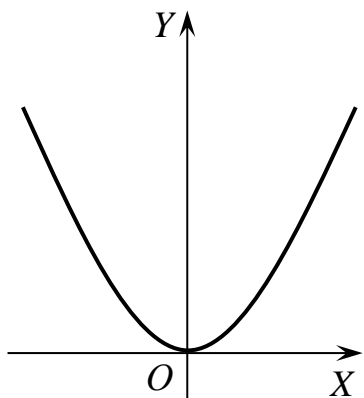
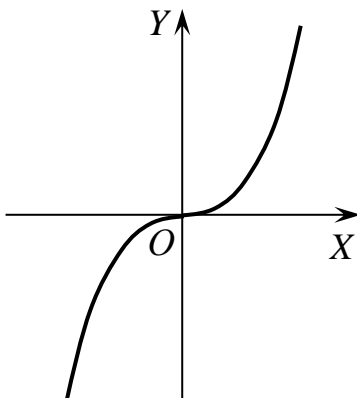


Приложения

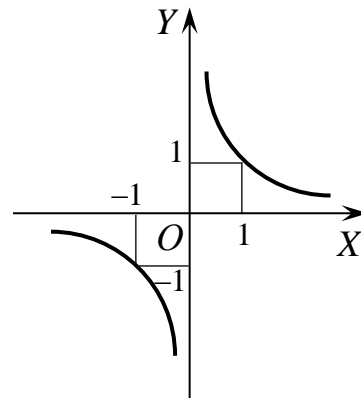
1. Графики некоторых элементарных функций



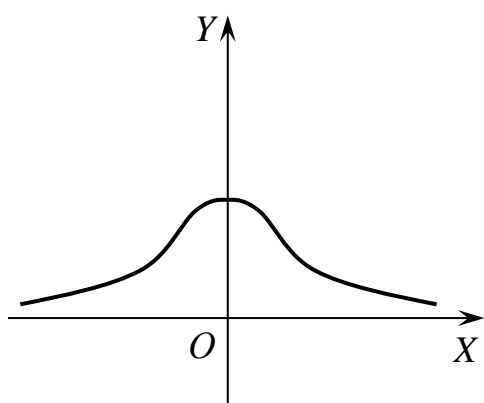
1. Парабола
 $y = x^2$



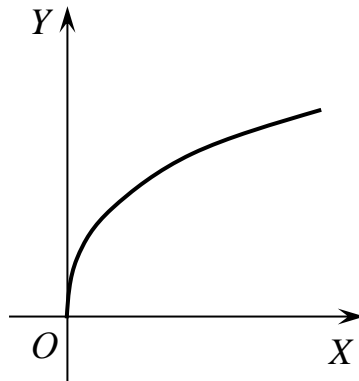
2. Кубическая парабола
 $y = x^3$



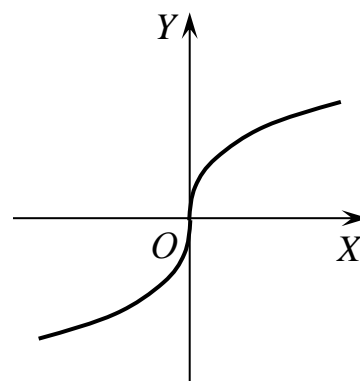
3. Равноосная гипербола
 $y = \frac{1}{x}$



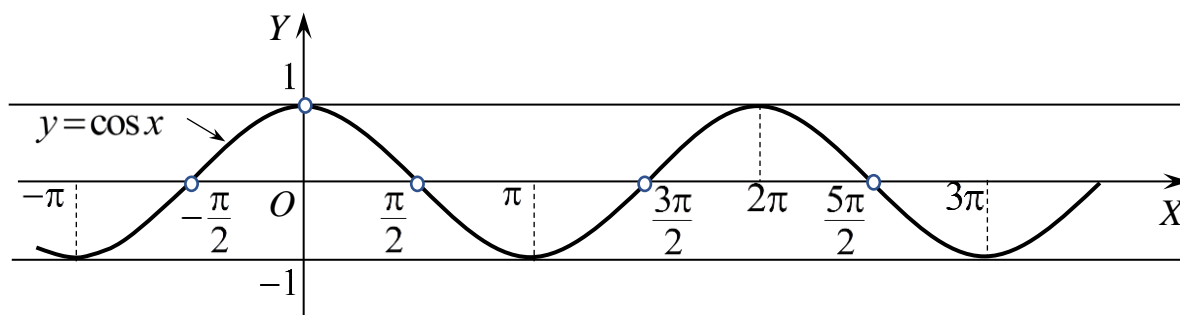
4. Локон Аньези
 $y = \frac{1}{1+x^2}$



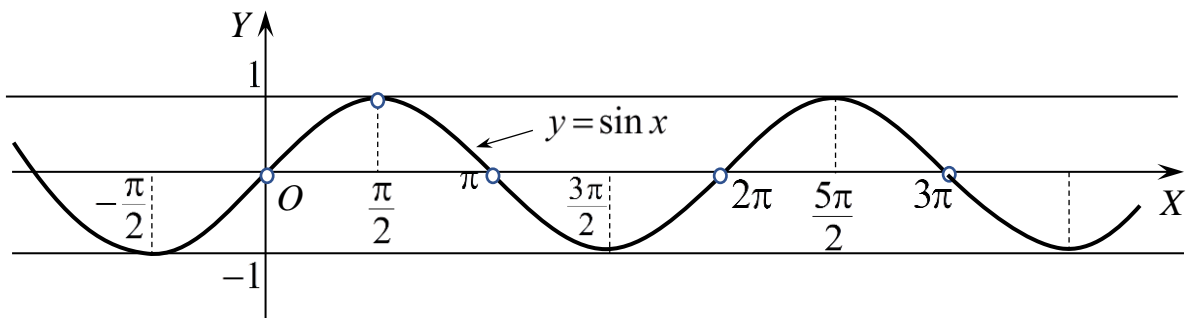
5. Парабола (верхняя ветвь)
 $y = \sqrt{x}$



