n = \dfrac{n+2}{n+3}$. **Ответ:** ограниченная $\left(\dfrac{3}{4} \le x_n < 1\right)$;

б) $x_n = n^2 - 2$. **Ответ:** ограниченная снизу $(x_n \ge -1)$, неограниченная сверху;

в) $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$. **Ответ:** ограниченная $\left(0 < x_n \le \dfrac{100^{99}}{99!}\right)$.

4. Определить, является ли последовательность (x_n) возрастающей, убывающей или не является монотонной:

а) $x_n = \dfrac{2}{n}$. **Ответ:** убывающая;

б) $x_n = \log_3(n+1)$. **Ответ:** возрастающая;

в) $x_n = n + (-1)^n$. **Ответ:** не является монотонной.

5. Доказать равенство, пользуясь определением предела последовательности (указать $n(\xi)$):

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{n+3} = -1$. **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\dfrac{5}{\xi}\right] + 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n}{2n^2 - 1} = \dfrac{3}{2}$. **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\dfrac{1}{\xi}\right] + 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{-n} = 0$. **Ответ:** можно взять $n(\xi) = \left[\log_5 \dfrac{1}{\xi}\right] + 1$.

6. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 8n^4 - 5}{2 - 3n^2 + n^3}$. **Ответ:** $+\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 6n + 17}{9n^5 + 3n^4 - 11n}$. **Ответ:** 0.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n+3)(n^2 - 2n + 3)}{(2n+1)^3}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{8}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_{m-1} n + b_m}$, где $k, m \in \boldsymbol{N}$.

Ответ: $\begin{cases} 0, & \text{если } k < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } k = m, \\ \infty, & \text{если } k > m; \end{cases}$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n! + 2(n-1)!}{4(n+2)(n-1)! - (n-2)!}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n+2)! - 3(n+1)!}{n! + 2(n+1)!}$. **Ответ:** $+\infty$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)(n-2)!+(n-1)!}{7n!-6(n-1)!}$. **Ответ:** 0;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^3-8n^3}{(4n+1)(3-n)}$. **Ответ:** -9;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^2+9n^2}{27n^3+(1-3n)^3}$. **Ответ:** $\dfrac{2}{3}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{\sqrt{4n^2+5n-1}}$. **Ответ:** 2;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[7]{n^6}+\sqrt[4]{n^8-2n}}{(2n+\sqrt[3]{n})\sqrt[5]{32n^5+1}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-n\right)$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1})$. **Ответ:** 3;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3+7n^2-1})$. **Ответ:** $-\dfrac{7}{3}$;

п) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{5+6n^2-n^3})$. **Ответ:** 2.

7. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{(n+1)(n+3)}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{2+7+12+...+(5n-3)}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5+2^n+\log_8 n}{3\cdot 2^n+4n^2-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{-n}-2\log_2(n^{13}+5)+4^{n+1}}{5n^{10}-4^n+3^{2-n}}$. **Ответ:** -4;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+4+...+2^n}{n^2+2^{n+2}+5^{-n}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 5^n+2n^6}{1+5+25+...+5^{n+1}}$. **Ответ:** $\dfrac{12}{25}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{6}+\frac{5}{36}+\frac{9}{216}+\ldots+\frac{2^n+1}{6^n}\right)$. **Ответ:** $\frac{7}{10}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{10}+\frac{13}{100}+\frac{35}{1000}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{10^n}\right)$. **Ответ:** $\frac{19}{28}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+3n}{2n-(-1)^n}$. **Ответ:** $\frac{3}{2}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos n!}{4n^2+1}$. **Ответ:** 0;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,10^n}{5^{n+1}+3n^2}$. **Ответ:** 0;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(n^3+1)}{\sqrt[7]{n}(4+\cos n)}$. **Ответ:** 0;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}\right)$. **Ответ:** $\frac{3}{4}$.

8. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$. **Ответ:** $+\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+5}{3n-1}\right)^{1-n}$. **Ответ:** 0;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$. **Ответ:** e^{-3};

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{n+4}$. **Ответ:** $e^{\frac{5}{2}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+3}{2n^2-n+1}\right)^{4n-7}$. **Ответ:** e^{10};

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+5}{n^2+2}\right)^{n^2}$. **Ответ:** 0;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6-n^2}{2+n-n^2}\right)^{n^2+n}$. **Ответ:** $+\infty$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln(n+2))$. **Ответ:** -1;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}(2-3n)\cdot(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+n-1))$. **Ответ:** 3;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6^n+3^n}{6^n+2^n}\right)^{2^{n+1}}$. **Ответ:** e^2.

