Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная функции

Производная функции в точке. Односторонние производные. Геометрический и физический смысл производной. Бесконечная производная. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Обратная функция и ее дифференцирование. Производные элементарных функций. Гиперболические функции и их дифференцирование. Логарифмическое дифференцирование. Таблица производных.

1. Пользуясь определением, вычислить производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=1.$ **Ответ:** -1;

б) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$ **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(3x+x^2\cdot\sin\dfrac{5}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ **Ответ:** 3.

$x_0=0.$

2. Пользуясь определением, вычислить односторонние производные функции $f(x)$ в точке x_0; определить, является ли функция $f(x)$ дифференцируемой в точке x_0:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+x, & \text{если } x>0,\end{cases}$

$x_0=0.$

Ответ: $f'_-(0)=2,\ \ f'_+(0)=1,\ \ f'(0)$ не существует;

б) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x+1, & \text{если } x<0,\\ 1-x^2, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$

$x_0=0.$

Ответ: $f'_-(0)=1,\ \ f'_+(0)=0,\ \ f'(0)$ не существует;

в) $f(x)=2x^2-|x+1|+2,\ x_0=-1.$

Ответ: $f'_-(-1)=-3,\ \ f'_+(-1)=-5,\ \ f'(-1)$ не существует;

г) $f(x)=1+3|x+2|-x^2,\ x_0=-2.$

Ответ: $f'_-(-2)=1,\ \ f'_+(-2)=7,\ \ f'(-2)$ не существует.

3. Определить, при каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)\cdot e^{-bx}, & \text{если } x<0,\\ ax^2+bx+1, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$$

дифференцируема во всех точках числовой прямой. **Ответ:** $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}.$

4. Найти производную функции:

а) $y=2x^3+4\sqrt{x}+x^2-\sqrt[7]{x^5}+0{,}3.$ **Ответ:** $y'=6x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{19}{7}x\sqrt[7]{x^5};$

б) $y=\dfrac{7x^4+x^3+1}{x^5}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}+\ln 5.$ **Ответ:** $y'=-\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{9}{4\sqrt[4]{x^7}};$

в) $y=5x^4+4^x-x^2+3x.$ **Ответ:** $y'=20x^3+4^x\ln 4-2x+3;$

г) $y=7^x+\log_3 x-\dfrac{2}{x}.$ **Ответ:** $y'=7^x\ln 7+\dfrac{1}{x\ln 3}+\dfrac{2}{x^2};$

д) $y=3\sin x-4\ln x+\log_2 5.$ **Ответ:** $y'=3\cos x-\dfrac{4}{x};$

е) $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+2\cos x-3\operatorname{tg} x-\sin 3.$ **Ответ:** $y'=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ln\dfrac{2}{3}-2\sin x-\dfrac{3}{\cos^2 x};$

ж) $y=4\operatorname{arctg} x+5\log_4 x-6^{x+2}.$ **Ответ:** $y'=\dfrac{4}{1+x^2}+\dfrac{5}{x\ln 4}-36\cdot 6^x\ln 6;$

з) $y=\dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}}+3\arcsin x+4\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x.$

Ответ: $y'=-\dfrac{14}{5\sqrt[5]{x^7}}+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x};$

и) $y=\ln x^6-2\operatorname{arcctg} x+8\arccos x.$ **Ответ:** $y'=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{8}{\sqrt{1-x^2}};$

к) $y=2x^5-3\arcsin x+4\arccos x+5^x.$

Ответ: $y'=10x^4-\dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}}+5^x\ln 5.$

5. Найти производную функции:

а) $y=(x^3+2)\cos x.$ **Ответ:** $y'=3x^2\cos x-(x^3+2)\sin x;$

б) $y=4^x\cdot(2\operatorname{tg} x-x^2).$

Ответ: $y' = 4^x \ln 4\,(2\operatorname{tg} x - x^2) + 4^x \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 2x\right)$;

в) $y = (e^x + \ln x)\operatorname{arctg} x$.

Ответ: $y' = \left(e^x + \dfrac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x + \dfrac{e^x + \ln x}{1 + x^2}$;

г) $y = \dfrac{3\sin x - \cos x}{2x^5 + 4}$.

Ответ: $y' = \dfrac{(3\cos x + \sin x)(2x^5 + 4) - 10x^4(3\sin x - \cos x)}{(2x^5 + 4)^2}$;

д) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x + 2}$.

Ответ: $y' = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x + 2)^2}$;

е) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\arccos x}$.

Ответ: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x \arccos x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\arccos^2 x\sqrt{1 - x^2}}$.