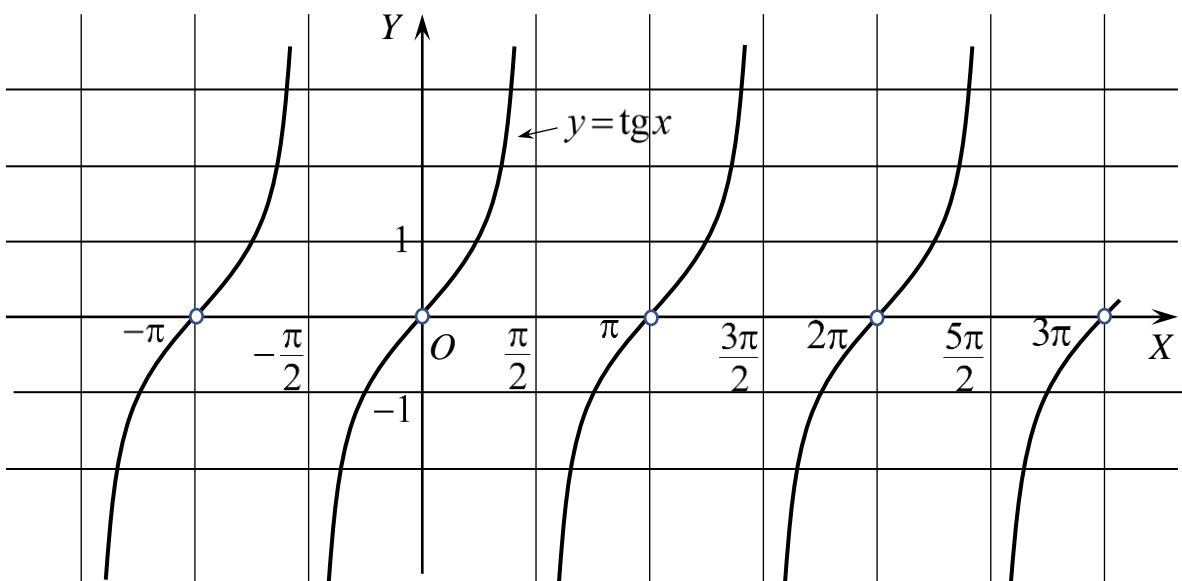
6. Кубическая парабола
 $y = \sqrt[3]{x}$



