Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

# *РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ*

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для всех специальностей
I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2016

УДК [517.52+517.53](076)
ББК 22.171я73
Р98

Авторы:
В. В. Цегельник, Н. И. Кобринец, И. Е. Конюх,
Е. А. Баркова, Н. Л. Новротская

Рецензенты:

кафедра высшей математики и информационных технологий учреждения образования «Частный институт управления и предпринимательства» (протокол №2 от 23.09.2015);

доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка»,
кандидат физико-математических наук, доцент
Н. В. Гриб

Р98 **Ряды.** Теория функций комплексной переменной : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2016. – 93 с. : ил.
ISBN 978-985-543-238-9.

Приводятся задачи по темам: ряды, теория функций комплексной переменной, операционное исчисление – разделам курса высшей математики, изучаемым в третьем семестре.

Предлагаются задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

Пособие входит в состав методического комплекса вместе со сборниками задач в десяти частях.

**УДК [517.52+517.53](076)**
**ББК 22.171я73**

**ISBN 978-985-543-238-9**

Св. план 2016, поз. 40

*Учебное издание*

**Цегельник** Владимир Владимирович
**Кобринец** Николай Иванович
**Конюх** Ирина Евгеньевна и др.

***РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ***

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Корректор
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 300 экз. Заказ 23.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, № 3/615 от 07.04.2014
ЛП № 02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6

# Занятия 1–2

## Ряд и его сумма. Знакоположительные ряды

*Пример 1.* Написать простейшую формулу $n$-го члена для следующих рядов:

а) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\ldots$;  б) $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\ldots$;

в) $1+\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2}+\dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$ .

Δ а) $a_n=\dfrac{n+2}{(n+1)^2}$; б) $a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$;

в) $a_1=1,\ a_n=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n!},\ n=2,3,4,\ldots$. ▲

*Пример 2.* По первым трем членам ряда $1+3+7+\ldots$ восстановить его общий член сначала в наипростейшей форме, а затем в виде $a_n=an^2+bn+c$.

Δ Простейшей формулой общего члена ряда будет $a_n=2^n-1$. Пусть $a_n=an^2+bn+c$. Полагая $n=1,2,3,$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=1;\\ 4a+2b+c=3;\\ 9a+3b+c=7.\end{cases}$$

Решая ее, находим $a=1,\ b=-1,\ c=1$. Таким образом, $a_n=n^2-n+1$. ▲

*Пример 3.* Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$.

Δ а) Очевидно, что $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Теперь легко видеть, что последовательность частичных сумм сходится, а значит, сходится данный числовой ряд. Сумма его

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

б) Найдем предел последовательности частичных сумм этого ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+...+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-$$

$$-(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}+1-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=1-\sqrt{2}.$$

в) Запишем общий член ряда в виде

$$\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}=\ln\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+4)}=$$

$$=(\ln(n+2)-\ln(n+1))-(\ln(n+4)-\ln(n+3)).$$

Так как $S_n=(\ln(n+2)-\ln 2)-(\ln(n+4)-\ln 4)=\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+4}$, то $S_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+4}\right)=\ln 2$. ▲

*Пример 4*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$.

Δ Находим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$. На основании достаточного признака расходимости ряд расходится. ▲

*Пример 5*. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но тем не менее расходится.

Δ Необходимый признак выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/3}}=0.$$

Для доказательства расходимости данного ряда оценим его $n$-ю частичную сумму. $S_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sqrt[3]{n^2}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$. Ряд расходится. ▲

*Пример 6*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}$.

Δ Сравнивая общий член ряда с общим членом сходящейся геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ замечаем, что $\frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$ при всех $n$.

Следовательно, исследуемый ряд сходится по признаку сравнения. ▲

*Пример 7.* Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2\sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^4}}$;  б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$.

Δ а) Так как $a_n=\dfrac{\cos^2\sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^4}}\le\dfrac{1}{n^{4/3}}$, то по признаку сравнения ряд сходится.

б) Так как $a_n=\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}>\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2\sin^2 n}>\dfrac{1}{n^{1/2}}$, то по признаку сравнения ряд расходится. ▲

*Пример 8.* Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+\ln n}$.

Δ Воспользуемся предельным признаком сравнения. Имеем $a_n=\dfrac{1}{n+\ln n}$. Пусть $b_n=\dfrac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\ln n}{n}}=1\ne 0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0\right)$, то в смысле сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ведет себя так же, как и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, т. е. расходится. ▲

*Пример 9.* Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^5+3n^2}{n^5+1}$.

Δ Общий член ряда $a_n=\ln\dfrac{n^5+3n^2}{n^5+1}=\ln\left(1+\dfrac{3n^2-1}{n^5+1}\right)\sim\dfrac{3n^2-1}{n^5+1}\sim\dfrac{3}{n^3}$, $n\to\infty$. Ряд сходится. ▲

*Пример 10.* Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

Δ Поскольку $a_n=1-\cos\dfrac{1}{n}=2\sin^2\dfrac{1}{2n}\sim\dfrac{1}{2n^2}$, $n\to\infty$, данный ряд сходится. ▲

*Пример 11.* Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(3n^2+5)}{n^{5/4}}$.

Δ Общий член ряда запишем в виде

$$a_n=\frac{\ln(3n^2+5)}{n^{1/8}\cdot n^{9/8}}=\frac{\ln(3n^2+5)}{n^{1/8}}\cdot\frac{1}{n^{9/8}}.$$

С помощью правила Лопиталя легко показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(3x^2+5)}{x^{1/8}}=0$.

Следовательно, для достаточно больших $n$ $a_n < \dfrac{1}{n^{9/8}}$. По признаку сравнения данный ряд сходится. ▲

*Пример 12*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^3}$.

Δ Воспользуемся признаком Даламбера. Поскольку $a_n = \dfrac{2^n}{n^3}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}\cdot n^3}{2^n(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3} = 2 > 1$. Ряд расходится. ▲

*Пример 13*. Исследовать на сходимость ряд $\dfrac{4}{2} + \dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \dots$.

Δ Замечаем, что $a_n = \dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots\cdot (3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots\cdot (4n-2)}$, $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{3n+4}{4n+2}$. Отсюда находим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n \cdot \dfrac{3n+4}{4n+2}}{a_n} = \dfrac{3}{4} < 1$. Ряд сходится. ▲

*Пример 14*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Δ Находим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}\cdot (n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$. (Как известно, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{a^x} = 0,\ a > 1$). Ряд сходится. ▲

*Пример 15*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

Δ Попытаемся применить признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}\cdot (n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot e^n \cdot n!} = \frac{e}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

Признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает.

Замечаем, однако, что последовательность $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Поэтому при любом $n$ справедливо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т. е. $a_{n+1} > a_n$.

Следовательно, для данного ряда не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд расходится. ▲

*Пример 16*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

$\Delta$ Рассмотрим ряд с общим членом $b_n = \dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$. Очевидно, что $b_n \geq a_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,(\sqrt{2}+1)^{n+1}\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n^3\,(\sqrt{2}+1)^n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По признаку сравнения ряд $\lim\limits_{n\to 1} \dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ тоже сходится. ▲

*Пример 17*. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

$\Delta$ а) Здесь удобнее всего применить радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

б) Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} < 1.$$

Ряд сходится. ▲

*Пример 18*. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n}{n^4-9}$.

$\Delta$ Функция $f(x) = \dfrac{x}{x^4-9}$ удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Находим

$$\int_3^{\infty}\frac{x}{x^4-9}dx = \frac{1}{2}\int_3^{\infty}\frac{dx^2}{(x^2)^2-9} = \frac{1}{12}\ln\frac{x^2-3}{x^2+3}\Bigg|_3^{\infty} = \frac{1}{12}\ln 2.$$

Несобственный интеграл сходится, а значит, данный ряд тоже сходится. ▲

*Пример 19*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln\,(n!)}$.

$\Delta$ Так как $\dfrac{1}{\ln\,(n!)} > \dfrac{1}{\ln\,(n^n)} = \dfrac{1}{n\ln\,n}$ и $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x\,\Big|_2^{\infty} = \infty$, то, согласно интегральному признаку и признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln\,(n!)}$ расходится. ▲

*Пример 20*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+2)}$.

$\Delta$ Пусть $a_n = \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+2)}$, $b_n = \dfrac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{3}{2}$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}$ удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Находим

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)} = \frac{1}{3}\int_1^{\infty} \ln^{-2}(3x+2)\, d\ln(3x+2) = -\frac{1}{3\ln(3x+2)}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{3\ln 5}.$$

Ряд сходится. ▲

*Пример 21*. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ с точностью до $\delta = 0{,}001$.

$\Delta$ Выясним, при каком количестве членов $|R_n| \le \delta$.

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \ldots \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Путем подбора легко найти, что $R_n \le \dfrac{1}{120\cdot 16} < 0{,}001$ при $n = 4$. Следовательно, $S \approx S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{48} + \dfrac{1}{384} \approx 0{,}648$. ▲

*Пример 22*. Оценить остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Вычислить сумму с точностью до $0{,}1$. Сколько нужно взять членов, чтобы вычислить сумму с точностью до $0{,}001$?

$\Delta$ Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают начиная с $(n+1)$-го, справедлива оценка $R_n \le \int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx$.

Воспользовавшись оценкой остатка ряда, получим $R_n \le \int\limits_n^{\infty} \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x}\Bigg|_n^{\infty} = \dfrac{1}{n}$.

Если взять первые 10 членов ряда, то $R_n \le \dfrac{1}{10}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \approx 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{100} \approx 1{,}6$ (с точностью до $0{,}1$). Чтобы обеспечить точность $\delta = 0{,}001$, нужно взять 1000 членов ряда. ▲

## Дополнительные задачи

1. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$. **Ответ:** $S = \frac{1}{4}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$. **Ответ:** $S = 2$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$. **Ответ:** $S = \frac{5}{4}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+1} + \sqrt[5]{n^4+2}}{\sqrt[6]{n^{11}+4} + \sqrt[3]{n^5+5}}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(5n^2+6)}{\sqrt[5]{n^6}}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{6^n \cdot (2n+1)! \cdot n!}$. **Ответ:** рассходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{9^n}$. **Ответ:** сходится.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n(\ln^4 n - 100)}$. **Ответ:** сходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$. **Ответ:** сходится.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2}$. **Ответ:** рассходится.

3. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n^2+1)^3}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0{,}0001$? **Ответ:** $n = 10$.

# Занятие 3

## Знакопеременные ряды

*Пример 1*. Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2 - 2n + 3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}$.

Δ а) Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2-2n+3}\right| \le \frac{1}{n^2-2n+3} \sim \frac{1}{n^2},\ n\to\infty.$$

Ряд сходится абсолютно.

б) Положим $n = 6k+1$. Находим $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=6k+1}} \sin\left(2\pi k+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \ne 0$.

Общий член ряда не стремится к нулю. Ряд расходится. ▲

*Пример 2.* Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие знакочередующиеся ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+10)}$;  б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{(2n+3)\,2^{2n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;  г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{4n}$.

Δ а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+10)}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Лейбница. Следовательно, он сходится.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+10)}$. С помощью правила Лопиталя легко показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+10)}{\sqrt{x}} = 0$. Следовательно, для достаточно больших $n$ $\dfrac{1}{\ln(n+10)} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+10)}$ сходится условно.

б) Исследуем ряд на абсолютную сходимость: $\dfrac{1}{(2n+3)\,2^{2n+1}} < \dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

Бесконечно убывающая прогрессия является сходящимся рядом.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{(2n+3)\,2^{2n+1}}$ сходится абсолютно.

в) Последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ не является монотонно убывающей, поэтому признак Лейбница не применим.

Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n-1}$ расходится, заключаем, что данный ряд также расходится.

г) Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{3n+1}{2n+7}; \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Ряд расходится.

д) Замечая, что $\operatorname{tg}\dfrac{1}{4n} \sim \dfrac{1}{4n}$, $n \to \infty$, заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg}\dfrac{1}{4n}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{4n}$ расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg}\dfrac{1}{4n}$ сходится условно. ▲

*Пример 3.* Сколько первых членов нужно взять в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, не превосходящую 0,001?

Δ Нужное число членов ряда можно найти путем подбора из неравенства $\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \le 0{,}001$. Это неравенство выполняется при $n = 7$. ▲

*Пример 4.* Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}.$$

Δ Общий член ряда запишем в виде

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha} = (-1)^n \frac{4}{n^\alpha \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)} =$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^{\alpha+1/2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{2}{n}}\right)}.$$

Так как $\dfrac{4}{n^{\alpha+1/2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{2}{n}}\right)} \sim \dfrac{2}{n^{\alpha+1/2}}$, $n \to \infty$, то при $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ряд сходится абсолютно; при $0 < \alpha + \dfrac{1}{2} \le 1$, $-\dfrac{1}{2} < \alpha \le \dfrac{1}{2}$ ряд сходится условно по признаку Лейбница; при $\alpha \le -\dfrac{1}{2}$ ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости, следовательно, является расходяшимся. ▲

# Самостоятельная работа

## Вариант 1

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}\cdot\sqrt[4]{n^3+3}}{n^2\cdot\sqrt[12]{3n^7+5}}$;  б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$;  г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n(n^2+3)}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$;  е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

**Ответ:** а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2+4n-3}$.

**Ответ:** $\dfrac{4}{3}$.

3. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,005?

**Ответ:** $n = 10$.

## Вариант 2

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+3}\cdot\sqrt[5]{n^4+1}}{n^2\cdot\sqrt[15]{2n^8+5}}$;  б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+3} \arcsin \dfrac{n+2}{n^3+4}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$;  г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(n+2)}{n^4}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n^2+5}\right)^{n^2}$;  е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{36^n\cdot(n!)^3}{(3n)!}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)\sqrt[3]{\ln(2n+1)}}$.

**Ответ:** а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+12n+5}$.

**Ответ:** $\frac{8}{15}$.

3. Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до $\frac{0{,}001}{3}$?

**Ответ:** $n=10$.

### Дополнительные задачи

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-3n+1}}{n}$.

**Ответ:** а) сходится абсолютно; б) расходится; в) сходится условно.

2. Установить сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$ следует взять, чтобы обеспечить требуемую точность $\alpha=0{,}0001$.

**Ответ:** $n\geq 10$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+3}\right)}.$$

**Ответ:** При $\alpha>2$ сходится абсолютно, при $1<\alpha\leq 2$ сходится условно, при $\alpha\leq 1$ расходится.

## Занятие 4

## Функциональные ряды

*Пример 1*. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln x}}$.

$\Delta$ Функции, из которых составлен ряд, определены на множестве $x>0$. Ряд сходится абсолютно при $\ln x>1$, т. е. при $x>e$. Для каждого $x$ из промежутка

$1 < x \le e$ ряд сходится условно по признаку Лейбница; при $0 < x \le 1$ ряд расходится, как неудовлетворяюший необходимому признаку сходимости. Таким образом, область сходимости данного ряда характеризуется неравенством $x > 1$. ▲

*Пример 2*. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Δ При $|x| < 1$ $\quad \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le |x^n|$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n|$ сходится как бесконечно убывающая прогрессия. По признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$. При $|x| > 1$

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le \left|\frac{x^n}{x^{2n}}\right| = \left|\frac{1}{x^n}\right|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{x^n}\right|$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$ сходится по признаку сравнения. При $x = \pm 1$ получаем ряды не удовлетворяюшие необходимому признаку сходимости. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$ сходится, причем абсолютно в области

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty). \ ▲$$

*Пример 3*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \dfrac{x \ln n}{x-n}$.

Δ Функции, из которых составлен ряд, определены на множестве $x \ne n$, где $x \in \boldsymbol{N}$. Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Применим признак Коши к ряду, составленному из модулей данного функционального ряда при фиксированном $x$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin^n \frac{x \ln n}{x-n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{x \ln n}{x-n}\right| = 0.$$

Ряд сходится, причем абсолютно, на всей числовой оси, за исключением точек $x = n$, где $x \in \boldsymbol{N}$. ▲

*Пример 4*. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}}{x^{3n}}$.

Δ Очевидно, $x \ne 0$. Применим признак Даламбера к ряду, составленному из модулей данного ряда при фиксированном $x$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n+1} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n+1} \cdot x^{3n}}{x^{3n+3} \cdot 8^n \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n+1} \cdot \dfrac{x}{n+1} \cdot x^{3n}}{x^{3n+3} \cdot 8^n \cdot \dfrac{x}{n}} \right| = \frac{8}{|x^3|}.$$

Данный функциональный ряд сходится абсолютно в области $\frac{8}{|x^3|} < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. В области $x \in (-2; 2)$ $(x \neq 0)$ ряд расходится. Точки $x = \pm 2$ исследуем отдельно. При $x = 2$ $u_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{2}{n} \sim \frac{2}{n}, n \to \infty$. Ряд расходится. При $x = -2$ $u_n(x) = (-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{2}{n} \sim (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, n \to \infty$. Ряд сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. ▲

*Пример 5*. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+2)^n}{3^n \sqrt[3]{n+2}}$.

Δ Найдем радиус сходимости данного ряда: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n+3}}{3^n \sqrt[3]{n+2}} = 3$.

Ряд сходится в области $-3 < x + 2 < 3$, т. е. в интервале $-5 < x < 1$. При $x = -5$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \sim \frac{1}{n^{1/3}}, n \to \infty$, этот ряд расходится. При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$, который сходится по признаку Лейбница. Область сходимости ряда $x \in (-5; 1]$. ▲

*Пример 6*. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-3)^n}{2^n}$.

Δ $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!} = 0$. Ряд сходится в единственной точке $x = 3$. ▲

*Пример 7*. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!(x+4)^n}{(2n)!}$.

$$\Delta\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n! \cdot (2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)! \cdot 3^{n+1} \cdot n!(n+1)} = \infty.$$

Область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$. ▲

*Пример 8*. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(2n+3)\, 8^{n+1}}$.

Δ Ряд содержит бесконечное число нулевых членов. Применим общий подход нахождения области сходимости функциональных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+5} \cdot (2n+3) \cdot 8^{n+1}}{(2n+5) \cdot 8^{n+2} \cdot x^{3n+2}}\right| = \frac{|x^3|}{8}.$$

Данный ряд сходится (и притом абсолютно), если $\frac{|x^3|}{8} < 1$, т. е. $-2 < x < 2$.

При $x = -2$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^{3n+2}}{(2n+3)\,8^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 8^n}{(2n+3)\cdot 8 \cdot 8^n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+3}$.
Этот ряд сходится по признаку Лейбница. При $x = 2$ получаем расходящийся ряд $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+3}$. Область сходимости ряда $x \in [-2; 2)$. ▲

*Пример 9*. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Δ Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0 \text{ при } |x-2| \le 1, \\ \infty \text{ при } |x-2| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится, если $|x-2| \le 1$, т. е. в промежутке $1 \le x \le 3$. ▲

*Пример 10*. Установить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ на всей числовой оси.

Δ Для всех значений $x$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Это значит, что ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ мажорирует данный функциональный ряд на $(-\infty; +\infty)$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ – сходящийся, то данный функциональный ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на всей числовой оси. ▲

*Пример 11*. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ на промежутке $0 < x < \infty$.

Δ На этом промежутке ряд сходится лишь условно и поэтому признак Вейерштрасса не применим. Однако, пользуясь известной оценкой знакочередующегося ряда $(|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)|)$, получим $|R_n(x)| \le \left|\dfrac{1}{x+n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для достаточно больших $n$ $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Это и свидетельствует о равномерной сходимости данного ряда в упомянутом промежутке. ▲

*Пример 12*. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно на промежутке $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$.

Δ В указанном промежутке ряд сходится как бесконечно убывающая прогрессия. Оценим остаток ряда:

$$|R_n(x)| = |x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|.$$

Но $\lim\limits_{x\to -1+0} |R_n(x)| = \frac{1}{2}$. Следовательно, приняв $\varepsilon < \frac{1}{2}$, мы не сможем добиться неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$ при любом значении $x$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно. ▲

*Пример 13*. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Δ Составим вспомогательный степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ и обозначим его сумму через $S(x)$. Нужно найти $S(1)$. Радиус сходимости этого ряда $R = 2$. Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n \cdot 2^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

Проинтегрируем теперь обе части равенства $S'(x) = \frac{1}{2-x}$ на отрезке $[0; x]$:

$$\int_0^x S'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{2-t}.$$

$S(x) - S(0) = -\ln(2-x) + \ln 2$. Так как $S(0) = 0$, то $S(1) = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x^2 - 4x + 6)^n}{(n+1) \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n - e^x)(n^2 + 1)}$.

**Ответ:** а) $x \in [1; 3]$; б) ряд расходится на всей числовой оси $(x \neq 0)$; в) областью допустимых значений $x$ является, $x \neq \ln n$, в этой области ряд сходится.

2. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(1+4n) \cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^{n^2}}{(n+3)^n}$;

в) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+3}{n-5}$.

**Ответ:** а) $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $x \in [-5; -3]$; в) $x \in [2; 4]$.

3. Показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+n)(x+n+1)}}$ сходится равномерно к $\frac{1}{x}$ в интервале $0 < x < \infty$.

4. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. Найти сумму ряда $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots$.

**Ответ:** $S(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $x \in (-1; 1)$.

## Занятия 5–6

## Ряды Тейлора

*Пример 1.* Методом непосредственного разложения найти два первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $y = \operatorname{tg} x$.

$\Delta$ Имеем

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ f(0) = 0;$

$f'(x) = \cos^{-2} x,\ f'(0) = 1;$

$f''(x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x,\ f''(0) = 0;$

$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x,\ f'''(0) = 2;$

$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots = x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$ . ▲

*Пример 2.* Методом непосредственного разложения представить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$.

$\Delta$ Вычислим значения данной функции и ее производные в точке $x_0 = -2$:

$f(x) = x^{-1}, \quad f(-2) = -\frac{1}{2};$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}, \quad f'(-2) = -\frac{1!}{2^2};$

$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}, \quad f''(-2) = -\frac{2!}{2^3};$

$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4} \quad f'''(-2) = -\frac{3!}{2^4};$

---

$f^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1} \quad f^{(n)}(-2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}.$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1!(x+2)}{2^2 \cdot 1!} - \frac{2!(x+2)^2}{2^3 2!} - \ldots - \frac{n!(x+2)^n}{2^{n+1} n!} - \ldots = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}.$$

Для нахождения области сходимости ряда к функции $f(x)$ выполним следующие преобразования:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x+2)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}}.$$

Функция может быть представлена сходящимся степенным рядом по степеням $x+2$, если $\left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$, т. е. $x \in (-4; 0)$. ▲

*Пример 3*. Используя метод неопределенных коэффициентов, найти три первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $y = \operatorname{tg} x$.

Δ Имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots.$$

Запишем тождество

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots).$$

Перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим систему линейных уравнений:

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 - \frac{a_0}{2} = 0,$$

$$a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{a_0}{24} = 0,$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120},$$

из которой находим $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2}{15}$.

Имеет место разложение $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$. ▲

*Пример 4*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(2-3x)$.

Δ Из равенства $\ln(2-3x) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$ и формулы

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1<x\le 1)$ следует, что

$$\ln(2-3x)=\ln 2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3x^3-\ldots=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n .$$

Ряд сходится к функции $f(x)$ в области $-1<-\frac{3}{2}x\le 1$, т. е. $x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. ▲

*Пример 5*. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{3x+4}$ по степеням $x+2$.

Δ Так как $\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{3x+6-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}(x+2)}$, то заменив в разложении

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (x\in(-1;1))$$

$x$ на $\frac{3}{2}(x+2)$ получим $f(x)=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n$. Оно справедливо, когда $\left|\frac{3(x+2)}{2}\right|<1$, т. е. $x\in\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$. ▲

*Пример 6*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Δ Найдем коэффициенты ряда Маклорена. Как известно, $(\sin x)^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)$. Следовательно, $\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{(k)}=2^k\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$ и $f^{(k)}(0)=2^k\sin\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Отсюда получаем $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\sin\frac{\pi}{4}(2k+1)\,x^k$.

Так как $\left|\frac{2^k}{k!}\sin\frac{\pi}{4}(2k+1)\,x^k\right|\le\left|\frac{2^kx^k}{k!}\right|$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2^kx^k}{k!}\right|$ сходится на всей числовой оси, то и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\sin\frac{\pi}{4}(2k+1)\,x^k$ тоже сходится на всей числовой оси. Выясним теперь, при каких $x\in(-\infty;+\infty)$ построенный ряд Маклорена сходится к функции $f(x)$. Запишем остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа: $R_n(x)=\frac{2^{n+1}\sin\left(2\cdot\theta x+\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Так как $|R_n(x)|\le\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ является сходящимся на всей числовой оси, то отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$. Таким образом, построенный ряд Маклорена сходится к $f(x)$ на промежутке $x \in (-\infty; +\infty)$. ▲

*Пример 7*. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$.

Δ Разложим в ряд Тейлора функцию $\dfrac{1}{3-x}$. Из равенства

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-((x-1)+1)} = \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}$$

получаем

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{2^n}\ldots\right).$$

Имеем

$$\frac{1}{(3-x)^2} = \left(\frac{1}{3-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2\,(x-1)}{2^2} + \frac{3\,(x-1)^2}{2^3} + \ldots + \frac{n\,(x-1)^{n-1}}{2^n} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{2^n}.$$

Разложение справедливо в области $\dfrac{|x-1|}{2} < 1$, т. е. $x \in (-1; 3)$. ▲

*Пример 8*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sin x}$ до члена, содержащего $x^6$.

Δ Функцию $\dfrac{1}{1+\sin x}$ необходимо разложить в ряд Маклорена до члена, содержашего $x^4$, и полученное выражение умножить на $x^2$:

$$\frac{1}{1+\sin x} = 1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \sin^4 x - \ldots =$$

$$= 1 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^4 + \ldots =$$

$$= 1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^3 + x^4 + \ldots = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots\ .$$

$$\frac{x^2}{1+\sin x} = x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \ldots\ .$$

Разложение справедливо в области $|\sin x| < 1$, т. е. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. ▲

*Пример 9*. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,01.

$\Delta$ Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$. Полагая в биномиальном ряде

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$x = \dfrac{1}{16}$, $\alpha = \dfrac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{17} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3} - \ldots\right).$$

Вычислим несколько последовательных первых членов ряда: $a_1 = 1,\ a_2 \approx 0{,}1562,\ a_3 \approx -0{,}00037$. Согласно следствию теоремы Лейбница, если ограничиться суммой первых двух слагаемых, то ошибка искомого приближенного значения корня не будет превосходить $2\cdot(0{,}00037) < 0{,}01$.

Следовательно, $\sqrt[4]{17} \approx 2\left(1+0{,}01562\right) \approx 2{,}03$. ▲

*Пример 10.* Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,001.

$\Delta$ В разложении функции $e^x$ полагаем $x = \dfrac{1}{4}$:

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2\cdot 2!} + \frac{1}{4^3\cdot 3!} + \frac{1}{4^4\cdot 4!} + \ldots.$$

Если взять четыре члена этого ряда $(n=3)$, то ошибка вычислений не будет превышать 0,001. Действительно,

$$\frac{1}{4^4\cdot 4!} + \frac{1}{4^5\cdot 5!} + \frac{1}{4^6\cdot 6!} + \ldots < \frac{1}{4^4\cdot 4!} + \frac{1}{4^6\cdot 4!} + \frac{1}{4^8\cdot 4!} + \ldots = \frac{1}{4^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} < 0{,}001.$$

Подсчитав сумму четырех выписанных членов ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1{,}284$. ▲

*Пример 11.* Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$.

$\Delta$ Так как $\operatorname{tg}^4 x \sim x^4,\ x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^4 + \ldots\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\ldots\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)x^4+\ldots}{x^4} =$$

$$= -\frac{1}{24}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8} = \frac{-1+6+3}{24} = \frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

*Пример 12*. Вычислить с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx$.

$\Delta$ Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ и заменяя в нем $x$ на $x^2$, имеем

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ \ldots \ (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Почленно интегрируя и подставляя пределы интегрирования, получим

$$\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx = \int\limits_0^{1/4} \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots \ + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \ldots \ \right) \Bigg|_0^{1/4} = \frac{1}{4^3\cdot 3} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \frac{1}{4^{11}\cdot 5!\cdot 11} - \ldots .$$

Остаток этого ряда оценивается первым отбрасываемым членом. Так как $\frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} < 0{,}001$, то $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx \approx \frac{1}{192} \approx 0{,}005$. $\blacktriangle$

*Пример 13*. Вычислить с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

$\Delta$ Полагая в биномиальном ряде $t = x^4, \alpha = -\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + \ldots .$$

Этот ряд сходится в области $|x| < 1$. Интегрируя в пределах от $0$ до $\frac{1}{2}$, находим

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left( x - \frac{1}{2}\ \frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 9} - \ldots \right) \Bigg|_0^{1/2} .$$

Этот ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Его остаток оценивается первым отбрасываемым членом. Очевидно, $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} < 0{,}001$.

Следовательно, $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} \approx 0{,}497$. $\blacktriangle$

*Пример 14*. Найти пять первых членов разложения в ряд Маклорена решения дифференциального уравнения $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

$\Delta$ Из данного уравнения находим $y''(0) = 4 + 0 = 4$. Дважды дифференцируем исходное уравнение:

$$y''' = 2y' \cdot y'' + y + xy', \ \ y'''(0) = -16 + 4 = -12;$$
$$y^{IV} = 2y''^2 + 2y'y''' + 2y' + xy'', \ \ y^{IV}(0) = 76.$$

Подставляя полученные значения производных в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \ldots . \ \blacktriangle$$

## Дополнительные задачи

1. Найти первые три отличных от нуля члена ряда Маклорена для функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$; б) $f(x) = e^{\sin x}$.

**Ответ:** а) $1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4$; б) $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$.

2. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$, если:

а) $f(x) = (x+5)\, e^{2x}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \ln\,(2x - x^2 + 3)$, $x_0 = 2$.

**Ответ:** а) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{n!}\,(n+10)\, x^n$, $x \in R$;

б) $f(x) = \ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n} - 1 \right) \dfrac{(x-2)^n}{n}$, $1 \le x < 3$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4} \right)$.

**Ответ:** $\dfrac{1}{60}$.

4. Вычислить $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0{,}001$.

**Ответ:** $3{,}079$.

5. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1 + x^3}\, dx$, $\alpha = 0{,}001$.

**Ответ:** $0{,}508$.

6. Методом последовательного дифференцирования найти первые $k$ членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

а) $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 0{,}5$, $k = 4$;

б) $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$, $k = 5$.

**Ответ:** а) $y = 2 + \dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{5}{2}(x+1)^2 + \dfrac{15}{16}(x+1)^4 + \ldots$;

б) $y = 1 + 2x - x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{17}{9}x^4 \ldots$.

# Занятие 7

## Контрольная работа

### Вариант 1

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1)^{3x+1}}$.

**Ответ:** $x>\dfrac{1}{6}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n}\cdot\frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}.$$

**Ответ:** $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{\sqrt[3]{2n+3}\cdot 3^n}$.

**Ответ:** $x\in(-7;-1]$.

4. Разложить функцию $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$.

**Ответ:** $f(x)=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3$.

5. Найти методом непосредственного разложения первые три отличные от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

**Ответ:** $f(x)=x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\ldots$.

6. Функцию $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$. Указать область сходимости ряда.

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3-\dfrac{7}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n,\ x\in(2;4)$.

7. Вычислить $\sqrt[3]{8{,}36}$ с точностью до $0{,}01$.

**Ответ:** $2{,}03$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.

**Ответ:** $-1$.

9. Вычислить $\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$ с точностью до $0{,}001$.

**Ответ:** $0{,}521$.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первые 4 члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^3, \ y(0) = \frac{1}{2}$.

**Ответ:** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots$.

## Вариант 2

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[5]{n^3} + \sqrt{n} + 2)^{5x+2}$.

**Ответ:** $x < -\frac{11}{15}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} \cdot \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

**Ответ:** $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{\sqrt[3]{3n+2}}$.

**Ответ:** $-3{,}5 \le x < -2{,}5$.

4. Разложить функцию $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$.

**Ответ:** $f(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$.

5. Найти методом непосредственного разложения первые два отличные от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x) = e^{\cos x}$.

**Ответ:** $f(x) = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)$.

6. Функцию $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$. Указать область сходимости ряда.

**Ответ:** $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 3(-1))^n}{2^{n+1}} (x+1)^n, \ x \in (-3; 1)$.

7. Вычислить $\sqrt[3]{80}$ с точностью до $0{,}01$.

**Ответ:** $4{,}31$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{\sin x - x}$.

**Ответ:** $0$.

9. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\, dx$ с точностью до $0{,}001$.

**Ответ:** $0{,}508$.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первые 4 члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + y^2,\ y(0) = 1$.

**Ответ:** $y = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \ldots$.

## Занятия 8–10

## Ряды Фурье

*Пример 1*. Функцию $f(x) = \sin^4 x$ разложить в ряд Фурье.

Δ Использовав известные формулы тригонометрии, получим

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x. \ ▲$$

*Пример 2*. Доказать ортогональность системы функций на отрезке $\left[\,0; \dfrac{\pi}{2}.\right]$

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \ldots,\ \ \sin(2n+1)\,x,\ \ldots.$$

Δ Для $n \neq m,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2n+1)\sin(2m+1)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos 2(n-m)\,x - \cos 2\,(n+m+1)\,x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\,(n-m)\,x}{2\,(n-m)}\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\,(n+m+1)x}{2\,(n+m+1)}\Bigg|_0^{\pi/2} = 0. \ ▲$$

*Пример 3*. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x+2, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad T = 2\pi.$$

Δ Так как данная функция кусочно-монотонная и ограниченная, то она разлагается в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(x+2)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x+2, & dv = \cos nx dx \\ du = dx, & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x+2}{n}\sin nx\,\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) =$$

$$=\frac{-1}{n^2\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 \quad \text{при } n=2k,\\ \dfrac{-2}{(2k-1)^2\pi}, \; n=2k-1, \; n\neq 0;\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi+4}{2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\sin nx dx=\begin{vmatrix}u=x+2, & dv=\sin nx dx\\ du=dx, & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x+2}{n}\cos nx\,\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}-\frac{\pi+2}{n}(-1)^n\right)+\frac{1}{n^2}\sin nx\,\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((1-(-1)^n\cdot\frac{2}{n}-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)=\begin{cases}\dfrac{n+4}{\pi(2k-1)} & \text{при } n=2k-1,\\ -\dfrac{1}{2k} & \text{при } n=2k.\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi+4}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\pi+4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}.$$

График суммы ряда изображен на рис. 1.

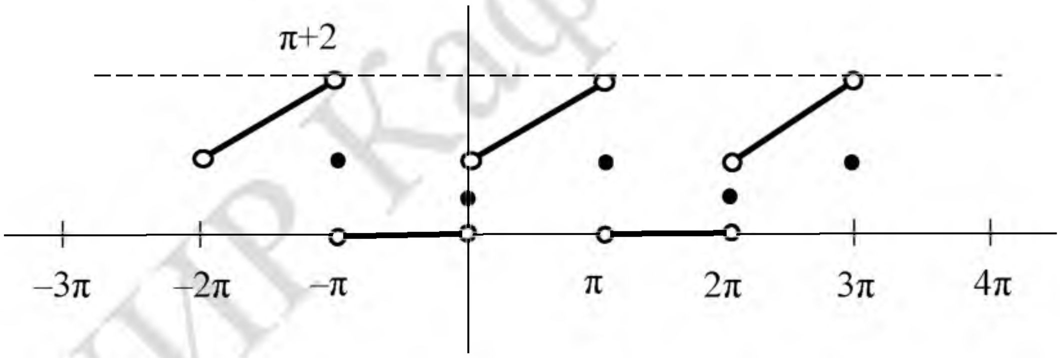


Рис. 1

График функции $f(x)$ отличается от графика суммы ряда только тем, что в точках $x=\pi k$ функция $f(x)$ не определена. ▲

*Пример 4*. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ при $-\pi\le x\le\pi$; $f(x)=f(x+2\pi)$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда:

а) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$; б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$.

Δ Вычисляем коэффициенты ряда. Так как данная функция является четной, то $b_n=0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{4}{\pi n^2}(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ n\neq 0;$$

при $n=0$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$. По найденным коэффициентам записываем искомое разложение: $f(x)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении $x$, т. е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. Графики данной функции и суммы ее ряда полностью совпадают (рис. 2).

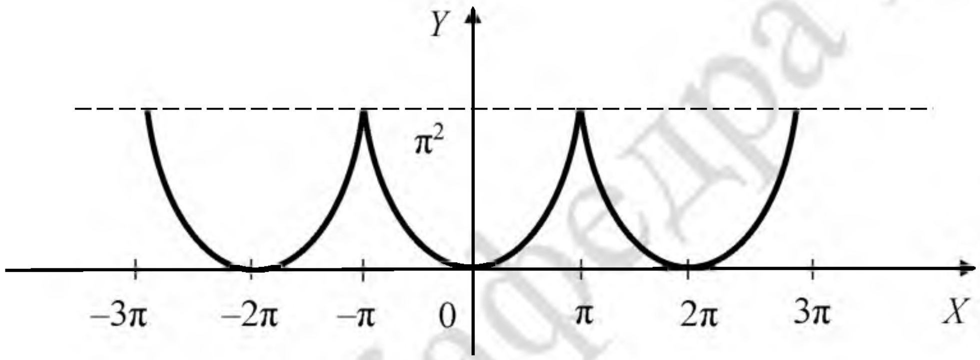


Рис. 2

Полагая в полученном разложении $x=0$, найдем

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$$

и, полагая $x=\pi$, найдем

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.\ \blacktriangle$$

*Пример 5*. Разложить в ряд Фурье функцию $y=x^2$, заданную на интервале $(0;2\pi)$. Изобразить график функции и график суммы ряда.

$\Delta$ Функция $f(x)$ не принадлежит к классу четных или нечетных функций. Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}(x\cdot\cos nx)\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{4}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx = -\frac{1}{\pi n}(x^2\cos nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx =$$
$$= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}.$$

Поэтому для $0 < x < 2\pi$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Графики функции $y = f(x)$ и суммы ряда изображены на рис. 3 и 4 соответственно.

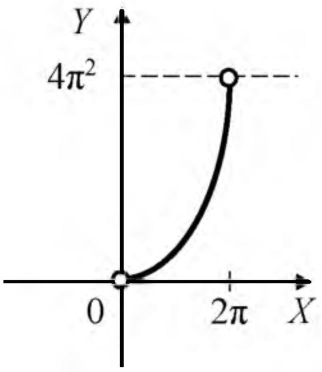


Рис. 3

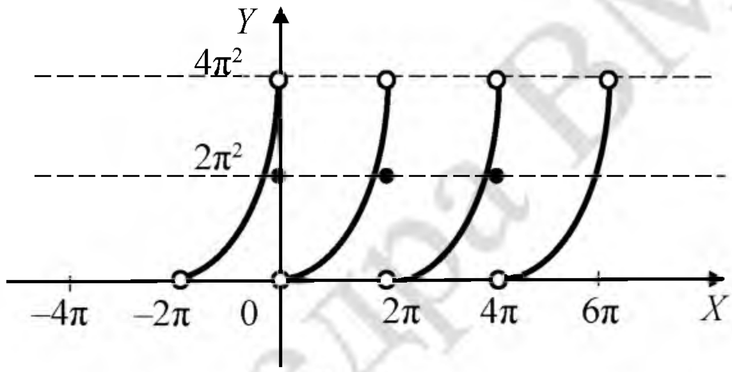


Рис. 4

▲

*Пример 6.* Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin ax$ в интервале $(-\pi; \pi)$ ($a$ – не целое).

Δ Осуществив периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую ось, получим новую функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы Дирихле. Найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $f_1(x)$.

В силу нечетности функции $f_1(x)$ коэффициент $a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin a\pi}{a-n} - \frac{(-1)^n\sin a\pi}{a+n}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin a\pi.$$

В интервале $(-\pi; \pi)$ функции $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают. Таким образом, имеем: $\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$ $(|x| < \pi)$. ▲

*Пример 7.* Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в интервале $(1; 5)$.

Δ Продолжим эту функцию периодически $(\mathrm{T} = 4 = 2l)$ на всю числовую ось. Полученная функция разложима в сходящийся ряд Фурье на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^5 x dx = \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_1^5 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left( x\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^5 - \frac{2}{n\pi}\int_1^5 \sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_1^5 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^5 + \frac{2}{n\pi}\int_1^5 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

(Очевидно, что $\int_1^5 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_1^5 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = 0$).

Таким образом,

$$x = 3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2} =$$

$$= 3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}(1-x)\right),\ x\in(1;5).$$

Графики функции и ряда Фурье изображены на рис. 5 и 6 соответственно.