6. Найти производную функции:

а) $y = \sin 5x$. **Ответ:** $y' = 5\cos 5x$;

б) $y = (2x^4 + 7)^{26}$. **Ответ:** $y' = 208x^3(2x^4 + 7)^{25}$;

в) $y = \operatorname{tg}(3^x + x^3)$. **Ответ:** $y' = \dfrac{3^x \ln 3 + 3x^2}{\cos^2(3^x + x^3)}$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2x + 1}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{2}{(2x + 1)^2 + 1}$;

д) $y = \sqrt[3]{\ln^2 \cos 5x}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{-10\operatorname{tg} 5x}{3\sqrt[3]{\ln\cos 5x}}$;

е) $y = \sin\ln|x|$. **Ответ:** $y' = \dfrac{\cos\ln|x|}{x}$;

ж) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$. **Ответ:** $y' = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x\cos\sqrt{x}}}$;

з) $y = \arcsin e^x + \arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}$. **Ответ:** $y' = 0$;

и) $y = x\arccos\frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2}$. **Ответ:** $y' = \arccos\frac{x}{3}$;

к) $y = \log_3\sqrt{\frac{3^{2x}}{9+3^{2x}}}$. **Ответ:** $y' = \frac{9}{9+9^x}$.

7. Найти производную функции, используя логарифмическое дифференцирование:

а) $y = \frac{\sqrt{2x+3}\cdot(3x-4)^5}{\sqrt[8]{(5x-1)^7}\cdot(1-4x)^9}$.

Ответ: $y' = \frac{\sqrt{2x+3}\cdot(3x-4)^5}{\sqrt[8]{(5x-1)^7}\,(1-4x)^9}\cdot\left(\frac{1}{2x-3}+\frac{15}{3x-4}-\frac{35}{40x-8}+\frac{36}{1-4x}\right)$;

б) $y = \frac{(7+5x)^{143}\cdot(11x-9)^{98}}{(8x^2-2x+1)^{14}\cdot\sqrt[7]{(3x^2-2)}}$.

Ответ:

$$y' = \frac{(7+5x)^{143}\,(11x-9)^{98}}{(8x^2-2x+1)^{14}\,\sqrt[7]{(3x^2-2)}}\cdot\left(\frac{143\cdot5}{5x+7}+\frac{98\cdot11}{11x-9}-\frac{14\cdot(16x-2)}{8x^2-2x+1}-\frac{6x}{21x^2-14}\right);$$

в) $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: $y' = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}\cdot\left(\frac{\ln\sin x}{1+x^2}+\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{arctg} x\right)$.

г) $y = (\ln x)^x$.

Ответ: $y' = (\ln x)^x\cdot\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.

д) $y = (\arcsin 2x)^{e^{3x}}$.

Ответ: $y' = (\arcsin 2x)^{e^{3x}}\ e^{3x}\left(3\ln\arcsin 2x+\frac{2}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}\right)$;

е) $y = \sqrt[x+1]{x+1}$.

Ответ: $y' = \sqrt[x+1]{x+1}\cdot\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков

Дифференцирование параметрически заданных функций. Понятие неявно заданных функций и их дифференцирование. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала. Уравнение касательной и нормали к кривой. Производные высших порядков, формула Лейбница. Высшие производные параметрически и неявно заданных функций. Дифференциалы высших порядков.

1. Найти производную неявной функции:

а) $x^5-4xy+y^4-3=0$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{4y-5x^4}{4y^3-4x}$;

б) $x^2y^3+xy-\cos y+5=0$. **Ответ:** $y'_x=-\dfrac{2xy^3+y}{3x^2y^2+x+\sin y}$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Найти производную неявной функции в точке $M_0(x_0;y_0)$:

а) $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** $\dfrac{4}{3}$;

б) $x^4+y^4-xy=1,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** -1;

в) $ye^y=e^{x+1},\ M_0(0;1)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

г) $\operatorname{tg} y=xy-y,\ M_0(3;0)$. **Ответ:** 0;

д) $x^y=y^x,\ M_0(1;1)$. **Ответ:** 1.

3. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x=2t^2+t-4, \\ y=4t^3-2t+1. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{12t^2-2}{4t^2+1}$;

б) $\begin{cases} x=e^{2t}+1, \\ y=2t+e^{-2t}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=e^{-2t}-e^{-4t}$;

в) $\begin{cases} x=a\sin t, \\ y=b\cos t,\ a\neq 0, b\neq 0. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

4. Найти значение производной $\dfrac{dy}{dx}$ в точке t_0 параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t,\ t_0=\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$ **Ответ:** $-\sqrt{3}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3},\ a\neq 0,\ t_0=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{5}{4}$;

в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t),\ a\neq 0,\ t_0=\dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$ **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в заданной точке:

а) $y=x^2+8x,\ x_0=1.$ **Ответ:** $y=10x-1;\ y=-0{,}1x+9{,}1;$

б) $y=\dfrac{x^2+1}{x},\ x_0=1.$ **Ответ:** $y=2;\ x=1;$

в) $x^3+2x^2y-3y^2+4=0,\ M_0(1;-1).$ **Ответ:** $y=8x-9;\ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{8};$

г) $xe^y+2=x^2+y,\ M_0(2;0).$ **Ответ:** $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3};\ y=-3x+6;$

д) $\begin{cases} x=t^3+t^2-1, \\ y=t^3+2t,\ t_0=1. \end{cases}$ **Ответ:** $y=x+2;\ y=-x+4;$

е) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t,\ t_0=\pi. \end{cases}$ **Ответ:** $y=-\dfrac{x+\pi^2}{\pi+1};\ y=(\pi+1)x-\pi^2-2\pi.$

6. Найти приращение Δy и дифференциал dy данной функции в точке x_0 при приращении Δx:

а) $y=x^2+3x,\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}1.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=0{,}71,\ dy(x_0,\Delta x)=0{,}7;$

б) $y=x^3+3x^2,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}2.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=2{,}048;\ dy(x_0,\Delta x)=1{,}8;$

в) $y=4x^2+1,\ x_0=3, \Delta x=-0{,}1.$

Ответ: $\Delta y(x_0,\Delta x)=-2{,}36;\ dy(x_0,\Delta x)=-2{,}4.$

7. Найти дифференциал функции:

а) $y=\sqrt[3]{x}+3^x.$ **Ответ:** $dy=\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3^x\ln 3\right)dx;$

б) $y=\dfrac{x+5}{x+2}.$ **Ответ:** $dy=-\dfrac{3dx}{(x+2)^2};$

в) $y=e^{\operatorname{ctg}(4x+5)}.$ **Ответ:** $dy=-\dfrac{4e^{\operatorname{ctg}(4x+5)}}{\sin^2(4x+5)}dx.$

8. Найти дифференциал dy данной функции в заданной точке:

а) $y=x^3\cdot 3^x,\ x_0=1.$ **Ответ:** $dy(x_0)=(9+3\ln 3)\,dx;$

б) $x^2-2xy^3+3y^2-xy=1,\ M_0=(1;1).$ **Ответ:** $dy(M_0)=-dx;$

в) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t-\cos t,\ t_0=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ **Ответ:** $dy(t_0)=2dx.$

9. Вычислить приближенно значение выражения с помощью дифференциала:

а) $e^{0{,}03}.$ **Ответ:** $\approx 1{,}03;$

б) $\ln 0{,}96.$ **Ответ:** $\approx -0{,}04;$

в) $\arcsin 0{,}02.$ **Ответ:** $\approx 0{,}02;$

г) $\sqrt{24}.$ **Ответ:** $\approx 4{,}9;$

д) $\operatorname{arctg} 0{,}97.$ **Ответ:** $\approx 0{,}77;$

е) $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{3+x}}.$ **Ответ:** $\approx 0{,}98.$

10. Найти указанные производные функции $y(x)$:

а) $y=2x^6+5^x-3\ln 2,\ y''(x).$ **Ответ:** $y''(x)=60x^4+5^x\ln^2 5;$

б) $y=x^3-5x^2+7x-2,\ y''(2),\ y^{(5)}(x).$ **Ответ:** $y''(2)=2,\ y_x^{(5)}=0;$

в) $y=\sin^2 x,\ y''(x),\ y''(0).$ **Ответ:** $y''(x)=2\cos 2x,\ y''(0)=2;$

г) $y=(1+4x^2)\operatorname{arctg}2x,\ y''(x).$ **Ответ:** $y''(x)=8\operatorname{arctg}2x+\dfrac{16x}{1+4x^2};$

д) $y=e^{x^2},\ y'''(x).$ **Ответ:** $y'''(x)=(8x^3+12x)e^{x^2};$

е) $y=e^{-3x},\ y^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}.$ **Ответ:** $y^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 3^n\cdot e^{-3x};$

ж) $y=\dfrac{1}{5x+3}$, $y^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}$. **Ответ:** $y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot 5^n\cdot n!}{(5x+3)^{n+1}}$;

з) $y=\ln(1+4x)$, $y^{(10)}(0)$. **Ответ:** $y^{(10)}(0)=-4^{10}\cdot 9!$

11. Найти $y^{(n)}(x)$ с помощью формулы Лейбница:

а) $y=e^{-x}\cdot(x^2-3)$, $n=8$. **Ответ:** $y^{(8)}(x)=(x^2-16x+53)\,e^{-x}$;

б) $y=x^3\cdot\cos x$, $n=11$.