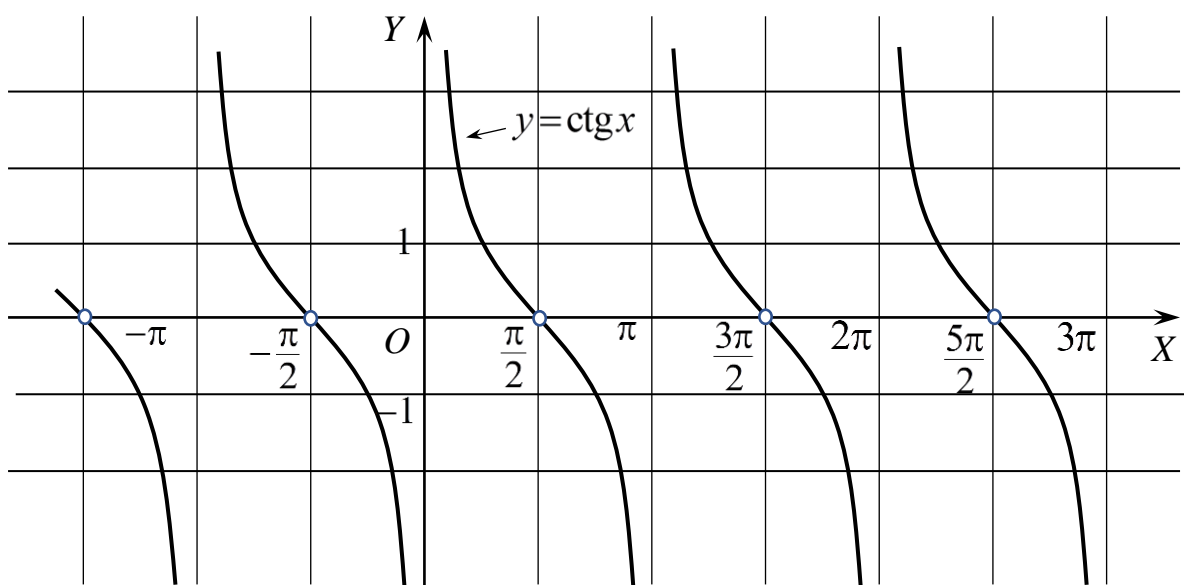
7. Косинусоида $y = \cos x$



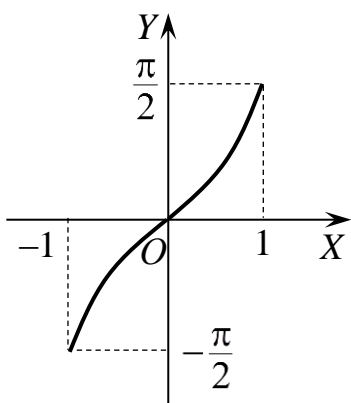
8. Синусоида $y = \sin x$



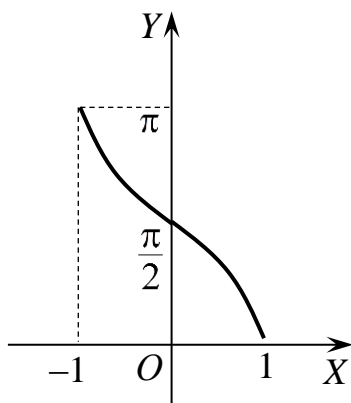
9. Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$



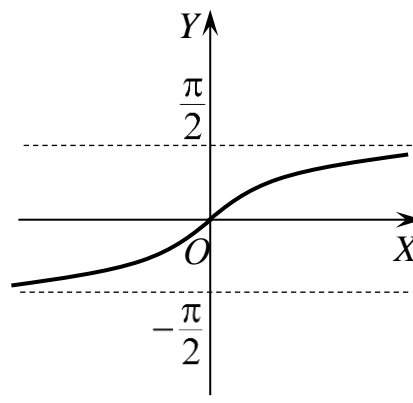
10. Котангенсоида $y = \operatorname{ctg} x$



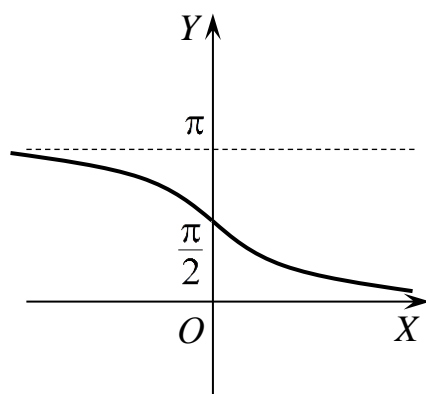
11. $y = \arcsin x$



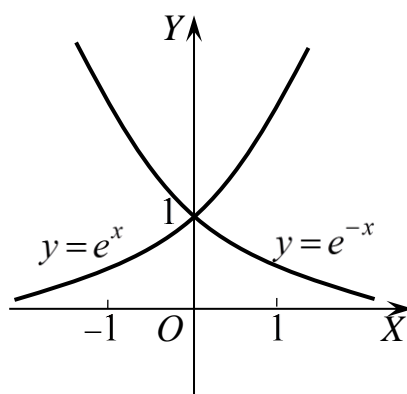
12. $y = \arccos x$



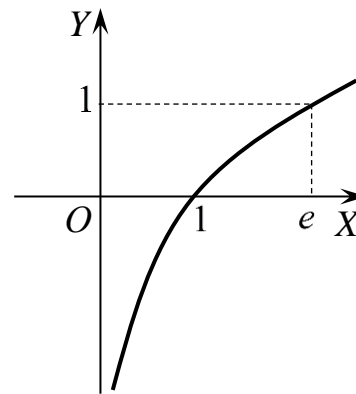
13. $y = \text{arctg } x$



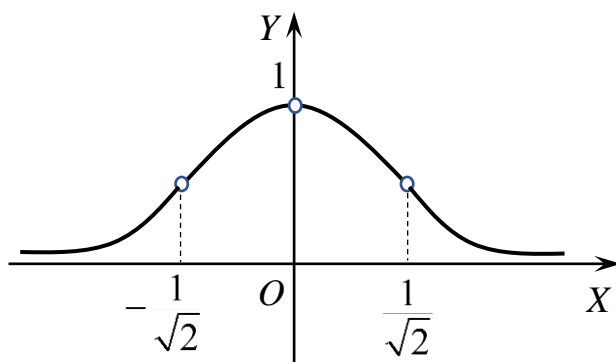
14. $y = \text{arcctg } x$



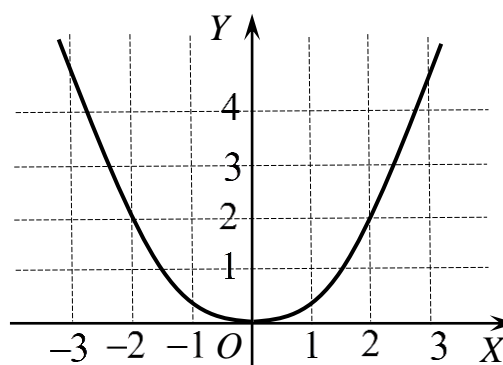
15. Графики показательных функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$