Предел функции

Понятие переменной величины и функции. Способы задания функции. Предел функции в точке по Коши. Предел функции в точке по Гейне. Теоремы о пределах. Односторонние пределы. Предел функции при $x\to\infty$. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

1. Доказать равенство, пользуясь определением предела функции по Коши:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\dfrac{3}{5}$.

2. Доказать с помощью определения предела по Гейне, что функция $f(x)=\cos\dfrac{2}{x}$ не имеет предела в точке $x_0=0$.

3. Найти предел функции в указанной точке:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2+5x-1}{x+3}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x-2}{x^2+x-6}$. **Ответ:** 1;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^5+3x^2}{4x^8-5x^4-2x^2}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x-3}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-5x^2+16}{2x^2-7x-4}$. **Ответ:** $\dfrac{8}{9}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^3+7x^2+16x+12}$. **Ответ:** ∞;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+2x^3-3x^2+2x}{5x^6-8x^3+3x}$. **Ответ:** 0;

и) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x^2+x-12}-\dfrac{1}{2x^2-5x-3}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{49}$;

к) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^3-1}\right)$. **Ответ:** ∞;

л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^k-1}{x^m-1}$, где $k,m\in\boldsymbol{N}$. **Ответ:** $\dfrac{k}{m}$;

м) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$. **Ответ:** $\dfrac{7}{5}$;

н) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+12}-3}$. **Ответ:** -3;

о) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{6x+1}-5}$. **Ответ:** $-13\dfrac{1}{3}$;

п) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x^3-8}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{144}$;

р) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-5}+2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

с) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^{10}\cdot(2x-1)^{16}}{(3x+2)^{12}\cdot(5x+4)^{14}}$. **Ответ:** $\dfrac{2^{16}}{3^{12}\cdot5^{14}}$;

т) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3-4x}-\sqrt{16x^2+1}}{7x-\sqrt[4]{x^4+2x^3+x}}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{6}$;

у) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^8+3x^5-4)}{\ln(x^{14}-x+2)}$. **Ответ:** $\dfrac{4}{7}$;

ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+|x|}{\sqrt[3]{x^2+1}-|x|}$. **Ответ:** -2.

4. Найти односторонние пределы $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=2x-\dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x_0=-2$. **Ответ:** $f(-2-0)=-3$; $f(-2+0)=-5$;

б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x}$, $x_0=0$. **Ответ:** $f(-0)=-\dfrac{\pi}{2}$; $f(+0)=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=5^{\frac{2}{1-x}}$, $x_0=1$. **Ответ:** $f(1-0)=+\infty$; $f(1+0)=0$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{2-3^{\frac{1}{x+4}}}$, $x_0=-4$. **Ответ:** $f(-4-0)=\dfrac{1}{2}$; $f(-4+0)=0$.

Непрерывность и точки разрыва функции. Замечательные пределы

Определение непрерывности функции. Односторонняя непрерывность функции. Точка разрыва функции и их классификация. Простейшие элементарные функции. Первый и второй замечательные пределы. Другие замечательные пределы. Понятие равномерной непрерывности. Сравнение бесконечно малых функций. Символ «*о* малое» и его свойства. Асимптотические формулы.Теоремы Вейерштрасса и Больцано – Коши.

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{x}$. **Ответ:** 7;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 9x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\arcsin 5x}{\operatorname{arctg}2x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}4x-\sin 4x}{x^3}$. **Ответ:** 32;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$, $a\neq b$. **Ответ:** $\dfrac{b^2-a^2}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\operatorname{tg} x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{4x-\pi}$. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

з) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$. **Ответ:** $-\dfrac{2}{\pi}$;

и) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x+1}{\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin kx}{\sin nx}$, $k,n\in\boldsymbol{Z}$. **Ответ:** $(-1)^{k-n}\cdot\dfrac{k}{n}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\dfrac{3x-2}{4x^3+x+1}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{4}$;

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{x+5}{x^4+2}\cdot\operatorname{ctg}^3\dfrac{2x+1}{x^2-x+3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{8}$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^x$. **Ответ:** e^{-4};

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{5x-1}$. **Ответ:** e^{-10};

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+7x+1}{2x^2-x+8}\right)^{3x+7}$. **Ответ:** e^{12};

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^4;

д) $\lim\limits_{x\to -1}(6+5x)^{\frac{x-2}{x+1}}$. **Ответ:** e^{-15};

е) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{x+4}{x-3}}$. **Ответ:** e^{-21};

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **Ответ:** 1;

з) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\cos 2\pi x\right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}$. **Ответ:** e^{-2};

и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}}$. **Ответ:** $\sqrt{e}$;

к) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-1)\left(\ln(4x-3)-\ln(4x+2)\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{2}$;

л) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(\ln 3x^2-\ln(3x^2-1)\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

м) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+x\right)\left(3\ln x-\ln(x^3-x+2)\right)$. **Ответ:** $+\infty$;

к) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-1)\left(\ln(4x-3)-\ln(4x+2)\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{2}$.