Ответ: $y^{(11)}(x)=(x^3-330x)\cdot\sin x+(990-33x^2)\cos x$;

в) $y=(x^2+2)\ln x^2$, $n=7$. **Ответ:** $y^{(7)}(x)=\dfrac{96(x^2+21)}{x^7}$.

12. Найти производную $y''_{x^2}\left(M_0\right)$ функции, заданной неявно:

а) $x^4-2xy+y^4-1=0$, $M_0(0;1)$. **Ответ:** $y''_{x^2}\left(M_0\right)=-\dfrac{3}{4}$;

б) $xy^3-3y-2=0$, $M_0(1;\,2)$. **Ответ:** $y''_{x^2}\left(M_0\right)=\dfrac{320}{243}$;

в) $xy+e^y=e$, $M_0(0;1)$. **Ответ:** $y''_{x^2}\left(M_0\right)=e^{-2}$.

13. Найти производную y''_{xx} функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=t^3+t+1, \\ y=t^3+t^2-1. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{2+6t-6t^2}{(3t^2+1)^3}$;

б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{-2}{9\sin^3 t}$;

в) $\begin{cases} x=2\ln t, \\ y=t+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$.

14. Найти d^2y и $d^2y(x_0,\Delta x)$ функции $y(x)$, где $x-$ независимая переменная:

а) $y=e^{3x}$, $x_0=0, \Delta x=0{,}1$.

Ответ: $d^2y=9e^{3x}dx^2$, $d^2y(x_0,\Delta x)=0{,}09$;

б) $y=\cos x^2$, $x_0=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \Delta x=0{,}2$.

Ответ: $d^2y=-2(2x^2\cos x^2+\sin x^2)\,dx^2$, $d^2y(x_0,\Delta x)=-0{,}08$.

15. Для функции d^2y и $y=5x^4-2x^3+x$ найти d^2y, если:

а) $x-$ независимая переменная;

б) $x=x(t)$, т. е. зависимая переменная.

Ответ:

а) $d^2y=(60x^2-12x)\,dx^2$;

б) $d^2y=(60x^2-12x)\,dx^2+(20x^3-6x^2+1)\,d^2x$.

16. Найти d^3y функции $y(x)$, где $x-$ независимая переменная:

а) $y=\sin^2 3x$. **Ответ:** $d^3y=-108\sin 6x\,dx^3$;

б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$. **Ответ:** $d^3y=\dfrac{11-6\ln x}{x^4}\,dx^3$;

в) $y=x^2\cdot e^{-2x}$. **Ответ:**
$d^3y=(-8x^2+24x-12)\,e^{-2x}dx^3$.

Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля и ее следствия. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений. Теорема Коши.

Раскрытие неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ по правилу Бернулли – Лопиталя.

Алгебраические преобразования и раскрытие неопределенностей вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty\cdot\infty)$, (0°), (∞°), (1^∞).

1. Найти точку локального экстремума многочлена $P(x)$ с помощью метода выделения полного квадрата. Проверить выполнение условий теоремы Ферма в этой точке:

а) $P(x)=2x^2-6x+5$. **Ответ:** $x_{\min}=1{,}5,\ P'(1{,}5)=0$;

б) $P(x)=3x^2+2x-1$. **Ответ:** $x_{\min}=-\dfrac{1}{3},\ P'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$;

в) $P(x)=3+x-x^2$. **Ответ:** $x_{\max}=\dfrac{1}{2},\ P'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

2. Выяснить, применима ли теорема Ролля к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

а) $f(x)=1-x-3x^2$, $\left[-1;\dfrac{2}{3}\right]$. **Ответ:** да;

б) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1,\ [-1;1].$

Ответ: нет, не существует конечной производной $f'(x)$ в точке $x=0$;

в) $f(x)=5x+7,\ [2;4].$ **Ответ:** нет, $f(2)\neq f(4)$;

г) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0\le x<2, \\ 0 \text{ при } x=2. \end{cases}$

Ответ: нет, $f(x)$ не является непрерывной в точке $x=2.$

3. Доказать, пользуясь теоремой Лагранжа, справедливость неравенства:

а) $|\cos x-\cos y|\le|x-y|$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

б) $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

4. Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}-\frac{x^2}{2} \text{ при } 0\le x\le 1, \\ \frac{1}{x} \text{ при } x>1 \end{cases}$$

на отрезке $[0;2]$.