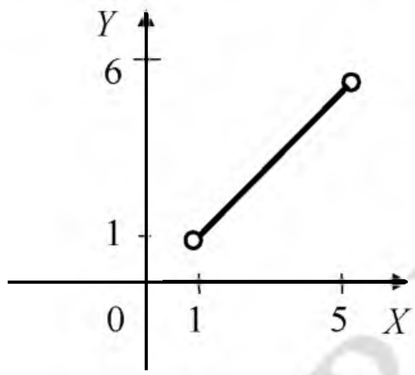


Рис. 5

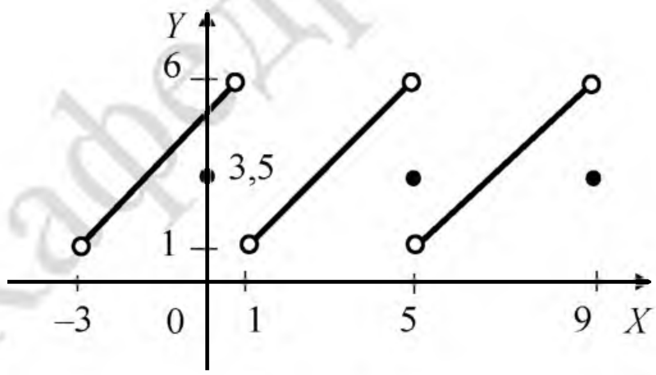


Рис. 6

▲

*Пример 8*. Разложить в ряд Фурье функцию $y = |\sin x|$. Используя полученное разложение, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Δ Очевидно, $|\sin x|$ есть четная функция с периодом $\pi$. Так как $2l = \pi$, то ряд Фурье имеет вид

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nx,\ \text{где}\ a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(2n-1)x dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(2n+1)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Следовательно,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

Отсюда при $x=0$ получаем

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что если положить $T=2\pi$, то мы получим тот же результат. ▲

*Пример 9.* Функция $f(x)$ задана на полупериоде

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } 0<x<0{,}5, \\ -1 \text{ при } 0{,}5<x<1. \end{cases}$$

Представить ее рядом Фурье.

Δ Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

1) Доопределим функцию $f(x)$ на интервале (–1; 0) четным образом (рис. 7).

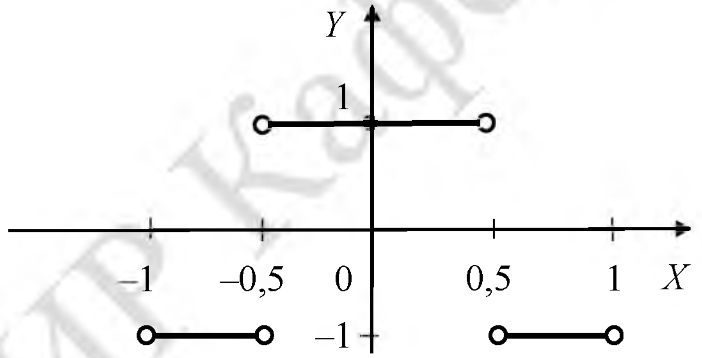


Рис. 7

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем $b_n = 0$;

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{0,5} 1\cdot\cos n\pi x\,dx + 2\int_{0,5}^{1}(-1)\cdot\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^{0,5} -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{0,5}^{1} = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\neq 0;$$

$$a_0 = 2\left(\int_0^{0,5}dx - \int_{0,5}^{1}dx\right) = 2\left(x\Big|_0^{0,5} - x\Big|_{0,5}^{1}\right) = 0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, таково:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos n\pi x=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1}-\frac{\cos 3\pi x}{3}+\frac{\cos 5\pi x}{5}-\ldots\right)=$$
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$

Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащей только синусы, доопределим ее на интервале $(-1;0)$ нечетным образом (рис. 8).

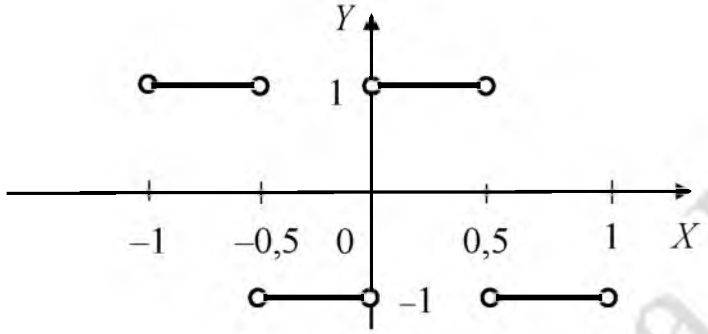

Рис. 8

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем $a_n=0,\ n=0,1,2,\ldots$;

$$b_n=2\int_0^{0,5}\sin n\pi x dx-2\int_{0,5}^{1}\sin n\pi x dx=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^{0,5}+\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{0,5}^{1}=$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}+1\right).$$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, таково:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}+1\right)\sin n\pi x=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1}+\frac{\sin 6\pi x}{3}+\frac{\sin 10\pi x}{5}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\cdot(2k-1)\pi x)}{2k-1}.\ \blacktriangle$$

*Пример 10.* Записать разложение функции $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме. Преобразовать полученный ряд в действительный ряд Фурье.

$\Delta$ Вычислим коэффициенты

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx=\begin{vmatrix}x=u,\ dv=e^{-inx}dx\\ du=dx,\ v=-\frac{1}{in}e^{-inx}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\pi}{in}e^{-in\pi}-\frac{\pi}{in}e^{in\pi}+\frac{1}{n^2}\left(e^{-in\pi}-e^{in\pi}\right)\right)=\frac{-1}{2in}(\cos n\pi-i\sin n\pi+\cos n\pi+i\sin n\pi)=$$
$$=-\frac{(-1)^n\cdot 2}{2in}=\frac{(-1)^n\cdot i}{n},\ n\neq 0.\ \text{При } n=0\quad c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0.$$

Получаем разложение $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx},\ n \neq 0,\ -\pi < x < \pi$.

Чтобы записать действительный ряд Фурье, воспользуемся тем, что $\frac{a_0}{2} = c_0,\ a_n = \operatorname{Re} 2c_n,\ b_n = -\operatorname{Im} 2c_n$. Следовательно, $\frac{a_0}{2} = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$.

Действительный ряд Фурье имеет вид $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,\ -\pi < x < \pi$. ▲

*Пример 11.* Разложить в комплексный ряд Фурье функцию $f(x) = e^{-x}$, заданную в интервале $(-\pi;\, \pi)$. Записать действительный ряд Фурье.

Δ Вычисляем коэффициент $c_n$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{1}{2\pi}\, \frac{-1}{1+in} e^{-(1+in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi(1+in)}\left(e^{-\pi(1+in)} - e^{\pi(1+in)}\right) = \frac{1}{2\pi(1+in)}\left(e^{\pi}\cdot e^{i\pi n} - e^{-\pi}\cdot e^{-\pi i n}\right) =$$

$$= \left| e^{\pm i\pi n} = (-1)^n \right| = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+in)} = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})(1-in)}{2\pi(1+n^2)}.$$

Получаем разложение $e^{-x} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{inx},\ -\pi < x < \pi$.

Так как

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi},\ a_n = \operatorname{Re} 2c_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)},\ b_n = -\operatorname{Im} 2c_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) n}{\pi(1+n^2)},$$

то $e^{-x} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\cos nx + n \sin nx)}{1+n^2}\right),\ -\pi < x < \pi$. ▲

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

1. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x < 1, \\ 0 \text{ при } 1 < x < \pi, \end{cases}$ заданную в интервале $(0;\, \pi)$, разложить по косинусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

**Ответ:** $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx\right)$.

2. Функцию $f(x) = x\ (0 < x < 2)$ разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

**Ответ:** а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$; б) $1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1) n x}{2}}{(2n-1)^2}$.

3. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases} 3, & -3<x<0, \\ \dfrac{3}{2}, & x=0, \\ -x, & 0<x<3. \end{cases}$ $(l=3)$

**Ответ:**

$$f(x)=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}-\frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{2n-1}+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k\pi x}{3}}{2k}.$$

## Вариант 2

1. Функцию $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } 0<x<2, \\ 0 \text{ при } 2<x<\pi, \end{cases}$ заданную в интервале $(0;\pi)$, разложить по синусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

**Ответ:** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{n}\sin nx$.

2. Функцию $f(x)=x$ $(0<x<3)$ разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

**Ответ:** а) $\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{n}$; б) $\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)x\pi}{3}}{(2n-1)^2}$.

3. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0, \\ -\dfrac{1}{2}, & x=0, \quad (2l=4), \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x<2. \end{cases}$

**Ответ:** $-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)nx}{2}}{(2n-1)^2}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)nx}{2}}{2n-1}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{2n}$.

## Дополнительные задачи

1. Функция $f(x)=\begin{cases} 1, & 3\pi<x<4\pi, \\ 3, & 4\pi<x<5\pi \end{cases}$ задана в интервале $(3\pi;5\pi)$. Разложить эту функцию в ряд Фурье.

**Ответ:** $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

2. Разложить по синусам на отрезке $[0;\pi]$ функцию $f(x)=\cos 2x$.

**Ответ:** $-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\dots\right)$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{\pi+10}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-\dfrac{\pi+10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\dfrac{3}{2},\\ -1, & \dfrac{3}{2}<x<3.\end{cases}$

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{3}}{2n+1}$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T=2$ функцию, определенную на всей числовой оси и заданную на отрезке $[-1;1]$ равенством

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ 0{,}5 & \text{при } x=0,\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi x}{n}$.

## Занятие 11

## Интеграл Фурье

*Пример 1*. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;1],\\ 0, & x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty).\end{cases}$$

Δ Очевидно, что функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье. Запишем интеграл Фурье в виде

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x dt+B(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

где

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt.$$

Находим

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\cos\omega t dt=\frac{1}{\omega\pi}\sin\omega t\Big|_0^1=\frac{\sin\omega}{\omega\pi};$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sin\omega t dt=-\frac{1}{\omega\pi}\cos\omega t\Big|_0^1=\frac{1-\cos\omega}{\omega\pi}.$$

Интеграл Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega\cos\omega x+(1-\cos\omega)\sin\omega x\right)d\omega.$$

В точках разрыва $x=0$ и $x=1$ интеграл сходится к числу $\frac{1}{2}$. ▲

*Пример 2.* Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{при } 0<x<\pi,\\ 0 & \text{при } x\geq\pi.\end{cases}$$

Δ На промежутке $(-\infty;0)$ функцию $f(x)$ можно доопределить различными способами. Ограничимся двумя частными случаями. Доопределим функцию $f(x)$ четным образом (рис. 9).

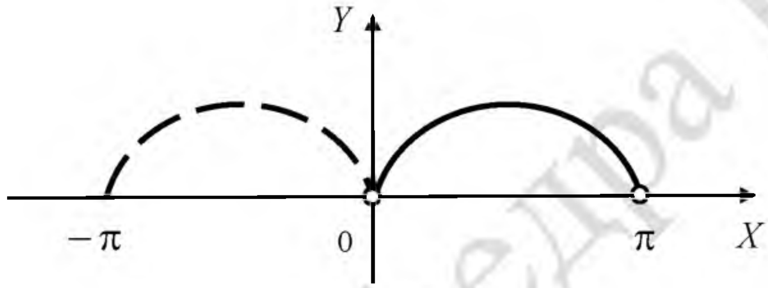


Рис. 9

Найдем

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi}\sin t\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\pi}(\sin(1+\omega)\,t+\sin(1-\omega)\,t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\cos(1+\omega)\,t}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)\,t}{1-\omega}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1-\omega^2}-\frac{\cos(1+\omega)\,\pi}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)\,\pi}{1-\omega}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

Если функцию $f(x)$ доопределить нечетным образом (рис. 10), то

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

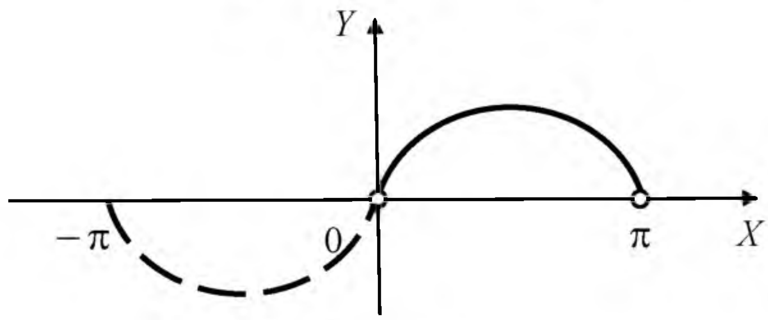


Рис. 10

Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega \ \ (x\geq 0)$$

или

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}F_S(\omega)\sin\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega x d\omega \ \ (x\geq 0). \ \blacktriangle$$

*Пример 3.* Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{при } |x|\leq 1,\\ 0 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

$\Delta$ Функция четная (рис. 11), поэтому

$$B(\omega)=0,\ \ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}(1-t)\cos\omega t\,dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}1-t=u,\ du=-dt\\ \cos\omega t dt=dv,\ v=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-t}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^1+\frac{1}{\omega}\int\limits_0^1\sin\omega t dt\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^1=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)=\frac{4\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{\pi\omega^2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}}\right)^2.$$

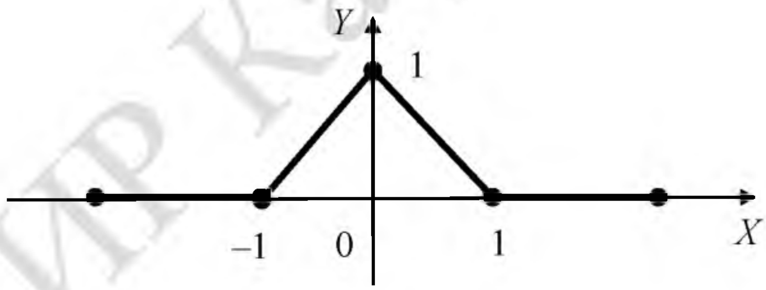


Рис. 11

Тогда $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}}\right)^2\cos\omega x d\omega$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то интеграл Фурье при всех $x$ совпадает с $f(x)$. $\blacktriangle$

*Пример 4.* Функцию $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|<1,\\ 0 & \text{при } |x|\geq 1\end{cases}$ представить интегралом Фурье в комплексной форме.

$\Delta$ Имеем $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(i\omega)e^{i\omega x}d\omega$, где $F(i\omega)=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$.

Функция $F(i\omega)$ называется прямым преобразованием Фурье, а функция $f(x)$ – обратным преобразованием Фурье.

Найдем

$$F(i\omega)=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)=\frac{2\sin\omega}{\omega};$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega.$$

В полученном равенстве положим $x=0$. Получим $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=1$ или $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x dx}{x}=\frac{\pi}{2}$. ▲

*Пример 5*. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-x}$ $(x>0)$.

Δ Продолжим функцию $f(x)$ на отрицательную полуось четным образом.

Найдем $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos\omega t\,dt$. Как известно, $\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+c$. Следовательно,

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-t}\frac{-\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}\bigg|_{0}^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Продолжим функцию $f(x)$ $(x>0)$ на отрицательную полуось нечетным образом.

Найдем $F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin\omega t\,dt.$

Так как $\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+c$, то

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-x}\frac{-a\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{1+\omega^2}\bigg|_{0}^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Применив обратные преобразования Фурье, получим

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega=e^{-x}(x\geq 0),\quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=e^{-x}(x>0).$$

Отсюда найдем интегралы Лапласа:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x}(x\geq 0);\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x}(x>0).\ ▲$$

## Дополнительные задачи

1. Функцию $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 2\le x\le 6,\\ 0 & \text{при } x<2 \text{ и } x>6\end{cases}$ представить интегралом Фурье.

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega\,(x-4)\,d\omega.$

2. Функцию $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2} & \text{при } x\in[-\pi;\pi],\\ 0 & \text{при } x<-\pi \text{ и } x>\pi\end{cases}$ представить интегралом Фурье.

**Ответ:** $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2}\cos\omega x\,d\omega.$

3. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-x}, & \text{если } x\in[0;+\infty],\\ 0, & \text{если } x\in(-\infty;0).\end{cases}$$

**Ответ:** $F(i\omega)=\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}.$

# Занятие 12

## Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости

*Пример 1*. Вычислить $\dfrac{4+5i}{3-4i}$.

Δ Находим $\dfrac{4+5i}{3-4i}=\dfrac{(4+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{-8+31i}{25}=-\dfrac{8}{25}+\dfrac{31}{25}i$. ▲

*Пример 2*. Вычислить по формуле Муавра $w=(1-i\sqrt{3})^{60}$.

Δ Применяем формулу Муавра:

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

где $\varphi$ – одно из значений $\operatorname{Arg} z$.

Запишем число $z$ в тригонометрической форме:

$$z=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Применяя формулу Муавра, получим

$$(1-i\sqrt{3})^{60}=2^{60}(\cos(-20\pi)+i\sin(-20\pi)=2^{60}. \ \blacktriangle$$

*Пример 3*. Вычислить $\sqrt[4]{-1+i}$.

$\Delta$ Корень $n$-й степени из комплексного числа $z$ имеет $n$ значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,\ n-1.$$

Представим комплексное число $z=-1+i$ в тригонометрической форме:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Следовательно, $\sqrt[4]{-1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)$.

Полагая $k=0,1,2,3,$ найдем четыре значения корня:

$k=0,\ w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{16}+i\sin\dfrac{3\pi}{16}\right),$

$k=1,\ w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{16}+i\sin\dfrac{11\pi}{16}\right),$

$k=2,\ w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{16}+i\sin\dfrac{19\pi}{16}\right),$

$k=3,\ w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{27\pi}{16}+i\sin\dfrac{27\pi}{16}\right).$ $\blacktriangle$

*Пример 4*. Используя показательную форму комплексных чисел, вычислить $(1+i\sqrt{3})^3(1+i)^2$.

$$\Delta\ \ (1+i\sqrt{3})^3(1+i)^2=\left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^3\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^2=2^3e^{\pi i}\cdot 2e^{\frac{\pi i}{2}}=16e^{\frac{3}{2}\pi i}=$$

$$=16\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-16i.\ \blacktriangle$$

*Пример 5*. Исследовать на ограниченность последовательности

$$z_n=i^n,\ w_n=(1+i)^n.$$

$\Delta$ Так как $|z_n|=|i^n|=1$, то для любого $n\in N$ выполняется, например, $|z_n|<2$. По определению последовательность $z_n$ – ограниченная. Для последовательности $w_n$ находим $|w_n|=(|1+i|)^n=(\sqrt{2})^n$. Очевидно, что для любого $\mu>0$ найдется $N$, что для любого $n>N$ $(\sqrt{2})^n>\mu$. Следовательно, последовательность $w_n=(1+i)^n$ является не только неограниченной, но и бесконечно большой.

Применяя определение, можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3ni}{n+1}=1+3i$.

Составляем последовательность

$$\alpha_n=z_n-A=\frac{n+3ni}{n+1}-(1+3i)=\frac{n+3ni-n-1-3ni-3i}{n+1}=\frac{-1-3i}{n+1}.$$

Докажем, что $\alpha_n$ – бесконечно малая последовательность.

Находим $|\alpha_n|=\dfrac{|-1-3i|}{n+1}=\dfrac{\sqrt{10}}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=0$, то согласно определению предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3ni}{n+1}=1+3i$. ▲

*Пример 6*. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4ni}{i-2n}$.

Δ *Первый способ*. Обозначим $z_n=\dfrac{1+4ni}{i-2n}$ и найдем $x_n=\operatorname{Re}z_n$, $y_n=\operatorname{Im}z_n$:

$$\frac{1+4ni}{i-2n}=\frac{(1+4ni)(-2n-i)}{(-2n+i)(-2n-i)}=\frac{-2n-i-8n^2i+4n}{4n^2+1}=\frac{2n}{4n^2+1}+i\frac{-1-8n^2}{4n^2+1}.$$

Находим пределы последовательностей действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2+1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{-1-8n^2}{4n^2+1}=-2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=-2i.$

*Второй способ*. Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4ni}{i-2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+4i}{\frac{i}{n}-2}=-2i.$ ▲

*Пример 7*. Изобразите на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $\dfrac{3\pi}{4}\le\arg(z-2-i)\le\pi,\ |\operatorname{Im}iz|\le1;$

б) $0\le\arg(z+1+i)\le\dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}iz\ge\operatorname{Re}(z-2).$

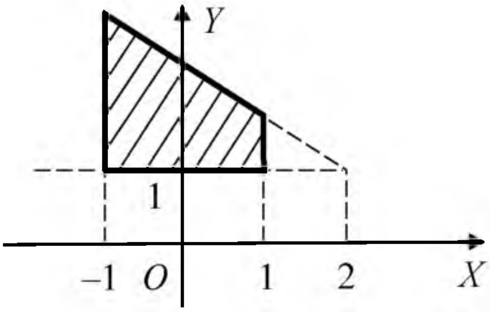

Рис. 12

Δ а) Комплексное число $z-(2+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $2+i$, а концом – точка $z$. Угол между этим вектором и осью $OX$ должен меняться в пределах от $\dfrac{3\pi}{4}$ до $\pi$.