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+3x)}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{\ln 2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x^3-1}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\log_5(x_2-x-5)}{x+2}$. **Ответ:** $-\dfrac{5}{\ln 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln\cos x}$. **Ответ:** -2;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\log_3 \sin 2x}{\cos 2x}$. **Ответ:** 0;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2+x}{7x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{\ln 7}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{8x}-e^{-3x}}{5x^3+x^2+x}$. **Ответ:** 11;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^{2x}}{4x+x^6}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2}{3}$;

к) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}$. **Ответ:** $-3\ln 4$;

л) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{e^{x^{2+5x-2}}-e^{x^2+3}}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{5}e^{-4}$;

м) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\pi x}{2^{x^{4x-1}}-1}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{\ln 4}$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{15}-1}{x}$. **Ответ:** 15;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{2x+1}-1}{4x}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[5]{1-\sin x}-1$. **Ответ:** -5;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[10]{2x^2+x-2}}{x^2+x-2}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{6}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+5x-2}-1}{1-\sqrt[8]{x^2-x-11}}$. **Ответ:** $-\dfrac{8}{5}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(1+\cos 3\pi x)^{12}-1}{\cos\pi x}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{4}$.

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\cdot(1-e^{\sin x})}{\sqrt[6]{1+2x^2-x^3}-1}$. **Ответ:** -15;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-3^x)\operatorname{arctg}2x}{\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\ln(1+4x)}$. **Ответ:** $\ln\dfrac{4}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2\operatorname{tg}^2x-1)^8-1}{(8^{\operatorname{tg}x}-1)\cdot\log_8(5\sin x+1)}$. **Ответ:** $-3,2$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^s-e^{bx}}{x}$. **Ответ:** $as-b$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_5\cos 2\pi x}{(5^{x^2-2x-3}-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x}$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi}{2\ln^2 5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)^2\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}}{\sqrt[5]{x^3-3x^2+3x-1}}$. **Ответ:** $-\dfrac{5\pi}{2}$.

6. Доказать, используя определение, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=4x^3-2x,\ x_0=-1;$

б) $f(x)=2x^2-3x+5$ для любого $x_0\in\mathbb{R}$.

7. При каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{при } x\le 0,\\ ax+b & \text{при } 0<x<1,\\ \sqrt[3]{2x-3} & \text{при } x\ge 1\end{cases}$$

будет непрерывной? **Ответ:** $a=-2, b=1$.

8. Доопределить функцию $f(x)$ по непрерывности в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{6x^2-5x+1},\ x_0=\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=5;$

б) $f(x)=\dfrac{(1+x)^a-1}{x},\ a\in\mathbb{R},\ x_0=0$. **Ответ:** $f(0)=a;$

в) $f(x)=\dfrac{3^x-9}{\sin\pi x},\ x_0=2$. **Ответ:** $f(2)=\dfrac{9\ln 3}{\pi}$.

9. Найти точки разрыва функции, указать их род, вычислить скачки в точках разрыва первого рода:

а) $f(x)=\begin{cases}3x+1 & \text{при } x<-1,\\ x^2+2 & \text{при } -1\le x\le 1,\\ 2^x+1 & \text{при } x>1.\end{cases}$

Ответ: $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma(-1)=5;$

б) $f(x)=\begin{cases}\log_2(5-x) & \text{при } x=-3,\\ \dfrac{4}{x-2} & \text{при } -3<x<2,\\ x^2-3x+1 & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

Ответ: $x=-3$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma(-3)=-3{,}8;$ $x=2-$ точка разрыва 2-го рода;

в) $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^2-5x-2}$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$, $x=2$ – точка разрыва 2-го рода;

г) $f(x)=\dfrac{|x+4|}{x+4}$.

Ответ: $x=-4$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma(-4)=2$;

д) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$.