Ответ: $c_1=\frac{1}{2},\ c_2=\sqrt{2}.$

5. Определить, в какой точке касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна хорде, соединяющей точки графика A и B:

а) $f(x)=4-x^2,\ A(-2;0),\ B(1;3).$ **Ответ:** $M\left(-\frac{1}{2};\frac{15}{4}\right)$;

б) $f(x)=x^3+3x^2-x-1,\ A(-2;5),\ B(1;2).$ **Ответ:** $A(-2;5), M(0;-1).$

6. Проверить выполнение условий теоремы Коши о среднем значении для функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a;b]$ и найти соответствующее значение c формулы Коши:

а) $f(x)=x^2-2x+2,\ g(x)=x^3-7x^2+20x-1,\ [1;4].$ **Ответ:** $c=2$;

б) $f(x)=5x+1,\ g(x)=\ln x,\ [1;e].$ **Ответ:** $c=e-1.$

7. Найти пределы, используя правило Лопиталя, где это возможно:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-11x+6}.$ **Ответ:** 1;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-x^2+x+1}{x^3+1}.$ **Ответ:** $-\frac{1}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-\sqrt{2x}}$. **Ответ:** 24;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$. **Ответ:** 3;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x+1)^6-24x-1}{(3x+1)^9-27x-1}$. **Ответ:** $\dfrac{20}{27}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{e^{5x}-e^{7x}}$. **Ответ:** -5;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^3}$. **Ответ:** 4;

з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{1-xe^x}$. **Ответ:** 0;

и) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{3^x}$, $n\in\mathbb{N}$. **Ответ:** 0;

к) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. **Ответ:** 1, правило Лопиталя неприменимо;

л) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$;

м) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln(2x-\pi)}{\operatorname{tg}x}$. **Ответ:** 0;

н) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos 2x}{\sin x-1}$. **Ответ:** -3;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\sin\dfrac{2}{x}}{\operatorname{tg}^2 x}$. **Ответ:** 0, правило Лопиталя неприменимо.

8. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-2x}\ln(7x+1)$. **Ответ:** 0;

б) $\lim\limits_{x\to +0}\ln x\operatorname{arctg}x$. **Ответ:** 0;

в) $\lim\limits_{x\to +0} xe^{\frac{1}{x}}\ln(7x+1)$. **Ответ:** $+\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)(\ln(x+2)-\ln(x-1))$. **Ответ:** 3;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **Ответ:** 0;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$. **Ответ:** $e^{\frac{1}{3}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\ln x}$. **Ответ:** 1;

к) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+5^x)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 5;

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$. **Ответ:** 1;

м) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+3^x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$. **Ответ:** $3e^2$;

н) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 1.

Формула Тейлора

Линейное и квадратичное приближение функции. Многочлен Тейлора и формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена. Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора. Использование формулы Тейлора в приближенных вычислениях.

1. Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x-x_0$, пользуясь формулой Тейлора:

а) $P(x)=2x^3-3x^2+5x+1,\ x_0=-1$.

Ответ: $P(x)=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3$;

б) $P(x)=3x^4-4x^2-8,\ x_0=2$.

Ответ: $P(x)=24+80(x-2)+68(x-2)^2+24(x-2)^3+3(x-2)^4$.

2. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора n-го порядка в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа:

а) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1,\ n=3$.

Ответ: $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5(x-1)^4}{128\cdot\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}}$, $0<\theta<1$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $n=2$.

Ответ: $\operatorname{tg}x=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{2\sin^2 c+1}{3\cos^4 c}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$, где $c=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $0<\theta<1$;

в) $f(x)=e^{x^2+x}$, $x_0=-1$, $n=2$.

Ответ: $e^{x^2+x}=1-(x+1)+\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{(2c+1)^3+6(2c+1)}{6}e^{c^2+c}(x+1)^3$, где $c=-1+\theta(x+1)$, $0<\theta<1$.

3. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора произвольного порядка n в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа:

а) $f(x)=\ln(4x-3)$, $x_0=1$.

Ответ: $\ln(4x-3)=4(x-1)-8(x-1)^2+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 4^{n+1}}{(n+1)(4c-3)^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, где $c=1+\theta(x-1)$, $0<\theta<1$;

б) $f(x)=\cos 3x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Ответ:

$$\cos 3x=-3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3-\frac{3^5}{5!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^5+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+2}\cdot\cos 3c}{(2n+2)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+2},$$ где $c=\frac{\pi}{6}+\theta\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $0<\theta<1$.

4. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, используя основные разложения:

а) $f(x)=x^2\sin\frac{x}{3}$.

Ответ: $x^2\sin\frac{x}{3}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{3^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+3}}{3^{2n+1}\cdot(2n+1)!}+o(x^{2n+3})$;

б) $f(x)=xe^{-2x^2}$.

