

Многочлены. Функции и их графики. Метод математической индукции

1. Найти числа α , β и γ , если многочлен $x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta$ является кубом двучлена $x + \gamma$.

Ответ: $\gamma = 2, \alpha = 12, \beta = 8$.

2. Методами неопределенных коэффициентов и деления «уголком» найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 4, Q_1(x) = x - 3$;

б) $P_4(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x - 5, Q_2(x) = x^2 - 2x + 2$.

Ответ:

а) $P_4(x) = (x - 3)(2x^3 + 3x^2 + 8x + 29) + 83$;

б) $P_4(x) = (x^2 - 2x + 2)(3x^2 + 5x + 8) + x - 21$.

3. Разложить многочлен $P(x)$ на множители:

а) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$;

б) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$.

Ответ:

а) $P(x) = (x + 1)^2(x + 2)$;

б) $P(x) = 2(x + 1)(x - 2) \cdot \left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right)$.

4. Решить неравенство $\frac{(x^2 + 5x + 4)(x - 3)^2}{1 - x^2} \geq 0$.

Ответ: $x \in [-4; -1) \cup (-1; 1) \cup \{3\}$.

5. Решить неравенство $\frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - x + 1} \leq \frac{1 - 2x}{1 + x^3}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

6. Решить неравенства:

а) $\frac{3}{x^2 + 2x + 4} < 1$; б) $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 4x + 3} \leq x$; в) $\frac{9 - x^2}{3x + 1} \geq \frac{2}{x}$.

Ответ: а) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) $x \in (-3; -1) \cup [1; +\infty)$;

в) $x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}$.

7. Решить уравнения:

а) $x^2 + 2x + 3 \frac{|x-1|}{x-1} = 0$; б) $3 \cdot |x^2 + 4x + 2| = 5x + 16$;

в) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$.

Ответ: а) $x = -3$; б) $x \in \{-2; 1\}$; в) $x \in [1; 2] \cup \{5\}$.

8. Решить неравенства:

а) $|x-6| < x^2 - 5x + 9$; б) $3|x-1| > 7 - x^2$; в) $\frac{|24 - 2x - x^2|}{x} \leq x$.

Ответ: а) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$;
в) $x \in [-4; 0) \cup [3; 12]$.

9. Найти область определения функции $y = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2, \\ \sin x, & x > 2. \end{cases}$

Ответ: $x \in \{5\} \cup (6; 8)$.

10. Найти области определения функций:

а) $y = \sqrt{\lg \sin x}$; б) $y = \sqrt{\arcsin \log_2 x}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; б) $1 \leq x \leq 2$.

11. Найти область значений функции $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$.

Ответ: $y \in \left[\frac{3 - \sqrt{2}}{2}; \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \right]$.

12. Найти области значений функций:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; б) $f(x) = 16 \log \frac{1 \sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{16 \sqrt{2}}$.

Ответ: а) $E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $E(f) = [-8; -4]$.

13. Исследовать функции на четность:

а) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$; б) $f(x) = 2 \arccos(-x)$.

Ответ: а) нечетная; б) общего вида.

14. Исследовать следующие функции на четность:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$; в) $f(x) = c$.

Ответ: а) общего вида; б) нечетная; в) четная.

15. Доказать, что функция $y = 2^{\cos^2 x} + 3 \sin x$ ограничена на множестве R .

16. Доказать ограниченность функций:

а) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $f(x) = 2^{5-4x-x^2}$.

17. Доказать, что функция $y = x \sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой.

18. Исследовать на монотонность функции:

а) $f(x) = x^3 + 3x + 5$; б) $f(x) = \cos \frac{x^2}{1+x^2}$.

Ответ: а) строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) строго возрастает на $(-\infty; 0]$, строго убывает на $[0; +\infty)$.

19. Доказать, что функция $y = x^2$ не является ни убывающей, ни возрастающей на множестве R .

20. Является ли периодической функция $y = \sin \lg \sqrt{x+3}$?

Ответ: нет.

21. Найти функции, обратные данным:

а) $y = \lg(x+2)$; б) $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$

Ответ: а) $y = 10^x - 2$; б) $y = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-2}, & x \geq 2, \\ -x + 3, & x < 2. \end{cases}$

22. В одной системе координат построить графики функций:

а) $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

23. Построить графики функций и уравнений:

а) $y = f(x)$; б) $y = |f(x)|$; в) $y = f(|x|)$; г) $|y| = f(x)$; д) $y = |f(|x|)$;
е) $|y| = f(|x|)$; ж) $|y| = |f(x)|$; з) $|y| = |f(|x|)$, если $f(x) = 3 - x$.

24. Доказать методом математической индукции:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Матрицы и определители

Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матриц. Умножение матриц. Определители второго и третьего порядков. Понятие об определителях высших порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Теоремы замещения и аннулирования. Вычисление определителей n -го порядка. Обратная матрица.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу X , если $2A - X = 4B + 5C$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 14 \\ 4 & -21 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A_{23}, B_{35}, C_{22}, D_{52}, E_{34}$. Указать, какие из произведений данных матриц существуют и чему равны размеры получающихся матриц.

Ответ: существуют: 1) $AB - 2 \times 5$; 2) $AE - 2 \times 4$; 3) $BD - 3 \times 2$; 4) $CA - 2 \times 3$; 5) $DA - 5 \times 3$; 6) $DC - 5 \times 2$.

3. Показать, что:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$.

5. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

6. Пусть $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Найти размерность матрицы

$$C = X^T A X.$$

Ответ: $C_{1 \times 1}$ – это число.

7. Проверить, перестановочны ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: да.

8. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 93 & 94 \\ 78 & 79 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) 15; б) 1; в) 0; г) -18; д) 2.

$$9. \text{ Вычислить определитель } \begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}.$$

Ответ: - 22198.

$$10. \text{ Решить уравнение } \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 10 & -4-x & 5 \\ 5 & -4 & 6-x \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = 1, x_3 = 2$.

$$11. \text{ Доказать тождество } \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

12. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 25 \\ 8 & 27 & -1 & 125 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) 54; б) 432.

13. Вычислить определитель n -го порядка при $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$

Ответ: $2n + 1$.

14. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

а) методом присоединенной матрицы;

б) путем элементарных преобразований строк.

Ответ: $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

15. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B , если

$$B = T^{-1}AT.$$

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

16. Найти обратную матрицу для матрицы A , если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17. Решить матричные уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix};$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (3 \ 2 \ 1);$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}$; б) \emptyset ; в) $(1 \ 1 \ 1)$; г) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.