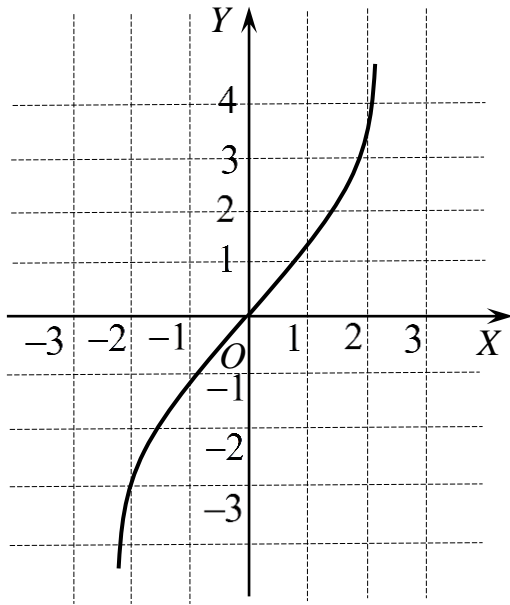
16. Логарифмическая кривая



17. Кривая Гаусса $y = e^{-x^2}$

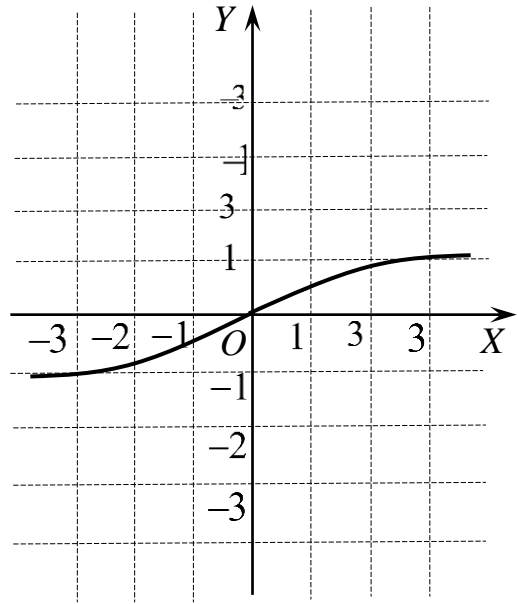


18. Гиперболическая функция $y = \text{ch } x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (цепная линия)



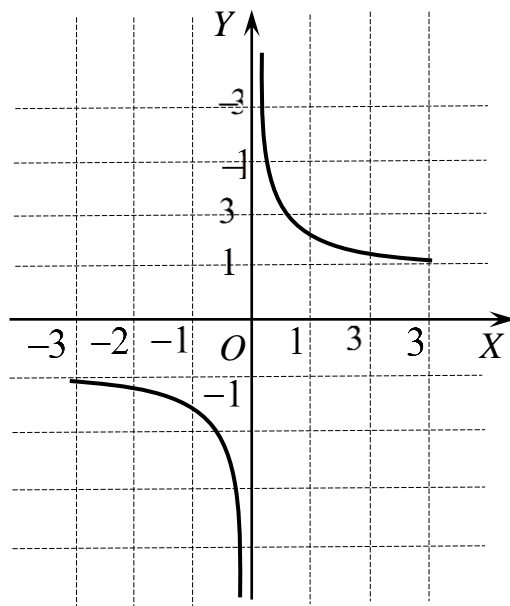
19. Гиперболическая функция

$$y = \text{sh } x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



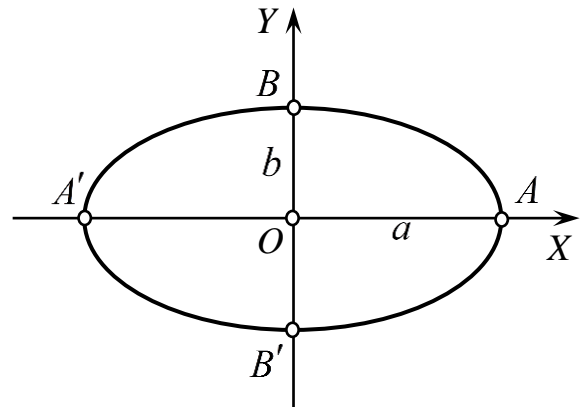
20. Гиперболическая функция

$$y = \text{th } x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



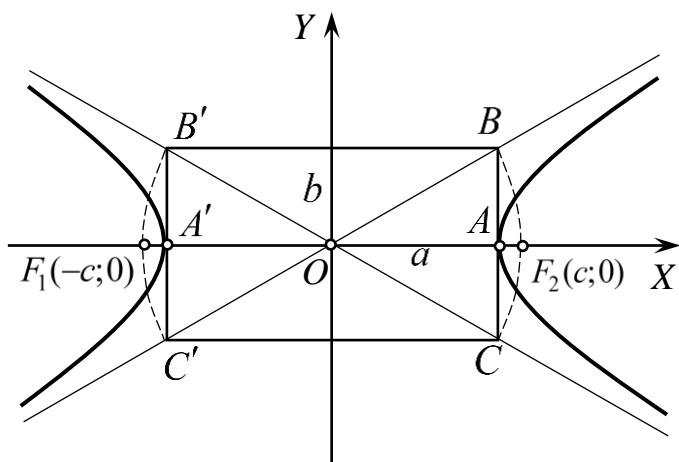
21. Гиперболическая функция

$$y = \text{ch } x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



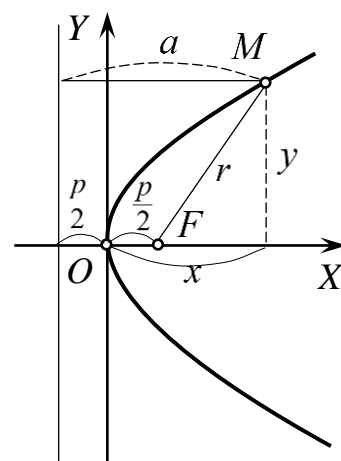
22. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