Так как $|\operatorname{Im}iz|=|\operatorname{Im}(ix-y)|=|x|$, то множеству могут принадлежать лишь те точки, которые расположены внутри полосы $-1\le x\le1$.

Искомое множество изображено на рис.12.

б) Угол между векторами, проходящими через точку $-1-i$, и осью $OX$ должен меняться в пределах от $0$ до $\pi/2$.

Так как $\operatorname{Re} iz = \operatorname{Re}(ix - y) = -y,\ \operatorname{Re}(z-2) = x-2$, то $y \le 2 - x$.

Сверху искомое множество ограничено прямой $y = 2 - x$ (рис.13). ▲

*Пример 8*. Какие линии на плоскости представлены уравнениями:

а) $z = 6e^{it} + 3e^{-it}$;

б) $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

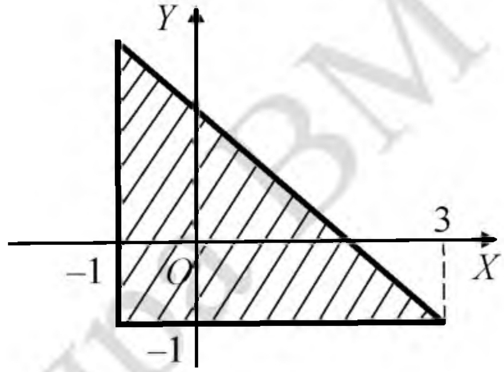

Рис. 13

Δ а) Так как

$e^{it} = \cos t + i\sin t,\ e^{-it} = \cos t - i\sin t,$

то $z = 9\cos t + 3i\sin t$. Отсюда следует, что параметрическое уравнение линии

$$\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

является уравнением эллипса.

Исключив параметр $t$, получим

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

б) Из данного уравнения следует, что $\begin{cases} x = t - 2, \\ y = t^2 - 4t + 5. \end{cases}$

Исключив параметр $t$, получим

$$\begin{cases} t = x + 2, \\ y = (x+2)^2 - 4(x+2) + 5,\ \ y = x^2 + 1. \end{cases}$$

Данное уравнение на плоскости $XOY$ определяет параболу. ▲

*Пример 9*. Определить вид кривой, заданной соотношениями:

а) $|z + 4 - 10i| = |z - 4 - 2i|$; б) $|z + 4 - i| = |z - 2 - 7i|$.

Δ а) Подставив $z = x + iy$, запишем числа в алгебраической форме:

$$|(x+4) + i(y-10)| = |(x-4) + i(y-2)|.$$

Запишем равенство квадратов модулей полученных комплексных чисел:

$$(x+4)^2 + (y-10)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2,$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20y + 100 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4,\ y = x + 6.$$

б) Решим задачу геометрически. На плоскости $XOY$ наносим точки $A(-4;1)$ и $B(2;7)$. Очевидно, что геометрическое место точек есть прямая, которая перпендикулярна отрезку $AB$ и проходит через его середину.

Находим угловой коэффициент прямой $AB$: $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7-1}{2+4} = 1$. Угловой коэффициент искомой прямой $k_1 = -1$.

Середина отрезка $AB$ имеет координаты $C(-1;4)$.

Уравнение прямой имеет вид $y-4=-(x+1)$, $y=-x+3$. ▲

*Пример 10.* Определить вид кривой, заданной уравнением $\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}}=1$.

Δ Находим

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}}=\operatorname{Re}\frac{1}{x-iy}=\operatorname{Re}\frac{(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{x}{x^2+y^2}=1,\ x^2+y^2-x=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

В результате получено уравнение окружности радиусом $R=\frac{1}{2}$ с центром в точке $C\left(\frac{1}{2};0\right)$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Записать в тригонометрической форме число $(1+i)^5(\sqrt{3}-i)^7$.

**Ответ:** $z=2^9\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+2\pi k\right)\right)$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{4}}$.

**Ответ:** $w_0=\sqrt[3]{1/2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$; $w_1=\sqrt[3]{1/2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)$; $w_2=\sqrt[3]{1/2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right)$.

3. Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n=n\cdot\sin\frac{i}{n}$; б) $z_n=\frac{\operatorname{sh} in}{n}$.

**Ответ:** а) $i$; б) $0$.

4. Определить вид множества точек $z$, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{z+2}{z+4}\right|<1$.

**Ответ:** правая полуплоскость, $\operatorname{Re}z>-3$.

5. Какие из следующих уравнений являются уравнениями оси $OX$:

а) $\operatorname{Im}z=0$; б) $\left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$; в) $z-\bar{z}=0$; г) $|z-i|=|z+i|$.

**Ответ:** Все уравнения определяют ось $OX$.

6. Определить вид кривой, заданной уравнением $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$.

**Ответ:** $x^2+(y+1)^2=1$.

# Занятие 13

## Элементарные функции комплексной переменной

*Пример 1*. Найти действительные и мнимые части функций:

а) $w = \bar{z} - i z^2$; б) $w = \dfrac{z - i}{z + 2}$.

Δ а) Полагая $\bar{z} = x - iy$ и $z = x + iy$, получим

$$w = x - iy - i\,(x + iy)^2 = x - iy - i\,(x^2 - y^2) + 2xy = (x + 2xy) + i\,(y^2 - y - x^2),$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x;y) = x + 2xy,\ \operatorname{Im} f(z) = v(x;y) = y^2 - y - x^2.$$

б) $$w = \frac{z - i}{z + 2} = \frac{x + iy - i}{x + iy + 2} = \frac{x + i\,(y - 1)}{(x + 2) + iy} = \frac{(x + i\,(y - 1))((x + 2) - iy)}{((x + 2) + iy)((x + 2) - iy)} =$$

$$= \frac{x\,(x + 2) + y\,(y - 1) + i\,((y - 1)(x + 2) - xy)}{(x + 2)^2 + y^2},$$

т. е. $\operatorname{Re} f(z) = u\,(x;y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 2x - y}{(x + 2)^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} f(z) = v\,(x;y) = \dfrac{2y - x - 2}{(x + 2)^2 + y^2}$. ▲

*Пример 2*. Найти образ отрезка $AB$, где $A\,(1 + i)$, $B\,(4 + i)$ при отображении $w = 2\,iz - 3i$.

Δ При линейном отображении образом прямой является прямая. Поэтому достаточно найти образы концов отрезка. Точке $A$ соответствует точка $A'$, для которой $w = 2\,i\,(1 + i) - 3i = -2 - i$, а точке $B$ – точка $B'$, для которой $w = 2i\,(4 + i) - 3i = -2 + 5i$.

Используя геометрический смысл составляющих линейного отображения, можно проиллюстрировать этапы решения геометрически. Запишем составляющие: $w_1 = 2\,z$, $w_2 = iw_1$, $w = w_2 - 3i$. Отображение $w_1 = 2z$ представляет собой гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $k = 2$. Отображение $w_2 = iw_1$ представляет собой поворот относительно начала координат на угол $\alpha = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$.

Наконец, отображение $w = w_2 - 3i$ является смещением на 3 единицы вниз. ▲

*Пример 3*. Найти образ окружности $|z| = 1$ при отображении $w = 2iz - 3i$.

Δ Из уравнения $w = 2iz - 3i$ выразим $z$: $z = \dfrac{w + 3i}{2i}$. Подставим полученное выражение $z$ в уравнение $|z| = 1$: $\left|\dfrac{w + 3i}{2}\right| = 1$ или $|\,w + 3i\,| = 2$. Следовательно, искомый образ-окружность радиусом 2 с центром в точке $C\,(0 - 3i)$. ▲

*Пример 4*. Найти образ оси $OY$ при отображении $w = 2iz - 3i$.

Δ Уравнение оси $OY$ в комплексной форме запишется как $z = 0x + iy = iy, \; -\infty < y < \infty$. Подставив в уравнение $w = 2iz - 3i$ $z = iy$, получим $w = -2y - 3i, \; -\infty < y < \infty$ или $u = -2y, \; v = -3$. Это есть уравнение прямой в плоскости $w$, параллельной действительной оси. ▲

*Пример 5*. Найти образ 1-го координатного угла комплексной плоскости $z$ при отображении $w = z^2$.

Δ Найдем предварительно образ луча $Oz$ при отображении $w = z^2$ (рис. 14).

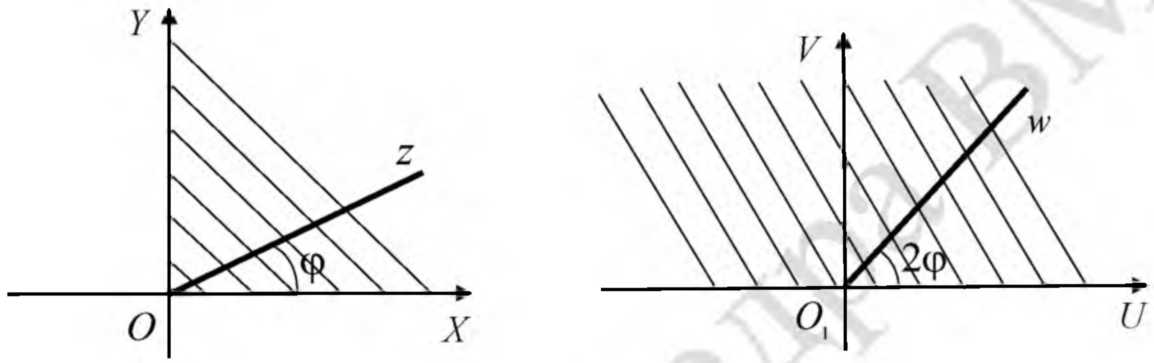


Рис. 14

Представим число $z$ в показательной форме $z = |z|\, e^{i\varphi}$, тогда $w = |z|^2 \cdot e^{2i\varphi}$, $\operatorname{Arg} w = 2\varphi$. Мы видим, что если луч $Oz$ образует с осью $OX$ угол $\varphi$, то его образ $O_1 w$ на плоскости $w$ образует с осью $O_1 U$ угол, равный $2\varphi$. Отсюда следует, что если угол $\varphi$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, тогда луч $Oz$ описывает первый координатный угол на плоскости $z$, а его образ-луч $O_1 w$ описывает верхнюю полуплоскость плоскости $w$. ▲

*Пример 6*. Для числа $z = -e^{-2+i}$ найти $\operatorname{Re} z, \; \operatorname{Im} z, \; |z|, \; \arg z$.

Δ Запишем число $z$ в показательной форме:

$$z = -1 \cdot e^{-2+i} = e^{\pi i} \cdot e^{-2+i} = e^{-2} \cdot e^{i(\pi+1)}.$$

Имеем $|z| = e^{-2}, \varphi = \pi + 1$, или $\arg z = -\pi + 1$, так как $-\pi < \arg z \le \pi$. Так как $e^{-2} \cdot e^{i(\pi+1)} = e^{-2}((\cos(\pi+1) + i\sin(\pi+1)) = e^{-2}(-\cos 1 - i\sin 1)$, то $\operatorname{Re} z = -e^{-2}\cos 1, \; \operatorname{Im} z = -e^{-2}\sin 1$. ▲

*Пример 7*. Найти $\operatorname{Re} f(z), \; \operatorname{Im} f(z)$, если $f(z) = e^{z^2}$.

Δ Находим

$$e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2} \cdot e^{2ixy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy).$$

Следовательно, $\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy, \; \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy$. ▲

*Пример 8*. Показать, что функция $e^{iz}$ является периодической и ее период – действительное число.

$\Delta$ Для любого $z$ должно выполняться условие $e^{i(z+T)} = e^{iz}$, $e^{iz}\cdot e^{iT} = e^{iz}$, поэтому число $T$ должно быть таким, чтобы $e^{iT} = \cos T + i\sin T = 1$, а это верно при $T = 2\pi$. $\blacktriangle$

*Пример 9.* Найти $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$, если

а) $f(z) = \sin z$; б) $f(z) = \operatorname{ch} z$.

$\Delta$ а) $f(z) = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + {}$ $+ i \operatorname{sh} y \cdot \cos x$, поэтому $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} y \cdot \cos x$;

б) $f(z) = \operatorname{ch} z = \cos iz = \cos(ix - y) = \cos ix \cdot \cos y + \sin ix \cdot \sin y = \cos y \cdot \operatorname{ch} x + {}$ $+ i \operatorname{sh} x \cdot \sin y$, поэтому $\operatorname{Re} f(z) = \cos y \operatorname{ch} x$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} x \cdot \sin y$. $\blacktriangle$

*Пример 10.* Найти модуль и аргумент числа $f(i)$, если $f(z) = \operatorname{tg} z$.

$\Delta$ $f(i) = \dfrac{\sin i}{\cos i} = \dfrac{i \operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 1} = i \operatorname{th} 1$; $\operatorname{Re} f(i) = 0$, $\operatorname{Im} f(i) = \operatorname{th} 1 = \dfrac{\operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 1} = \dfrac{e^{1} - e^{-1}}{e^{1} + e^{-1}} > 0$, поэтому $|f(i)| = \operatorname{th} 1 = \dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$, $\arg f(i) = \dfrac{\pi}{2}$. $\blacktriangle$

*Пример 11.* Найти $\operatorname{Ln} z$ и $\ln z$ для числа $z = 2 - i$.

$\Delta$ Находим модуль и аргумент числа $z$:

$$|z| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},\ \arg z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Получаем ответ:

$$\operatorname{Ln}(2-i) = \ln\sqrt{5} + i\,(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi;\ \ln(2-i) = \ln\sqrt{5} + i\,(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right). \ \blacktriangle$$

*Пример 12.* Найти модуль, аргумент, действительную и мнимую части числа $\ln 2i$.

$\Delta$ Находим модуль и аргумент числа $2i$: $|z| = 2$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Получаем $\ln 2i = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\operatorname{Re}\ln 2i = \ln 2,\ \operatorname{Im}\ln 2i = \frac{\pi}{2};\quad |\ln 2i| = \sqrt{\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln^2 4 + \pi^2},$$

$$\arg(\ln 2i) = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2\ln 2}. \ \blacktriangle$$

*Пример 13.* Найти $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

$\Delta$ Находим $\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$, $\arg\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$. Так как $a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}$, то

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{2i\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} = e^{2i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}. \ \blacktriangle$$

*Пример 14*. Решить уравнение $\sin z = 2$.

Δ Множество решений уравнения определяется выражением $z = \mathrm{Arcsin}2$. Как известно, $\mathrm{Arc}\sin z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Следовательно, $\mathrm{Arc}\sin 2 = -i\,\mathrm{Ln}\,(2i + \sqrt{1-4})$. Выражение в скобках, в силу двузначности корня, записывается в виде $a = 2i + \sqrt{3}\,i$ и $b = 2i - \sqrt{3}\,i$. Для числа $a = \left(2+\sqrt{3}\right)i$ имеем $|a| = 2 + \sqrt{3}$, $\arg a = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\mathrm{Ln}\left(2+\sqrt{3}\right)i = \ln\,(2+\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; для числа $b = \left(2 - \sqrt{3}\right)i$ имеем $|b| = 2 - \sqrt{3}$, $\arg b = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\mathrm{Ln}\left(2-\sqrt{3}\right)\,i = \ln\,(2-\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Получаем два множества решений уравнения:

$$Z_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\ln\,(2+\sqrt{3})$$

и

$$Z_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\ln\,(2-\sqrt{3}).\ \blacktriangle$$

*Пример 15*. Найти $z$ из уравнения $\mathrm{ch}z = -2i$.

Δ Уравнение $\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -2i$ сведем к решению квадратного уравнения относительно функции $e^z$: $e^{2z} + 4ie^z + 1 = 0$, корнями которого являются числа $(-2+\sqrt{5})\,i$ и $(-2-\sqrt{5})\,i$. Нужно найти логарифмы этих чисел:

$$z_k = \mathrm{Ln}\,(-2+\sqrt{5})\,i = \ln\,(\sqrt{5}-2) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

$$z^*_k = \mathrm{Ln}\,(-2+\sqrt{5})\,i = \ln\,(\sqrt{5}+2) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).\ \blacktriangle$$

**Дополнительные задачи**

1. Найти действительные и мнимые части функций: а) $w = i - z^3$; б) $w = \frac{1}{z-2i}$.

**Ответ:** а) $u = 3xy^2 - x^3$, $v = 1 - 3x^2y + y^3$;

б) $u = \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}$, $v = \frac{2-y}{x^2 + (y-2)^2}$.

2. Найти образ оси $OY$ при отображении $w = \frac{z+2}{z+i}$.

**Ответ:** $2u - v = 2$.

3. При отображении $w = iz + 1 - 2i$ найти образы прямых: а) $\operatorname{Re} z = 1$; б) $\operatorname{Im} z = 1$.

**Ответ:** а) $\operatorname{Im} w = -1$; б) $\operatorname{Re} w = 0$.

4. Записать в показательной форме число $f(i)$, если $f(z) = z \cdot \operatorname{ch} z$.

**Ответ:** $f(i) = \cos 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$.

5. Найти $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$, если $z = e^{i} (\cos 1 + \operatorname{ch} i)$.

**Ответ:** $\operatorname{Re} z = 2\cos^2 1, \operatorname{Im} z = \sin 2$.

6. Найти $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{1+i}$.

**Ответ:** $e^{(i-1)\left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi}$.

7. Решить уравнения:

а) $e^{z+1} = \pi i$; б) $\operatorname{tg} z = \frac{i}{3}$.

**Отв.:** а) $z = \ln \frac{\pi}{e} + i\left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$;

б) $z_k = \left( 2k + \frac{1}{2} \right)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1),\ z^*_k = \left( 2k - \frac{1}{2} \right)\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$.

## Занятие 14

## Аналитические функции

*Пример 1.* Исследовать на непрерывность функцию $w = z^2 \operatorname{Im} z + i \operatorname{Re}(z)^2$.

$\Delta$ Представим функцию $f(z)$ в виде $w = u(x; y) + i\, v(x; y)$:

$$w = (x + iy)^2 \operatorname{Im}(x + iy) + i \operatorname{Re}(x + iy)^2 =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) \cdot y + i \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy) = x^2 y - y^3 + i(2xy^2 + x^2 - y^2).$$

Отсюда следует, что $u(x; y) = x^2 y - y^3$, $v(x; y) = 2xy^2 + x^2 - y^2$, функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ непрерывны на плоскости $XOY$, следовательно, данная функция $w$ также непрерывна на всей комплексной плоскости $z$. ▲

*Пример 2.* Исследовать на непрерывность функции $\frac{z^2 + 4}{2z - 1}$ и $\frac{2z - 1}{2z^2 + 4}$.

$\Delta$ Элементарные функции непрерывны в их области определения, поэтому функция $\frac{z^2 + 4}{2z - 1}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $z$, за исключением точки $\frac{1}{2}$, а функция $\frac{2z-1}{2z^2+4}$ – за исключением точек $\pm 2i$. ▲

*Пример 3*. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+1}{3z+2}$; б) $\lim\limits_{z\to i}\frac{3z+2}{z^2+1}$; в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{z+1-2i}$.

Δ а) Ввиду непрерывности функции $\frac{z^2+1}{3z+2}$ в точке $i$ получаем $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+1}{3z+2}=\frac{-1+1}{3i+2}=0$. Отметим, что функция $\frac{z^2+1}{3z+2}$ является бесконечно малой в точке $i$.

б) Так как функция $\frac{z^2+1}{3z+2}$ является бесконечно малой в точке, то обратная ей дробь $\frac{1}{f(z)}=\frac{3z+2}{z^2+1}$ является бесконечно большой в этой точке. Поэтому $\lim\limits_{z\to i}\frac{3z+2}{z^2+1}=\infty$.

в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{z+1-2i}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i}=\lim\limits_{z\to -1+2i}(z+1+2i)=4i$. ▲

*Пример 4*. Доказать дифференцируемость на всей плоскости функции $w=z^2$. Найти ее производную.

Δ Для любой точки $z_0$ и любого приращения $\Delta z$ рассмотрим

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-z_0^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0+2z_0\Delta z+(\Delta z)^2-z_0^2}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\,(2z_0+\Delta z)}{\Delta z}=2z_0.$$

Предел существует, следовательно, функция дифференцируема в точке $z_0$. Так как $z_0$ – произвольная точка, то $(z^2)'=2z$. ▲

*Пример 5*. Исследовать на дифференцируемость функции: а) $f(z)=\bar{z}$; б) $f(z)=(z-i)\operatorname{Re}(z-1)$. Найти их производные, если они существуют.

Δ а) Находим $\operatorname{Re}z=u(x;y)=x;\ \operatorname{Im}z=v(x;y)=-y$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$ то условия Коши – Римана не выполняются ни в одной точке. Функция не дифференцируема на всей комплексной плоскости.