Ответ: $x=1$ – точка устранимого разрыва;

е) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2x+1}$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{2}$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\pi$;

ж) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+5}{x-4}\right|$.

Ответ: $x=-5, x=4$ – точка разрыва 2-го рода;

з) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x+1}}}$.

Ответ: $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma(-1)=2$; $x=0$ – точка разрыва 2-го рода;

и) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{5}{x-2}}{x^2+x}$.

Ответ: $x=0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода, $x=2$ – точка разрыва 1-го рода, $\sigma(2)=-\dfrac{\pi\operatorname{tg}6}{6}$; $x=-1$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in Z$ – точка разрыва 2-го рода.

10. Доказать, что $f(x)=0(g(x))$ при $x\to x_0$:

а) $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$, $g(x)=\sqrt{x}-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=x\cdot\sin^2 x$, $g(x)=\operatorname{tg}2x$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\ln\cos x$, $g(x)=6^{\sin 2x}-1$, $x_0=2\pi$.

11. Сравнить бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$:

а) $f(x)=\sqrt{x+4}-2$, $g(x)=x$, $x_0=0$.

Ответ: $f(x)=0\big(g(x)\big)$, $x\to 0$;

б) $f(x)=\sin x-1$, $g(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $f(x)=0\big(g(x)\big),\ x\to\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=\sqrt[5]{5x-4}-1,\ g(x)=e^{x-1}-1,\ x_0=1.$

Ответ: $f(x)\sim g(x),\ x\to 1.$

12. Выделить главную часть функции $f(x)$ вида $C_0(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$ и определить ее порядок малости n относительно $x-x_0$:

а) $f(x)=5x^2+2x^3+3x^4,\ x_0=0.$

Ответ: $f(x)=5x^2+0(x^2),\ x\to 0,\ n=2;$

б) $f(x)=\sin x-\operatorname{tg}x,\ x_0=0.$

Ответ: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+0(x^3),\ x\to 0,\ n=3;$

в) $f(x)=\ln(3-3x+x^3),\ x_0=1.$

Ответ: $f(x)=3(x-1)^2+0(x-1),\ x\to 1,\ n=2;$

г) $f(x)=5^{x^2+x-6}-1,\ x_0=2.$

Ответ: $f(x)=5\ln 5\cdot(x-2)+0(x-2),\ x\to 2,\ n=1.$

13. Выделить главную часть функции $\Gamma(x)$ вида Cx^n и определить порядок роста n функции $f(x)$ относительно x при $x\to+\infty$:

а) $f(x)=\sqrt[5]{32x^3-27x+1}+\sqrt[7]{x-1}.$

Ответ: $\Gamma(x)=2x^{\frac{3}{5}},\ x\to+\infty;\ n=\dfrac{3}{5};$

б) $f(x)=(x^2+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\arcsin\dfrac{2}{x};$

Ответ: $\Gamma(x)=x^{\frac{5}{2}},\ x\to+\infty;\ n=\dfrac{5}{2};$

в) $f(x)=\dfrac{3x^5+2x^4-x^2}{\sqrt[3]{4x-x^6}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x^2+1}{2x^3-5}.$

Ответ: $\Gamma(x)=-\dfrac{3}{2}x^2,\ x\to+\infty;\ n=2.$

14. Найти пределы, используя эквивалентные функции:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(1-x^2)}{x^2+x-2}.$ **Ответ:** $-\dfrac{2}{3};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{\arcsin^2 4x}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{32}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x(1-\sqrt[5]{1+\mathrm{tg}2x})}{\ln(1+x^2-4x^3)}$. **Ответ:** -2;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}\cdot(1-e^{\sin 6x})}{\sqrt[4]{1+2x^2+x^5}-1}$. **Ответ:** -4;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cdot(2x^3+e^x)}{\ln(3x^4+e^{2x})}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{27^{2x}-3^{5x}}{2e^{3x}-5\mathrm{tg}2x+7\sin^3 x-2}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{4}\ln 3$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2\pi x}{(2^{\mathrm{tg}\pi x}-1)^2}$. **Ответ:** $-\dfrac{2}{\ln^2 2}$;

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{\cos^2 x}}{\ln\sin x}$. **Ответ:** $2\ln 10$;

и) $\lim\limits_{x\to a}\sin\dfrac{x-a}{2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2a},\ a\neq 0$. **Ответ:** $-\dfrac{a}{\pi}$;

к) $\lim\limits_{x\to 1}(2^x-\cos(x-1))^{\frac{1}{x^2+2x-3}}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$.