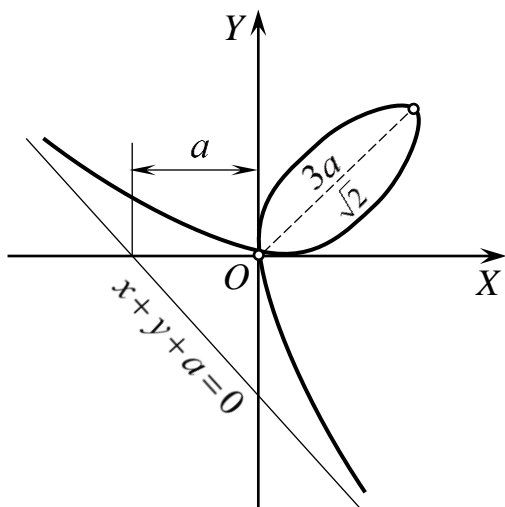


23. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \text{ (для правой вет-} \\ \text{ви).$$

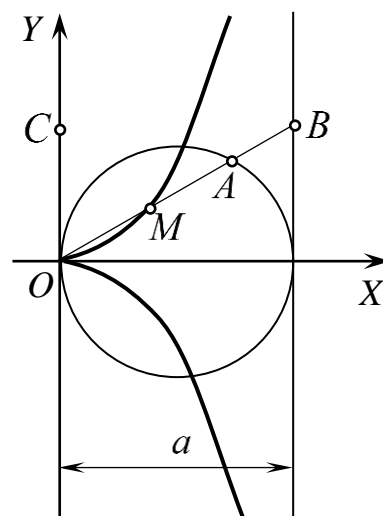


24. Парабола $y^2 = 2px$



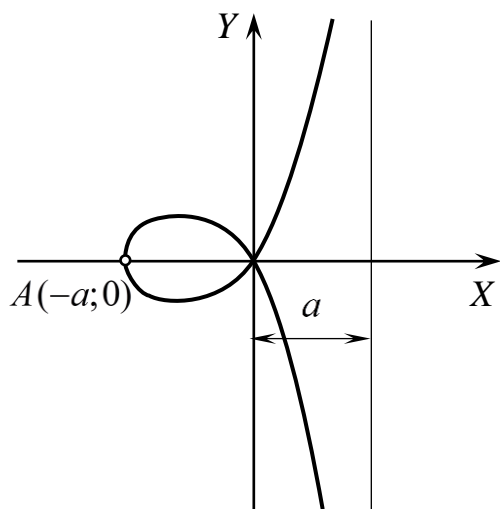
25. Декартов лист

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ или } \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

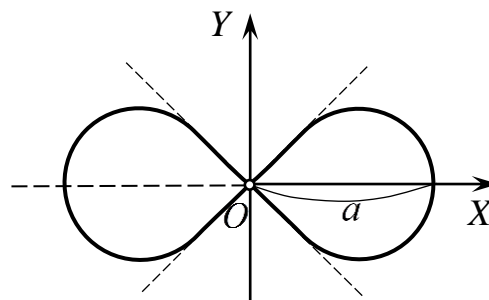


26. Циссоида Диоклеса

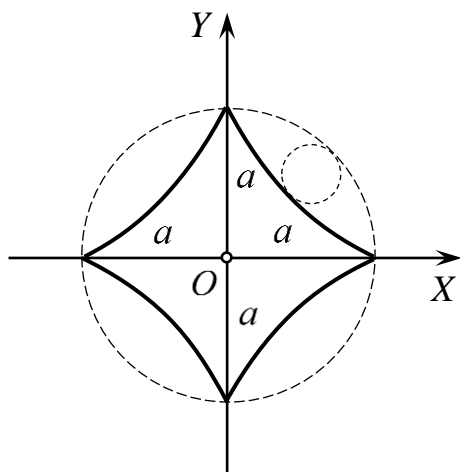
$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$



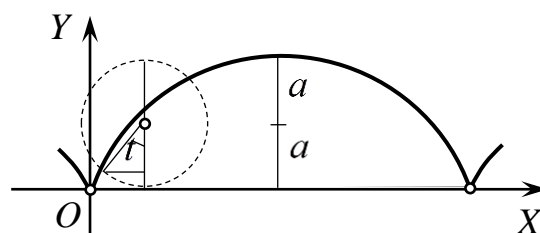
27. Строфоида $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$



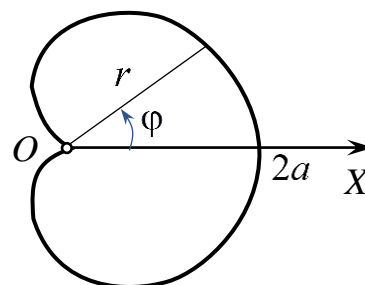
28. Лемниската Бернулли
 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
 или $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$



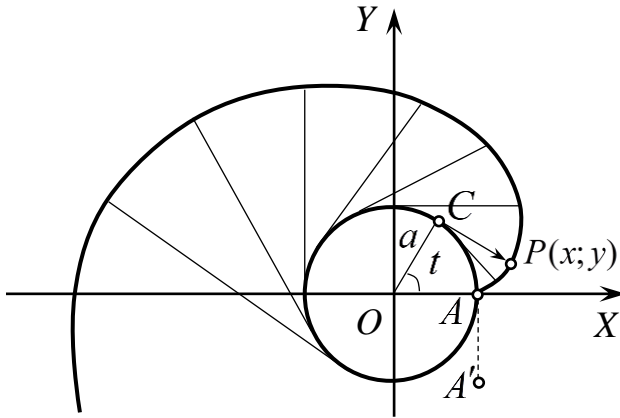
29. Гипоциклоида (астроида)
 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ или $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$



30. Циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

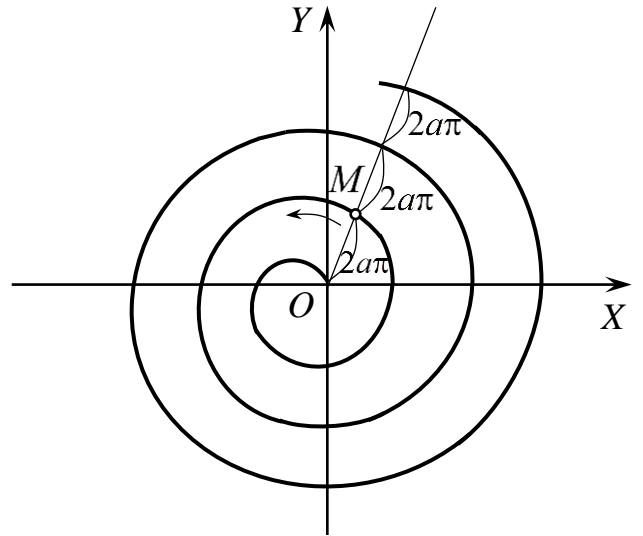


31. Кардиоида
 $r = a(1 + \cos \varphi)$

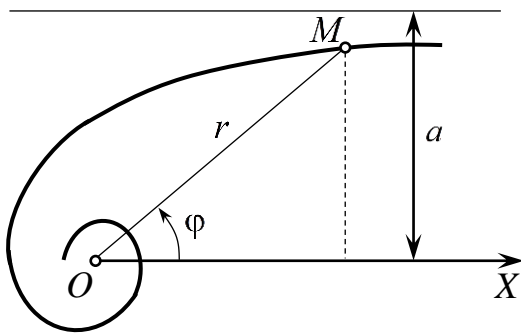


32. Эвольвента (развертка) окружности

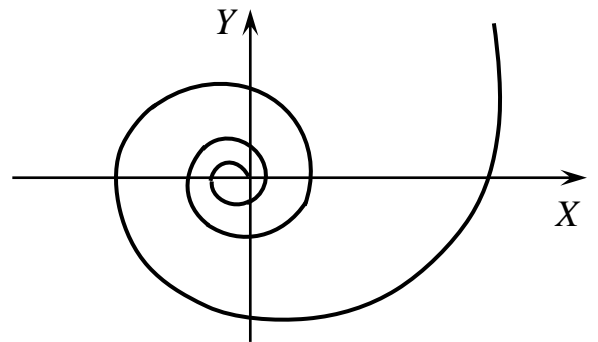
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$



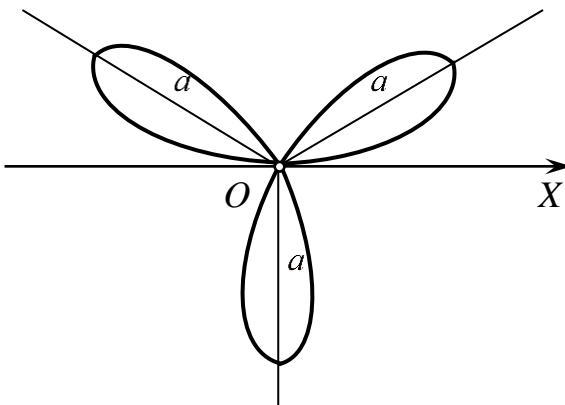
33. Спираль Архимеда $r = a\varphi$



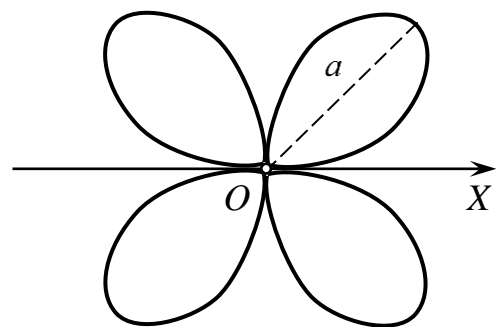
34. Гиперболическая спираль $r = \frac{a}{\varphi}$