б) $w=(z-i)\operatorname{Re}(z-1)=(x+iy-i)\operatorname{Re}(x-1+iy)=(x+iy-i)(x-1)=$ $=(x^2-x)+i(yx-y-x+1)$.

Находим частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y-1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x-1.$

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} 2x-1=x-1, \\ 0=1-y. \end{cases}$

Система имеет единственное решение $x=0, y=1$. Следовательно, функция дифференцируема в единственной точке $z=i$. Находим

$$f'(z)\Big|_{z=i} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = (2x-1)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} + i\,(y-1)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -1. \ \blacktriangle$$

*Пример 6.* Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке, и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:

а) $f(z)=3z\cdot e^{2z}$;  б) $f(z)=\cos(z+2i)$.

$\Delta$ а) Определим действительную и мнимую часть функции $f(z)=3z\cdot e^{2z}$:

$$w = 3\,(x+iy)\,e^{2x+2iy} = 3\,(x+iy)\,e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) =$$
$$= 3e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y) + 3ie^{2x}(y\cos 2y + x\sin 2y).$$

Найдем частные производные функций $u\,(x;y)=3\,e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y)$ и $v\,(x;y)=3\,e^{2x}(y\cos 2y - x\sin 2y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y) + 3e^{2x}\cos 2y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^{2x}(-2x\sin 2y - \sin 2y - 2y\cos 2y),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6e^{2x}(y\cos 2y + x\sin 2y) + 3e^{2x}\sin 2y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{2x}(\cos 2y - 2y\sin 2y + 2x\cos 2y).$$

На всей комплексной плоскости $z$ частные производные непрерывны и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Функция $f(z)=3z\cdot e^{2z}$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости $z$, а значит,

$$f'(z) = (3z\cdot e^{2z})' = 3e^{2z} + 6ze^{2z} = 3e^{2z}(1+2z).$$

б) $w=\cos(z+2i)=\cos(x+i(y+2))=\cos x\cdot\cos i(y+2)-\sin x\cdot\sin i(y+2)=$
$=\cos x\cdot\operatorname{ch}(y+2) - i\cdot\sin x\operatorname{sh}(y+2).$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\cdot\operatorname{ch}(y+2), \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x\cdot\operatorname{sh}(y+2), \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x\cdot\operatorname{sh}(y+2),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x\cdot\operatorname{ch}(y+2).$$

Функция $f(z)=\cos(z+2i)$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости $z$, поэтому $f'(z)=(\cos(z+2i))'=-\sin(z+2i)$. $\blacktriangle$

*Пример 7.* Найти коэффициент растяжения и угол поворота любой гладкой кривой, проходящей через точку $z_0 = 1 - i$ при отображении $f(z) = \dfrac{z-4i}{z+2i}$.

Δ Находим

$$f'(z) = \frac{z+2i-(z-4i)}{(z+2i)^2} = \frac{6i}{(z+2i)^2},\ f'(z_0) = \frac{6i}{(z_0+2i)^2},\ f'(1-i) = \frac{6i}{(1+i)^2} = \frac{6i}{2i} = 3.$$

Так как $|f'(z_0)| = 3, \arg f'(z_0) = 0$, то коэффициент растяжения равен 3, а угол поворота кривой $\varphi = 0$. ▲

*Пример 8.* Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x;y) = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1,\ f(1) = 3 + 3i$;

б) $v(x;y) = -6xy + 2x,\ f(1) = 1 + 2i$.

Δ а) Задачу можно решить лишь в том случае, если функция $u = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1$ гармоническая на всей плоскости. Проверим это:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4.$$

Функция $u(x;y)$ гармоническая, так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y - 3$, то из условий Коши – Римана находим $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x,\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 4y + 3$. Воспользовавшись первым из этих уравнений, находим

$$v(x;y) = \int 4x dy + c(x) = 4xy + c(x).$$

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4y + c'(x) = 4y + 3$, то $c'(x) = 3,\ c(x) = \int 3dx + c = 3x + c$.

Следовательно, $v(x;y) = 4xy + 3x + c$. Получим

$$w = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1 + i(4xy + 3x + c)$$

или

$$w = 2(x + iy)^2 + 3i(x + iy) + ic = 2z^2 + 3iz + ic + 1.$$

Так как $f(1) = 3 + 3i$, то $c = 0$ и окончательно будем иметь $w = f(z) = 2z^2 + 3iz + 1$.

б) Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6y + 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -6x$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -6x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 6y - 2$.

Воспользовавшись первым из уравнений, находим

$$u(x;y) = -\int 6x dx + c(y) = -3x^2 + c(y).$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial y} = c'(y) = 6y - 2$, то $c(y) = \int \cdot (6y-2)\,dy + c = 3y^2 - 2y + c$.

Следовательно, $u(x;y) = -3x^2 + 3y^2 - 2y + c$. Получим

$w = -3x^2 + 3y^2 - 2y + c + i(-6xy + 2x) = -3(x+iy)^2 + 2i(x+iy) + c = -3z^2 + 2iz + c.$

Так как $f(1) = 1 + 2i$, то $c = 4$ и окончательно получим $w = f(z) = -3z^2 + 2iz + 4$. ▲

### Дополнительные задачи

1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z+i}$; б) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$.

**Ответ:** а) $i$; б) $\sqrt{2}$.

2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (z-1)\operatorname{Im}(z+2i)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

**Ответ:** функция не является аналитической, $f'(1) = 2$.

3. Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:

а) $f(z) = e^{iz^2}$; б) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, $(z \neq 2)$.

**Ответ:** а) $f'(z) = 2ize^{iz^2}$; б) $f'(z) = -\dfrac{1}{(z-2)^2}$.

4. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z = 2i$ при отображении $w = \dfrac{z+1}{z+i}$.

**Ответ:** $k = \dfrac{1}{9}\sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

5. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x;y) = y^3 - 3x^2 y$.

**Ответ:** $f(z) = i(z^3 + c)$.

## Занятие 15

## Интегрирование функций комплексной переменной

*Пример 1*. Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, где $c$ – ломаная $OBA$; $O(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;1)$.

Δ Так как путь интегрирования состоит из двух отрезков, запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{OB} \operatorname{Re} z dz + \int\limits_{BA} \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{OB} x\,(dx + i dy) + \int\limits_{BA} x\,(dx + i dy).$$

Для отрезка $OB$ имеем $\begin{cases} y = 0, \\ 0 \le x \le 1, \end{cases}$ а для отрезка $BA$ $\begin{cases} x = 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

Производим вычисления:

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 x dx + i\int\limits_0^1 1 \cdot dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + iy\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i. \ \blacktriangle$$

*Пример 2*. Вычислить $\int\limits_{AB} (z + 2\bar{z})\, dz$, где $AB$ – отрезок прямой: $z_A = 1 + 3i$, $z_B = 2 + 5i$.

Δ Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(1; 3)$ и $(2; 5)$:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{5-3}, \ y = 2x + 1.$$

Уравнение линии $AB$ есть $y = 2x + 1$, где $1 \le x \le 2$.

Имеем $z = x + i\,(2x+1)$, $\bar{z} = x - i\,(2x+1)$, $dz = dx + 2i\,dx$.

Находим

$$\int\limits_{AB} (z + 2\bar{z})\, dz = \int\limits_1^2 (x + 2ix + i + 2x - 4ix - 2i)\,(dx + 2idx) =$$

$$= \int\limits_1^2 (3x - 2ix - i)\,(dx + 2i\, dx) = \int\limits_1^2 (3x + 4x + 2)\, dx + i\int\limits_1^2 (6x - 2x - 1)\, dx =$$

$$= \left(\frac{7}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_1^2 + i\,(2x^2 - x)\,\Big|_1^2 = \left(14 + 4 - \frac{7}{2} - 2\right) +$$

$$+ i\,(8 - 2 - 2 + 1) = \frac{25}{2} + 5i. \ \blacktriangle$$

*Пример 3*. Вычислить $\int\limits_c |z| \cdot \bar{z}\, dz$, где $c$ – верхняя полуокружность $|z| = 1$, обход кривой $c$ против часовой стрелки.

Δ Здесь удобно использовать формулу $\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt$.

Кривая $c$ имеет параметрическое уравнение $z = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Для $z = e^{it}$ находим $\bar{z} = e^{-it}$, $|z| = 1$, $dz = ie^{it}dt$. Вычисляем интеграл

$$\int\limits_C |z|\, \bar{z}\, dz = \int\limits_0^\pi 1 \cdot e^{-it} \cdot i\, e^{it} dt = \int\limits_0^\pi i\, dt = i\pi. \ \blacktriangle$$

*Пример 4*. Вычислить $\int\limits_C z \cos z\, dz$, где $c$ – произвольная линия, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$.

Δ Подынтегральная функция $f(z) = z \cdot \cos z$ является аналитической на всей комплексной плоскости $z$, поэтому интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_C z\cos z\,dz = \int_0^i z\cos z\,dz = \begin{vmatrix} z = u, \ du = dz, \\ \cos z\,dz = dv, \ v = \sin z \end{vmatrix} = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz =$$

$$= i\sin i + \cos i - 1 = \frac{i\,(e^{-1} - e^{1})}{2i} + \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} - 1 = e^{-1} - 1. \ \blacktriangle$$

*Пример 5.* Вычислить $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{4z^2+1}\,dz$, где $c$ – контур, образованный кривыми $x = y^2, \ x = 1$.

$\Delta$ Функция $f(z) = \frac{e^{2z}}{4z^2+1}$ является аналитической на всей комплексной плоскости $z$, за исключением точек $\pm\frac{1}{2}i$. Эти точки расположены вне контура $c$. По теореме Коши $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{4z^2+1}\,dz = 0$. $\blacktriangle$

*Пример 6.* Вычислить $\int\limits_c \frac{\sin z}{z^3+16z}\,dz$, где контур $c$: $|z - 2 - i| = 2$.

$\Delta$ Находим нули знаменателя – особые точки подынтегральной функции. Это точки $z_1 = 0, \ z_2 = 4i, \ z_3 = -4i$. Контур интегрирования представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $z_0 = 2 + i$. Найдем расстояния от точек $z_1, \ z_2$ и $z_3$ до точки $z_0$:

$|z_1 - z_0| = |0 - 2 - i| = \sqrt{5} > 2$;

$|z_2 - z_0| = |4i - 2 - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{13} > 2$;

$|z_3 - z_0| = |-4i - 2 - i| = |-2 - 5i| = \sqrt{29} > 2$.

Все особые точки расположены вне контура интегрирования. Следовательно, согласно теореме Коши интеграл равен нулю. $\blacktriangle$

*Пример 7.* Вычислить $\int\limits_c \frac{\sin z}{z^3+16z}\,dz$, где контур $c$: $|z + 4i| = 2$.

$\Delta$ Внутрь круга $|z + 4i| = 2$ попадает одна особая точка подынтегральной функции $z = -4i$. Функцию $\frac{\sin z}{z^3+16z}$ запишем в виде $\dfrac{\frac{\sin z}{z(z-4i)}}{z+4i}$, где числитель $\frac{\sin z}{z(z-4i)}$ является аналитической функцией в круге $|z + 4i| \le 2$.

Применяя интегральную формулу Коши, получим ответ:

$$\int_C \frac{\sin z}{z^3+16z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z\,(z-4i)}\right|_{z=-4z} = 2\pi i\frac{-\sin 4i}{-32} = \frac{\pi i}{16}\cdot i\cdot \operatorname{sh}4 = -\frac{\pi}{16}\operatorname{sh}4. \ \blacktriangle$$

*Пример 8*. Вычислить $\int\limits_{c} \dfrac{e^{z}}{(z-i)^{2}\cdot(z+2)}\,dz$ для следующих контуров:

а) $c_1$: $|z+2+i|=2$; б) $c_2$: $|z-i|=2$; $c_3$: $|z+2-i|=3$.

$\Delta$ Находим особые точки подынтегральной функции – нули знаменателя $z_1=i,\ z_2=-2$. Определяем принадлежность точек соответствующим областям. В случае «а» внутри контура интегрирования находится точка $z=-2$. Запишем дробь в виде $\dfrac{\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}}}{z+2}$, где $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-i)^{2}}$ аналитическая функция в круге $|z+2+i|\le 2$.

Вычисляем интеграл: $\int\limits_{C_1} \dfrac{\frac{e^{z}}{(z-i)^{2}}}{z+2}\,dz = 2\pi i\,\dfrac{e^{-2}}{(2+i)^{2}}$. В случае «б» внутрь контура интегрирования попадает точка $z=i$. Записываем функцию $\dfrac{\frac{e^{z}}{z+2}}{(z-i)^{2}}$ и вычисляем интеграл:

$$\int\limits_{C_2} \frac{\frac{e^{z}}{z+2}}{(z-i)^{2}}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{z}}{z+2}\right)'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\,\frac{e^{z}(z+2)-e^{z}}{(z+2)^{2}}\Bigg|_{z=i} = \frac{2\pi i\,(1+i)}{(2+i)^{2}}\,e^{i}.$$

В круг $|z+2+i|<3$ входят обе точки $z_1=-2,\ z_2=i$.

Построим контур $c_3$ и две окружности $\gamma_1$ и $\gamma_2$ с центрами в точках $z_1=-2$ и $z_2=i$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы все три окружности не пересекались между собой (рис.15).

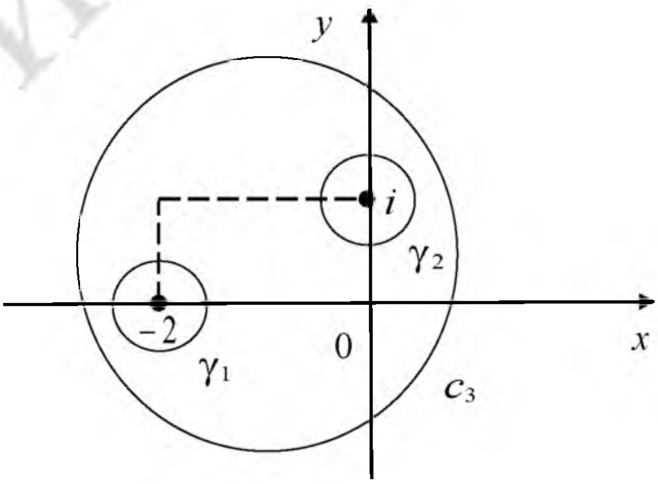


Рис. 15

По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{C_3} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz.$$

Но

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz = \int\limits_{C_1} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz,$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz = \int\limits_{C_2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C_3} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,dz = 2\pi i \frac{e^{-2}}{(2+i)^2} + 2\pi i \frac{1+i}{(2+i)^2}\,e^i = 2\pi i \frac{1+i}{(2+i)^2}\,e^i =$$

$$= \frac{2\pi i}{(2+i)^2}\left(e^{-2} + e^i(1+i)\right). \ \blacktriangle$$

*Пример 9*. Вычислить $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$.

$\Delta$ Внутри контура интегрирования находится одна особая точка $z=-1$. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3} = \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)^3}$. Так как функция $\frac{1}{(z-1)^3}$ является аналитической внутри контура интегрирования, то $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right)''\Bigg|_{z=-1} = \pi i \cdot \frac{12}{(z-1)^5}\Bigg|_{z=-1} = -\frac{3\pi i}{8}$. $\blacktriangle$

## Дополнительные задачи

1. Вычислить $\int\limits_{AB} (1+i-2\bar{z})\,dz$, где $AB$ – часть параболы $y=x^2$ от точки $A=0$ до точки $B=1+i$.

**Ответ:** $-2+\frac{4}{3}i$.

2. Вычислить $\int\limits_C z\cdot\bar{z}\,dz,\ c: |z|=1$. Обход против часовой стрелки.

**Ответ:** 0.

3. Вычислить $\int\limits_0^i (z-i)\,e^{-z}dz$.

**Ответ:** $1-\cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

4. Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{z^2-z-12}\,dz,\ c:\ x=2\cos t,\ y=\sin t$.

**Ответ:** 0.

5. Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3}\, dz$.

**Ответ:** $\pi \cdot \mathrm{sh}\, 1$.

6. Вычислить $\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\, dz$.

**Ответ:** $\pi i \cdot \mathrm{sh}\, 2$.

7. Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\, dz$.

**Ответ:** $-\pi i \cdot \mathrm{ch}\, 1$.

## Занятие 16

## Контрольная работа

### Вариант 1

1. Найти образы линий $y = 2$ и $y = x + 1$ при отображении $w = (1+i)\, z + 1 - i$. Проверить, изменился ли угол между заданными прямыми при указанном отображении.

**Ответ:** $u = 0,\ u = v - 2$. Не изменился.

2. Определить вид кривой, заданной соотношением $|z + 3 - 9i| = |z - 5 - i|$.

**Ответ:** $y = x + 4$.

3. Вычислить $2^{1+i}$.

**Ответ:** $e^{\ln 2 - 2k\pi}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$.

4. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (z - 3i)\,\mathrm{Re}(z-2)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

**Ответ:** $f'(z)\big|_{z=3i} = -2$. Функция не является аналитической.

5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x; y) = y^2 - x^2 + 2y - 6$ и значению $f(1) = 2 - 7i$.

**Ответ:** $f(z) = -i\, z^2 + 2z - 6i$.

6. Вычислить $\int\limits_{AB} (3z - \bar{z})\, dz,\ AB -$ отрезок прямой $z_A = -2 + 3i,\ z_B = -1 + i$.

**Ответ:** $13 + 14i$.

7. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 3z}\, dz$.

**Ответ:** $\frac{2}{3}\pi i$.

8. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислить $\int\limits_{|z|=10} \frac{\cos(z-3)}{(z-3)(z+2)}\,dz$.

**Ответ:** $\frac{2\pi i}{5}(1-\cos 5)$.

9. Вычислить $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2}\cos\frac{\pi}{z+2}\,dz$.

**Ответ:** $\frac{1}{2}\pi^2 i$.

## Вариант 2

1. Найти образы линий $x=1$ и $y=x-1$ при отображении $w=(1-i)\,z+1+i$. Проверить, изменился ли угол между заданными прямыми при указанном отображении.

**Ответ:** не изменился.

2. Определить вид кривой, заданной соотношением $|z+6+i|=|z+2-3i|$.

**Ответ:** $y=-x-3$.

3. Вычислить $i^{2i}$.

**Ответ:** $e^{-\pi+4k\pi}$.

4. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=(z+2i)\operatorname{Re}(z+5)$, найти ее производную, если она существует. Найти область аналитичности функции.

**Ответ:** $f'(z)\big|_{z=-2i}=5$. Функция не является аналитической.

5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее действительной части $u(x;y)=4xy+x$ и значению $f(1)=-i+1$.

**Ответ:** $f(z)=-2z^2 i+z+i$.

6. Вычислить $\int\limits_{AB}(2z+\bar{z})\,dz$, $AB$ – отрезок прямой $z_A=-2-3i$, $z_B=-1-i$.

**Ответ:** $-\frac{1}{2}-11i$.

7. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\int\limits_{|z+3|=1} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+3z}\,dz$.

**Ответ:** $-\frac{2}{3}\pi i\cos 3$.

8. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислить $\int\limits_{|z|=10} \frac{\operatorname{sh}(z+2)}{(z-1)(z+5)}\,dz$.

**Ответ:** $\frac{2}{3}\pi i \operatorname{sh} 3$.

9. Вычислить $\int\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\, dz$.

**Ответ:** $-\frac{\pi}{2} e^{i}(1+i)$.

## Занятие 17

## Ряды в комплексной области

*Пример 1*. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2ni+3}{3in^2+5n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2ni+5}{3in^4+n^2+3i}$.

$\Delta$ а) Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2ni+3}{3in^2+5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}i+\frac{3}{n^2}}{3i+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3i} \neq 0$.

Ряд расходится.

б) Пусть $a_n = \frac{n^2+2ni+5}{3in^4+n^2+3i}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{1}{3} \neq 0$, то в смысле сходимости оба ряда ведут себя одинаково. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится абсолютно. ▲

*Пример 2*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2-3i)^n}$. В случае сходимости найти его сумму.

$\Delta$ Ряд сходится, как ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, |q|<1$. (В нашем случае $|q| = \frac{1}{\sqrt{13}}$).

Его сумма равна $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-3i}} = \frac{2-3i}{1-3i} = \frac{(2-3i)(1+3i)}{10} = \frac{11+3i}{10}$. ▲

*Пример 3*. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+in}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+i}{n^2}$.

$\Delta$ а) Так как $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}+in} = \frac{\sqrt{n}-in}{n+n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n+n^2} + i\,\frac{-1}{1+n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$

является расходящимся, то расходится и искомый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+in}}$.