Ответ: $xe^{-2x^2}=x-2x^3+2x^5+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$;

в) $f(x)=\frac{x^3}{3x^2-2}$.

Ответ: $\frac{x^3}{3x^2-2}=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^5-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{2^{n+1}}x^{2n+3}+o(x^{2n+3})$;

г) $f(x)=x\ln(4+5x)$.

Ответ: $x\ln(4+5x)=x\ln 4+\frac{5}{4}x^2-\frac{25}{32}x^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5^n}{n\cdot 4^n}x^{n+1}+o(x^{2n+1})$.

5. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано, используя основные разложения:

а) $f(x)=\frac{x}{3x-5}$, $x_0=2$.

Ответ: $\frac{x}{3x-5}=2+5\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot 3^{k-1}\cdot(x-2)^k+o((x-2)^n)$;

б) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$, $x_0=-1$.

Ответ: $\frac{1}{x^2+2x+3}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n})$;

в) $f(x)=\ln(7x+2)$, $x_0=1$.

Ответ: $\ln(7x+2)=\ln 9+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 7^k}{k\cdot 9^k}(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

г) $f(x)=xe^{x-3}$, $x_0=-2$.

Ответ: $xe^{x-3}=-2e^{-5}+e^{-5}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k-2}{k!}(x+2)^k+o((x+2)^n)$;

д) $f(x)=\cos(x^2+6x)$, $x_0=-3$.

Ответ: $\cos(x^2+6x)=\cos 9\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x+3)^{4k}}{(2k)!}+\sin 9\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x+3)^{4k+2}}{(2k+1)!}+$
$+o((x+3)^{4n+2})$.

6. Вычислить приближенно с точностью до $0{,}01$:

а) $\ln 0{,}9$. **Ответ:** $-0{,}10$;

б) $\sqrt[5]{e}$. **Ответ:** $1,22$;

в) $\sqrt[3]{9}$. **Ответ:** $2,08$;

г) $\cos 0,7$. **Ответ:** $0,75$;

д) $\sin 1$. **Ответ:** $0,84$.

7. Выяснить происхождение и оценить погрешность приближенной формулы:

а) $\ln 1,5 \approx 0,5 - \frac{1}{2}\cdot 0,5^2 + \frac{1}{3}\cdot 0,5^3 - \frac{1}{4}\cdot 0,5^4$. **Ответ:** $|R_4| < 10^{-2}$;

б) $e^{1,1} \approx 1 + 1,1 + \frac{1}{2!}\cdot 1,1^2 + \frac{1}{3!}\cdot 1,1^3 + \frac{1}{4!}\cdot 1,1^4$. **Ответ:** $|R_4| < 5\cdot 10^{-2}$;

в) $\mathrm{arctg}\, 0,1 \approx 0,1 - \frac{1}{3}\cdot 0,1^3$. **Ответ:** $|R_3| < 10^{-5}$.

8. Найти предел с помощью формулы Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x^3 - 1 + 2x^6}{2x^{12} + 3x^{16}}$. **Ответ:** $\frac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{7x^3 + 2x^2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x^3 - 4x^6}{x\ln(1+5x^2) - 5x^3}$. **Ответ:** $-\frac{2}{25}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}\, x + \sin x - 3x}{5x^3 + x^4}$. **Ответ:** $\frac{1}{10}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \mathrm{tg}\, x}$. **Ответ:** $-\frac{1}{12}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\mathrm{tg}\, x - x)}}$. **Ответ:** $e^{\frac{1}{8}}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2\cos(1-x)}{\ln^2(2x-1)}$. **Ответ:** $\frac{3}{16}$.

Исследование функций с помощью производных

Условия возрастания и убывания функций. Экстремум функции. Необходмые условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума функции. Условия выпуклости функций. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функции в промежутке. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1. Найти промежутки возрастания, убывания и локальные экстремумы функции $f(x)$:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$, убывает на $(-1;2)$; $f_{\max}(-1)=12,\ f_{\min}(2)=-15;$

б) $f(x)=x^4-6x^2+3.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};+\infty)$, убывает на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$; $f_{\max}(0)=3,\ f_{\min_{1,2}}(\pm\sqrt{3})=-6;$

в) $f(x)=(x-1)^3(x+3)^2.$

Ответ: возрастает на $(-\infty;-3)$ и $(-1,4;+\infty)$, убывает на $(-3;-1,4)$; $f_{\max}(-3)=0,\ f_{\min}(-1,4)=-\dfrac{3^3\cdot 2^{12}}{5^5}=-35,38944;$

г) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-x-6)^2}.$

Ответ: возрастает на $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ и $(3;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$; $f_{\max}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}},\ f_{\min_1}(-2)=f_{\min_2}(3)=0;$

д) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2}.$

Ответ: возрастает на $(-2;0)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$; $f_{\min}(-2)=\dfrac{e^2}{4};$

е) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}.$

Ответ: возрастает на $(0;+\infty)$, убывает на $(-\infty;0)$; $f_{\min}(0)=0.$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на указанном отрезке:

а) $f(x)=x^3-3x+4,\ x\in[0;3].$

Ответ: $f(3)=22;\ f(1)=2;$

б) $f(x)=x^2-2x-15+\dfrac{16}{x-1},\ x\in[2;5].$

Ответ: $f(5)=4;\ f(3)=-4;$

в) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$, $x\in[2;\,4]$.