35. Логарифмическая спираль
 $r = e^{a\varphi}$

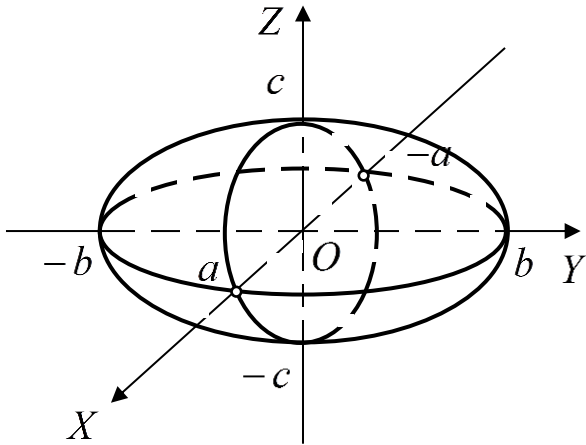


36. Трехлепестковая роза
 $r = a \sin 3\varphi$

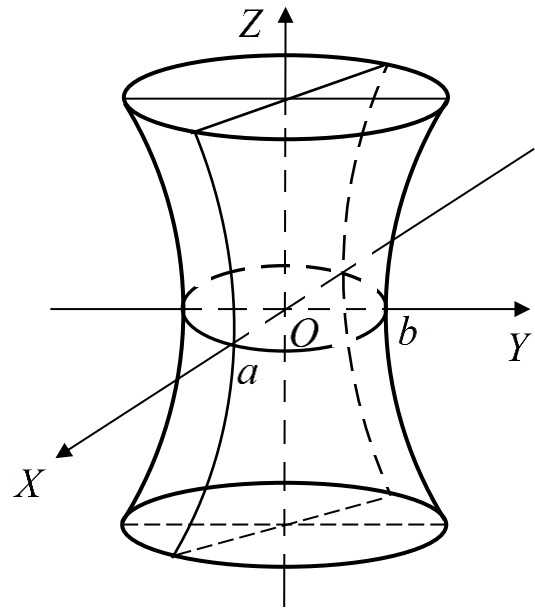


37. Четырехлепестковая роза $r = a |\sin 2\varphi|$

2. Поверхности второго порядка

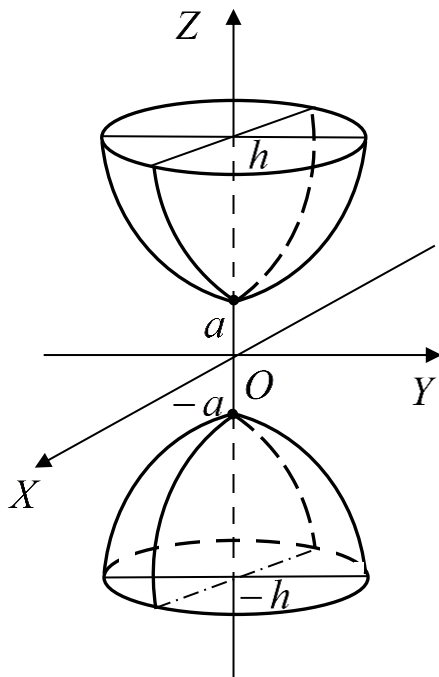


1. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



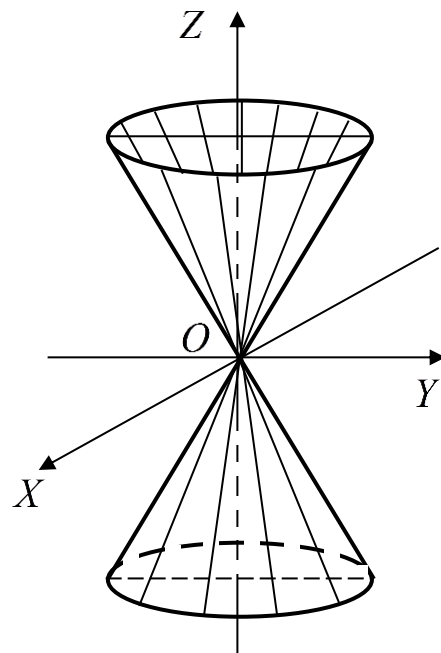
2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

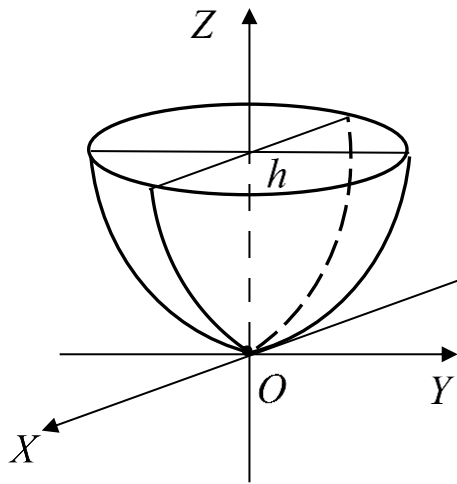


3. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

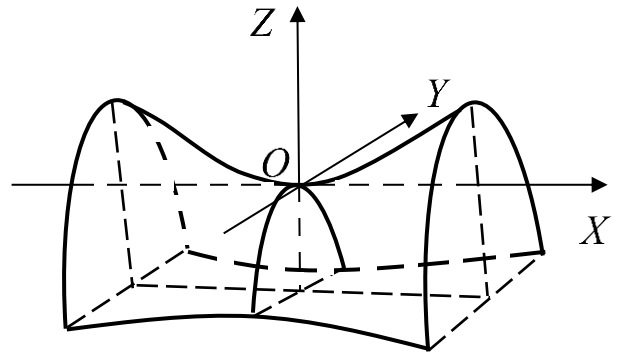


4. Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



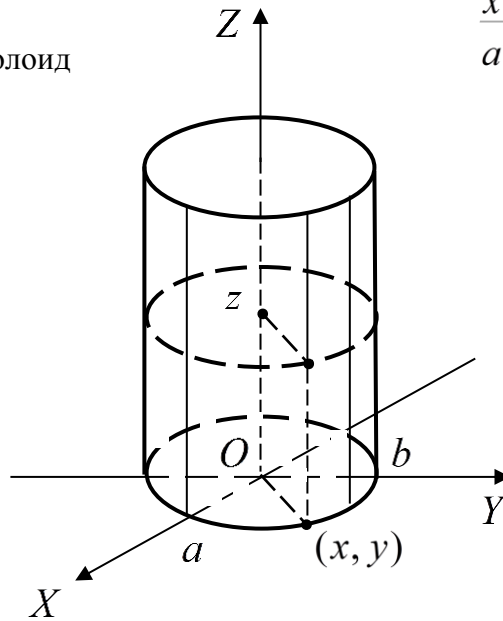
5. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



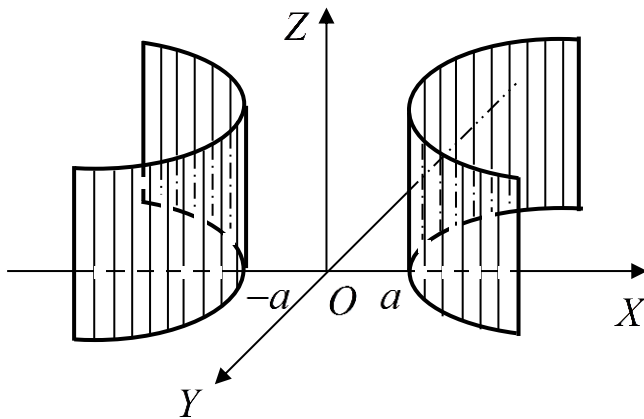
6. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



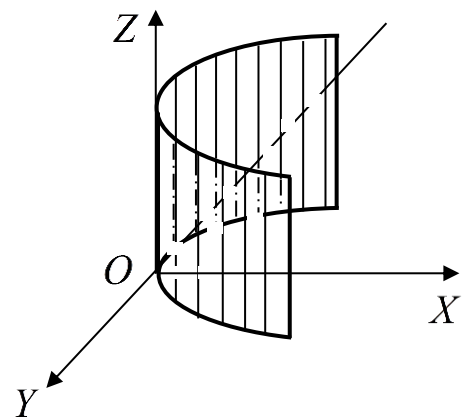
7. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



8. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



9. Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

3. Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow 0$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
3	$1 - \cos \alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2 / 2$	4	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$
7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a \quad (a > 0)$, в частности, $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$		
8	$[1 + \alpha(x)]^P - 1 \sim P \alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$		

4. Таблица производных основных функций

1	$(x^n)' = nx^{n-1}$	2	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$
3	$(\sin x)' = \cos x$	4	$(\cos x)' = -\sin x$
5	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	6	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$	8	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$
9	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	10	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
11	$(a^x)' = a^x \ln a$	12	$(e^x)' = e^x$
13	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$	14	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (x > 0, a > 0)$
15	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	16	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
17	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	18	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

5. Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

6. Таблица неопределенных интегралов

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1, \quad (a \neq 0)$
4	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, \quad (a \neq 0)$
	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C, \quad (a \neq 0)$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+a} \right + C, \quad (a \neq 0)$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0)$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C$
8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \cos x dx = \sin x + C$
10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
12	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C = \ln \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x + C$
13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C = \ln \operatorname{tg} x + \sec x + C$
14	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

15	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
16	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
17	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

7. Неберущиеся интегралы (неопределенные интегралы, являющиеся неэлементарными функциями)

1	$\int e^{-x^2} dx, \int e^{x^2} dx$	2	$\int \sin x^2 dx$		
3	$\int \cos x^2 dx$	4	$\int \frac{\sin x}{x} dx$		
5	$\int \frac{\cos x}{x} dx$	6	$\int \frac{dx}{\ln x}$		
7	$\int \frac{e^x}{x} dx$	8	$\int \frac{e^x}{x^n}, n \in \mathbb{Z}$		
9	$\int \frac{\sin x}{x^n} dx, n \in \mathbb{Z}$	10	$\int \frac{\cos x}{x^n} dx, n \in \mathbb{Z}$		
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, 0 < k < 1$				
12	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, 0 < k < 1$				
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, 0 < k < 1$				
14	$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx \quad 0 < k < 1$				
15	$\int \frac{x dx}{\sin x}$	16	$\int \frac{x^2 dx}{\sin x}$	17	$\int \frac{x dx}{\sin^3 x}$
18	$\int \frac{\sin^2 x}{x} dx$	19	$\int \frac{\cos^2 x}{x} dx$	20	$\int \frac{xdx}{\cos x}$
21	$\int \frac{xdx}{\cos^3 x}$	22	$\int x \operatorname{tg} x dx$	23	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx$
24	$\int x \operatorname{ctg} x dx$	25	$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{x} dx$	26	$\int \frac{\arcsin x}{x} dx$

27	$\int \frac{\arccos x}{x} dx$	28	$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$	29	$\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x} dx$
30	$\int \frac{e^x}{x^2} dx$	31	$\int \frac{xdx}{\ln x}$	32	$\int \frac{x^2 dx}{\ln x}$
33	$\int \frac{dx}{x^2 \ln x}$	34	$\int \frac{\ln(ax+b)}{x} dx, a \neq 0$		
35	$\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x} dx$	36	$\int \ln \sin x dx$		
37	$\int \ln \cos x dx$	38	$\int \ln \operatorname{tg} x dx$		
39	$\int e^x \ln x dx$	40	$\int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$		
41	$\int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx$	42	$\int \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} dx$		
43	$\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x} dx$	44	$\int \frac{xdx}{\operatorname{sh} x}$		
45	$\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{x} dx$	46	$\int \frac{xdx}{\operatorname{ch} x}$		

8. Именные интегралы

Интеграл Дирихле	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$
Интеграл Пуассона	$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Интегралы Лапласа	$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2 b } e^{- ab }, b \neq 0$ $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{- ab }$
Интегралы Френеля	$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Интеграл Эйлера	$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, 0 < \alpha < 1$