б) Имеем $|z_n| = \left|\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, $n\to\infty$.

Ряд сходится абсолютно.

в) Имеем $z_n = \frac{(-1)^n\cdot n+i}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{n^2}$.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходятся.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n+i}{n^2}$ тоже сходится.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$. Так как $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}\sim\frac{1}{n}$, $n\to\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$ расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n+i}{n^2}$ сходится условно. ▲

*Пример 4*. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n\cdot 2^n}$;  б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$.

Δ а) Используя признак Даламбера, находим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+i)^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\,2^{n+1}\cdot(2+i)^n}\right| = \left|\frac{2+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Ряд расходится.

б) Используя признак Коши, находим

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2-i}{3}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0.$$

Ряд сходится абсолютно. ▲

*Пример 5*. Исследовать сходимость функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$;  б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2z+i}\right)^n$;  в) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot e^{i+nz}$.

Δ а) Точка $z=0$, очевидно, не входит в область сходимости этого ряда. Сходимость в других точках исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,z^n}{(n+1)!\,z^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z|}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$.

б) Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z-i}{2z+i}\right|^n}=\frac{|z-i|}{|2z+i|}.$$

Ряд сходится в области

$$\frac{|z-i|}{|2z+i|}<1, |z-i|<|2z+i|,\ \sqrt{x^2+(y-1)^2}<\sqrt{4x^2+(2y+1)^2},$$

$$x^2+y^2-2y+1<4x^2+4y^2+4y+1,\ 3x^2+3y^2+6y>0,$$

$$x^2+(y+1)^2>1,\ \sqrt{x^2+(y+1)^2}>1,\ |z+i|>1.$$

На границе круга $|z-i|=|2z+i|$, т. е. $|z+i|=1$ ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Ряд сходится в области $|z+i|>1$.

в) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}e^{i+(n+1)z}}{2^n e^{i+nz}}\right|=\left|2e^z\right|=\left|2e^{x+iy}\right|=2e^x.$$

Ряд сходится в области $2e^x<1,\ e^x<\frac{1}{2},\ x<-\ln 2$.

На границе области ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд сходится в области $\operatorname{Re} z<-\ln 2$. ▲

*Пример 6*. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(z-2+i)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1+2i)^n}{(n+2)\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}}{4^n}$.

Δ а) Находим $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)!}=0$. Ряд сходится в единственной точке $z=2-i$.

б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 3^{n+1}}{(n+2)\cdot 3^n}=3$. Область сходимости определяется неравенством $|z+1+2i|<3$. Мы не исследуем сходимость ряда на границе области. Отметим только, что в данном случае на границе существуют как точки сходимости ряда, например $z=-4-2i$, так и точки расходимости, например $z=2-2i$.

в) Так как ряд содержит бесконечное число нулевых членов, следует применить непосредственно признак Даламбера или Коши.

Воспользуемся признаком Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z-i|^{2n}}{4^n}}=\frac{|z-i|^2}{4}$.

Из равенства $\frac{|z-i|^2}{4}<1$ находим $|z-i|<2$. Очевидно, что граничные точки не входят в область сходимости ряда. Ряд сходится в области $|z-i|<2$. ▲

*Пример 7.* Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$ сходится равномерно в области $|z| \le \sqrt[3]{3}$.

Δ Для точек $z$, удовлетворяющих неравенству $|z| \le \sqrt[3]{3}$, выполняются неравенства $|z| \le \sqrt[3]{3}$ и $\left|\dfrac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}\right| \le \dfrac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$, т. е. искомый степенной ряд мажорируется числовым знакоположительным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3}}{(3n-1)^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$ в круге $|z| \le \sqrt[3]{3}$ сходится равномерно. ▲

*Пример 8.* Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{2n}$.

Δ Ряд сходится в области $|z|<1$. Как известно, внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать. Пусть $S(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{2n}$; $S_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n \cdot z^{2n-1}$, тогда $S(z) = \dfrac{1}{2} z \cdot S_1(z)$.

$$\int_0^z S_1(t)\,dt = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot t^{2n-1} d\,t = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} = \frac{z^2}{1-z^2};$$

$$S_1(z) = \left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)' = \frac{2z(1-z^2) + 2z \cdot z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{2z}{(1-z^2)^2};$$

$$S(z) = \frac{1}{2} z \cdot \frac{2z}{(1-z^2)^2} = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}. \quad ▲$$

## Дополнительные задачи

1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in^2}{3^{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \pi n \cdot \sin \dfrac{1}{n} + i\, \dfrac{2^n}{n!}\right)$.

**Ответ:** а) расходится; б) сходится абсолютно; в) сходится условно.

2. Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1)^n}{(n+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n (1-i)^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 8^n}} (z-i+1)^n$.

**Ответ:** а) $z \in c$; б) $z = 0$; в) $|z - i + 1| < \frac{1}{3}$.

3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^n}{3^n}$.

**Ответ:** $\frac{3z}{(3-z)^2}$.

## Занятие 18

## Ряды Тейлора и Лорана

*Пример 1.* Разложить функцию $f(z) = e^{3z-2}$ по степеням $z-1$ и указать область сходимости полученного ряда.

$\Delta$ *Первый способ.* Функция $f(z) = e^{3z-2}$ является аналитической в области $|z-1| < \infty$, т. е. на всей комплексной плоскости. Следовательно, функцию $f(z)$ можно представить рядом Тейлора по степеням $z-1$, который сходится на всей комплексной плоскости. Находим производные данной функции и вычисляем их в точке $z = 1$:

$f(z) = e^{3z-2}$, $\quad f(1) = e$;

$f'(z) = 3e^{3z-2}$, $\quad f'(1) = 3e$;

$f''(z) = 3^2 e^{3z-2}$, $\quad f''(1) = 3^2 e$;

---------------------------------------

$f^{(n)}(z) = 3^n e^{3z-2}$, $\quad f^{(n)}(1) = 3^n e$

---------------------------------------

Таким образом, для данной функции имеем

$$e^{3z-2} = e\left(1 + \frac{3}{1!}(z-1) + \frac{3^2}{2!}(z-1)^2 + \ldots + \frac{3^n}{n!}(z-1)^n + \ldots\right) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n, \ |z-1| < \infty.$$

*Второй способ.* Так как данную функцию можно представить в виде $e^{3z-2} = e \cdot e^{3(z-1)}$, то, используя представление $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, $|t| < \infty$, получаем

$$e^{3z-2} = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n, \ |z-1| < \infty. \ \blacktriangle$$

*Пример 2.* Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \sin(2z-1)$.

$\Delta$ Представим функцию $f(z)$ в виде $\sin(2z-1) = \cos 1 \cdot \sin 2z - \sin 1 \cdot \cos 2z$.

Так как $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$ и $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $|z| < \infty$, то

$$\sin 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \ |z| < \infty \ \text{и} \ \cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \ |z| < \infty.$$

Окончательно получаем

$$\sin(2z-1)=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}-\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<\infty.\ \blacktriangle$$

*Пример 3*. Разложим по степеням $(z-1)$ функцию $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$.

$\Delta$ Разложить дробь на элементарные:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\frac{z+2}{(z-3)(z+1)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z+1};\quad A(z+1)+B(z-3)\equiv z+2.$$

Полагая $z=3$, получим $A=\dfrac{5}{4}$. Полагая $z=-1$, получим $B=-\dfrac{1}{4}$.

Таким образом, $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z+1}$;

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n};$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n};$$

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=-\frac{5}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}\left((-1)^{n+1}-5\right)(z-1)^n.$$

Расстояние от точки $z_0=1$ до ближайшей особой точки равно 2. Следовательно, разложение справедливо в области $|z-1|<2$. $\blacktriangle$

*Пример 4*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-i}$.

$\Delta$ Используя основные разложения, получим

$$\frac{z}{z^2-i}=\frac{z}{-i}\frac{1}{1-\frac{z^2}{i}}=\frac{z}{-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{i^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{i^{n+1}}.$$

Разложение справедливо в области $\left|\dfrac{z^2}{i}\right|<1,\ |z|<1.$ $\blacktriangle$

*Пример 5*. Разложить функцию $f(z)=e^{\sin z}$ по степеням $z$ до члена, содержащего $z^5$.

$\Delta$ Применим метод подстановки ряд в ряд, используя основные разложения для функций $e^z$ и $\sin z$.

Имеем

$$e^{\sin z}=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)+\frac{1}{2!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^3+\frac{1}{4!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^4+\frac{1}{5!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^5+\ldots=$$

$$= 1 + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{1}{2!}(z+a)^2 + \frac{1}{3!}(z+a)^3 + \frac{1}{4!}(z+a)^4 + \frac{1}{5!}(z+a)^5 \ldots,$$

где $a = \left( -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right)$.

При возведении в степень будем использовать формулу бинома Ньютона:

$$(z+a)^n = z^n + n\,z^{n-1}a + \frac{n\,(n-1)}{2} z^{n-2}a^2 + \ldots + a^n.$$

Оставляя члены ряда степени не выше пяти, получим

$$e^{\sin z} = 1 + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{1}{2!}\left( z^2 + 2z\left( -\frac{z^3}{3!} \right) \right) + \frac{1}{3!}\left( z^3 + 3z^2\left( -\frac{z^3}{3!} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{5!} z^5 + \ldots = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{8} z^4 - \frac{1}{15} z^5 \ldots.$$

Функция $f(z) = e^{\sin z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, следовательно, ряд сходится в области $|z| < \infty$. ▲

*Пример 6.* Функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ разложить в ряд Лорана в указанных кольцах: а) $2 < |z| < 3$; б) $3 < |z| < \infty$.

Δ а) Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2};$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}};$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad 2 < |z| < 3.$$

б) $\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{3}{z}} = \dfrac{1}{z} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{z^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{z^{n+1}}$; $\qquad \dfrac{1}{z-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{z^{n+1}}$;

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}, \quad 3 < |z| < \infty. \ ▲$$

*Пример 7.* Функцию $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$ разложить в ряд Лорана:

а) в окрестности точки $z_0 = -1$; б) в окрестности точки $z_0 = 3$.

Δ а) В разложении $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{z+1}+\dfrac{\frac{5}{4}}{z-3}$ первое слагаемое уже записано по степеням $(z+1)$. Это разложение содержит только главную часть ряда Лорана. Второе слагаемое в окрестности точки $z_0=-1$ раскладывается в ряд Тейлора в круге $|z+1|<4$. Для исходной дроби это будет правильная часть ряда Лорана:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z+1)-4}=\frac{-1}{4\left(1-\frac{z+1}{4}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}},\quad \left|\frac{z+1}{4}\right|<1.$$

Получаем ответ: $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=-\dfrac{\frac{1}{4}}{z+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5\,(z+1)^n}{4^{n+2}},\ 0<|z+1|<4.$

б) Для точки $z_0=3$ задача решается аналогично:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\frac{\frac{5}{4}}{z-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-3)+4}=\frac{\frac{5}{4}}{z-3}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+2}}.$$

Получаем ответ: $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{\frac{5}{4}}{z-3}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}(z-3)^n,\ 0<|z-3|<4.$ ▲

*Пример 8.* Функцию $f(z)=(z+1)\,e^{\frac{z}{z-2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

Δ Представив функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=((z-2)+3)\cdot e^{\frac{z-2+2}{z-2}}=((z-2)+3)\cdot e^{1+\frac{2}{z-2}}=e\cdot((z-2)+3)\,e^{\frac{2}{z-2}},$$

получим

$$f(z)=e\cdot((z-2)+3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!\,(z-2)^n}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!\,(z-2)^{n-1}}+3e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-2)^n\cdot n!},$$

$$0<|z-2|<\infty.\ ▲$$

*Пример 9.* Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{2z+3}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Δ Имеем

$$\frac{1}{2z+3}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{2z}}=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2z}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{z^{n+1}},\quad \left|\frac{3}{2z}\right|<1,\ |z|>\frac{3}{2}.\ ▲$$

### Дополнительные задачи

1. Функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=3$.

**Ответ:** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n+1}{6^{n+1}}(z-3)^n,\ |z-3|<2$.

2. Функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$ разложить в ряд Лорана:

а) в невырожденном кольце по степеням $z$;

б) в окрестности точки $z_0=1$.

**Ответ:** а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4\cdot 3^n}z^n+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{z^n},\ 1<|z|<3$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3\cdot(-1)^n}{4^{n+3}}(z-1)^n+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{(z-1)^2},\ 0<|z-1|<4$.

3. Функцию $f(z)=\dfrac{\cos^2 2z}{z^5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

**Ответ:** $f(z)=\dfrac{1}{2z^5}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n}z^{2n-5}}{(2n)!},\ |z|>0$.

## Занятие 19

## Нули и изолированные особые точки аналитических функций

*Пример 1.* Найти все нули функции $f(z)=z^6-z^5+2z^4-2z^3$ и определить их порядок.

$\Delta$ Раскладываем многочлен на множители:

$$f(z)=z^5(z-1)+2z^3(z-1)=z^3(z-1)(z^2+2)=z^3(z-1)(z+\sqrt{2}\,i)(z-\sqrt{2}\,i).$$

Точка $z_1=0$ является нулем третьего порядка, точки $z_2=1,\ z_3=-\sqrt{2}\,i$, $z_4=\sqrt{2}\,i$ являются нулями первого порядка (простыми нулями). ▲

*Пример 2.* Определить порядок нуля $z_0=0$ для функции

$$f(z)=3\cos 2z+6\sin z^2-3.$$

$\Delta$ Здесь удобно разложить функцию $f(z)$ в ряд Маклорена. Получаем

$$3\cos 2z+6\sin z^2-3=3\left(1-\frac{4z^2}{2!}+\frac{16z^4}{4!}-\ldots\right)+6\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\ldots\right)-3=2z^4+\ldots.$$

Точка $z=0$ является нулем четвертого порядка для функции $f(z)$. ▲

*Пример 3.* Для функции $f(z) = -1 - \sin^3 z - \cos z$ определить порядок нуля в точке $z_0 = \pi$.

$\Delta$ Находим значения функции и ее производных в точке $z_0 = \pi$:

$f(z) = -1 - \sin^3 z - \cos z,\ f(\pi) = 0$;

$f'(z) = -3\sin^2 z \cdot \cos z + \sin z,\ f'(\pi) = 0$;

$f''(z) = -6\sin z \cdot \cos^2 z + 3\sin^3 z + \cos z,\ f''(\pi) \neq 0$.

Точка $z_0 = \pi$ является нулем второго порядка для функции $f(z)$. ▲

*Пример 4.* Для функции $f(z) = \sin^2 z \cdot (e^{z^2} - 1)^3$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

$\Delta$ Пусть $\varphi_1(z) = \sin z,\ \varphi_2(z) = e^{z^2} - 1$. Так как $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \ldots$ и $e^{z^2} - 1 = z^2 + \dfrac{z^4}{2!} + \ldots$, то точка $z_0 = 0$ является нулем первого порядка для функции $\varphi_1(z)$ и нулем второго порядка для функции $\varphi_2(z)$, а также точка $z_0 = 0$ является нулем второго порядка и нулем шестого порядка для функции $\varphi_2^3(z)$.

Как известно, порядок нуля в точке $z_0$ функции, полученной в результате перемножения аналитических функций, равен сумме порядков нуля в этой точке для функций сомножителей. Таким образом, точка $z_0 = 0$ является нулем восьмого порядка для функции $f(z) = \sin^2 z \cdot (e^{z^2} - 1)^3$. ▲

*Пример 5.* Для функции $f(z) = \dfrac{\cos^4 \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = \dfrac{1}{2}$.

$\Delta$ Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{(\cos \pi z)^4}{2\left(z - \dfrac{1}{2}\right)(2z + 1)(z^2 + 1)}$.

Так как $\cos \pi z\big|_{z=\frac{1}{2}} = 0,\ (\cos \pi z)'\big|_{z=\frac{1}{2}} \neq 0$, то точка $z_0 = \dfrac{1}{2}$ является нулем первого порядка для функции $\cos \pi z$ и нулем четвертого порядка для функции $\cos^4 \pi z$. Очевидно, что точка $z_0 = \dfrac{1}{2}$ является нулем первого порядка для функции $2\left(z_0 - \dfrac{1}{2}\right)(2z + 1)(z^2 + 1)$. Следовательно, порядок нуля для функции $f(z)$ в точке $z_0 = \dfrac{1}{2}$ равен $4 - 1 = 3$. ▲

*Пример 6.* Пусть точка $z_0$ является нулем порядка $k$ для функции $\varphi_1(z)$ и нулем порядка $m$ для функции $\varphi_2(z)$, причем $k > m$. Найти порядок нуля для функции $f(z)=a\,\varphi_1(z)+b\varphi_2(z),(ab\neq 0)$ в точке $z_0$.

$\Delta$ Так как

$$f(z)=a\,(z-z_0)^k\varphi_3(z)+b\,(z-z_0)^m\varphi_3(z)=$$
$$=(z-z_0)^m(a\,(z-z_0)^{k-m}\varphi_3(z)+b\varphi_4(z)),\ \varphi_3(z_0)\neq 0,\ \varphi_4(z_0)\neq 0,$$

то $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi_5(z)$, где $\varphi_5(z)\neq 0$. Отсюда следует, что точка $z=z_0$ является нулем порядка $m$ для функции $f(z)$. ▲

*Пример 7.* Для функции $f(z)=3\,(e^{z^3}-1)^5-2\sin^{12}z$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

$\Delta$ Так как $e^{z^3}-1=z^3+\dfrac{z^6}{2}+\ldots$, то для функции $(e^{z^3}-1)^5$ точка $z_0=0$ является нулем пятнадцатого порядка.

Для функции $\varphi_2(z)=\sin^{12}z$ точка $z_0=0$ является нулем двенадцатого порядка. Таким образом, для функции $f(z)$ точка $z_0=0$ является нулем двенадцатого порядка. ▲

*Пример 8.* Для функции $f(z)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z-2}}$ определить тип особой точки $z=2$.

$\Delta$ Точка $z=2$ является особой. Рассмотрим последовательность точек $z_k=2+\dfrac{2}{\pi+2\pi k}$. Эти точки являются полюсами. Но $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=2$. Таким образом, в любой окрестности точки $z_0=2$ имеются другие особые точки. Точка $z_0=2$ является неизолированной особой точкой. ▲

*Пример 9.* Определить тип особой точки $z=0$ для функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}3z-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$.

$\Delta$ Пусть $\varphi(z)=\operatorname{ch}3z-1,\ \varphi(0)=0;$

$\varphi'(z)=3\operatorname{sh}3z,\ \varphi'(0)=0;$

$\varphi''(z)=9\operatorname{ch}3z,\ \varphi''(0)=9\neq 0.$

Точка $z_0=0$ является нулем второго порядка для числителя дроби.

Знаменатель функции разложим в ряд Маклорена:

$$\sin z-z+\frac{z^3}{6}=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{5!}-\ldots-z+\frac{z^3}{6}=\frac{z^5}{5!}+\ldots.$$

Точка $z_0=0$ является нулем пятого порядка для знаменателя дроби. Таким образом, точка $z_0=0$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z)$. ▲

*Пример 10.* Для заданных функций найти конечные изолированные особые точки и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+3)}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^2}$.

Δ а) Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=\pm\dfrac{1}{2}, z=\pm\sqrt{3}\,i$.

Для исследования точки $z=\dfrac{1}{2}$ функцию $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{\cos\pi z}{2z-1}\cdot\frac{1}{(2z+1)(z^2+3)}=\frac{\cos\pi z}{2z-1}\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(z^2+3)}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z_0=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Находим

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi z}{2z-1}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{-\pi\sin\pi z}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Точка $z_0=\dfrac{1}{2}$ является устранимой особой точкой. Аналогично точка $z_1=-\dfrac{1}{2}$ является устранимой особой точкой.

Если функцию $f(z)$ записать в виде

$$\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+3)}=\frac{1}{(z-\sqrt{3}\,i)}\cdot\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z+\sqrt{3}\,i)},$$

то очевидно, что точка $z_3=\sqrt{3}\,i$ является полюсом первого порядка. Аналогично точка $z=-\sqrt{3}\,i$ тоже является полюсом первого порядка.

б) Функцию $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z\,(e^z-1)}=\frac{z-\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots\right)+1}{z\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots-1\right)}=\frac{-\dfrac{z^2}{2!}-\ldots}{z^2+\ldots}.$$

Отсюда следует, что точка $z=0$ является устранимой особой точкой. Типы других особых точек для функций $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ и $f_1(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ совпадают. Особыми точками функции $f_1(z)$ будут точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль: $e^z=1, z=2k\pi i,\ k\neq 0$. Так как

$(e^z=1)\big|_{z=2k\pi i}=0$ и $(e^z=1)'\big|_{z=2k\pi i}=e^{2k\pi i}\neq 0$, то точки $z=2k\pi i\ (k\neq 0)$ являются полюсами первого порядка.