Ответ: $f(2)=8$; $f(3)=4{,}5$;

г) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right]$.

Ответ: $f\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{4}$; $f(\pi)=-1$;

д) $f(x)=x^2e^{-x^2}$, $x\in[-2;\,3]$.

Ответ: $f(\pm 1)=\dfrac{1}{e}$; $f(0)=0$.

3. Представить число 11 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и увеличенного в 12 раз второго числа была наименьшей.

Ответ: 2 и 9.

4. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном, объем которого равен 32 м^3, так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: степень основания – 4 м, глубина – 2 м.

5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x)$:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+8x-5$.

Ответ: выпукла на $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; вогнута на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; $x=\pm\dfrac{1}{2}$ – точки перегиба;

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3}$.

Ответ: выпукла на $(-3;0)$ и $(3;+\infty)$; вогнута на $(-\infty;-3)$ и $(0;3)$; $x=\pm 3$ и $x=0$ – точки перегиба;

в) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

Ответ: выпукла на $(1;1{,}5)$; вогнута на $(-\infty;1)$ и $(1{,}5;+\infty)$; $x=1$ и $x=1{,}5$ – точки перегиба;

г) $f(x)=(x^2+1)\,e^x$.

Ответ: выпукла на $(-3;-1)$; вогнута на $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$; $x=-3$ и $x=-1$ – точки перегиба;

д) $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: выпукла на $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; вогнута на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, $x=\frac{1}{2}-$ точка перегиба;

е) $f(x)=\ln\frac{x}{x+4}$.

Ответ: выпукла на $(0;+\infty)$; вогнута на $(-\infty;-4)$; точек перегиба нет.

6. Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

а) $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^2-4x+3}$. **Ответ:** $x=1$, $x=3$, $y=1$;

б) $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+2x-15}$. **Ответ:** $x=-5$, $x=3$, $y=x-2$;

в) $f(x)=xe^{-2x}$. **Ответ:** $y=0$ при $x\to+\infty$;

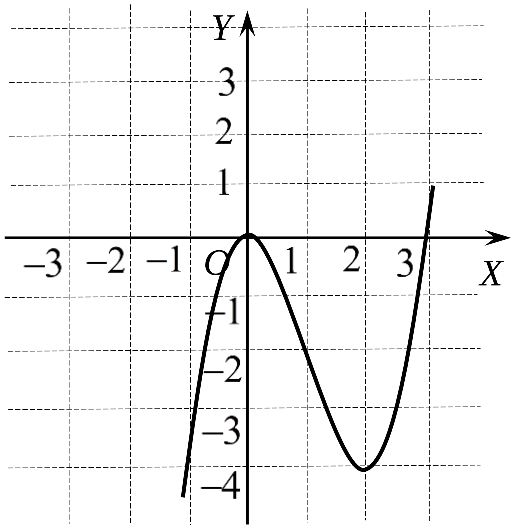
г) $f(x)=\frac{1}{1-e^{2x}}$. **Ответ:** $x=0$, $y=1$ при $x\to+\infty$;

д) $f(x)=\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$. **Ответ:** $x=-2$, $x=2$, $y=0$;

е) $f(x)=\frac{x}{4}+\operatorname{arcctg}3x$. **Ответ:** $y=\frac{x}{4}+\pi$ при $x\to-\infty$, $y=\frac{x}{4}$ при $x\to+\infty$.