Таким образом, $z=2k\pi i, k\neq 0$ – простые полюсы, $z=0$ – устранимая особая точка.

в) Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^2}=\frac{1}{e^z-1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}.$$

Согласно предыдущему примеру, точки $z=2k\pi i, k\neq 0$ являются полюса первого порядка.

Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z-1}$.

Очевидно, что точка $z=1$ является полюсом второго порядка. Чтобы исследовать точку $z=0$, выполним следующие преобразования:

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}\cdot\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2\left(1+\frac{z}{2!}+i\ldots\right)}$, $\varphi(0)=1$. Так как $\varphi(0)\neq 0$ и

$$f_1(z)=\frac{1}{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^3}+\ldots,$$

то точка $z=0$ является существенно особой точкой. ▲

*Пример 11*. Исследовать особую точку $z=\infty$ для функции $f(z)=\dfrac{z^3}{z-1}$.

Δ *Первый способ*. Обозначим $z=\dfrac{1}{\xi}$ и исследуем функцию $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ в точке $\xi=0$; $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi^3\left(\frac{1}{\xi}-1\right)}=\dfrac{1}{\xi^2(1-\xi)}$. Точка $\xi=0$ является полюсом второго порядка для функции $\dfrac{1}{\xi^2(1-\xi)}$. Следовательно, точка $z=\infty$ является полюсом второго порядка для функции $f(z)=\dfrac{z^3}{z-1}$.

*Второй способ*. Точка $z=\infty$ является полюсом третьего порядка для числителя и полюсом первого порядка для знаменателя. Следовательно, точка $z=\infty$ является полюсом второго порядка для функции $f(z)=\dfrac{z^3}{z-1}$. ▲

### Дополнительные задачи

1. Найти все нули функции $f(z)=(z^4+2z^2+1)(z^2-2z+2)$ и определить их порядок.

**Ответ:** $\pm i$ – нули второго порядка; $z=1\pm i$ – простые нули.

2. Для функции $f(z)=(e^{z^2}-1-z^2)^2\cdot\sin^3 z$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

**Ответ:** $11$.

3. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh} z-z-\frac{z^3}{6}}$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

**Ответ:** $7$.

4. Для функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}5z-1}{e^2-1-z}$ определить тип особой точки $z=0$.

**Ответ:** устранимая особая точка.

5. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin 2\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$ найти конечные особые точки и определить их тип.

**Ответ:** $z=0$ – существенно особая точка; $z=\pm 1$ – устранимые особые точки; $z=\pm i$ – простые полюсы.

## Занятия 20–21

## Вычеты. Приложения вычетов

*Пример 1*. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ее конечных особых точках.

Δ Особыми точками этой функции являются точки $z_1=-1$ и $z_2=3$.

Ранее нами были получены разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестностях точек $z_1=-1$ и $z_2=3$:

$$f(z)=\frac{-1/4}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\,(z+1)^n}{4^{n+2}},\ \ 0<|z+1|<4;$$

$$f(z)=\frac{5/4}{z-3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}(z-3)^n,\ 0<|z-3|<4.$$

Из этих разложений находим

$$\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=C_{-1}=-\frac{1}{4};\ \operatorname*{Res}_{3} f(z)=C_{-1}=\frac{5}{4}.\ \blacktriangle$$

*Пример 2*. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{\sin^3 3z}{z\,(1-\cos z)}$ в точке $z_1=0$.

$\Delta$ Находим $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^3 3z}{z\,(1-\cos z)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^3 3z}{2z\cdot\sin^2\dfrac{z}{2}}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{27z^3}{2\cdot z\cdot\dfrac{z^2}{4}}=54$.

Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой. В разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки будет отсутствовать главная часть. Следовательно, $C_{-1}=0$ и $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=0$. $\blacktriangle$

*Пример 3*. Определить тип особой точки $z=i$ и найти вычеты в этой точке следующих функций:

а) $f_1(z)=z\cdot\cos\left(\dfrac{1}{z-i}\right)$; б) $f_2(z)=\dfrac{e^{\frac{z}{z-i}}}{z-i}$.

$\Delta$ а) Разложим функцию $f_1(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=i$.

$$f_1(z)=z\cdot\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)=((z-i)+i)\left(1-\frac{1}{2!\,(z-i)^2}+\frac{1}{4!\,(z-i)^4}+\ldots\right).$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Следовательно, точка $z=i$ является существенно особой точкой.

Из полученного разложения находим $\operatorname*{Res}_{i} f_1(z)=C_{-1}=-\dfrac{1}{2}$.

б) Разложение функции $f_2(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=i$ имеет вид

$$f_2(z)=\frac{1}{z-i}\cdot e^{\frac{z}{z-i}}=\frac{1}{z-i}e^{\frac{z-i+i}{z-i}}=\frac{e}{z-i}\left(1+\frac{i}{z-i}+\frac{i^2}{2!\,(z-i)^2}+\ldots\right).$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Точка $z=i$ является существенно особой точкой.

Из полученного разложения находим $\operatorname*{Res}_{i} f_2(z)=C_{-1}=e$. $\blacktriangle$

*Пример 4*. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в точке $z_0=3$.

$\Delta$ Точка $z_0=3$ является полюсом первого порядка. Используя формулу $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))$, получим

$$\operatorname*{Res}_{3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{(z+2)(z-3)}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{5}{16}. \ \blacktriangle$$

*Пример 5.* Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z+2i}{z^3+8i}$ в особых точках.

$\Delta$ Особыми точками функции являются нули знаменателя $z^3+8i=0$ или $z^3-(2i)^3=0$. Раскладывая на множители левую часть $(z-2i)(z^2+2zi-4)=0$, находим $z_1=2i, z_2=\sqrt{3}-i,\ z_3=-\sqrt{3}-i$. Все эти три точки являются простыми полюсами. Здесь удобно использовать формулу $\operatorname*{Res}_{z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Найдем вычеты в указанных точках:

$$\operatorname*{Res}_{2i}\frac{z+2i}{z^3+8i} = \left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=2i} = -\frac{i}{3};$$

$$\operatorname*{Res}_{\sqrt{3}-i}\frac{z+2i}{z^3+8i} = \left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=\sqrt{3}-i} = \frac{i}{6};$$

$$\operatorname*{Res}_{-\sqrt{3}-i}\frac{z+2i}{z^3+8i} = \left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=-\sqrt{3}-i} = \frac{i}{6}. \ \blacktriangle$$

*Пример 6.* Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в точке $z_0=-1$.

$\Delta$ Точка $z_0$ является полюсом второго порядка.
Находим

$$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \lim_{z\to -1}\left(\frac{(z+2)(z+1)^2}{(z+1)^2(z-3)}\right)' = \lim_{z\to -1}\frac{z-3-(z+2)}{(z-3)^2} =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{-5}{(z-3)^2} = -\frac{5}{16}. \ \blacktriangle$$

*Пример 7.* Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ в точке $z=-1$.

$\Delta$ Точка $z=-1$ является полюсом третьего порядка.
Находим

$$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z}{(z-2)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{e^z(z-2)\cdot(z-2)^2-2(z-2)\,e^z(z-3)}{(z-2)^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{e^z((z-2)^2-2(z-3))}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}. \ \blacktriangle$$

*Пример 8*. Вычислить $J = \oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{z^2+3}{z^3-4z}\,dz$.

$\Delta$ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 0$. Они являются полюсами первого порядка. Находим

$$\operatorname*{Res}_{2} \frac{z^2+3}{z^3-4z} = \left.\frac{z^2+3}{3z^2-4}\right|_{z=2} = \frac{7}{8};$$

$$\operatorname*{Res}_{0} \frac{z^2+3}{z^3-4z} = \left.\frac{z^2+3}{3z^2-4}\right|_{z=0} = -\frac{3}{4};$$

$$J = 2\pi i\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi i}{4}. \ \blacktriangle$$

*Пример 9*. Вычислить $J = \oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{z^2+1}{(z-1)(z+2)\,z^2}\,dz$.

$\Delta$ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки: $z_1 = 1$ – полюс первого порядка и $z_2 = 0$ – полюс второго порядка. Находим

$$\operatorname*{Res}_{1} \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)\cdot z^2} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+1}{z^2(z+2)} = \frac{2}{3};$$

$$\operatorname*{Res}_{0} \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)\cdot z^2} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+1}{z^2+z-2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2z\,(z^2+z-2)-(2z+1)(z^2+1)}{(z^2+z-2)^2} = -\frac{1}{4};$$

$$J = 2\pi i\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi i}{6}. \ \blacktriangle$$

*Пример 10*. Вычислить $J = \oint\limits_{|z|=2} (z^2+4z+3)\,e^{\frac{2}{z+1}}\,dz$.

$\Delta$ Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z = -1$:

$$(z^2+4z+3)\cdot e^{\frac{2}{z+1}} = ((z+1)^2 + 2\,(z+1))\cdot\left(1+\frac{2}{z+1}+\frac{2^2}{2!\,(z+1)^2}+\frac{2^3}{3!\,(z+1)^3}+\ldots\right).$$

Точка $z = -1$ является существенной особой точкой.

Легко видеть, что $C_{-1} = \dfrac{2^3}{3!} + 2\cdot\dfrac{2^2}{2!} = \dfrac{16}{3}$; $J = 2\pi i\cdot\dfrac{16}{3} = \dfrac{32\pi i}{3}$. $\blacktriangle$

*Пример 11*. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить $J = \oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{20}}{z^7+2}\,dz$.

$\Delta$ Вне контура интегрирования находится единственная особая точка – бесконечно удаленная точка. Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\frac{z^{20}}{z^7+2}=\frac{z^{20}}{z^7}\frac{1}{1+\dfrac{2}{z^7}}=z^{13}\left(1-\frac{2}{z^7}+\frac{2^2}{z^{14}}-\frac{2^3}{z^{21}}+\ldots\right);$$

$$\operatorname*{Res}_{\infty}\frac{z^{20}}{z^{10}+20}=-C_{-1}=-4\,.$$

Так как для всех особых точек, лежащих внутри контура интегрирования, выполняется соотношение $\sum\limits_{k=1}^{7}\operatorname*{Res}\limits_{z_k} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z)$, то

$$J=\int\limits_{|z|=10}\frac{z^{20}}{z^7+2}\,dz=2\pi i\cdot 4=8\pi i\,. \ ▲$$

*Пример 12*. Вычислить с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}$.

Δ Положим $e^{it}=z$. Тогда $\sin t=\dfrac{z-\dfrac{1}{z}}{2i}$, $dt=\dfrac{dz}{iz}$.

Получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(3+\dfrac{z-1/z}{i}\right)}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+3iz-1}.$$

Решая уравнение $z^2+3iz-1=0$, найдем два полюса первого порядка подынтегральной функции: $z_1=\dfrac{i(-3+\sqrt{5})}{2}$ и $z_2=\dfrac{i(-3-\sqrt{5})}{2}$. Из них только $z_1$ находится внутри контура интегрирования. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{z^2+3iz-1}=\frac{1}{2z+3i}\bigg|_{z=\frac{i(-3+\sqrt{5})}{2}}=\frac{1}{-3i+\sqrt{5}i+3i}=\frac{1}{\sqrt{5}\,i};$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}=2\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}\,i}=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \ ▲$$

*Пример 13*. Вычислить с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}\,dt$.

Δ Если положить $e^{it}=z$, то получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}\,dt=\int\limits_{|z|=1}\frac{\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}{iz\left(5-2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right)^2}\,dz=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}\,dz.$$

Решая уравнение $2z^2-5z+2=0$, найдем два полюса второго порядка подынтегральной функции $z_1=0{,}5$ и $z_2=2$. Из них только $z_1$ находится внутри окружности $|z|=1$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{0,5}\frac{z^2+1}{(2z^2-5z+1)^2}=\lim_{z\to 0,5}\left(\frac{(z-0,5)^2(z^2+1)}{4\,(z-0,5)^2(z-2)^2}\right)'=\frac{1}{4}\lim_{z\to 0,5}\left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to 0,5}\frac{2z\,(z-2)^2-2\,(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4}=\frac{8}{27};$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}\,dt=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{8}{27}=\frac{8\pi}{27}.\ \blacktriangle$$

*Пример 14*. Вычислить:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ ; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+3)\,dx}{(x^2+2x+17)^2}$ .

$\Delta$ а) Введем функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$.

Функция $f(z)$ представляет собой рациональную дробь, знаменатель которой не имеет действительных корней. Так как степень знаменателя на 4 больше степени числителя, то несобственный интеграл может быть вычислен с помощью вычетов. Найдем все особые точки функции $f(z)$: $(z^2+1)(z^2+9)=0$, $z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=3i,\ z_4=-3i$. В верхней полуплоскости лежат точки $z_1$ и $z_3$. Они являются полюсами первого порядка. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}=\frac{1}{(z^4+10z^2+9)'}\bigg|_{z=i}=\frac{1}{4z^3+20z}\bigg|_{z=i}=\frac{1}{16i};$$

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}=\frac{1}{4z^3+20z}\bigg|_{z=3i}=\frac{1}{-48i}.$$

Тогда $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i\left(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i}\right)=2\pi i\cdot\frac{3-1}{48i}=\frac{\pi}{12}.$

б) Так как в числителе многочлен степени $n=2$, а в знаменателе $m=4$, то условие $m-n\geq 2$ выполняется; уравнение $x^2+2x+17=0$ не имеет действительных корней. Интеграл может быть вычислен с помощью вычетов. Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{z^2+3}{(z^2+2z+17)^2}$ являются полюсы второго порядка $z_1=-1+4i$ и $z_2=-1-4i$.

В верхней полуплоскости лежит только точка $z_1$. Находим

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2+3}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{(z^2+3)(z-z_1)^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)'=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{(z^2+3)}{(z-z_2)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to z_1}=\frac{2z(z-z_2)^2-2(z^2+3)(z-z_2)}{(z-z_2)^4}=\lim_{z\to z_1}\frac{2z^2-2zz_2-2z^2-6}{(z-z_2)^3}=$$

$$= \frac{-2z_1 z_2 - 6}{(z - z_2)^3}\bigg|_{z=z_1} = \frac{-2\cdot 17 - 6}{(8i)^3} = \frac{5}{8^2 i}.$$

Записываем ответ: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{5}{8^2 i} = \frac{5\pi}{32}$. ▲

*Пример 15*. Вычислить с помощью вычетов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+2}\,dx$.

Δ Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx$. Функция $f(z) = \frac{(z+1)\,e^{iz}}{z^2-2z+2}$ удовлетворяет всем условиям леммы Жордана. Особые точки функции $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i$. В верхней полуплоскости лежит лишь точка $z_1 = 1+i$.

Так как точка $z_1$ является полюсом первого порядка, то

$$\operatorname*{Res}_{1+i} \frac{z+1}{z^2-2z+2}\,e^{iz} = \frac{(z+1)\,e^{iz}}{(z^2-2z+2)'}\bigg|_{z=1+i} = \frac{(2+i)\,e^{-1+i}}{2i}.$$

Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx = 2\pi i\,\frac{2+i}{2i}\,e^{-1+i} = \pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i\sin 1).$$

Записываем ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+2}\,dx = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\,(\pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i\sin 1)) = \pi e^{-1}(2\cos 1 - \sin 1).$$ ▲

## Дополнительные задачи

1. Найти вычеты функций в конечных особых точках:

а) $f(z) = \frac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}$; б) $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$; в) $f(z) = (z^2+2z-1)\cos\frac{3}{z-1}$.

**Ответ:** а) $\operatorname*{Res}_{i} f(z) = \frac{1+3i}{20}$; $\operatorname*{Res}_{-i} f(z) = \frac{1-3i}{20}$; $\operatorname*{Res}_{-3} f(z) = \frac{9}{10}$;

б) $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = -\frac{5}{2}$; $\operatorname*{Res}_{1} f(z) = e$;

в) $\operatorname*{Res}_{1} f(z) = -18$.

2. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\,dz}{\sin z}$; б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z+8}{(z+2)^3(z+5)}\,dz$; в) $\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$.

**Ответ:** а) $-2\pi i e^{\pi}$; б) $\frac{2}{9}\pi i$; в) $-\frac{\pi}{3}i$.

3. Вычислить:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+16}\,dx$.

**Ответ:** а) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\pi\cdot e^{-12}$.

# Занятие 22

## Контрольная работа

### Вариант 1

1. Функцию $f(z)=\frac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

**Ответ:** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(z-1)^n+\frac{1}{4}-\frac{1}{z-1},\ 0<|z-1|<4$.

2. Функцию $f(z)=z\cdot\cos\frac{1}{z+3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-3$.

**Ответ:** $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+3)^{2n-1}(2n)!}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+3)^{2n}(2n)!},\ 0<|z+3|<\infty$.

3. Для функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z-z-\frac{z^3}{6}}{\sin 6z-6z}$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

**Ответ:** нуль 2-го порядка.

4. Для функции $f(z)=\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$ найти конечные изолированные особые точки и определить их тип.

**Ответ:** $z=0$ – полюс четвертого порядка; $z=2\pi k, k\neq 0$ – полюс первого порядка.

5. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=1,5}\frac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}\,dz$; б) $\int\limits_{|z|=2}\frac{z+4}{(z+1)^3(z+3)}\,dz$;

в) $\int\limits_{|z|=3}(z^2+5z+5)\cos\frac{2}{z+1}\,dz$.

**Ответ:** а) $-3\pi i$; б) $\frac{\pi i}{4}$; в) $-12\,\pi i$.

6. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t + 4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+25)}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$.

**Ответ:** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $\pi e^{-2}\cos 2$.

## Вариант 2

1. Функцию $f(z) = \frac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -3$.

**Ответ:** $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{4^{n+1}} + \frac{5}{4} - \frac{3}{z+3}$, $0 < |z+3| < 4$.

2. Функцию $f(z) = (z+2)\sin\frac{2}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

**Ответ:** $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{(z-1)^{2n}(2n+1)!} + 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}$, $0 < |z-1| < \infty$.

3. Для функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}{e^{5z}-1}$ определить порядок нуля в точке $z_0 = 0$.

**Ответ:** нуль 3-го порядка.

4. Для функции $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z\,(1-\cos z)^2}$ найти конечные изолированные особые точки и определить их тип.

**Ответ:** $z = 0$ – полюс второго порядка; $z = 2\pi k, k \neq 0$ – полюс первого порядка.

5. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2+2}{z^3-4z^2+3z}\,dz$; б) $\int\limits_{|z|=2,5} \frac{z-4}{(z-2)^3(z-3)}\,dz$;

в) $\int\limits_{|z|=3} (z^2-5z+6)\sin\frac{3}{z-1}\,dz$.

**Ответ:** а) $\frac{-5\pi i}{3}$; б) $2\pi i$; в) $3\pi i$.

6. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5\sin t + 3\sqrt{5}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+2}\,dx$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $-\pi e^{-1}\sin 1$.

# Занятия 23–25

## Операционное исчисление

*Пример 1*. Установить, являются ли оригиналами следующие функции:

а) $f(t)=\begin{cases} e^{3t}\cdot\cos 2t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}\operatorname{tg} t, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

$\Delta$ а) Функция $f(t)$ локально интегрируема, т. е. для любых $t_1$ и $t_2$ существует $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(z)\,dt$. Так как $\left|e^{3t}\cos 2t\right|\leq e^{3t}$, то в качестве $M$ можно взять любое число $\geq 1$ и $S_0=3$. Следовательно, функция $f(t)$ является оригиналом.

б) Функция $f(t)$ в точках $t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ имеет разрывы второго рода. Функция $f(t)=\operatorname{tg} t$ не является оригиналом. ▲

*Пример 2*. Пользуясь определением, найти изображение функции-оригинала $f(t)=t\cdot e^t$.

$$\Delta\ \ F(p)=\int\limits_0^{\infty} t\,e^t\,e^{-pt}dt=\int\limits_0^{\infty} t\,e^{(1-p)t}dt=\left|\begin{array}{l} t=u,\ du=dt\\ e^{(1-p)t}dt=dv,\ v=\dfrac{1}{1-p}e^{(1-p)t}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{t}{1-p}e^{(1-p)t}\Bigg|_0^{\infty}-\frac{1}{1-p}\int\limits_0^{\infty}e^{(1-p)t}dt=-\frac{1}{(p-1)^2}e^{(1-p)t}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{(p-1)^2},\ \operatorname{Re} p>1.\ ▲$$

*Пример 3*. Пользуясь соотношением $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$ и теоремой подобия, найти изображение функции $f(t)=\cos\omega t$.

$$\Delta\ \text{По теореме подобия}\ F(p)=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\dfrac{p}{\omega}}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.\ ▲$$

*Пример 4*. Пользуясь соотношением $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$, свойством линейности и теоремой смещения найти изображение функции $f(t)=t\cdot\sin 2t$.

$\Delta$ Так как $f(t)=t\cdot\dfrac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}=\dfrac{1}{2i}t\,e^{2it}-\dfrac{1}{2i}t\,e^{-2it}$, то

$$F(p)=\frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{(p-2i)^2}-\frac{1}{(p+2i)^2}\right)=\frac{1}{2i}\,\frac{(p+2i)^2-(p-2i)^2}{(p-2i)^2(p+2i)^2}=$$

$$=\frac{1}{2i}\,\frac{8pi}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{(p^2+4)^2}.\ ▲$$

*Пример 5.* Пользуясь соотношением $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$ и теоремой о дифференцировании изображения, найти изображение функции $f(t) = t \cdot \sin 2t$.

$$\Delta\ F(p) = -\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' = -2\cdot(-1)\cdot(p^2+4)^{-2}\cdot 2p = \frac{4p}{(p^2+4)^2}. \ \blacktriangle$$

*Пример 6.* Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \cos^2 t$.

$\Delta$ Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда $f'(t) \risingdotseq p\,F(p) - f(0)$.

Но $f(0) = 1$, а $f'(t) = -2\cos t \sin t = -\sin 2t \risingdotseq -\dfrac{2}{p^2+4}$. Следовательно,

$$-\frac{2}{p^2+4} = p\cdot F(p) - 1, \text{ откуда } F(p) = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{p^2+2}{(p^2+4)\cdot p}. \ \blacktriangle$$

*Пример 7.* Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций (рис. 16).

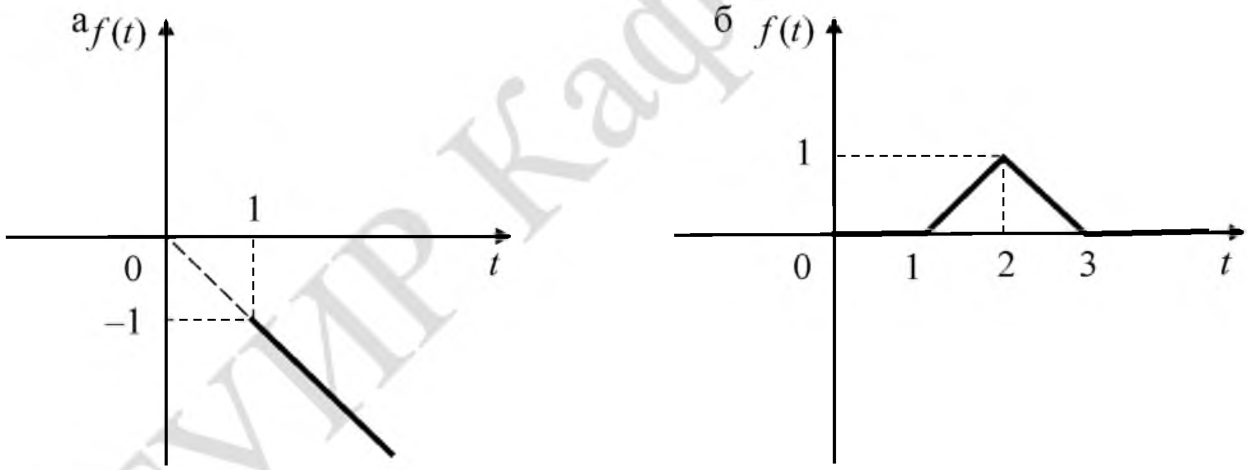


Рис. 16

$\Delta$ а) Запишем изображенную функцию в виде

$$f(t) = -t\cdot 1(t-1) = -(t-1)\cdot 1(t-1) - 1\cdot 1(t-1).$$

По теореме запаздывания $F(p) = -\dfrac{1}{p^2}e^{-p} - \dfrac{1}{p}e^{-p}$.

б) Запишем изображенную функцию в виде

$$f(t) = (t-1)\cdot 1(t-1) - (t-1)\cdot 1(t-2) + (3-t)\cdot 1(t-2) - (3-t)\cdot 1(t-3) =$$
$$= (t-1)\cdot 1(t-1) - 2(t-2)\cdot 1(t-2) + (t-3)\cdot 1(t-3).$$

По теореме запаздывания $F(p) = \dfrac{1}{p^2}e^{-p} + \dfrac{1}{p^2}\cdot 2e^{-2p} + \dfrac{1}{p^2}\cdot e^{-3p}$. $\blacktriangle$

*Пример 8*. Найти изображение функций:

а) $f(t)=t\,e^{2t}\cdot\sin 3t$;  б) $f(t)=\begin{cases} e^{-3t}\cos 4\,(t-2), t>2;\\ 0,\ t\le 2.\end{cases}$

$\Delta$ а) $\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+9}$;  $e^{2t}\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{(p-2)^2+9}$;

$$te^{t}\sin 3t \risingdotseq -\left(\frac{3}{(p-2)^2+9}\right)' = \frac{6\,(p-2)}{((p-2)^2+9)^2};$$

б) $\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+16}$; $\cos 4\,(t-2)\cdot 1\,(t-2) \risingdotseq e^{-2p}\cdot\dfrac{p}{p^2+16}$;

$e^{-3t}\cos 4\,(t-2)\cdot 1\,(t-2) \risingdotseq e^{-2(p+3)}\cdot\dfrac{p+3}{(p+3)^2+16}$. ▲

*Пример 9*. Пользуясь теоремами об интегрировании изображения и об интегрировании оригинала, найти изображение функции $\int\limits_0^t \dfrac{e^{3\tau}-\cos 2\tau}{\tau}\,d\tau$.

$\Delta$ С помощью правила Лопиталя легко показать, что функция $\dfrac{e^{3t}-\cos 2t}{t}$ в точке $t=0$ имеет разрыв первого рода. Следовательно, функция $\dfrac{e^{3t}-\cos 2t}{t}$ является оригиналом.

Находим $e^{3t}-\cos 2t \risingdotseq \dfrac{1}{p-3}-\dfrac{p}{p^2+4}$. По теореме об интегрировании изображения находим

$$\frac{e^{3t}-\cos 2t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{p}{p^2+4}\right)dp = \left(\ln\,(p-3)-\frac{1}{2}\ln\,(p^2+4)\right)\Bigg|_p^{\infty} = \ln\frac{p-3}{\sqrt{p^2+4}}\Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p-3}.$$

По теореме об интегрировании оригинала находим

$$\int\limits_0^t \frac{e^{3\tau}-\cos 2\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p-3}.\ ▲$$

*Пример 10*. Найти свертку оригиналов $\cos 2t$ и $\sin t$ и изображение для свертки.

$\Delta$ Находим

$$\cos 2t * \sin t = \int\limits_0^t \cos 2\tau\cdot\sin\,(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\sin\,(t+\tau)+\sin\,(t-3\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos\,(t+\tau)+\frac{1}{3}\cos\,(t-3\tau)\right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{3}\,(\cos t-\cos 2t).$$

$$F(p)=\frac{1}{3}\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Изображение свертки можно получить, используя теорему Бореля.

Так как $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то $\cos 2t * \sin t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+1}=$

$=\frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$. ▲

*Пример 11*. С помощью интеграла Дюамеля найти оригинал для изображения $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}$.

Δ Представим изображение в виде $F(p)=p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p-2}$. Здесь

$F_1(p)=\frac{1}{p-1}$, $f_1(t)=e^t$, $F_2(p)=\frac{1}{p-2}$, $f_2(t)=e^{2t}$.

Так как $PF_1(p)\cdot F_2(p)\risingdotseq f_1(0)\cdot f_2(t)+f_1'*f_2$, то

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)}\risingdotseq$$

$$1\cdot e^{2t}+\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{2(t-\tau)}\,d\tau=e^{2t}+e^{2t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau=e^{2t}-e^{2t}\cdot e^{-\tau}\Big|_0^t=-e^t+2e^{2t}. \ ▲$$

*Пример 12*. Найти оригиналы для функций:

а) $F(p)=\frac{3p+2}{2p^2-8p+6}$;   б) $F(p)=\frac{3p^2+3p-13}{p\,(p^2+4p+13)}$;

в) $F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.

Δ а) Используем представление

$$F(p)=\frac{3p+2}{2\,(p^2-4p+3)}=\frac{1{,}5p+1}{(p-2)^2-1}=\frac{1{,}5\,(p-2)+3}{(p-2)^2-1}+$$

$$+\frac{1}{(p-2)^2-1}=1{,}5\frac{p-2}{(p-2)^2-1}+4\,\frac{1}{(p-2)^2-1}.$$

Используя таблицу изображений, свойство линейности и теорему смещения, получим

$$f(t)=1{,}5\,e^{2t}\operatorname{ch}t+4e^{2t}\operatorname{sh}t=\frac{11}{4}e^{3t}-\frac{5}{4}e^{t}.$$

б) Представим $F(p)$ в виде $F(p)=\frac{3p^2+3p-13}{p\,(p^2+4p+13)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+13}$.

Отсюда следует равенство $3p^2+3p-13=Ap^2+4Ap+13A+Bp^2+Cp$, или система $\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+C=3, \\ 13A=-13. \end{cases}$

Решая ее, получаем $A=-1, B=4, C=7$ и

$$F(p)=\frac{1}{p}+\frac{4p+7}{p^2+4p+13}=-\frac{1}{p}+\frac{4(p+2)-1}{(p+2)^2+3^2}.$$

Отсюда, $f(t)=-1+4e^{-2t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

в) Функция $F(p)$ имеет два полюса: простой полюс $p_1=1$ и полюс второго порядка $p_2=-1$. Находим

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p_1=1}\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}+\operatorname*{Res}_{p_2=-1}\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Находим вычеты

$$\operatorname*{Res}_{p_1=1}\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}=\lim_{p\to 1}\frac{(p^2+p+1)(p-1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}=\frac{3}{4}e^t,$$

$$\operatorname*{Res}_{p_2=-1}\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}=\lim_{p\to -1}\left(\frac{(p^2+p+1)(p+1)^2e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to -1}\left(\frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{p-1}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{((2p+1)e^{pt}+te^{pt}(p^2+p+1)(p-1)-(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)^2}=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t},$$

получаем

$$f(t)=\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}.\ \blacktriangle$$

*Пример 13*. Решить задачу Коши:

$$x''-3x'+2x=2e^{3t},\ x(0)=1, x'(0)=3.$$

$\Delta$ Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t)\fallingdotseq X(p), x'(t)\fallingdotseq pX(p)-1, x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-p-3, 2e^{3t}\fallingdotseq\frac{2}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений: $p^2X-p-3-3pX+3+2X=\frac{2}{p-3}$.

Решим уравнение для изображений:

$$X(p^2-3p+2)=\frac{2}{p-3}+p,\ X=\frac{2+p^2-3p}{(p^2-3p+2)(p-3)}=\frac{1}{p-3}.$$

Найдем оригинал для функции $X(p)$: $x(t)=e^{3t}$. $\blacktriangle$

*Пример 14*. Решить задачу Коши: $x''+4x=\cos 2t,\ x(0)=1,\ x'(0)=-1.$

$\Delta$ Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \fallingdotseq X(p),\ x'(t) \fallingdotseq pX - 1,\ x''(t) \fallingdotseq p^2 X - p + 1,$$

$$\cos 2t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+4}.$$

Запишем и решим уравнение для изображений:

$$p^2 X - p + 1 + 4X = \frac{p}{p^2+4},\ X = \frac{p}{(p^2+4)^2} + \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4},$$

$$X = \frac{2p^2+1}{p(p^2+1)} = \frac{p^2+1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}.$$

Таким образом, $x(t) = 1 + \cos t$. $x(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t$. ▲

*Пример 15*. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2, \\ x_2' = x_1 + 1, \end{cases} \qquad x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 0.$$

Δ Переходим от оригиналов к изображениям:

$$x_1(t) \fallingdotseq X_1(p),\ x_1'(t) \fallingdotseq pX_1(p) + 1,\ x_2(t) \fallingdotseq X_2(p),$$

$$x_2'(t) \fallingdotseq pX_2(p),\ 1 \fallingdotseq \frac{1}{p},\ 2 \fallingdotseq \frac{2}{p}.$$

Запишем систему уравнений для изображений: $\begin{cases} pX_1 + 1 = -X_2 + \dfrac{2}{p}, \\ pX_2' = X_1 + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на $p$ и подставим во второе:

$$p^2 X_1 + p = -X_1 - \frac{1}{p} + 2.$$

Отсюда получим

$$X_1 = \frac{2}{p^2+1} - \frac{1}{p},\ X_2 = -\frac{2p}{p^2+1} + 1 - 1 + \frac{2}{p} = -\frac{2p}{p^2+1} + \frac{2}{p}.$$

Находим оригиналы для функций:

$$x_1(t) = 2\sin t - 1,\ x_2(t) = -2\cos t + 2.\ ▲$$

*Пример 16*. С помощью интеграла Дюамеля решить уравнения:

а) $x' + 2x = -3t + 2,\ x(0) = 0$.

б) $x' + x = e^t,\ x(0) = 0$.

Δ а) Составим уравнение $z' + 2z = 1,\ z(0) = 0$ и решим его:

$$z(t) \fallingdotseq Z(p),\ z'(t) \fallingdotseq p\,Z(p),\ 1 \fallingdotseq \frac{1}{p};$$

$$pZ + 2Z = \frac{1}{p},\ Z = \frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2}\frac{p+2-p}{p(p+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right);$$

$$z(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right),\; z'(t)=e^{-2t}.$$

Находим

$$x(t)=\int_0^t z'(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t e^{-2\tau}(2-3(t-\tau))\,d\tau=$$

$$=(2-3t)\int_0^t e^{-2\tau}d\tau+3\int_0^t \tau e^{-2\tau}d\tau=\frac{-2+3t}{2}\,e^{-2\tau}\Big|_0^t-\frac{3}{2}\tau e^{-2\tau}\Big|_0^t+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=\left(-1+\frac{3}{2}t\right)e^{-2t}+1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}te^{-2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{4}=$$

$$=1{,}75-1{,}5\,t-1{,}75\,e^{-2t}.$$

б) Составим уравнение $z'+z=1,\; z(0)=0$ и решим его:

$$z(t)\risingdotseq Z(p),\; z'(t)\risingdotseq p\,Z(p),\; 1\risingdotseq\frac{1}{p};$$

$$Z(p)=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{p+1-p}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1};$$

$$z(t)=1-e^{-t},\; z'(t)=e^{-t}.$$

Находим

$$x(t)=\int_0^t z'(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t e^{-\tau}\cdot e^{t-\tau}d\tau=e^t\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=-\frac{1}{2}e^te^{-2\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right).\;\blacktriangle$$

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

1. Найти изображение функции $f(t)=t\cdot\operatorname{ch}2t$.

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 17).

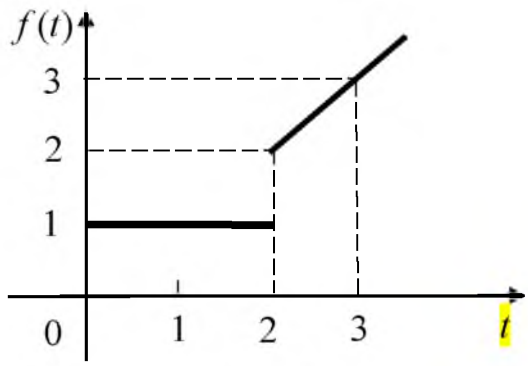


Рис. 17

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{1}{p}+e^{-2p}\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)$.

3. Найти изображение функции $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{e^{2\tau}-1-3\tau}{\tau}\,d\tau$.

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\ln\dfrac{p}{p-2}-\dfrac{3}{p}\right)$.

4. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

**Ответ:** $f(t)=e^t\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

5. Решить задачу Коши: $x''-3x'+2x=e^{5t}$, $x(0)=1, x'(0)=2$.

**Ответ:** $x(t)=\dfrac{1}{12}e^{5t}+\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{2}{3}e^{2t}$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'=3x+4, \\ y'=4x-3y, \end{cases} \qquad x(0)=y(0)=1.$$

**Ответ:** $x(t)=\dfrac{6}{5}e^{5t}-\dfrac{1}{5}e^{-5t}$, $y(t)=\dfrac{3}{5}e^{5t}+\dfrac{2}{5}e^{-5t}$.

## Вариант 2

1. Найти изображение функции $f(t)=t\cdot \operatorname{sh}3t$.

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{6p}{(p^2-9)^2}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 18).

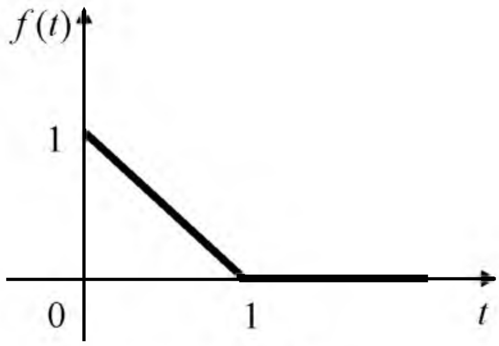


Рис. 18

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^2}e^{-p}$.

3. Найти изображение функции $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{e^{-2\tau}-\tau-1}{\tau}d\tau$.

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\ln\dfrac{p}{p+2}-\dfrac{1}{p}\right)$.

4. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+2p+5}$.

**Ответ:** $f(t)=e^{-t}(\cos 2t-2\sin 2t)$.

5. Решить задачу Коши

$x''+2x'-3x=e^{-t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1$.

**Ответ:** $x(t)=\dfrac{1}{8}(3e^{t}-e^{-3t}-2e^{-t})$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'=-x-2y, \\ y'=3x+4y, \end{cases} \quad x(0)=1,\ y(0)=-2.$$

**Ответ:** $x(t)=-e^{t}+2e^{2t},\ y(t)=e^{t}-3e^{2t}$.

## Дополнительные задачи

1. Найдите изображения для функций:

а) $f(t)=\sin^4 t$; б) $f(t)=\operatorname{ch} t\cdot\cos 2t$; в) $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{1-\cos 2\tau}{\tau}\cdot e^{-3\tau}d\tau$.

**Ответ:** а) $F(p)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{p}{p^2+16}-4\dfrac{p}{p^2+4}+\dfrac{3}{p}\right)$; б) $F(p)=\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+1}{(p+1)^2+4}$.

в) $F(p)=\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

2. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 19).

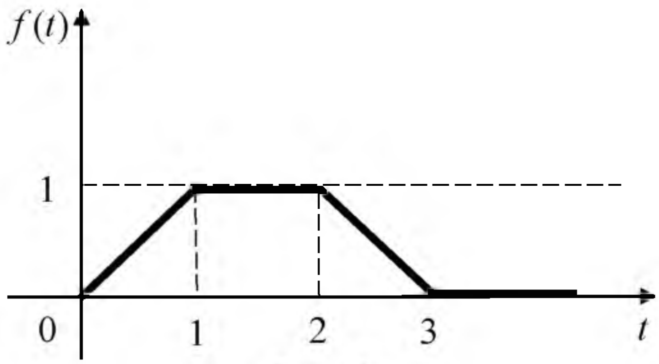


Рис. 19

**Ответ:** $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}e^{-p}-\dfrac{1}{p^2}e^{-2p}+\dfrac{1}{p^2}e^{-3p}$.

3. Дважды применив теорему об интегрировании оригинала, найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$.

**Ответ:** $f(t)=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

4. Найти оригиналы для следующих изображений:

а) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$; в) $F(p)=\dfrac{p^2+21p-40}{(p+1)(p^2-5p+6)}$.

**Ответ:** а) $f(t)=(t-3)\,e^{-(t-3)}\cdot 1(t-3)$;

б) $f(t)=\dfrac{1}{12}e^{2t}-\dfrac{1}{12}e^{-t}(\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin t\sqrt{3})$; в) $f(t)=8\,e^{3t}-5e^{-t}-2e^{2t}$.

5. Решить задачи Коши:

а) $x''+3x'=e^t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$; б) $x''+4x=\sin 3t,\ x(0)=x'(0)=0$;

в) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=-4x+4y, \end{cases}$ $x(0)=3,\ \ y(0)=-2$.

**Ответ:** а) $x=\dfrac{1}{4}e^t+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$; б) $x=\dfrac{3}{10}\sin 2t-\dfrac{1}{5}\sin 3t$;

в) $x=2+e^{5t},\ \ y=2-4e^{5t}$.

## Литература

1. Воробьев, Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1979.

2. Шмелёв, П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П. А. Шмелёв. – М. : Высш. шк., 1983.

3. Свешников, А. Г. Теория функций комплексного переменного / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1972.

4. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001.

## Содержание