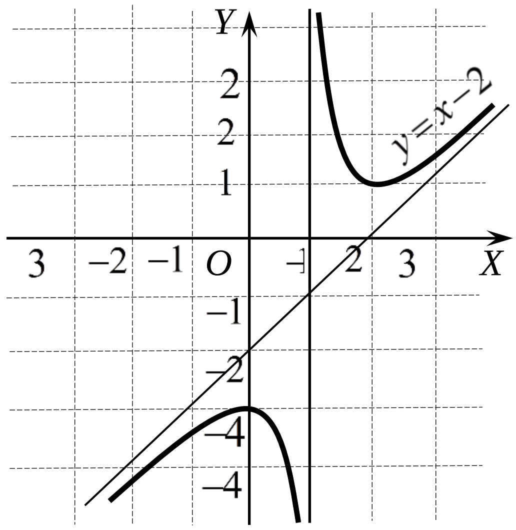
7. Исследовать функцию $f(x)$ и построить ее график:

а) $f(x)=x^3-3x^2$. **Ответ:**



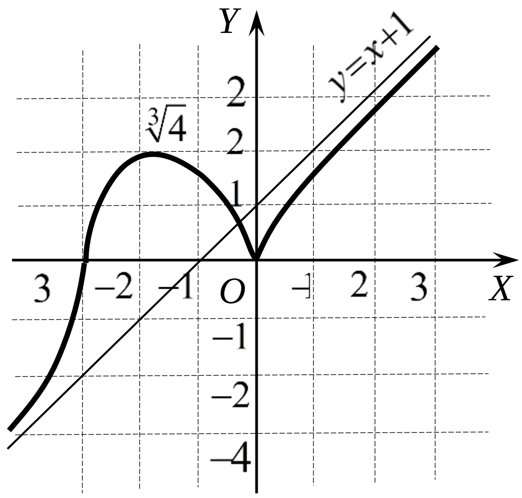
б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

Ответ:



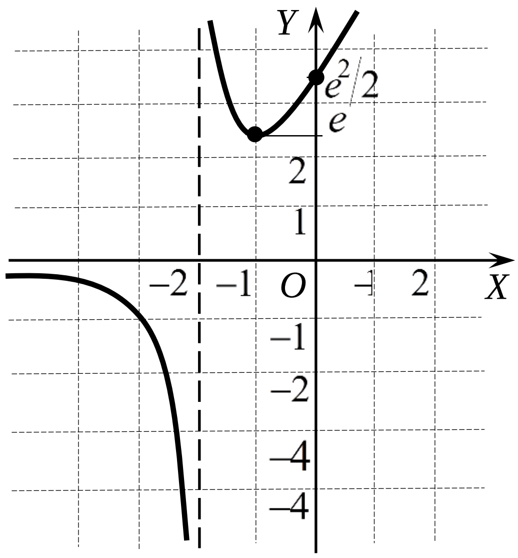
в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$.

Ответ:

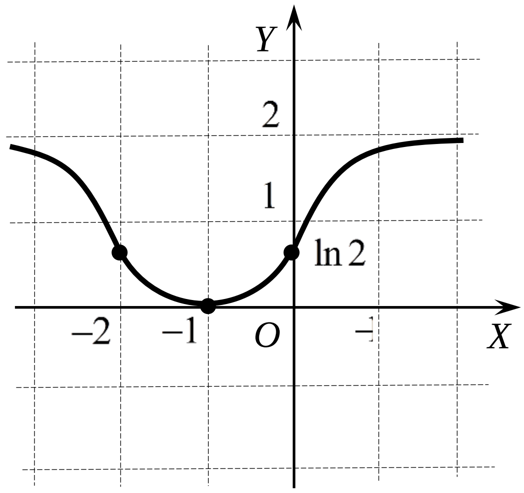


г) $f(x)=\dfrac{e^{x+2}}{x+2}$.

Ответ:

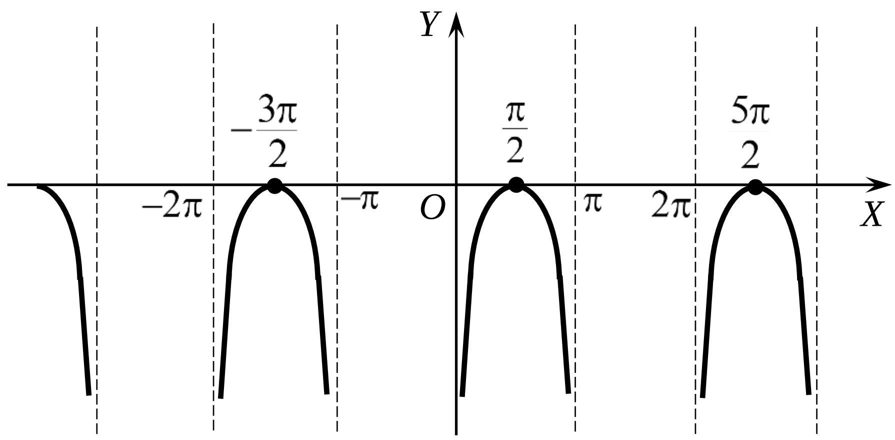


д) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. **Ответ:**



е) $f(x) = \ln \sin x$.

Ответ:



ж) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

Ответ: