

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра физики

**Э.И. Зенькевич, Г.Ф. Смирнова, М.С. Сергеева-Некрасова**

**МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

*Рекомендовано УМО по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники  
в качестве учебно-методического пособия  
по учебной дисциплине «Физика» для  
специальностей, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2015

УДК 531/534+537(076)  
ББК 22.2+22.33я73  
3-56

Рецензенты:

кафедра общей физики учреждения образования «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы» (протокол №10 от 11.12.2014);

декан физического факультета Белорусского государственного университета,  
доктор физико-математических наук, профессор В. М. Анищик

**Зенькевич, Э. И.**

3-56      Механика и электромагнетизм. Алгоритмы решения задач: учеб.-метод. пособие /Э.И.Зенькевич, Г.Ф.Смирнова, М.С. Сергеева-Некрасова.– Минск:БГУИР, 2015. – 160 с.: ил.  
ISBN978-985-543-140-5.

Содержит детально разработанные алгоритмы решения задач по общему курсу физики (разделы: механика, электромагнетизм), а также значительное количество конкретных и разобранных примеров применения этих алгоритмов. Может быть использовано преподавателями во время занятий и студентами для самостоятельной работы.

**УДК 531/534+537(076)**  
**ББК 22.2+22.33я73**

ISBN 978-985-543-140-5 © Зенькевич Э. И., Смирнова Г. Ф.,

Сергеева-Некрасова М.С., 2015  
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2015

## Введение

В последнее десятилетие нанотехнологии как развитие естественных наук и основа технологической революции XXI века становятся предметом фундаментальных и технологических исследований. Физика наноматериалов и нанотехнологий предъявляет повышенные требования к фундаментальной подготовке специалистов, основанной на глубоких знаниях и представлениях, заложенных в общих курсах по механике, молекулярной физике, электричеству, атомной физике. В этом плане успешное развитие современной высшей школы неотделимо от поиска новых средств и приемов, меняющих стратегию образовательного процесса, в котором серьезное внимание должно уделяться междисциплинарному характеру подготовки специалистов новой формации.

В настоящее время университетская образовательная система в Республике Беларусь столкнулась с новыми реалиями как объективного, так и субъективного характера. Осуществляемый переход к четырехлетнему обучению предполагает интенсификацию учебной деятельности, обновление образовательных программ высшей школы. Нынешний выпускник университета должен быть не только хорошо ориентирован в профессиональной среде. В условиях постоянного обновления знаний и технологий он должен уметь самостоятельно и плодотворно продуцировать знания, обладать навыками самообучения.

Вместе с тем особенности психологии восприятия и усвоения информации, характерные для многих представителей современной студенческой молодежи, существенно затрудняют выполнение этой задачи. Предлагаемое авторами пособие призвано содействовать преодолению трудностей, возникающих на этом пути. Пособие содержит ряд разделов, в каждом из которых приводятся алгоритмы решения задач и подробные решения нескольких задач в соответствии с алгоритмами.

Оригинальный методологический подход, использованный авторами, позволяет внести существенные коррективы в организацию практических занятий по курсу «Физика». Благодаря тому, что материал строго ранжирован по уровню сложности, оказывается возможным преодоление разноуровневого характера подготовки студентов в академической группе, приступающей к решению задач. Преподаватель получает возможность работать с каждым студентом индивидуально, в доступном для него темпе. Материал задачника легко может быть перенесен в электронный формат, что делает его доступным для самостоятельной работы студентов вне учебной аудитории, а также позволяет работать с ним в тестовом режиме контроля знаний студентов.

В представленных в пособии алгоритмах упор делается на «пошаговое» решение задач: каждый этап алгоритма требует выполнения строго определенного действия, результат которого позволяет перейти к тому этапу, выполнение которого даст возможность продолжать решение задачи в нужном ключе, приближая получение конечного результата. Использование последовательных этапов решения задач на основании предложенных алгоритмов позволяет достичь нескольких целей: 1) даже слабо подготовленный студент способен начать решение задачи и продолжить ее решение в правильном направлении, двигаясь от одного этапа алгоритма к другому; 2) в ходе освоения студентами алгоритма решения задач реализуется на практике основной принцип педагогики: «От повторения – к навыку, от навыка – к умению, от умения – к творчеству». Повторение одних и тех же действий при решении разных задач позволяет студентам приобрести и закрепить базовые навыки в практическом применении теоретических знаний; 3) повторение в строгой последовательности этапов алгоритма позволяет определить и студенту, и преподавателю, на каких этапах постоянно возникают затруднения и как их можно устранить. С этой целью все последовательные этапы алгоритма строго пронумерованы (в тексте этапы обозначены как п.1, п.2 и так далее), что позволяет при необходимости каждый этап детально проработать независимо от остальных. Более того, алгоритмы составлены таким образом, чтобы навыки выполнения целого ряда пунктов этапа одной темы повторялись и в других разделах.

Таким образом, студенты приобретают навыки использования одного и того же математического и логического аппарата для решения задач, основанных на совершенно разных физических явлениях.

Авторы надеются, что предлагаемые в данном пособии методологические приемы послужат успешной реализации новых подходов в развитии образовательного процесса современной высшей школы в области естественных наук.

Авторы благодарят профессора В.М. Анищика, а также коллектив кафедры общей физики УО «Гродненский государственный университет им. Я.Купалы» за полезные советы и замечания, высказанные ими в процессе подготовки настоящего пособия к изданию. Замечания и пожелания просьба направлять по адресу: 220013, Минск, ул. П.Бровки,6.

Авторы

## 1. МЕХАНИКА

### 1.1. Кинематика материальной точки (прямая задача). Алгоритм решения задач

Исходя из условия задачи, начать решение с одного из пунктов алгоритма. В том случае, если в условии заданы координаты материальной точки, следует пользоваться алгоритмом, начиная с п.1 или с п.1' для угловых координат. Если же в условии задачи заданы составляющие скорости или ускорения, следует пользоваться алгоритмом, начиная с п.2 или п.3, а для угловых параметров начиная с п. 2' или п. 3'.

П.1. Исходя из условия задачи, записать систему уравнений, определяющих значения координат как функции времени:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$z = z(t).$$

П.1'. Записать зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = f(t).$$

П.2. Определить проекции вектора скорости на оси выбранной системы координат путем дифференцирования координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

или взять их из условия задачи.

П.2'. Найти угловую скорость вращения путем дифференцирования угла поворота тела  $\varphi$  по времени или взять ее из условия задачи:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

П.3. Определить проекции вектора ускорения на оси выбранной системы координат дифференцированием соответствующих проекций скорости по времени или взять из условия задачи:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}; w_y = \frac{dv_y}{dt}; w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

П.3'. При вращательном движении угловое ускорение определить путем дифференцирования угловой скорости по времени или взять его из условия задачи:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}.$$

П.4. Записать вектор скорости поступательного движения через найденные в п.2 проекции  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, определяющие направления осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  в декартовой системе координат.

П.4'. Направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  определить в соответствии с правилом правого винта.

П.5. Модуль вектора скорости поступательного движения определить по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

П.6. Записать вектор ускорения поступательного движения через найденные в п. 3 проекции:

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}.$$

П.6'. Направление углового ускорения определить в соответствии с правилом правого винта.

П.7. Модуль вектора ускорения поступательного движения определить по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

П.8. Для нахождения уравнения траектории поступательного движения материальной точки из системы уравнений движения необходимо исключить время

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

П.9. Для определения угла между любыми двумя векторами следует использовать скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha, \text{ или } \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \beta, \text{ или } \vec{r} \cdot \vec{w} = |\vec{r}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \varphi,$$

выразив из этих соотношений углы между соответствующими векторами.

*Примечание.* Если в задаче не требуется выполнение какого-нибудь из пунктов алгоритма, то соответствующие пункты исключаются из решения, а продолжение решения задачи идет согласно следующим после пропущенного пунктам.

### 1.1.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Уравнение движения материальной точки имеет вид  $\vec{r} = (3t - 2) \cdot \vec{i} - 4t \cdot \vec{j}$ . Найти вектор скорости  $\vec{v}$ , вектор ускорения  $\vec{w}$ , модули  $w$  и  $v$  и вывести уравнение траектории точки.

*Решение*

П.1. Запишем систему уравнений, определяющих координаты точки:

$$x = 3t - 2, \quad y = -4t.$$

П.2. Найдем проекции скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -4.$$

П.3. Найдем проекции ускорения:

$$w_x = 0, \quad w_y = 0.$$

П.4. Определим вектор скорости:

$$\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}.$$

П.5. Определим модуль скорости:

$$v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

П.6. Ускорение точки  $\vec{w} = \vec{0}$ .

П.7.  $w = 0$ .

П.8. Выведем уравнение траектории. Для этого исключим время из системы:

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -4t \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{y}{4},$$

$$x = 3\left(-\frac{y}{4}\right) - 2,$$

$$x = -\frac{3y}{4} - 2 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3},$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \text{ — уравнение траектории.}$$

**Пример 2.** Частица движется в плоскости XOY так, что ее координаты изменяются по закону  $x = a \cdot \sin \omega t$ ,  $y = b(1 + \cos \omega t)$ , где  $a, b$  и  $\omega$  — положительные константы. Определить вектор ускорения как функцию радиуса-вектора точки.

*Решение*

Решение начинаем с п.2, т.к. координаты точки заданы в условии задачи.

П.2. Найдем проекции вектора скорости на оси координат путем дифференцирования координат по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \sin \omega t.$$

П.3. Найдем проекции ускорения точки на оси Ox и Oy:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cos \omega t.$$

П.6. Найдем вектор ускорения:

$$\vec{w} = -a\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{i} - b\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{j}.$$

Запишем формулу для радиуса-вектора точки:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{r} = a \sin \omega t \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + b \cos \omega t \cdot \vec{j}.$$

Из последнего равенства выразим

$$a \sin \omega t \cdot \vec{i} + b \cos \omega t \cdot \vec{j} = \vec{r} - b \cdot \vec{j}$$

Подставим в выражение для вектора ускорения (п.6)

$$\vec{w} = -\omega^2 (\vec{r} - b \cdot \vec{j}).$$

**Пример 3.** Уравнение скорости частицы имеет вид  $\vec{v} = (3 + 2t^2)\vec{i} + 4t \cdot \vec{j} + 5\vec{k}$ . Определить вектор ускорения  $\vec{w}$  и его модуль  $w$ , а также угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  как функцию от времени.

*Решение*

Поскольку в условии задачи задана скорость, начинаем решение с п.2.

П.2. Выпишем из условия задачи значение составляющих скорости:

$$v_x = 3 + 2t^2, v_y = 4t, v_z = 5.$$

П.3. Найдем составляющие ускорения  $w_x, w_y, w_z$ :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = 4t, w_y = \frac{dv_y}{dt} = 4, w_z = \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

П.6. Найдем вектор ускорения  $\vec{w} = 4t \cdot \vec{i} + 4\vec{j}$ .

П.7. Найдем модуль вектора ускорения  $w$ :

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(4t)^2 + (4)^2} = 4\sqrt{t^2 + 1}.$$

П.9. Для определения угла между векторами  $\vec{w}$  и  $\vec{v}$  определим предварительно модуль вектора  $\vec{v}$  согласно п.5 алгоритма:

$$v = \sqrt{(3 + 2t)^2 + (4t)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 12t + 4t^2 + 16t^2 + 25} = \sqrt{20t^2 + 12t + 34},$$

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{((3 + 2t^2)\vec{i} + 4t \cdot \vec{j} + 5\vec{k})(4t \cdot \vec{i} + 4\vec{j})}{(4\sqrt{t^2 + 1})\sqrt{20t^2 + 12t + 34}} = \frac{4t(3 + 2t^2) + 16t}{4\sqrt{t^2 + 1}\sqrt{20t^2 + 12t + 34}} = \\ &= \frac{2t^3 + 19t}{\sqrt{t^2 + 1}\sqrt{20t^2 + 12t + 34}}. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени  $\varphi = At - Bt^3$ , где  $A$  и  $B$  – положительные константы. Найти значения угловой скорости и углового ускорения как функции времени.

*Решение*

П.1'. Зависимость угла поворота от времени задана в условии задачи:

$$\varphi = At - Bt^3.$$

П.2'. Найдем угловую скорость вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A - 3Bt^2.$$

П.3'. Найдем угловое ускорение:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -6Bt.$$

**Пример 5.** Тело движется в плоскости  $ХОУ$  так, что его координаты меняются по закону  $x = 5 + 7t - 2t^2, y = 2 - t + 4t^2$ . Определить векторы скорости и ускорения и угол между ними как функции времени.

*Решение*

П.1. Запишем систему уравнений, определяющих координаты точки:

$$x = 5 + 7t - 2t^2, y = 2 - t + 4t^2.$$

П.2. Найдем проекции скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 7 - 4t, v_y = -1 + 8t.$$

П.3. Найдем проекции ускорения:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -4, w_y = \frac{dv_y}{dt} = 8.$$

П.4. Определим вектор скорости:

$$\vec{v} = (7 - 4t)\vec{i} + (8t - 1)\vec{j}.$$

П.5. Определим модуль скорости:

$$v = \sqrt{(7 - 4t)^2 + (8t - 1)^2} = \sqrt{49 - 56t + 16t^2 + 64t^2 - 16t + 1} = \sqrt{80t^2 - 72t + 50} = 2\sqrt{20t^2 + 18t + 12,5}.$$

П.6. Определим вектор ускорения:

$$\vec{w} = -4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

П.7. Определим модуль ускорения:

$$w = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{1 + 4} = 4\sqrt{5}.$$

П.9. Для определения угла воспользуемся скалярным произведением векторов:

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{((7 - 4t)\vec{i} + (8t - 1)\vec{j})(8\vec{j} - 4\vec{i})}{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{20t^2 + 18t + 12,5}} = \frac{80t - 36}{8\sqrt{5}\sqrt{20t^2 + 18t + 12,5}}.$$

**Пример 6.** Движение точки в плоскости XOY описывается уравнениями  $x = 2 \sin \omega t$  и  $y = 3 \cos \omega t$ . Найти векторы скорости и ускорения точки в зависимости от времени, а также получить уравнение траектории.

*Решение*

П.1. Координаты точки заданы условием

$$x = 2 \sin \omega t, y = 3 \cos \omega t.$$

П. 2. Определяем проекции скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\omega \cos \omega t, v_y = \frac{dy}{dt} = -3\omega \sin \omega t.$$

П.3. Находим проекции ускорения:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -2\omega^2 \sin \omega t, w_y = \frac{dv_y}{dt} = -3\omega^2 \cos \omega t.$$

П.4. Записываем вектор скорости:

$$\vec{v} = 2\omega \cos \omega t \cdot \vec{i} - 3\omega \sin \omega t \cdot \vec{j}.$$

П.6. Записываем вектор ускорения:

$$\vec{w} = -2\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{i} - 3\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{j} = -\omega^2 (2 \sin \omega t \cdot \vec{i} + 3 \cos \omega t \cdot \vec{j}).$$

П.8. Ищем уравнение траектории:

$$\begin{cases} x = 2 \sin \omega t \\ y = 3 \cos \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \sin \omega t \\ \frac{y}{3} = \cos \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 \omega t, \\ \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 \omega t. \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 - \text{уравнение эллипса.}$$

**Пример 7.** Радиус-вектор точки с течением времени меняется по закону  $\vec{r} = 2t^2\vec{i} - 3t^3\vec{j} + 5t\vec{k}$ . Найти векторы и модули скорости и ускорения точки как функции времени.

*Решение*

П.1. Определяем координаты частицы:

$$x = 2t^2, \quad y = -3t^3, \quad z = 5t.$$

П.2. Находим проекции скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -9t^2, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 5.$$

П.3. Находим проекции ускорения:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = 4, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = -18t, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

П.4. Записываем вектор скорости:

$$\vec{v} = 4t \cdot \vec{i} - 9t^2 \cdot \vec{j} + 5\vec{k}.$$

П.5. Определяем модуль скорости:

$$v = \sqrt{16t^2 + 81t^4 + 25}.$$

П.6. Записываем вектор ускорения:

$$\vec{w} = 4\vec{i} - 18t \cdot \vec{j}.$$

П.7. Находим модуль:

$$w = \sqrt{16 + 256t^2}.$$

**Пример 8.** Колесо вращается так, что угол поворота зависит от времени  $\varphi = A + Bt^3$ , где  $A$  и  $B$  – положительные постоянные. Определить как функции времени значения угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\beta$ .

*Решение*

П.1'. Зависимость угла поворота от времени задана в условии задачи:

$$\varphi = A + Bt^3.$$

П.2'. Находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3Bt^2.$$

П.3'. Находим угловое ускорение:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 6Bt.$$

**Пример 9.** Радиус-вектор частицы меняется со временем по закону  $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)$ , где  $\vec{b} = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ . Найти зависимость от времени векторов скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{w}$ .

*Решение*

П.1. Направление вектора  $\vec{r}$  задается направлением вектора  $\vec{b}$ . Направим ось  $Ox$  вдоль вектора  $\vec{b}$ . Тогда проекции вектора  $\vec{r}$  на оси равны  $x = bt(1 - \alpha t)$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

П.2. Запишем проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b - 2\alpha bt = b(1 - 2\alpha t), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

П.3. Найдем составляющие ускорения:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -2\alpha b, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0.$$

П.4. Определим вектор скорости:

$$\vec{v} = b(1 - 2\alpha t)\vec{i} = \vec{b}(1 - 2\alpha t).$$

П.5. Найдем модуль скорости:

$$v = |\vec{b}(1 - 2\alpha t)|$$

П.6. Найдем вектор ускорения:

$$\vec{w} = -2\alpha b\vec{i} = -2\alpha\vec{b}.$$

П.7. Найдем модуль вектора  $\vec{w}$ :

$$w = 2\alpha b.$$

**Пример 10.** Координаты движущейся точки меняются по закону  $x = A \cos \omega t$ ,  $y = B \cos 2\omega t$ , где  $A$  и  $B$  – константы. Вывести уравнение траектории точки и зависимость от времени вектора скорости  $\vec{v}$ .

*Решение*

П.1. Координаты точки заданы условием

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos 2\omega t.$$

П.2. Определяем проекции скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -2\omega B \sin 2\omega t.$$

П.4. Записываем вектор скорости:

$$\vec{v} = -\omega(A \sin \omega t \cdot \vec{i} + 2B \sin 2\omega t \cdot \vec{j}).$$

П.8. Ищем уравнение траектории, используя условие задачи:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}.$$

$$y = B \cos 2\omega t = B(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = B(2 \cos^2 \omega t - 1) = B\left(2 \frac{x^2}{A^2} - 1\right).$$

## 1.2. Кинематика материальной точки (обратная задача). Алгоритм решения задач

Если в условии задачи заданы вектор ускорения или составляющие ускорения поступательного движения (проекции на оси координат), то следует начинать решение задач с п.1А. Для вращательного движения следует начинать с п.1А'. Если же в задаче заданы или определены предыдущими расчетами вектор скорости или составляющие скорости, следует начать решение с п.8А. Для вращательного движения – с п.8А'.

### Алгоритм А

П.1А. Определить значения проекций на оси координат вектора ускорения, исходя из условия задачи.

П.2А. Записать уравнения для определения проекций на оси координат скорости поступательного движения  $d v_x = w_x dt$ ,  $d v_y = w_y dt$ ,  $d v_z = w_z dt$  и подставить в них значения  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ , определенные в п.1А.

П.3А. Определить количество переменных в каждом из полученных уравнений. Если в каждом уравнении по две переменные величины, то следует перейти к п.5А, если переменных более двух, то перейти к п.4А.

П.4А. Выполнить замену переменных, используя другие уравнения кинематики  $dx = v_x dt$ ,  $dy = v_y dt$ ,  $dz = v_z dt$ , чтобы свести количество переменных в каждом уравнении к двум.

П.5А. Убедиться, что переменные величины разделены по разные стороны от знака равенства. В том случае, если это условие не выполнено, произвести алгебраические преобразования таким образом, чтобы переменные оказались по разные стороны от знака равенства, а дифференциальные величины  $dt$ ,  $d v_x$ ,  $d v_y$ ,  $d v_z$  находились в числителе.

П.6А. Взять интегралы от правой и левой частей полученных выражений. Пределы интегрирования или константы интегрирования определить из условия задачи.

П.7А. Вектор скорости поступательного движения  $\vec{v}$ , модуль скорости  $v$ , а также угол между векторами скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{w}$  определить по формулам

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}, \quad \cos(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}.$$

П.8А. Записать выражения для составляющих вектора скорости исходя из предыдущих пунктов или условия задачи.

П.9А. Записать кинематическое уравнение:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

и спроецировать его на оси координат

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt.$$

Подставить в эти уравнения определенные в п.8А составляющие скорости.

П.10А. Определить количество переменных в каждом из полученных уравнений. Если в каждом уравнении по две переменные величины, то следует перейти к п.12А, а если переменных более двух, то к п.11А.

П.11А. Выполнить замену переменных, используя другие уравнения механики, чтобы свести количество переменных до двух в каждом уравнении.

П.12А. При необходимости выполнить разделение переменных по разные стороны от знака равенства, так чтобы дифференциальные величины  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  находились в числителе.

П.13А. Проинтегрировать полученные выражения. Пределы интегрирования определить из условия задачи.

П.14А. Радиус-вектор точки, его модуль, а также угол между радиусом-вектором и скоростью точки определить по формулам:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \cos(\vec{v} \cdot \vec{r}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{r}|}.$$

### Алгоритм А'

П.1А'. Записать выражение для углового ускорения вращающегося тела исходя из условия задачи.

П.2А'. Записать уравнение для определения угловой скорости  $d\omega = \beta dt$  и подставить в это уравнение значение углового ускорения  $\beta(t)$ , определенное в п.1А'.

П.3А'. Определить количество переменных в уравнении п.2А'. Если в уравнении две переменные величины, то перейти к п.5А', если же переменных три, то перейти к п.4А'.

П.4А'. Выполнить замену переменных, используя уравнение  $d\varphi = \omega dt$ , чтобы свести количество переменных к двум.

П.5А'. Убедиться, что переменные величины разделены по разные стороны от знака равенства. В том случае, если это условие не выполнено, произвести алгебраические преобразования таким образом, чтобы переменные оказались по разные стороны от знака равенства, а дифференциальные величины  $dt$  и  $d\omega$  оказались в числителе.

П.6А'. Найти интегралы от правой и левой частей полученных выражений. Пределы или константы интегрирования определить из условия задачи.

П.7А'. Направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  определить по правилу правого винта.

П.8А'. Записать уравнения для угловой скорости вращающегося тела исходя либо из условия задачи, либо из результатов, полученных в п.6А'.

П.9А'. Записать уравнение для угла поворота  $d\varphi = \omega dt$  и подставить в это уравнение значение угловой скорости, определенной в п.8А'.

П.10А'. Определить количество переменных в каждом из полученных уравнений. Если в каждом уравнении по две переменные величины, то следует перейти к п.12А, а если переменных более двух, то к п.11А.

П.11А'. Выполнить замену переменных, используя другие уравнения механики, чтобы свести количество переменных до двух в каждом уравнении.

П.12А'. При необходимости выполнить разделение переменных по разные стороны от знака равенства, так чтобы дифференциальные величины  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  находились в числителе.

П.13А'. Проинтегрировать полученные выражения, пределы интегрирования определить из условия задачи.

### 1.2.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** В момент времени  $t = 0$  частица начала движение из точки с координатами  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  в направлении оси  $Ox$ . Скорость точки меняется со временем по закону  $\vec{v} = \vec{v}_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$ , где  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  – начальная скорость, а  $\tau = \text{const}$ . Определить радиус-вектор точки как функцию времени  $t$ .

*Решение*

Начинаем решение с п.8А.

П.8А. Запишем выражение для составляющих скорости:

$$v_x = v_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right); \quad v_y = 0 \quad \text{и} \quad v_z = 0.$$

П.9А. Запишем кинематическое уравнение и его проекции на оси координат:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt; \quad dx = v_x dt; \quad dy = v_y dt; \quad dz = v_z dt.$$

Подставим в эти уравнения выражения для составляющих скорости из п.8А:

$$dx = v_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) dt; \quad dy = 0 \cdot dt; \quad dz = 0 \cdot dt.$$

П.10А. В каждом из полученных выражений по две переменные, поэтому перейдем к п.12А.

П.12А. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства, поэтому перейдем к п.13А.

П.13А. Проинтегрируем полученные в п.9А уравнения:

$$\int dx = \int v_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) dt, \quad \int dy = C_2, \quad \int dz = C_3;$$

$$x = v_0 t + \frac{v_0 t^2}{2\tau} + C_1, \quad y = C_2, \quad z = C_3.$$

Константы  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  найдем из начальных условий.

При  $t = 0$   $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ . Следовательно,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = y_0, \quad C_3 = z_0.$$

П.14А. Определим радиус-вектор точки  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = \left( x_0 + v_0 t + \frac{v_0 t^2}{2\tau} \right) \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}..$$

**Пример 2.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость изменяется по закону  $\omega = \omega_0 - At^2$ , где  $\omega_0$  – начальная скорость,  $A$  – положительная константа. Определить зависимость угла поворота  $\varphi$  от времени  $t$  и значение угла поворота в момент остановки.

*Решение*

П.8А'. Запишем уравнение для угловой скорости вращающегося тела исходя из условия задачи:

$$\omega = \omega_0 - At^2.$$

П.9А'. Запишем выражение для угла поворота  $d\varphi = \omega dt$  и подставим значение  $\omega$  из п.8А':

$$d\varphi = (\omega_0 - At^2) dt.$$

П.10А'. В полученном выражении две переменные, поэтому переходим к п.12А'.

П.12А'. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства, поэтому переходим к п.13А'.

П.13А'. Проинтегрируем полученное в п.9А' уравнение

$$\int d\varphi = \int (\omega_0 - At^2) dt;$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{At^3}{3} + C.$$

Константу  $C$  найдем из начального условия.

При  $t = 0$   $\varphi_0 = 0$ . Следовательно,  $C = 0$ .

П.14А'. Определим угол поворота в момент остановки, учитывая, что в момент остановки угловая скорость равна нулю  $\omega_k = 0$ :

$$\omega_0 - At^2 = 0,$$

следовательно,

$$t_k = \sqrt{\frac{\omega_0}{A}}.$$

Подставим  $t_k$  в выражение для  $\varphi$ :

$$\varphi_k = \omega_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{A}} - \frac{A}{3} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{A}\right)^3} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^{3/2}}{A^{1/2}}.$$

**Пример 3.** Частица движется в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $v = A\sqrt{x}$ , где  $A$  – положительная константа. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Определить зависимость радиуса-вектора точки от времени.

*Решение*

Решение начнем с п.8А.

П.8А. Запишем выражение для составляющих скорости:

$$v_x = A\sqrt{x}; v_y = 0; v_z = 0.$$

П.9А. Запишем кинематическое уравнение движения и его проекции на оси координат:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt; dx = v_x dt; dy = v_y dt; dz = v_z dt.$$

Подставим в эти уравнения значения составляющих скорости из п.8А:

$$dx = A\sqrt{x}dt, dy = 0, dz = 0.$$

П.10А. В каждом из полученных выражений по две переменные величины, поэтому перейдем к п.12А.

П.12А. Разделим переменные  $\frac{dx}{\sqrt{x}} = A dt$ , после чего перейдем к п.13А.

П.13А. Проинтегрируем  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int A dt, \int dy = C_2, \int dz = C_3$ ;

$$2x^{1/2} = At + C_1, y = C_2, z = C_3.$$

Константы неопределенного интегрирования найдем из начальных условий.

При  $t = 0$   $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ .

Следовательно,  $C_1 = 2\sqrt{x_0}, C_2 = y_0, C_3 = z_0$ .

Подставим константы:

$$2\sqrt{x} = At + 2\sqrt{x_0}, y = y_0, z = z_0;$$

$$x = \frac{(At + 2\sqrt{x_0})^2}{4}, y = y_0, z = z_0.$$

Следовательно,  $\vec{r} = \frac{(At + 2\sqrt{x_0})^2}{4} \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ .

**Пример 4.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота  $\varphi$  по закону  $\omega = \omega_0 + A\varphi$ , где  $\omega_0$  и  $A$  – положительные константы. В начальный момент времени  $\varphi_0 = 0$ . Найти зависимость угла поворота от времени.

*Решение*

Решение начнем с п.8А'.

П.8А'. Запишем выражение для угловой скорости, заданной в условии задачи  $\omega = \omega_0 + A\varphi$ .

П.9А'. Запишем выражение для угла поворота  $d\varphi = \omega dt$  и подставим значение  $\omega$  из п.8А':  $d\varphi = (\omega_0 + A\varphi) dt$ .

П.10А'. В полученном выражении две переменные величины, поэтому перейдем к п.12А'.

П.12А'. Разделим переменные по разные стороны от знака равенства:  $\frac{d\varphi}{\omega_0 + A\varphi} = dt$ , после чего перейдем к п. 13А'.

П.13А'. Проинтегрируем  $\int \frac{d\varphi}{\omega_0 + A\varphi} = \int dt$ ,  $\frac{1}{A} \ln(\omega_0 + A\varphi) = t + C$ .

Константу неопределенного интегрирования найдем из начальных условий. При  $t = 0$   $\varphi = 0$ . Следовательно,  $C = \ln \omega_0$ .

После подстановки константы получим

$$\frac{1}{A} (\ln(\omega_0 + A\varphi) - \ln \omega_0) = t, \quad \frac{\omega_0 + A\varphi}{\omega_0} = e^{At}, \quad \varphi = \frac{1}{A} \omega_0 (e^{At} - 1).$$

**Пример 5.** Материальная точка движется замедленно вдоль оси  $Ox$  с ускорением, модуль которого  $w = B\sqrt{v}$ , где  $B$  – положительная константа. В начальный момент времени  $v = v_0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$ . Определить координату точки в момент остановки.

*Решение*

Решение начнем с п.1А.

П.1А. Направим ось  $Ox$  по направлению движения частицы. Тогда  $w_x = -B\sqrt{v_x}$ ;  $w_y = 0$ ;  $w_z = 0$ .

П.2А. Запишем выражение для составляющих скорости движения:

$$dv_x = -B\sqrt{v_x} dt; \quad dv_y = 0; \quad dv_z = 0.$$

П.3А. В каждом из выражений п.2А не более двух переменных, поэтому перейдем к п.5А.

П.5А. Разделим переменные:

$$\frac{dv_x}{\sqrt{v_x}} = -Bdt; \quad dv_y = 0; \quad dv_z = 0.$$

П.6А. Проинтегрируем полученные выражения:

$$\int \frac{dv_x}{\sqrt{v_x}} = \int -Bdt, \quad \int dv_y = C_2, \quad \int dv_z = C_3;$$

$$2\sqrt{v_x} = -Bt + C_1, \quad v_y = C_2, \quad v_z = C_3.$$

Используем начальные условия. При  $t = 0$   $v_x = v_0$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z = 0$ .

Следовательно,  $C_1 = 2\sqrt{v_0}$ ,  $C_2 = C_3 = 0$ . Подставим константы

$$v_x = \left( \sqrt{v_0} - \frac{Bt}{2} \right)^2, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Поскольку требуется найти координаты частицы, перейдем к п.9А.

П.9А. Запишем кинематические уравнения:

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt;$$

$$dx = \left( \sqrt{v_0} - \frac{Bt}{2} \right)^2 dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0.$$

П.10А. В каждом из полученных выражение не более двух переменных, поэтому перейдем к п.12А.

П.12А. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства, поэтому перейдем к п.13А.

П.13А. Проинтегрируем полученные в п.12А выражения:

$$\int dx = \int \left( \sqrt{v_0} - \frac{Bt}{2} \right)^2 dt, \quad \int dy = C_2, \quad \int dz = C_3;$$

$$x = v_0 t - \frac{B\sqrt{v_0}}{2} t^2 + \frac{B^2 t^3}{12} + C_1, \quad y = C_2, \quad z = C_3.$$

Из начальных условий при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Следовательно,

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Время остановки определим из условия  $v = 0$ :

$$\sqrt{v_0} - \frac{Bt_{\text{ост.}}}{2} = 0, \quad t_{\text{ост.}} = \frac{2\sqrt{v_0}}{B}.$$

Определим координату точки в момент остановки:

$$x_{\text{ост.}} = v_0 \frac{2\sqrt{v_0}}{B} - \frac{B\sqrt{v_0}}{2} \frac{4v_0}{B^2} + \frac{B^2}{12} \frac{8v_0\sqrt{v_0}}{B^3} = \frac{2}{3B} v_0 \sqrt{v_0}.$$

**Пример 6.** Ускорение материальной точки изменяется по закону  $\vec{w} = At \cdot \vec{i} - Bt^2 \cdot \vec{j} + Ct^3 \cdot \vec{k}$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – положительные константы. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  вектор начальной скорости  $\vec{v}_0 = A \cdot \vec{i} + C \cdot \vec{j}$ . Найти вектор и модуль скорости поступательного движения точки как функцию времени.

*Решение*

Решение проводим, используя алгоритм А.

$$\text{П.1А. } w_x = At, \quad w_y = -Bt^2, \quad w_z = Ct^3.$$

$$\text{П.2А. } dv_x = At dt, \quad dv_y = -Bt^2 dt, \quad dv_z = Ct^3 dt.$$

П.3А. В каждом из полученных уравнений по две переменные величины, поэтому переходим к п.5А.

П.5А. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства в каждом из трех уравнений и  $dv_x$ ,  $dv_y$ ,  $dv_z$  и  $dt$  находятся в числителях соответствующих выражений. Переходим к п.6А.

$$\text{П.6А. } \int dv_x = \int At dt, \quad \int dv_y = \int -Bt^2 dt, \quad \int dv_z = \int Ct^3 dt;$$

$$v_x = \frac{At^2}{2} + C_1, \quad v_y = -\frac{Bt^3}{3} + C_2, \quad v_z = C \frac{t^4}{4} + C_3.$$

Определим  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  из начальных условий (т. е. для  $t_0 = 0$ ).

$$v_{0x} = C_1 = A, v_{0y} = C_2 = C, v_{0z} = C_3 = 0.$$

Таким образом,  $v_x = A + \frac{At^2}{2}, v_y = C - \frac{Bt^3}{3}, v_z = \frac{Ct^4}{4}.$

П.7А.

$$\vec{v} = \left(A + \frac{At^2}{2}\right) \cdot \vec{i} + \left(C - \frac{Bt^3}{3}\right) \cdot \vec{j} + \frac{Ct^4}{4} \cdot \vec{k}; v = \sqrt{\left(A + \frac{At^2}{2}\right)^2 + \left(C - \frac{Bt^3}{3}\right)^2 + \left(\frac{Ct^4}{4}\right)^2}.$$

**Пример 7.** Ускорение материальной точки изменяется по закону  $\vec{w} = At^2\vec{i} - Bt\vec{j}$ , где  $A$  и  $B$  – положительные константы. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  скорость точки  $v_0 = 0$ . Определить вектор скорости  $\vec{v}$  и угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  как функции времени.

*Решение*

Решение проводим, используя алгоритм А.

П.1А.  $w_x = At^2, w_y = -Bt, w_z = 0.$

П.2А.  $dv_x = At^2 dt, dv_y = -Bt dt, dv_z = 0.$

П.3А. В каждом из уравнений не более двух переменных величин, поэтому переходим к п.5А

П.5А. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства в каждом из трех уравнений и  $dv_x, dv_y, dv_z$  находятся в числителях.

П.6А. Интегрируем  $\int dv_x = \int At^2 dt, \int dv_y = \int -Bt dt, \int dv_z = C_3;$

$$v_x = \frac{At^3}{3} + C_1, v_y = -\frac{Bt^2}{2} + C_2, v_z = C_3.$$

Определим  $C_1, C_2$  и  $C_3$  из начальных условий, т. е. для  $t_0 = 0$

$$v_{0x} = C_1 = 0, v_{0y} = C_2 = 0, v_{0z} = C_3 = 0.$$

П.7А. Определим вектор скорости:  $\vec{v} = \frac{At^3}{3}\vec{i} - \frac{Bt^2}{2}\vec{j}.$

Определим косинус угла между  $\vec{v}$  и

$$\vec{w}: \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{\left(\frac{At^3}{3}\vec{i} - \frac{Bt^2}{2}\vec{j}\right) \cdot (At^2\vec{i} - Bt\vec{j})}{\sqrt{(At^2)^2 + (-Bt)^2} \sqrt{\left(\frac{At^3}{3}\right)^2 + \left(-\frac{Bt^2}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{A^2t^5}{3} + \frac{B^2t^3}{2}}{t^2 \sqrt{\left(\frac{At}{3}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2} \cdot t \sqrt{(At)^2 + (-B)^2}} = \frac{\frac{A^2t^2}{3} + \frac{B^2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{At}{3}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2} \sqrt{(At)^2 + B^2}}.$$

**Пример 8.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловым ускорением  $\beta = At$ , где  $A$  – положительная константа. Определить зависимость модуля угловой скорости от времени, если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  угловая скорость равна  $\omega_0$ .

*Решение*

Решение проводим по алгоритму А'.

П.1А'.  $\beta = At$ .

П.2А'.  $d\omega = \beta dt$ ;  $d\omega = At dt$ .

П.3А'. В уравнении две переменных величины  $\omega$  и  $t$ , поэтому переходим к п.5А'

П.5А'. Переменные находятся по разные стороны от знака равенства.

П.6А'. Интегрируем  $\int d\omega = \int At dt$ ,  $\omega = A \frac{t^2}{2} + C$ .

При  $t_0 = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Следовательно,  $C = \omega_0$ . Окончательно

$$\omega = \omega_0 + \frac{At^2}{2}.$$

**Пример 9.** Материальная точка движется поступательно так, что ее ускорение меняется со временем по закону  $\vec{w} = A \cos \alpha t \vec{i}$ ,  $A$  и  $\alpha$  – константы. В начальный момент времени  $t_0 = 0$   $\vec{v}_0 = 0$ . Определить зависимость модуля скорости частицы от модуля ее ускорения  $v = f(w)$ .

*Решение*

Решение проводим по алгоритму А.

П.1А.  $w_x = A \cos \alpha t$ ,  $w_y = 0$ ,  $w_z = 0$ .

П.2А.  $dv_x = (A \cos \alpha t) dt$ ,  $dv_y = 0$ ,  $dv_z = 0$ .

П.3А. В каждом из уравнений не более двух переменных, поэтому переходим к п.5А.

П.5А. Переменные разделены по разные стороны от знака равенства, и дифференциалы находятся в числителях.

П.6А. Интегрируем  $\int dv_x = \int (A \cos \alpha t) dt$ ,  $\int dv_y = C_2$ ,  $\int dv_z = C_3$ .

$$v_x = \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t + C_1, \quad v_y = C_2, \quad v_z = C_3.$$

Определим  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  из начальных условий:

$$v_{0x} = 0, \quad v_{0y} = 0, \quad v_{0z} = 0.$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0.$$

$$v_x = \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Найдем зависимость  $v = f(w)$  
$$\begin{cases} v = \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t, \\ w = A \cos \alpha t. \end{cases}$$

Исключим время, учитывая, что  $\sin^2 \alpha t + \cos^2 \alpha t = 1$ .

$$\sin^2 \alpha t + \cos^2 \alpha t = \left(\frac{v\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{w}{A}\right)^2 = 1.$$

$$\frac{v^2 \alpha^2}{A^2} + \frac{w^2}{A^2} = 1, \quad v^2 \alpha^2 = A^2 - w^2.$$

$$v^2 = \frac{A^2 - w^2}{\alpha^2}, \quad v = \frac{\sqrt{A^2 - w^2}}{\alpha}.$$

**Пример 10.** Твердое тело вращается так, что угловое ускорение зависит от времени по закону  $\beta = \beta_0 - A \cos \alpha t$ , где  $\beta_0$ ,  $A$  и  $\alpha$  – положительные константы. Определить зависимость угловой скорости от углового ускорения  $\omega = f(\beta)$ , если  $\omega_0 = 0$  в начальный момент времени.

*Решение*

Решение проводим, используя алгоритм А'.

П.1А'.  $\beta = \beta_0 - A \cos \alpha t$ .

П.2А'.  $d\omega = \beta dt$ ;  $d\omega = (\beta_0 - A \cos \alpha t) dt$ .

П.3А'. В полученном уравнении две переменные величины, поэтому переходим к п.5А'

П.5А'. Так как величины  $t$  и  $\omega$  находятся в разных частях уравнения, а  $d\omega$  и  $dt$  находятся в числителях, проинтегрируем полученное выражение:

$$\int d\omega = \int (\beta_0 - A \cos \alpha t) dt,$$

$$\omega = \beta_0 t - \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t + C.$$

Константу  $C$  найдем из условия задачи  $\omega_0 = 0$  при  $t = 0$ . Следовательно,  $C = 0$ .

Таким образом,

$$\begin{cases} \beta = \beta_0 - A \cos \alpha t, \\ \omega = \beta_0 t - \frac{A}{\alpha} \sin \alpha t, \end{cases}$$

$$A \cos \alpha t = \beta_0 - \beta,$$

$$\cos \alpha t = \frac{\beta_0 - \beta}{A},$$

$$\alpha t = \arccos \frac{\beta_0 - \beta}{A},$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \arccos \frac{\beta_0 - \beta}{A},$$

$$\sin \alpha t = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha t} = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{A}\right)^2},$$

$$\omega = \frac{\beta_0}{\alpha} \arccos \frac{\beta_0 - \beta}{A} - \frac{A}{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{A}\right)^2}.$$

### 1.3 Динамика поступательного движения. Алгоритм решения задач

П.1. Записать основное уравнение динамики поступательного движения в об-

щем виде  $m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , где  $\vec{F}_i$  – силы, приложенные к рассматриваемому телу,  $\vec{w}$

– полное ускорение тела,  $m$  – масса тела.

П.2. В уравнение п.1 подставить векторы всех сил, действующих на тело.

П.3. Выполнить рисунок, на котором изобразить:

а) векторы всех сил, действующих на тело. Точки приложения всех сил перенести в центр масс тела;

б) вектор ускорения  $\vec{w}$  поступательного движения тела в случае движения по прямой или тангенциальную  $\vec{w}_\tau$  и нормальную  $\vec{w}_n$  составляющие ускорения при криволинейном движении;

в) систему координат, направления осей  $Ox$  и  $Oy$  для которой целесообразно совместить с направлениями составляющих ускорения  $\vec{w}_\tau$  и  $\vec{w}_n$ , а в случае движения по прямой одну из осей направить вдоль вектора полного ускорения  $\vec{w}$ .

П.4. Используя рисунок, спроецировать уравнение п.2 на оси координат  $Ox$  и  $Oy$  (или на одну из осей).

П.5. Расписать значения всех сил и составляющих ускорения через параметры, заданные в условиях задачи.

П.6. Из всех полученных формул составить систему уравнений и определить, сколько неизвестных содержится в системе и содержится ли искомая величина. Если искомую величину невозможно определить из полученной системы, то следует перейти к п.7 или п.8. Если определить искомую величину можно, то перейти к п.9.

П.7. В том случае, если в задаче рассматриваются несколько тел, повторить пп.1–6 для каждого из тел и составить систему уравнений для всех тел.

П.8. Исходя из того, какую физическую величину необходимо определить в задаче, записать одно из уравнений кинематики и тем самым дополнить систему уравнений.

П.9. Решить систему уравнений относительно искомой величины.

#### 1.3.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Тело массой  $m$  в момент времени  $t = 0$  начинает движение по горизонтальной гладкой поверхности под действием силы  $\vec{F} = \vec{F}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$ ,

где  $\vec{F}_0$  – постоянный вектор, направленный вдоль поверхности, а  $\tau$  – время действия силы. Определить время от начала движения до первой остановки.

*Решение*

П.1. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим в уравнение п.1 все силы, действующие на тело:  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}$ :

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

П.3. Выполним рис. 1.1

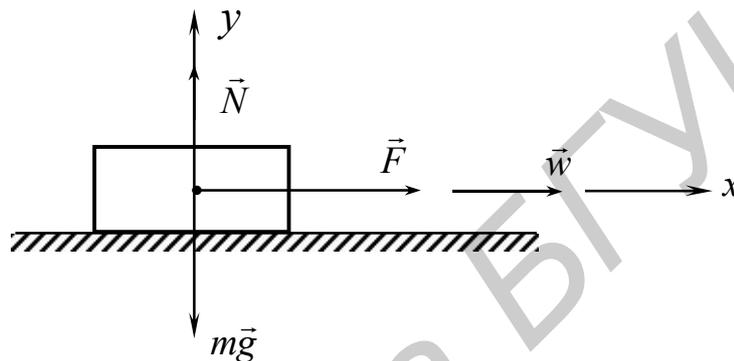


Рис. 1.1

П.4. Спроецируем уравнение п.2 только на ось  $Ox$  (поскольку в задаче не требуется определять  $N$ ):

$$Ox: mw_x = F.$$

П.5. Подставим значение силы  $F$  из условия задачи:

$$mw_x = F_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

П.6. Поскольку в полученном выражении не содержится величина скорости, которая в момент остановки принимает значение  $v = 0$ , перейдем к п. 8.

П.8. Запишем уравнение кинематики  $d v_x = w_x dt$ . Ускорение найдем из п.5:

$$w_x = \frac{F_0}{m} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

$$d v_x = \frac{F_0}{m} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt.$$

Поскольку неизвестные величины разделены по разные стороны от знака равенства, проинтегрируем уравнение

$$\int d v_x = \frac{F_0}{m} \int \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt, \quad v_x = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right) + C.$$

Константу неопределенного интегрирования определим из начальных условий. В момент времени  $t = 0$   $v_x = 0$ , следовательно,  $C = 0$ .

$$v_x = \frac{F_0}{m} \left( t - \frac{t^2}{2\tau} \right),$$

$v_x = 0$  в момент остановки. Так как  $\frac{F_0}{m} \neq 0$ , то

$$t_{\text{ост.}} - \frac{t_{\text{ост.}}^2}{2\tau} = 0, \quad t_{\text{ост.}} = 2\tau.$$

**Пример 2.** На небольшое тело массой  $m$  в момент времени  $t = 0$  начинает действовать сила, модуль которой равен  $F = at$ , где  $a$  положительная константа. Сила направлена под углом  $\alpha$  к поверхности, по которой движется тело. Трение о поверхность отсутствует. Найти скорость тела в момент отрыва от поверхности.

*Решение*

П.1. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим в уравнение п.1 все силы, действующие на тело,

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

П. 3. Выполним рис. 1.2.

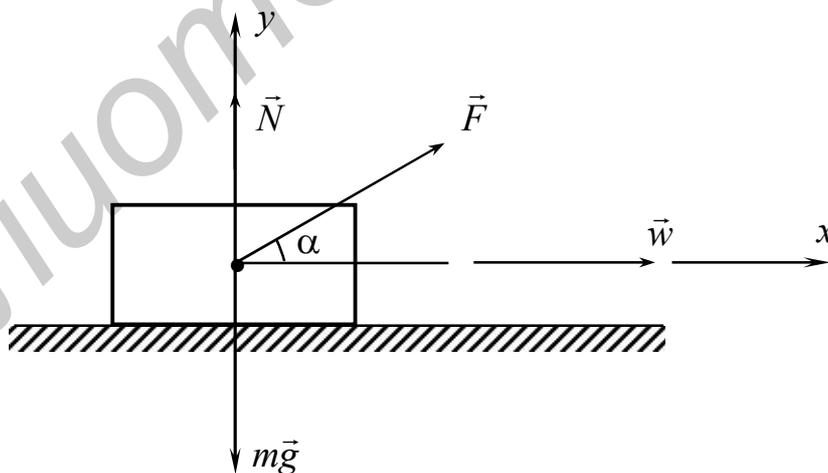


Рис. 1.2

П.4. Спроецируем уравнение п.1 на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$Ox: mw_x = F \cos \alpha;$$

$$Oy: 0 = N - mg + F \sin \alpha.$$

П.5. Подставим значение силы  $F$  из условия задачи:

$$\begin{cases} mw_x = at \cos \alpha, \\ 0 = N - mg + at \sin \alpha. \end{cases}$$

П.6. Поскольку в полученной системе уравнений не содержится величина скорости, которую требуется определить, то перейдем к п.8.

П.8. Запишем уравнение кинематики  $d v_x = w_x dt$ .

Составим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} mw_x = at \cos \alpha, \\ 0 = N - mg + at \sin \alpha, \\ d v_x = w_x dt. \end{cases}$$

П.9. Решим систему уравнений. В момент отрыва тела от поверхности  $N = 0$ .

Тогда из 2-го уравнения определим время отрыва  $t_{\text{отр.}} = \frac{mg}{a \sin \alpha}$ .

$$w_x = \frac{at \cos \alpha}{m},$$

$$d v_x = \frac{at \cos \alpha}{m} dt,$$

$$\int d v_x = \int \frac{at \cos \alpha}{m} dt,$$

$$v_x = \frac{a \cos \alpha}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий: при  $t = 0$   $v_x = 0$ , следовательно,  $C = 0$ .

$$v_x = \frac{a \cos \alpha}{m} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

В момент отрыва  $t_{\text{отр.}} = \frac{mg}{a \sin \alpha}$ , следовательно,

$$v_{\text{отр.}} = \frac{a \cos \alpha}{m} \cdot \frac{m^2 g^2}{2a^2 \sin^2 \alpha} = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}.$$

**Пример 3.** Небольшой брусок без начальной скорости начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Коэффициент трения о плоскость равен  $\mu$ . Найти зависимость от времени скорости бруска.

*Решение*

П.1. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим в уравнение п.1 все силы, действующие на тело,

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}$$

П. 3. Выполним рис. 1.3.

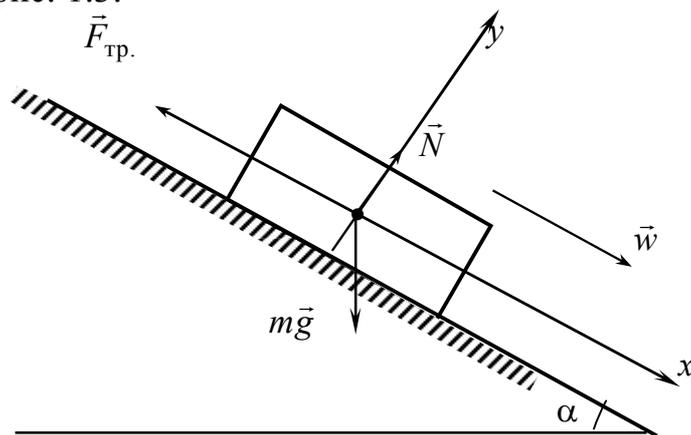


Рис. 1.3

П.4. Спроецируем уравнение п.1 на ось  $Ox$  и  $Oy$ :

$$Ox: mw_x = mg \sin \alpha - F_{\text{тр.}}$$

$$Oy: 0 = N - mg \cos \alpha.$$

П.5. Подставим значение силы трения  $F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N$ :

$$\begin{cases} mw_x = mg \sin \alpha - \mu \cdot N, \\ 0 = N - mg \cos \alpha. \end{cases}$$

П.6. Поскольку в полученной системе уравнений не содержится величина скорости, перейдем к п.8.

П.8. Запишем уравнение кинематики  $d v_x = w_x dt$ .

Составим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} mw_x = mg \sin \alpha - \mu \cdot N, \\ 0 = N - mg \cos \alpha, \\ d v_x = w_x dt. \end{cases}$$

П.9. Решим систему уравнений:

$$N = mg \cos \alpha,$$

$$w_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$d v_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) dt,$$

$$\int d v_x = g \int (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) dt,$$

$$v_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + C.$$

Константу  $C$  найдем из начальных условий: при  $t = 0$   $v = 0$ , следовательно,  $C = 0$ .

$$v_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t.$$

**Пример 4.** Небольшое тело массой  $m$  начинает двигаться вверх по вертикальной стене под действием силы, модуль которой равен  $F = At$ , где  $A$  положительная константа. Сила направлена под углом  $\alpha$  к стене (рис.1.4). Коэффи-

коэффициент трения тела о поверхность равен  $\mu$ . Определить зависимость скорости тела от времени.

*Решение*

П.1. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим в уравнение п.1 все силы, действующие на тело:  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_{\text{тр.}}$ .

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр.}}.$$

П.3. Выполним рис. 1.4

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

$$Ox: 0 = N - F \sin \alpha,$$

$$Oy: mw_y = F \cos \alpha - F_{\text{тр.}} - mg.$$

П.5. Подставим значение сил:  $F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N$  и  $F = A \cdot t$ .

$$\begin{cases} 0 = N - At \sin \alpha, \\ mw_y = At \cos \alpha - \mu \cdot N - mg. \end{cases}$$

П.6. Поскольку в полученной системе не содержится величина скорости, которую требуется определить, то перейдем к п.8.

П.8. Запишем уравнение кинематики:

$$dv_y = w_y dt.$$

Составим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = N - At \sin \alpha, \\ mw_y = At \cos \alpha - \mu \cdot N - mg, \\ dv_y = w_y dt, \\ N = At \sin \alpha, \\ w_y = \frac{At \cos \alpha - \mu At \sin \alpha - mg}{m}, \\ dv_y = \frac{At \cos \alpha - \mu At \sin \alpha - mg}{m} dt, \\ \int dv_y = \int \frac{At \cos \alpha - \mu At \sin \alpha - mg}{m} dt, \end{cases}$$

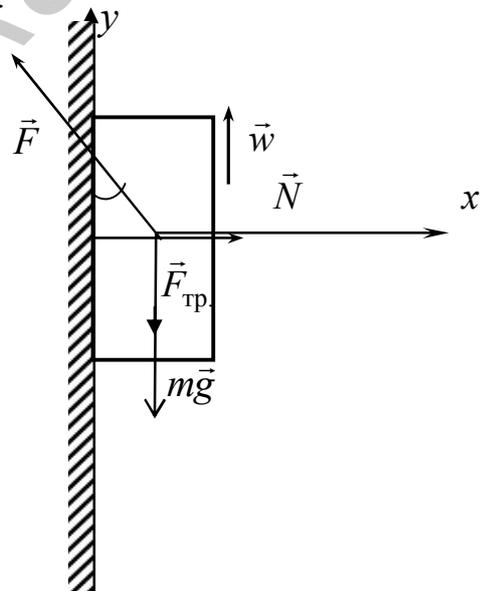


Рис. 1.4

$$v_y = \frac{1}{m} \left( A \frac{t^2}{2} \cos \alpha - \mu A \frac{t^2}{2} \sin \alpha - mgt \right) + C.$$

В момент времени  $t = 0$   $v = 0$ , следовательно,  $C = 0$ . Таким образом,

$$v_y = \frac{At^2}{2m} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - gt.$$

**Пример 5.** Два тела массами  $m_1$  и  $2m_1$  связаны нитью, переброшенной через невесомый блок, и находятся на наклонных плоскостях, образующих углы  $\alpha$  и  $\beta$  с горизонтом. Коэффициент трения одинаков для обеих поверхностей и равен  $\mu$ . Определить ускорение, с которым движутся тела.

*Решение*

П.1. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения для первого тела.

$$m_1 \vec{w}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{li}.$$

П.2. Подставим в уравнение п.1 все силы, действующие на первое тело

$$m_1 \vec{w}' = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр.1}}.$$

П.3. Выполним рис. 1.5.

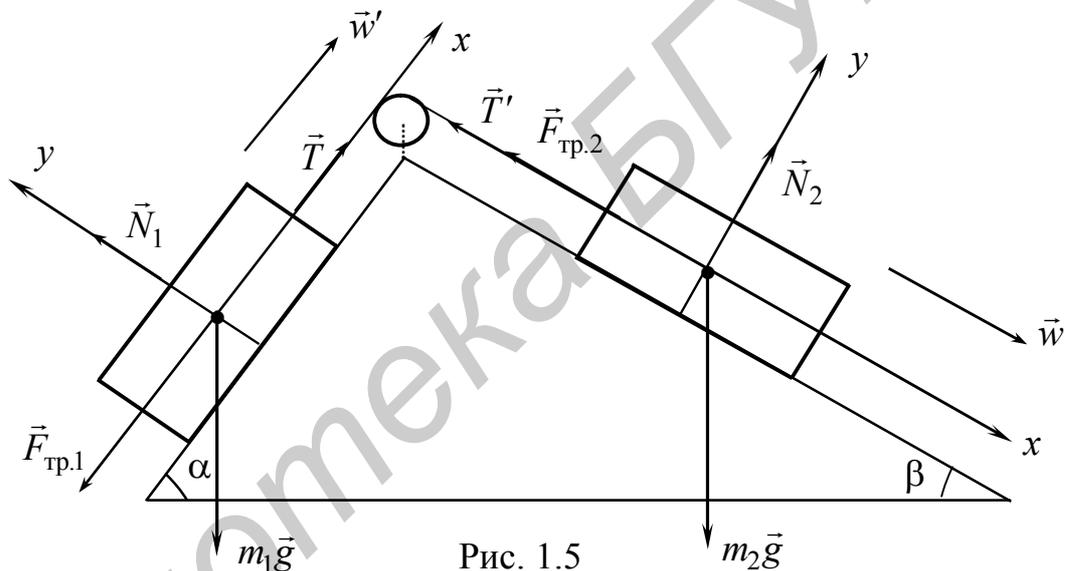


Рис. 1.5

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

$$Ox: m_1 w' = T - F_{\text{тр.1}} - m_1 g \sin \alpha,$$

$$Oy: 0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha.$$

П.5. Заменяем  $F_{\text{тр.1}} = \mu \cdot N_1$ .

П.6. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 w' = T - F_{\text{тр.1}} - m_1 g \sin \alpha, \\ 0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha, \\ F_{\text{тр.1}} = \mu N_1. \end{cases}$$

Исключим из нее не интересующие нас величины  $F_{\text{тр.1}}$  и  $N_1$ :

$$m_1 w' = T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha.$$

Поскольку в уравнении содержатся две неизвестные величины, перейдем к п.7.

П.7. Дополним рисунок силами, действующими на второе тело. Запишем динамическое уравнение, подставив конкретные силы, действующие на второе тело,

$$m_2 \vec{w} = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}' + \vec{F}_{\text{тр.2}},$$

и спроецируем его на оси

$$\begin{cases} m_2 w = -T - F_{\text{тр.2}} + m_2 g \sin \alpha, \\ 0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha, \\ F_{\text{тр.2}} = \mu N_2. \end{cases}$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$m_2 w = m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha.$$

Составим систему из уравнений движения двух тел, учтя, что  $w = w'$ ,  $T = T'$ ,

$$\begin{cases} m_1 w = T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha, \\ m_2 w = m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha. \end{cases}$$

Поскольку искомую величину  $w$  можно определить, перейдем к п.9.

П.9. Сложим уравнения:

$$(m_1 + m_2)w = T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha + m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha,$$

$$(m_1 + m_2)w = g \sin \alpha (m_2 - m_1) - \mu g \cos \alpha (m_1 + m_2),$$

$$w = \frac{g \sin \alpha (m_2 - m_1) - \mu g \cos \alpha (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}.$$

**Пример 6.** Тело массой  $m$  втаскивают за нить по наклонной плоскости вверх, действуя с постоянной силой  $\vec{F}$ . Коэффициент трения равен  $\mu$ . Плоскость составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Скорость тела остается постоянной. Какой угол с наклонной плоскостью должна составлять нить, чтобы натяжение нити  $F$  было минимальным?

*Решение*

П.1. Запишем уравнение динамики  $m \vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

П.2. Подставим силы  $\vec{0} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}} + \vec{F}$ ,  $\vec{w} = \vec{0}$  по условию задачи.

П.3. Выполним рис. 1.6.

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на координатные оси:

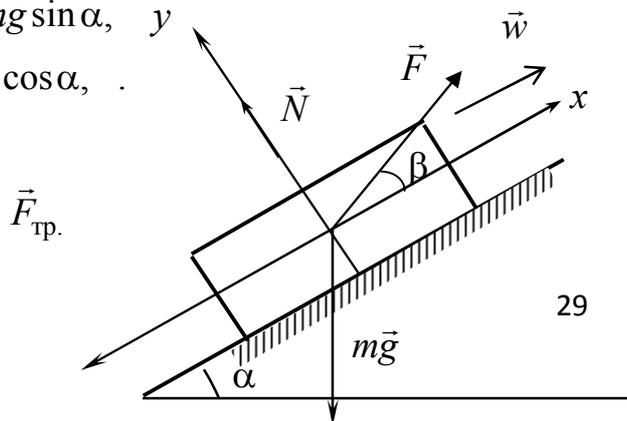
$$Ox: 0 = F \cos \beta - F_{\text{тр.}} - mg \sin \alpha,$$

$$Oy: 0 = N + F \sin \beta - mg \cos \alpha.$$

П.5. Заменяем  $F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N$ .

П.6. Составим систему 
$$\begin{cases} 0 = F \cos \beta - F_{\text{тр.}} - mg \sin \alpha, & y \\ 0 = N + F \sin \beta - mg \cos \alpha, & x \\ F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N. \end{cases}$$

П.9. Решим систему относительно  $F$ ,



предварительно определив

$$F_{\text{тр.}} = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta),$$

$$0 = F \cos \beta - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) - mg \sin \alpha.$$

Выразим  $F$ :

$$F = \frac{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

Так как  $\beta$  содержится только в знаменателе, то  $F = F_{\text{min}}$ , если знаменатель дроби максимален. Из условия нахождения экстремума  $(\cos \beta + \mu \sin \beta)' = 0$ ;  $-\sin \beta + \mu \cos \beta = 0$ ;  $\text{tg} \beta = \mu$ .

**Пример 7.** Небольшой брусок скользит по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Коэффициент трения зависит от расстояния, пройденного вдоль плоскости  $\mu = Ax$ . Найти максимальную скорость движения бруска  $v_{\text{max}}$ .

*Решение*

П.1. Запишем динамическое уравнение:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим силы  $m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}$ .

П.3. Выполним рис. 1.7.

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на оси:

$$Ox: mw_x = mg \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр.}},$$

$$Oy: 0 = N - mg \cdot \cos \alpha.$$

П.5. Определим силу трения:  $F_{\text{тр.}} = \mu N = AxN$ ,

т. к.  $S = x$ .

П.6. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} mw_x = mg \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр.}}, \\ 0 = N - mg \cdot \cos \alpha, \\ F_{\text{тр.}} = AxN. \end{cases}$$

Поскольку искомая величина не содержится в системе уравнений, перейдем к п.8.

П.8. Дополним систему уравнением  $d v_x = w_x dt$ .

$$\begin{cases} mw_x = mg \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр.}}, \\ N = mg \cdot \cos \alpha, \\ F_{\text{тр.}} = AxN, \\ d v_x = w_x dt. \end{cases}$$

П.9. Решим систему уравнений относительно  $v_x$ :

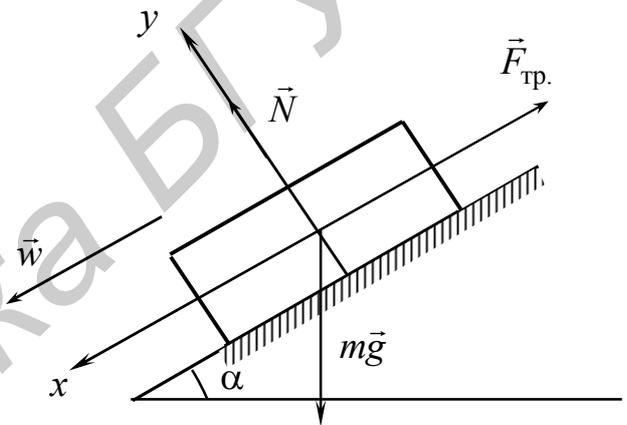


Рис. 1.7

$$\begin{cases} mw_x = mg \cdot \sin \alpha - Ax \cdot mg \cdot \cos \alpha, \\ dv_x = w_x dt, \\ dv_x = g(\sin \alpha - Ax \cdot \cos \alpha) dt. \end{cases}$$

Поскольку переменных в последнем уравнении три, выполним замену переменных, учитывая, что  $dt = \frac{dx}{v_x}$ ,  $dv_x = g(\sin \alpha - Ax \cdot \cos \alpha) \frac{dx}{v_x}$ . Разделим пере-

менные:

$$v_x \cdot dv_x = g(\sin \alpha - Ax \cdot \cos \alpha) dx.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int v_x \cdot dv_x = g \cdot \sin \alpha \int dx - g \cdot A \cdot \cos \alpha \int x dx,$$

$$\frac{v_x^2}{2} = g \cdot x \cdot \sin \alpha - g \cdot A \frac{x^2}{2} \cos \alpha + C.$$

Константу  $C$  найдем из начальных условий:  $v_x = 0$  при  $x = 0$ , следовательно,  $C = 0$ .

$$v_x = \sqrt{2gx \cdot \sin \alpha - gAx^2 \cdot \cos \alpha},$$

$$v_x = v_{\max}, \text{ если } v_x' = 0.$$

Продифференцируем подкоренное выражение:

$$2g \cdot \sin \alpha - 2gAx \cdot \cos \alpha = 0, \quad x = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{A}.$$

Подставим значение  $x$  в выражение для скорости.

Таким образом,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g \cdot \sin^2 \alpha}{A \cdot \cos \alpha}}.$$

**Пример 8.** В момент времени  $t = 0$  частица массой  $m$  начинает движение по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы  $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$ , направленной параллельно поверхности, где  $\vec{F}_0$  и  $\omega$  – постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки?

*Решение*

П.1. Запишем динамическое уравнение  $m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

П.2. Подставим все силы, действующие на тело,

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

П.3. Выполним рис. 1.8.

П.4. Спроецируем уравнение п. 2 на координатные оси:

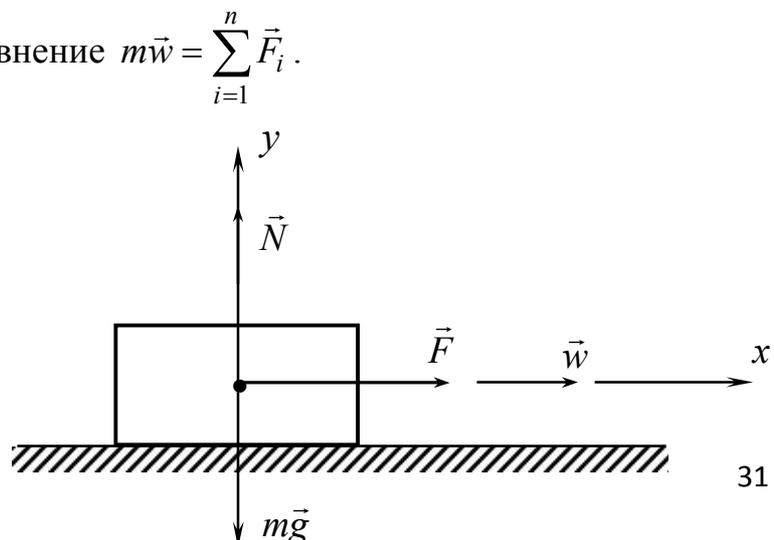


Рис. 1.8

$$Ox: mw_x = F,$$

$$Oy: 0 = N - mg.$$

П.5. Составим систему  $\begin{cases} mw_x = F_0 \cos \omega t, \\ N = mg. \end{cases}$

П.6. Из системы п.5. возьмем лишь первое уравнение  $mw_x = F_0 \cos \omega t$ .

Поскольку в нем не содержится скорость тела, равенство нулю которой определяет остановку тела, перейдем к п.8.

П.8. Используем кинематическое соотношение  $\begin{cases} dv_x = w_x dt, \\ mw_x = F_0 \cos \omega t. \end{cases}$

П.9. Решаем систему

$$w_x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad dv_x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \cdot dt, \quad \int dv_x = \frac{F_0}{m} \int \cos \omega t \cdot dt,$$

$$v_x = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C.$$

При  $t = 0$   $v_x = 0$ , следовательно,  $C = 0$ .

$$v_x = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t, \quad v_x = 0, \text{ если } \sin \omega t = 0, \quad t = \frac{k\pi}{\omega}.$$

Первая остановка соответствует  $k = 1, t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ .

**Пример 9.** Катер массой  $m$  движется со скоростью  $v_0$ . В начальный момент времени  $t = 0$  двигатель выключают. Сила сопротивления движению  $\vec{F} = -r\vec{v}$ . Определить зависимость скорости катера от времени.

*Решение*

П.1. Запишем динамическое уравнение

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим силы

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c.$$

П.3. Выполним рис. 1.9.

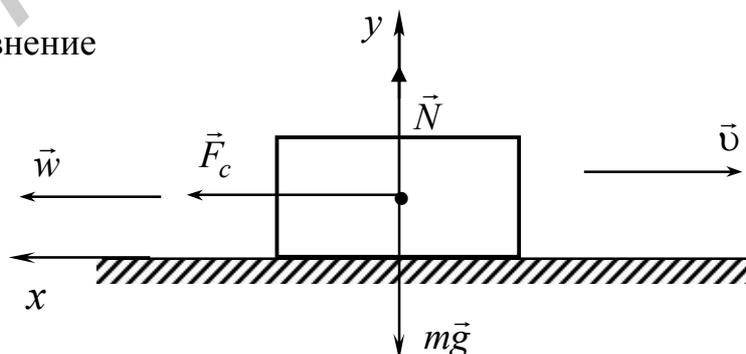


Рис. 1.9.

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на координатные оси

$$Ox: mw_x = F_c,$$

$$Oy: 0 = N - mg$$

П.5. Запишем силу трения  $F_c = -rv_x$ .

П.6. Воспользуемся первым уравнением

$$mw_x = -rv_x$$

П.8. Дополним его уравнением кинематики:

$$\begin{cases} dv_x = w_x dt, \\ mw_x = -rv_x. \end{cases}$$

П.9. Решим систему:

$$dv_x = \frac{-rv_x}{m} dt, \quad \frac{dv_x}{v_x} = \frac{-r}{m} dt, \quad \int \frac{dv_x}{v_x} = \frac{-r}{m} \int dt, \quad \ln v_x = -\frac{r}{m} t + C.$$

При  $t = 0$   $v_x = v_0$ , следовательно,  $C = \ln v_0$ .

$$\ln v_x = -\frac{r}{m} t + \ln v_0,$$

$$\ln v_x - \ln v_0 = -\frac{r}{m} t,$$

$$\ln \frac{v_x}{v_0} = -\frac{r}{m} t,$$

$$\frac{v_x}{v_0} = e^{-\frac{rt}{m}},$$

$$v_x = v_0 \cdot e^{-\frac{rt}{m}}.$$

**Пример 10.** Небольшому телу массой  $m$ , находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили начальную скорость  $v_0$ . Коэффициент трения о плоскость  $\mu = Ax$ , где  $x$  – координата тела. Найти скорость тела как функцию координаты.

*Решение*

П.1. Запишем уравнение динамики

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

П.2. Подставим силы  $m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}$ .

П.3. Выполним рис. 1.10.

П.4. Спроецируем динамическое уравнение на оси:

$$Ox: mw_x = F_{\text{тр.}},$$

$$Oy: 0 = N - mg.$$

П.5. Из п.4

$$F_{\text{тр.}} = \mu N = AxN, \quad N = mg, \quad F_{\text{тр.}} = Axmg.$$

П.6. Воспользуемся уравнением

$$mw_x = Axmg$$

и дополним его уравнениями кинематики.

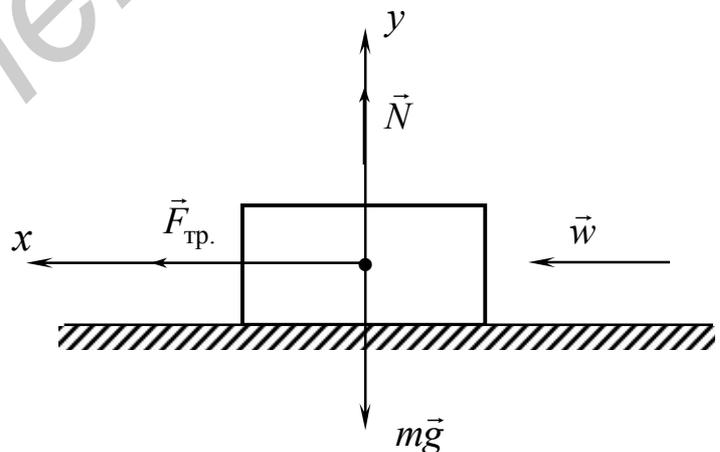


Рис.1.10

П.8. Составим систему 
$$\begin{cases} mw_x = Axmg, \\ d v_x = -w_x dt, \\ dx = v_x dt. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_x = Axg, \\ \frac{d v_x}{dx} = -\frac{w_x}{v_x}. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\int v_x d v_x = -\int Axg dx,$$

$$\frac{v_x^2}{2} = -Ag \frac{x^2}{2} + C.$$

Если  $x = 0$ , то  $\frac{v_x^2}{2} = C$ , следовательно,  $C = \frac{v_0^2}{2}$ .

$$\frac{v_x^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - Ag \frac{x^2}{2},$$

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - Agx^2}.$$

#### 1.4 Законы изменения и сохранения импульса. Алгоритм решения задач

П.1. Записать закон изменения импульса в виде

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt, \quad \vec{F}_{\text{внеш.}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}}$$

П.2. При необходимости выполнить рисунок, на котором следует изобразить:

а) оси координат, выбираемые удобным образом, и единичные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ ;

б) импульсы тел, входящих в рассматриваемую систему до и после взаимодействия;

в) внешние силы, действующие на систему и оказывающие влияние на поведение системы за время взаимодействия.

П.3. Выразить каждую из внешних сил через составляющие

$$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k}, \text{ найти их сумму } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \text{ и подставить полученное значение}$$

в п.1.

П.4. Разделить переменные (убедиться, что переменные находятся по разные стороны от знака равенства).

П.5. Проинтегрировать полученное выражение, определив пределы интегрирования из условия задачи и учитывая, что импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ , если это необходимо.

П.6. Подставить из условия задачи значения заданных скоростей для определения  $\vec{p}_k$  и  $\vec{p}_0$ , если в задаче требуется использовать понятие скорости.

П.7. Спроецировать полученное в п.6 выражение на оси координат, либо воспользоваться правилом параллелограмма для сложения векторов.

П.8. Определить количество неизвестных в полученной в п.7 системе уравнений. Если уравнений столько, сколько неизвестных, то перейти к п.9, иначе – к п.10.

П.9. Воспользоваться законом сохранения энергии или дополнить полученную систему уравнениями кинематики, после чего перейти к п.10.

П.10. Решить систему уравнений относительно искомых величин.

### 1.4.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** На частицу массой  $m = 2$  кг, движущуюся с начальной скоростью  $\vec{v}_0 = 3\vec{i} - \vec{j}$ , действует сила  $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t\vec{j}$ . Определить вектор скорости и модуль скорости частицы в момент времени  $t = 2$  с.

*Решение.*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt.$$

П.2. Выполним рис. 1.11, на котором изобразим  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}_k$  и  $\vec{F}$ , а также единичные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ .

П.3. Подставим значение  $\vec{F}$  в уравнение п.2:

$$d\vec{p} = (2t\vec{i} + 3t\vec{j})dt.$$

П.4. Переменные разделены.

П.5. Произведем определенное интегрирование:

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \int_0^t 2t\vec{i}dt + \int_0^t 3t\vec{j}dt,$$

получим

$$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = t^2\vec{i} + \frac{3t^2}{2}\vec{j}.$$

П.6. Выразим импульсы  $\vec{p}_k$  и  $\vec{p}_0$ , подставив значения скоростей,

$$\vec{p}_k = m(v_{kx}\vec{i} + v_{ky}\vec{j} + v_{kz}\vec{k}),$$

$$\vec{p}_0 = m(3\vec{i} - \vec{j}), \quad \text{получим}$$

$$m(v_{kx}\vec{i} + v_{ky}\vec{j} + v_{kz}\vec{k}) - m(3\vec{i} - \vec{j}) = t^2\vec{i} + \frac{3t^2}{2}\vec{j}.$$

П.7. Спроецируем полученное выражение на оси координат:

$$Ox: mv_{kx} - 3m = t^2,$$

$$Oy: mv_{ky} + m = \frac{3t^2}{2},$$

$$Oz: mv_{kz} = 0.$$

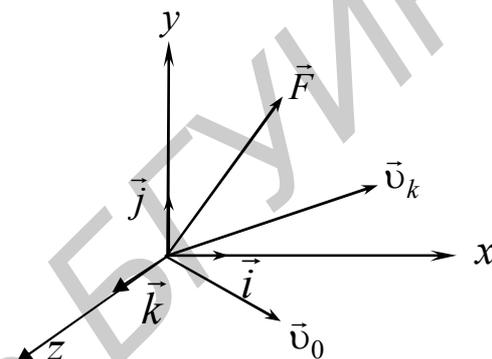


Рис.1.11

П.8. В полученной системе в трех уравнениях три неизвестные величины, поэтому перейдем к п.10.

П.10. Определим составляющие скорости:

$$v_{kx} = 3 + \frac{t^2}{m},$$

$$v_{ky} = -1 + \frac{3t^2}{2m},$$

$$v_{kz} = 0.$$

Запишем вектор скорости

$$\vec{v}_k = \left(3 + \frac{t^2}{m}\right) \vec{i} + \left(\frac{3t^2}{2m} - 1\right) \vec{j}.$$

Найдем модуль скорости:

$$v_k = \sqrt{\left(3 + \frac{t^2}{m}\right)^2 + \left(\frac{3t^2}{2m} - 1\right)^2} = \sqrt{10 + \frac{3t^2}{m} + \frac{13t^4}{4m^2}}.$$

**Пример 2.** Три частицы массой по  $2m$ , имевшие до взаимодействия скорости  $\vec{v}_{01} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{v}_{02} = 4\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{v}_{03} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$ , сливаются вместе, а затем разделяются на две частицы массой по  $3m$  каждая. Одна из полученных частиц имеет скорость  $\vec{v}_1 = 3\vec{k}$ . Определить вектор скорости 2-й частицы.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt.$$

П.2. Выполним рис. 1.12, изобразив на нем векторы заданных скоростей и единичные орты.

П.3. Поскольку внешних сил, влияющих на процессы взаимодействия частиц нет, следовательно,  $\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}$ . Таким образом

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}.$$

П.4. Переменная одна.

П.5. Проинтегрировав, получим  $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{0}$ , следовательно,  $\vec{p}_k = \vec{p}_0$ .

П.6. Подставим из условия задачи значения масс и скоростей частиц, входящих в систему до и после взаимодействия:

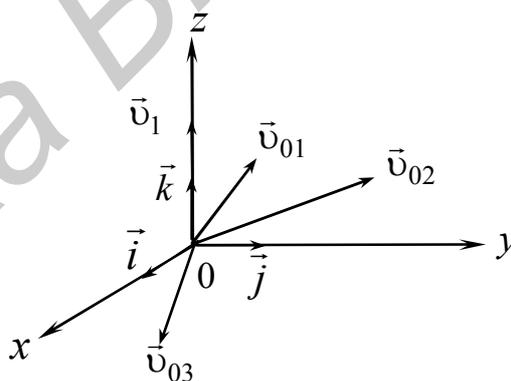


Рис. 1.12

$$\begin{aligned}\vec{p}_0 &= 2m\vec{v}_{01} + 2m\vec{v}_{02} + 2m\vec{v}_{03} = 2m(\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} + 4\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} - 5\vec{k}) = \\ &= 2m(3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}), \\ \vec{p}_k &= 3m(3\vec{k} + v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j} + v_{2z}\vec{k}).\end{aligned}$$

Приравняем  $\vec{p}_0$  и  $\vec{p}_k$ :

$$2m(3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}) = 3m(3\vec{k} + v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j} + v_{2z}\vec{k}).$$

П.7. Спроецируем полученное в п.6 выражение на оси координат:

$$Ox: 2m \cdot 3 = 3mv_{2x},$$

$$Oy: 2m \cdot 7 = 3mv_{2y},$$

$$Oz: 2m(-2) = 3m(3 + v_{2z}).$$

Получим  $v_{2x} = 2$ ;  $v_{2y} = \frac{14}{3}$ ;  $v_{2z} = -\frac{13}{3}$ .

П.8. Количество неизвестных соответствует количеству уравнений, переходим к п.10.

П.10. Определим вектор скорости второй частицы:

$$\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \frac{14}{3}\vec{j} - \frac{13}{3}\vec{k}.$$

**Пример 3.** На частицу массой  $m$ , движущуюся со скоростью  $\vec{v}_0$ , начинает действовать сила  $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$ , где  $\vec{b}$  – постоянный вектор,  $\tau$  – время действия силы. Найти скорость частицы к моменту окончания действия силы.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса в виде

$$d\vec{p} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt.$$

П.2. Выполним рис. 1.13. Систему координат выберем таким образом, чтобы одна из осей ( $Ox$ ) совпадала по направлению с вектором  $\vec{b}$ .

П.3. При таком выборе осей

$$\vec{F} = bt(\tau - t)\vec{i}.$$

Подставим  $\vec{F}$  в уравнение п.1.

$$d\vec{p} = bt(\tau - t)\vec{i}dt.$$

П.4. Переменные разделены.

П.5. Возьмем интегралы от правой и левой частей уравнения п.3.

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \int_0^{\tau} bt(\tau - t)dt\vec{i},$$

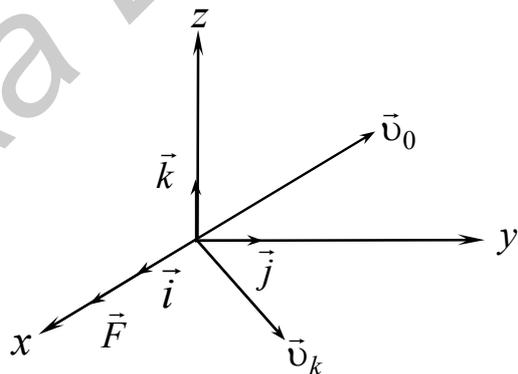


Рис. 1.13

$$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \left( b \frac{t^2}{2} \tau - b \frac{t^3}{3} \right) \vec{i}.$$

Согласно условию задачи  $\vec{p}_0 = \vec{0}$ , а  $\vec{p}_k$  необходимо определить в момент времени  $t = \tau$ , следовательно,

$$\vec{p}_k = b\tau^2 \left( \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{3} \right) \vec{i} = \frac{b\tau^3}{6} \vec{i}.$$

П.6. Распишем  $\vec{p}_k = m\vec{v}_k$ ;  $m\vec{v}_k = \frac{b\tau^3}{6} \vec{i}$ ;  $\vec{v}_k = \frac{b\tau^3}{6m} \vec{i}$ .

П.7. Определим проекции  $\vec{v}_k$  на оси координат:

$$v_{kx} = \frac{b\tau^3}{6m}; v_{ky} = 0; v_{kz} = 0.$$

П.8. В полученных выражениях одна неизвестная величина  $v_{kx}$ , поэтому переходим к п.10.

П.10. Записываем окончательный ответ:

$$\vec{v}_k = \frac{b\tau^3}{6m} \vec{i}.$$

**Пример 4.** Две частицы одинаковой массы, одна из которых неподвижна, а вторая движется с постоянной скоростью  $v_0$ , сталкиваются абсолютно упруго. Определить угол, под которым разлетаются частицы после столкновения.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt.$$

П.2. Выполним рис. 1.14, на котором изобразим  $\vec{p}_0$ ,  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  и систему координат, одну из осей направив по вектору  $\vec{p}_0$ .

П.3. Внешние силы не оказывают влияния на взаимодействие частиц, следовательно, в момент удара можно считать  $\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}$ .

Следовательно,

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}$$

П.5. Проинтегрируем уравнение п.3:

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \vec{0}, \quad \vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{0}, \quad \vec{p}_k = \vec{p}_0.$$

П.6. Запишем значение начального и конечного импульсов:

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0, \quad \vec{p}_k = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \quad \text{и приравняем их}$$

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}_0 \quad \text{или} \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_0.$$

П.7. Воспользуемся правилом параллелограмма, учитывая, что векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – стороны параллелограмма, а  $\vec{v}_0$  – его диагональ (рис.1.14).

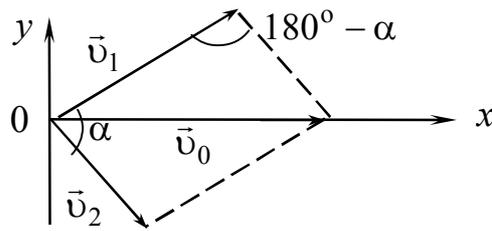


Рис. 1.14

Из рис.1.14 получим (используя теорему косинусов)

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

или

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha .$$

П.8. В полученном в п.7 уравнении три неизвестные величины  $v_1$ ,  $v_2$  и угол  $\alpha$ , поэтому перейдем к п.9.

П.9. Воспользуемся законом сохранения энергии для абсолютно упругого удара:  $K_k = K_0$ , т. е.  $K_1 + K_2 = K_0$ . Учитывая, что  $K = \frac{mv^2}{2}$ , получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \text{ или } v_1^2 + v_2^2 = v_0^2.$$

Составим систему уравнений из выражений пп.7 и 9.

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha, \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2. \end{cases}$$

Перейдем к п.10.

П.10. Решим систему:

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha = v_1^2 + v_2^2,$$

$$2v_1v_2 \cos \alpha = 0.$$

Поскольку  $v_1$  и  $v_2$  не могут быть равны нулю по условию задачи, следовательно,

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\alpha = 90^\circ.$$

**Пример 5.** Ядро дейтрона, взаимодействуя с неподвижным ядром трития, превращается в  $\alpha$ -частицу с вылетом нейтрона. Нейтрон вылетает под углом  $90^\circ$  к направлению движения дейтрона. Кинетические энергии дейтрона и нейтрона соответственно равны  $K_d = 20$  МэВ и  $K_n = 16$  МэВ. Определить энергетический выход реакции.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt.$$

П. 2. Выполним рис. 1.15. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось  $Ox$  совпадала с направлением движения дейтрона,  $Oy$  – с направлением движения нейтрона. Внешние силы отсутствуют.

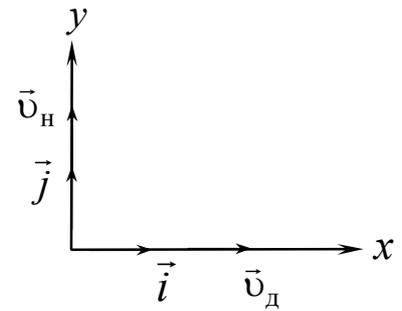


Рис. 1.15

П.3. Поскольку  $\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}$ , то  $d\vec{p} = \vec{0}$ .

П.4. Переменная одна.

П.5. Возьмем интеграл

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \vec{0}, \quad \vec{p}_k = \vec{p}_0.$$

П.6. Учитывая, что  $\vec{p}_k = \vec{p}_n + \vec{p}_\alpha$ ,  $\vec{p}_0 = \vec{p}_d$ , получим  $\vec{p}_n + \vec{p}_\alpha = \vec{p}_d$ .

П.7. Воспользуемся правилом параллелограмма и выполним рис. 1.16, учитывая, что  $\vec{p}_d$  – диагональ параллелограмма, а  $\vec{p}_n$  и  $\vec{p}_\alpha$  – стороны.

Согласно теореме Пифагора

$$p_\alpha^2 = p_d^2 + p_n^2.$$

П.8. Учтем, что  $p^2 = 2mK$ , тогда

$$2m_\alpha K_\alpha = 2m_d K_d + 2m_n K_n.$$

Поскольку  $m_\alpha = 4m_n$ , а  $m_d = 2m_n$ , получим

$$4m_n K_\alpha = 2m_n K_d + m_n K_n \quad \text{или}$$

$$4K_\alpha = 2K_d + K_n.$$

П.9. Дополним выражение п.8 уравнением энергетического выхода ядерной реакции, чтобы ввести в рассмотрение искомую величину  $Q$ :

$$\begin{cases} K_\alpha + K_n - K_d = Q, \\ 4K_\alpha = 2K_d + K_n. \end{cases}$$

П.10. Решим систему уравнений. Выразим  $K_\alpha = \frac{2K_d + K_n}{4}$  из второго уравнения

и подставим в первое:

$$\frac{2K_d + K_n}{4} + K_n - K_d = Q,$$

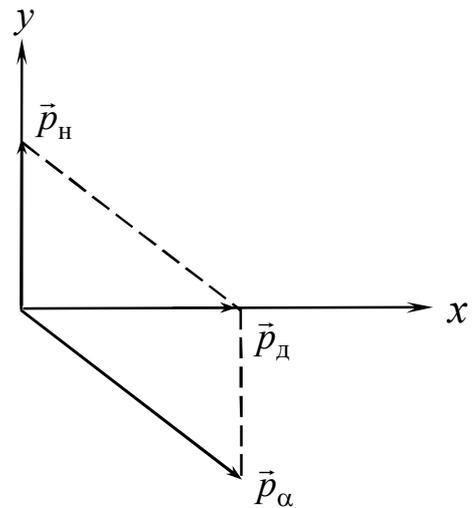


Рис. 1.16

$$\frac{K_{\text{д}}}{2} + \frac{K_{\text{н}}}{4} + K_{\text{н}} - K_{\text{д}} = Q,$$

$$Q = \frac{5K_{\text{н}}}{4} - \frac{K_{\text{д}}}{2} = \frac{16 \cdot 5}{4} - \frac{20}{2} = 10 \text{ (МэВ)}.$$

**Пример 6.** Поток света мощностью  $P = 5$  Вт падает на отражающую плоскую поверхность по нормали к ней. Поверхность поглощает 20 % падающего света. Определить силу давления света на эту поверхность.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса в виде

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt.$$

П.2. Выполним рисунок 1.17, на котором изобразим  $\vec{p}_0$ ,  $\vec{p}_k$ , силу, действующую на фотоны со стороны поверхности, и оси координат

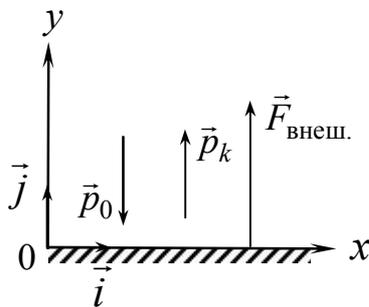


Рис. 1.17

П.3. На фотоны действует единственная сила

$$\vec{F}_{\text{внеш.}} = F_{\text{внеш.}} \vec{j},$$

Следовательно,

$$d\vec{p} = F_{\text{внеш.}} \vec{j} dt.$$

П.4. Переменные разделены.

П.5. Проинтегрируем полученное выражение,

учитывая, что за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_k$  импульс изменился от  $\vec{p}_0$  до  $\vec{p}_k$ :

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t_k} F_{\text{внеш.}} \vec{j} dt,$$

$$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = F_{\text{внеш.}} (t_k - t_0) \vec{j}.$$

П.7. Спроецируем полученное в п.5 выражение на ось  $Oy$ , получим

$$Oy: p_k - (-p_0) = F_{\text{внеш.}} \Delta t.$$

Учитывая, что величина импульса фотона не меняется, а количество фотонов уменьшилось за счет поглощения, получаем, что  $p_k = 0,8p_0$ . Таким образом

$$0,8p_0 + p_0 = F_{\text{внеш.}} \Delta t, 1,8p_0 = F_{\text{внеш.}} \Delta t.$$

П.8. В полученном уравнении недостаточно данных для нахождения искомой величины, переходим к п.9.

П.9. Учтем то обстоятельство, что импульс  $p$  связан с энергией светового потока соотношением  $p = \frac{W_{\text{св.}}}{c}$ , а связь энергии и мощности света выражается соотношением  $W_{\text{св.}} = P \cdot \Delta t$ . Подставим эти значения в уравнения п.7:

$$1,8 \frac{P \cdot \Delta t}{c} = F_{\text{внеш.}} \cdot \Delta t.$$

П.10. Из соотношения в п.9 получим

$$F_{\text{внеш.}} = \frac{1,8P}{c} = \frac{1,8 \cdot 5}{3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ (Н)}.$$

**Пример 7.** Два одинаковых неподвижных шара, масса и радиус которых соответственно равны  $m$  и  $R$ , расположены на гладкой горизонтальной плоскости таким образом, что расстояние между их центрами равно  $1,2D$  (см. рис. 1.18). На шары налетает третий точно такой же шар со скоростью  $v_0 = 5,2$  м/с. Определить проекцию скорости этого шара после упругого соударения с неподвижными шарами.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} \cdot dt.$$

П.2. Выполним рис. 1.18, на котором укажем направления импульсов шаров до и после соударения.

П.3. Внешние силы на процесс соударения не влияют, поэтому  $\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}$ ,  $d\vec{p} = \vec{0}$ .

П.4. Переменная одна.

П.5. Интегрируем  $\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \vec{0}$ ,  $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{0}$ .

П.6. Импульс сохраняется, следовательно,  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p}_0$ .

П.7. Спроецируем уравнение п.6 на координатные

$$\text{оси: } \begin{cases} Ox: p_1 + p_2 \cos \alpha + p_3 \cos \alpha = p_0, \\ Oy: p_2 \sin \alpha - p_3 \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \frac{0,6D}{D} = 0,6; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8 \text{ (из рис. 1.18)}.$$

П.8. В системе уравнений две неизвестные величины, переходим к п.9.

П.9. Воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$K_k = K_0, \\ \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m}.$$

Составим систему:

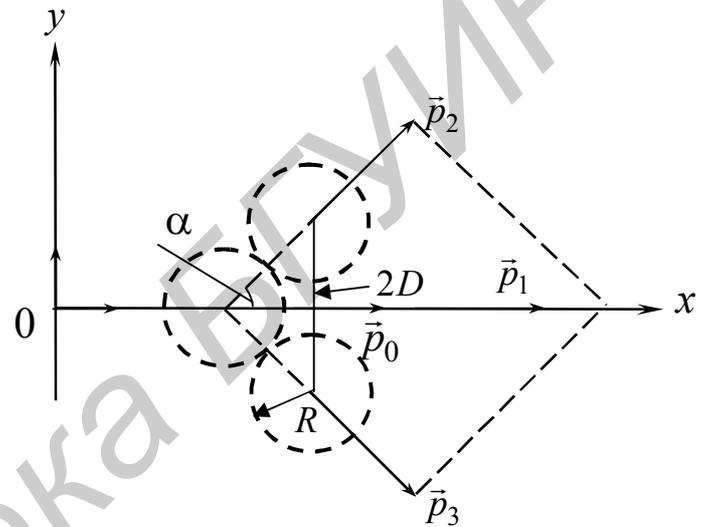


Рис. 1.18

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m}, \\ p_1 + p_2 \cos \alpha + p_3 \cos \alpha = p_0, \\ p_2 \sin \alpha - p_3 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

П.10. Из последнего равенства системы следует  $p_2 = p_3$ . Воспользуемся этим результатом:

$$\begin{cases} p_1^2 + 2p_2^2 = p_0^2 \\ p_1 + 2p_2 \cos \alpha = p_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_2^2 = \frac{p_0^2 - p_1^2}{2} \\ p_2 = \frac{p_0 - p_1}{2 \cos \alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_2^2 = \frac{p_0^2 - p_1^2}{2}, \\ p_2^2 = \frac{(p_0 - p_1)^2}{4 \cos^2 \alpha}. \end{cases}$$

Решим систему:

$$\frac{p_0^2 - p_1^2}{2} = \frac{(p_0 - p_1)^2}{4 \cos^2 \alpha},$$

$$\frac{p_0 + p_1}{2} = \frac{p_0 - p_1}{4 \cos \alpha},$$

$$(p_0 + p_1) 2 \cos \alpha = p_0 - p_1,$$

$$2 p_0 \cos \alpha + 2 p_1 \cos \alpha = p_0 - p_1, \quad -p_0 (2 \cos \alpha - 1) = p_1 (1 + 2 \cos \alpha).$$

Перейдем к скоростям  $-m v_0 (2 \cos \alpha - 1) = m v_1 (1 + 2 \cos \alpha)$ ,

$$v_1 = -\frac{2 \cdot 0,8 - 1}{1 + 2 \cdot 0,8} v_0 = -\frac{3}{13} v_0 = -5,2 \cdot \frac{3}{13} = -1,2 (\text{м/с}).$$

Знак «минус» указывает на то, что импульс  $\vec{p}_1$  направлен в противоположную сторону.

**Пример 8.** Два одинаковых неупругих шарика движутся под некоторым углом друг к другу с одинаковыми по модулю скоростями. При ударе 25 % их кинетической энергии переходит в тепло. Под каким углом  $\alpha$  друг к другу были направлены импульсы тел до удара?

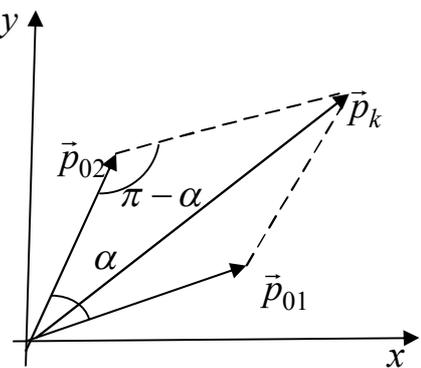


Рис. 1.19

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:

$$d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} \cdot dt.$$

П. 2. Выполним рис. 1.19.

П.3. Внешние силы не оказывают влияния на процесс соударения:

$$\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}, \quad d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}.$$

П.4. Одна переменная.

П.5. Интегрируем  $\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = \vec{0}$ ,  $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{0}$ .

П.6. Начальный импульс системы равен  $\vec{p}_0 = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{02}$ , конечный  $\vec{p}_k$ , следовательно,

$$\vec{p}_k = \vec{p}_{01} + \vec{p}_{02}$$

П.7. Воспользуемся теоремой косинусов. Из рис. 1.19

$$p_k^2 = p_{01}^2 + p_{02}^2 - 2p_{01}p_{02} \cos(180^\circ - \alpha_0),$$

$$p_k^2 = p_{01}^2 + p_{02}^2 + 2p_{01}p_{02} \cos \alpha_0.$$

Так как  $p_{01} = p_{02}$ , получим  $p_k^2 = 2p_0^2(1 + \cos \alpha_0)$ .

П.8. В полученном уравнении две неизвестные величины.

П.9. Из условия задачи следует, что  $K_k = \frac{3}{4}K_0$ . Таким образом,

$$\frac{p_k^2}{4m} = \frac{3}{4} \left( \frac{p_{01}^2}{2m} + \frac{p_{02}^2}{2m} \right) \text{ или } \frac{p_k^2}{4m} = \frac{3}{4} \frac{p_0^2}{m}, \quad p_k^2 = 3p_0^2.$$

П.10. Решим систему  $\begin{cases} p_k^2 = 2p_0^2(1 + \cos \alpha_0), \\ p_k^2 = 3p_0^2, \end{cases}$

$$2p_0^2(1 + \cos \alpha_0) = 3p_0^2,$$

$$2 + 2\cos \alpha_0 = 3,$$

$$2\cos \alpha_0 = 1, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_0 = 60^\circ.$$

**Пример 9.** Два мальчика, массы которых  $m_1 = 40$  кг и  $m_2 = 60$  кг, находятся на противоположных концах неподвижной тележки, масса которой  $M = 100$  кг, а длина —  $l = 10$  м. Оба мальчика одновременно начинают движение навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $v_1 = v_2 = 1$  м/с относительно тележки. Определить расстояние, на которое переместится тележка к моменту встречи мальчиков.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения

импульса системы:  $d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} \cdot dt$ .

П.2. Выполним рис. 1.20, на котором изобразим

импульсы мальчиков и тележки после начала движения.

П.3. Сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, если не учитывать сопротивление воды рассматривать движение тел как равномерное:

$$\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}, \quad d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}.$$

П.4. Переменная одна.

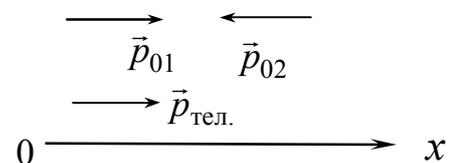


Рис. 1.20

П.5. Интегрируем  $\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}$ ,  $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{0}$ ,

т. к.  $\vec{p}_0 = \vec{0}$ , то  $\vec{p}_k = \vec{0}$ .

П.6. Запишем конечный импульс:

$$\vec{p}_k = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{\text{тел.}}, \quad \vec{p}_k = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + M \vec{v}_{\text{тел.}},$$

где  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости мальчиков относительно земли.

Выразим скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  относительно земли через скорости мальчиков относительно тележки:  $\vec{v}_{1\text{тел.}}$  и  $\vec{v}_{2\text{тел.}}$ .

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\text{тел.}} + \vec{v}_{\text{тел.}}; \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2\text{тел.}} + \vec{v}_{\text{тел.}}.$$

Тогда получаем

$$m_1 (\vec{v}_{1\text{тел.}} + \vec{v}_{\text{тел.}}) + m_2 (\vec{v}_{2\text{тел.}} + \vec{v}_{\text{тел.}}) + M \vec{v}_{\text{тел.}} = \vec{0}.$$

П.7. Спроецируем на ось  $Ox$ :  $m_1 (v_{1\text{тел.}} + v_{\text{тел.}}) + m_2 (-v_{2\text{тел.}} + v_{\text{тел.}}) + M v_{\text{тел.}} = 0$ .

Заменим скорости равномерного движения выражениями  $v_{1\text{тел.}} = \frac{l}{2t}$ ,

$$v_{2\text{тел.}} = \frac{l}{2t}, \quad v_{\text{тел.}} = \frac{x}{2t}. \quad \text{Тогда } m_1 \left( \frac{l}{2t} + \frac{x}{2t} \right) + m_2 \left( -\frac{l}{2t} + \frac{x}{2t} \right) + M \frac{x}{2t} = 0.$$

П.10. Решим уравнение относительно искомой величини

$$m_1 \left( \frac{l}{2} + x \right) + m_2 \left( x - \frac{l}{2} \right) + Mx = 0; \quad (m_1 + m_2 + M)x + m_1 \frac{l}{2} - m_2 \frac{l}{2} = 0:$$

$$x = \frac{\frac{l}{2}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + M}; \quad x = \frac{5 \cdot 20}{200} = 0,5 \text{ (м)}.$$

**Пример 10.** Два упругих шара, массы которых отличаются в 5 раз, ( $M = 5m$ ) падают один за другим с начальной высоты  $H_0 = 18$  м на абсолютно упругую горизонтальную поверхность с очень малым промежутком времени. Определить, на какую максимальную высоту после соударения с легким шаром поднимется более тяжелый шар.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения импульса:  $d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{F}_{\text{внеш.}} dt$ .

П.2. Выполним рис. 1.21, указав на нем направления импульсов шаров до соударения и после него.

П.3. В момент соударения внешние силы не влияют на процесс  $\vec{F}_{\text{внеш.}} = \vec{0}$ , следовательно,  $d\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{0}$ .

П.4. Переменная одна.

П.5. Интегрируем  $\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_k} d\vec{p} = 0, \vec{p}_k = \vec{p}_0,$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_{0M} + \vec{p}_{0B}; \quad \vec{p}_k = \vec{p}_M + \vec{p}_B,$$

где  $\vec{p}_{0M}, \vec{p}_M$  – начальный и конечный импульсы шара массой  $m$ , а  $\vec{p}_{0B}, \vec{p}_B$  – начальный и конечный импульсы шара массой  $M$ .

П.6. Запишем закон сохранения импульса через скорости:  $m\vec{v}_M + M\vec{v}_B = m\vec{v}_{0M} + M\vec{v}_{0B}.$

П.7. Спроецируем на ось  $Oy$ :  $m v_M + M v_B = -m v_{0M} + M v_{0B}.$

П.8. В уравнении п.7 неизвестных величин две:  $v_M$  и  $v_B$ .

П.9. Воспользуемся законом сохранения энергии для упругого удара  $K_k = K_0,$

$$\frac{m v_M^2}{2} + \frac{M v_B^2}{2} = \frac{m v_{0M}^2}{2} + \frac{M v_{0B}^2}{2};$$

$$\begin{cases} -m v_{0M} + M v_{0B} = m v_M + M v_B, \\ \frac{m v_{0M}^2}{2} + \frac{M v_{0B}^2}{2} = \frac{m v_M^2}{2} + \frac{M v_B^2}{2}, \end{cases} \begin{cases} M(v_{0B} - v_B) = m(v_M + v_{0M}), \\ M(v_{0B}^2 - v_B^2) = m(v_M^2 - v_{0M}^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0B} + v_B = v_M - v_{0M}, \\ \frac{M}{m}(v_{0B} - v_B) = v_M + v_{0M}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе  $v_{0B} + v_B - \frac{M}{m}(v_{0B} - v_B) = -2v_{0M}.$  Учитывая, что при свободном падении с некоторой высоты  $H$  тело приобретает скорость  $v = \sqrt{2gH}$ , получим

$$\sqrt{2gH_0} + \sqrt{2gH_6} - \frac{M}{m}(\sqrt{2gH_0} - \sqrt{2gH_6}) = -2\sqrt{2gH_0},$$

$$\sqrt{2gH_6} \left(1 + \frac{M}{m}\right) = \sqrt{2gH_0} \left(\frac{M}{m} - 3\right),$$

$$6\sqrt{2gH_6} = 2\sqrt{2gH_0},$$

$$3\sqrt{2gH_6} = \sqrt{2gH_0}, \quad 9H_6 = H_0, \quad H_6 = \frac{H_0}{9} = 2(\text{м}).$$

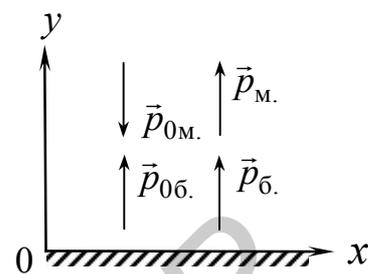


Рис. 1.21

### 1.5. Момент инерции твердого тела. Алгоритм решения задач

Для того чтобы определить момент инерции  $I$  произвольного тела, необходимо представить это тело как совокупность очень маленьких объемов  $dV$ , обладающих массой  $dm$  и находящихся на расстоянии  $r$  от оси вращения. Каждый такой объем  $dV$  можно считать материальной точкой, момент инерции которой  $dI = dmr^2 = \rho dVr^2$ . Если такое представление удобно, то следует пользоваться алгоритмом А. Однако для многих тел такое представление делает математические преобразования весьма сложными, поэтому при возможности изучаемое тело желательно представить как совокупность ранее рассмотренных тел и использовать свойства аддитивности моментов инерции, т. е.  $I_{\text{рез.}} = \sum_{i=1}^n I_i$  и

$$I = \int dI.$$

#### Алгоритм А

П.1А. Представить изучаемое тело как совокупность бесконечно малых объемов  $dV$ , которые можно считать материальными точками. Записать выражение для момента инерции материальной точки с учетом того, что  $dm = \rho dV$

$$dI = \rho dVr^2.$$

П.2А. Выполнить рисунок, на котором изобразить:

- а) изучаемое тело;
- б) элементарный объем  $dV$ ;
- в) линейный размер  $r$ ;
- г) ось, относительно которой рассчитывается  $I$ .

П.3А. Определить плотность тела  $\rho = \frac{dm}{dV}$  или взять  $\rho$  из условия задачи. Если

масса распределена равномерно, то  $\rho = \frac{m}{V}$ .

П.4А. Выразить элементарный объем  $dV$  через его размеры.

П.5А. Определить  $r$  через линейные размеры тела.

П.6А. Подставить величины  $\rho$ ,  $r$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ .

П.7А. Если в правой части полученного выражения больше двух переменных, выполнить замену переменных, используя геометрические параметры рисунка.

П.8А. Воспользоваться свойством аддитивности и проинтегрировать полученное выражение, определив пределы интегрирования из рисунка.

П.9А. При необходимости использовать теорему Штейнера:  $I = I_0 + ma^2$ , где  $I_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела,  $a$  – расстояние между осями.

#### Алгоритм В

П.1В. Представить изучаемое тело как совокупность ранее рассмотренных тел, для которых моменты инерции уже определены: колец, дисков, тонких полосок (стержней). Записать выражение для момента инерции такого тела в виде

$dI = k\rho dVr^2$ , где  $dV$  – объем тела,  $r$  – один из его линейных размеров, входящих в формулу,  $k$  – число, входящее в формулу момента инерции выбираемого тела,  $\rho$  – объемная плотность вещества

П.2В. Выполнить рисунок, на котором изобразить:

- а) изучаемое тело;
- б) элементарный объем  $dV$ ;
- в) линейный размер  $r$ ;
- г) ось вращения, относительно которой рассчитывается  $I$ .

П.3В. Определить объемную плотность тела  $\rho = \frac{m}{V}$  или взять  $\rho$  из условия задачи.

П.4В. Выразить элементарный объем  $dV$  через его размеры.

П.5В. Определить  $r$  через линейные размеры тела.

П.6В. Подставить величины  $\rho$ ,  $r$  и  $dV$  формулу для  $dI$ .

П.7В. Если в правой части полученного выражения больше двух переменных, выполнить замену переменных, используя геометрические параметры рисунка.

П.8В. Взять интегралы от правой и левой части полученного выражения, определив пределы интегрирования из рисунка.

П.9В. При необходимости использовать теорему Штейнера:  $I = I_0 + ma^2$ .

### 1.5.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Тонкое проволочное кольцо радиусом  $R$ , изготовленное из однородного материала, имеет массу  $m$ . Определить момент инерции кольца относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через одну из точек кольца.

*Решение*

п.1А. Определим момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс рассматриваемого тела, в данном случае кольца. Представим кольцо как совокупность бесконечно малых объемов  $dV$ , которые можно считать материальными точками. Тогда  $dI = \rho dVr^2$ .

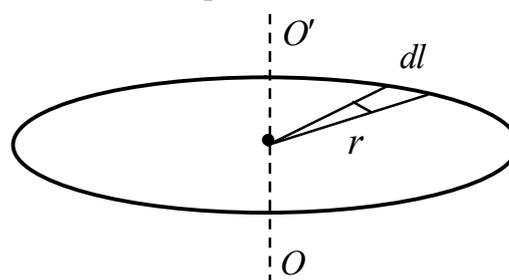


Рис. 1.22

п.2А. Выполним рис. 1.22, взяв ось  $OO'$ , проходящую через центр кольца.

п.3А. Определим объемную плотность вещества  $\rho$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2\pi R \cdot S},$$

где  $S$  – площадь сечение проволоки.

П.4А. Выразим элементарный объем  $dV = S \cdot dl$ .

П.5А. Из рис. 1.22 видно, что  $r = R$  для каждого  $dl$ .

П.6А. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{m}{2\pi R \cdot S} S dl \cdot R^2 = \frac{mR dl}{2\pi}.$$

П.7А. В правой части полученного выражения одна переменная  $l$ , поэтому переходим к п.9.

П.8А. Воспользуемся свойством аддитивности:

$$I_0 = \int_0^{2\pi R} \frac{mR}{2\pi} dl = \frac{mR}{2\pi} \cdot 2\pi R = mR^2.$$

П.9А. Используя теорему Штейнера, находим искомый момент инерции ( $a = R$ ):

$$I = I_0 + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

**Пример 2.** Определить момент инерции тонкого однородного диска радиусом  $R$  и массой  $m$  относительно оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной плоскости диска.

*Решение*

П.1В. Представим диск как совокупность очень тонких колец шириной  $dr$ , центры которых совпадают с центром диска.

Тогда в соответствии с примером 1

$$dI = dm \cdot r^2 = \rho dV r^2,$$

где  $dV$  – объем тонкого кольца,  $r$  – его радиус.

П.2В. Выполним рис. 1.23

П.3В. Определим объемную плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 H}, \text{ где } H \text{ – толщина}$$

диска.

П.4В. Элементарный объем тонкого кольца равен  $dV = 2\pi r H dr$ .

П.5В. Из рис. 1.23 видно, что  $0 \leq r \leq R$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для

$dI$ :

$$dI = \frac{m}{\pi R^2 H} \cdot r^2 2\pi r H dr = \frac{mr^3 2dr}{R^2}.$$

П.7В. В правой части полученного выражения одна переменная  $r$ , поэтому переходим к п.8.

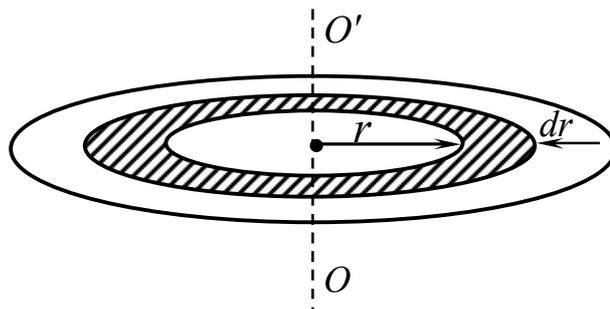


Рис. 1.23

П.8В. Используем свойство аддитивно-

$$\text{сти: } I_0 = \int_0^R \frac{m2r^3 dV}{R^2} \Rightarrow I_0 = \frac{m2R^4}{4R^2} = \frac{mR^2}{2}.$$

**Пример 3.** Рассчитать момент инерции однородного конуса относительно оси, проходящей через центр основания конуса, перпендикулярно этому основанию. Высотаконуса  $H$ , радиус основания  $R$ . Масса конуса  $m$ .

*Решение*

П.1В. Представим конус как совокупность бесконечно тонких дисков толщиной  $dy$ , радиусы которых  $r$  меняются от 0 до  $R$ , и воспользуемся результатом примера 2.

П.2В. Выполним рис. 1.24.

П.3В. Определим объемную плотность вещества  $\rho$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot H \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3m}{\pi R^2 H}.$$

П.4В. Элементарный объем представляет собой объем тонкого диска  $dV = \pi r^2 dy$ .

П.5В. Радиусы дисков  $r$  изменяются от 0 до  $R$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{1}{2} \frac{3m}{\pi R^2 H} \cdot \pi r^2 dy \cdot r^2 = \frac{3mr^4 dy}{2R^2 H}.$$

П.7В. В правой части полученного выражения две переменные величины  $r$  и  $y$ . Замену переменных выполним, используя подобие треугольников,

$$\frac{y}{r} = \frac{H}{R}.$$

Выразив  $r$ , получаем  $r = \frac{yR}{H}$  ( $y$  изменяется от 0 до  $H$ ). Подставив это выражение в формулу п.6, получим

$$dI = \frac{3}{2} \frac{m}{R^2 H} \frac{y^4 R^4}{H^4} dy.$$

П.8В. Используем свойство аддитивности:

$$I_0 = \int_0^H \frac{3}{2} \frac{mR^2 y^4}{H^5} dy, \quad I_0 = \frac{3}{2} \frac{mR^2}{H^5} \frac{H^5}{5} = \frac{3}{10} mR^2.$$

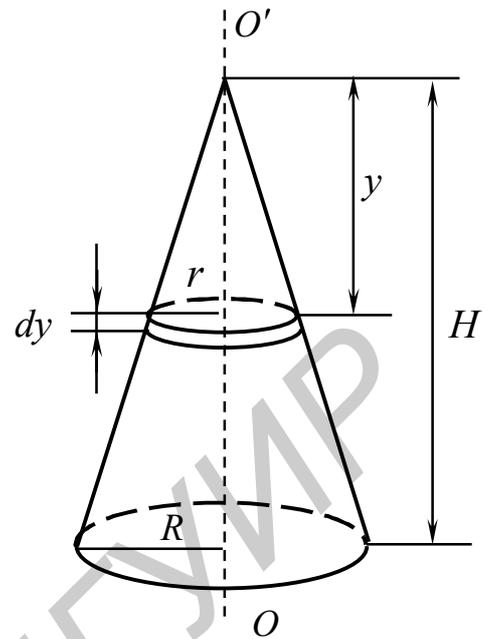


Рис.1.24

**Пример 4.** Рассчитать момент инерции однородного полушара массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей перпендикулярно основанию полушара через крайнюю точку его поверхности.

*Решение*

П.1В. Представим полушар как совокупность очень тонких дисков толщиной  $dy$  и переменного радиуса  $r$ . Воспользуемся результатом примера 2. Первоначально рассчитаем момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

$dI = \frac{1}{2} dm \cdot r^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot r^2 dV$ , где  $r$  – радиус произвольного диска.

П.2В. Выполним рис. 1.25.

П.3В. Найдем плотность  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3m}{2\pi R^3}$ .

П.4В. Выразим элементарный объем  $dV = \pi r^2 dy$ .

П.5В. Выясним пределы изменения переменных:  $0 \leq r \leq R$  и  $0 \leq y \leq R$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{1}{2} \frac{3mr^2}{2\pi R^3} \cdot \pi r^2 dy = \frac{3mr^4 dy}{4R^3}.$$

П.7В. В правой части две переменные  $r$  и  $y$ . Замену переменных выполним, используя рис. 1.25.

$$r^2 = R^2 - y^2.$$

П.8В. Используем свойство аддитивно-

$$\text{сти: } I_0 = \int_0^R \frac{3m(R^2 - y^2)^2 dy}{4R^3} = \frac{3}{4} \frac{m}{R^3} \left( \int_0^R R^4 dy - 2 \int_0^R R^2 y^2 dy + \int_0^R y^4 dy \right),$$

$$I_0 = \frac{3}{4} \frac{m}{R^3} \left( R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \frac{3}{4} \frac{m}{R^3} R^5 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{4} mR^2 \frac{8}{15} = \frac{2}{5} mR^2.$$

П.9В. Согласно теореме Штейнера  $I = I_0 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2$ .

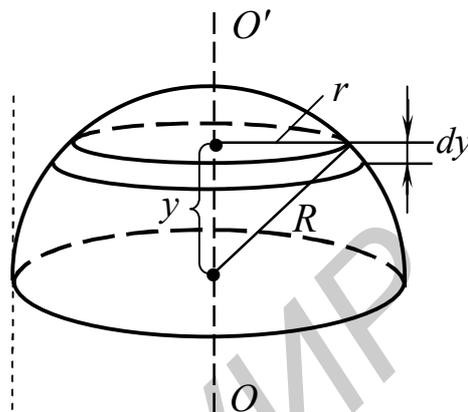


Рис.1.25

**Пример 5.** Определить момент инерции сплошного диска радиусом  $R$  и толщиной  $H$  относительно оси, проходящей через центр масс диска перпендикулярно его плоскости, если плотность вещества, из которого изготовлен диск, задана выражением  $\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ ;  $R$  – радиус диска,  $r$  – расстояние от центра диска до той точки, в которой определяется плотность  $\rho$ .

*Решение*

П.1В. Поскольку плотность вещества в точках, находящихся на одинаковом расстоянии  $r$  от центра диска одинакова, представим диск как совокупность тонких колец, радиусы которых изменяются от 0 до  $R$ . Тогда

$dI = \rho dV r^2$ , где  $dV$  – объем кольца,  $r$  – его радиус.

П.2В. Выполним рис. 1.26.

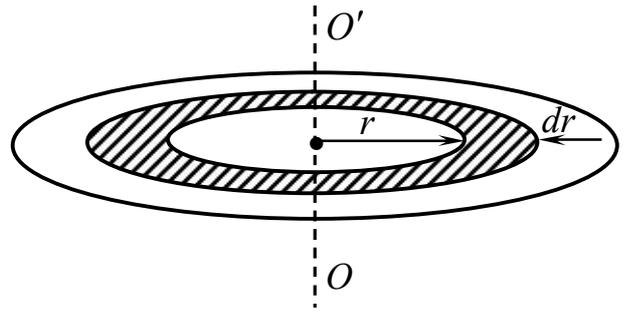


Рис.1.26

П.3В. Объемная плотность задана в условии задачи  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ .

П.4В. Элементарный объем тонкого кольца равен  $dV = 2\pi r H dr$ .

П.5В. Из рисунка видно, что  $0 \leq r \leq R$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot r^2 \cdot 2\pi r H dr.$$

П.7В. В правой части полученного выражения одна переменная  $r$ , поэтому переходим к п.9.

П.8В. В соответствии со свойством аддитивности  $I_0 = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 2\pi r^3 H dr$ ,

$$I_0 = 2\pi \rho_0 H \int_0^R \left(r^3 - \frac{r^4}{R}\right) dr = 2\pi \rho_0 H \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R}\right) = \frac{\pi \rho_0 H R^4}{10}.$$

**Пример 6.** Рассчитать момент инерции однородного диска с отверстием относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через внутренний край диска. Радиус диска  $R_0$ , радиус отверстия  $r_0$ , масса диска  $m$ .

*Решение*

П.1В. Найдем момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс, рассмотрев его как совокупность тонких колец. Воспользуемся результатами примера 1.

$dI = \rho dV r^2$  – момент инерции кольца, где  $dV$  – объем кольца;  $r$  – его радиус.

П.2В. Выполним рис. 1.27.

П.3В. Найдем плотность:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi(R_0^2 - r_0^2)H}.$$

П.4В. Выразим объем  $dV = 2\pi r H dr$ .

П.5В. Из рис. 1.27 определим, в каких пределах меняются радиусы колец  $r_0 \leq r \leq R_0$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{m}{\pi(R_0^2 - r_0^2)H} \cdot r^2 2\pi r H dr = \frac{2mr^3 dr}{R_0^2 - r_0^2}.$$

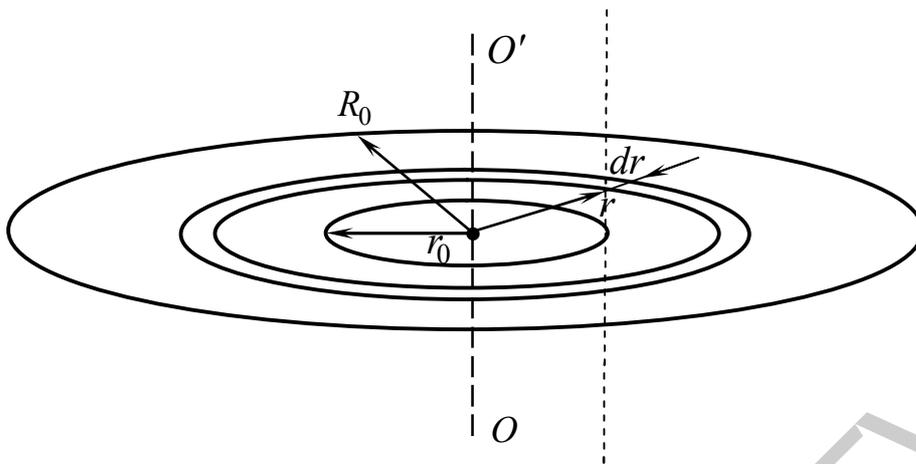


Рис.1.27

П.8В. Используем свойство аддитивно-

$$\text{сти: } I_0 = \int_{r_0}^{R_0} \frac{2mr^3 dr}{R_0^2 - r_0^2} = \frac{m(R_0^4 - r_0^4)}{2(R_0^2 - r_0^2)} = \frac{m(R_0^2 + r_0^2)}{2}.$$

П.9В. По теореме Штейнера

$$I = I_0 + mr_0^2 = m \frac{R_0^2 + r_0^2}{2} + mr_0^2 = \frac{m}{2}(R_0^2 + 3r_0^2).$$

**Пример 7.** Рассчитать момент инерции диска радиусом  $R$ , массой  $m$  и толщиной  $H$  относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Плотность вещества зависит от расстояния от центра диска  $r$  по закону  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

*Решение*

П.1В. Рассмотрим диск как совокупность тонких колец и воспользуемся результатом примера 1.

$dI = \rho dV r^2$ , где  $dV$  – объем тонкого кольца,  $r$  – его радиус.

П.2В. Выполним рис. 1.28.

П.3В. Плотность задана  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

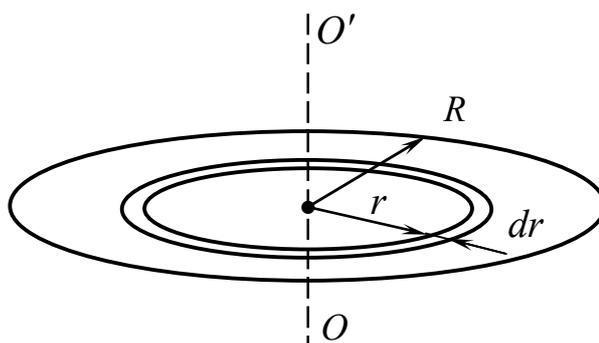


Рис. 1.28

П.3В. Плотность задана:  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

П.4В. Выразим объем:  $dV = 2\pi r H dr$ .

П.5В. Определим пределы изменения радиусов колец:  $0 \leq r \leq R$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \cdot 2\pi r H dr = 2\pi \rho_0 H \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^3 dr.$$

П.8В. По свойству аддитивности

$$I_0 = \int_0^R 2\pi \rho_0 H \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^3 dr = 2\pi \rho_0 H \left( \int_0^R r^3 dr - \int_0^R \frac{r^5}{R^2} dr \right),$$

$$I_0 = 2\pi \rho_0 H \left( \frac{R^4}{4} - \frac{R^6}{6R^2} \right) = \frac{\pi \rho_0 H R^4}{6}.$$

**Пример 8.** Рассчитать момент инерции однородного стержня массой  $m$  и длиной  $L$  относительно оси, проходящей через один из концов стержня и составляющей со стержнем угол  $\alpha$ . Проанализировать решение в случае  $\alpha = 90^\circ$ .

*Решение*

П.1А. Представим стержень как совокупность очень тонких пластинок сечением  $S$  и длиной  $dl$ . Каждую пластинку можно считать материальной точкой.

$$dI = \rho dV r^2, \text{ где } dV = S dl.$$

П.2А. Выполним рис. 1.29.

П.3А. Найдем плотность  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{LS}$ .

П.4А. Выразим элементарный объем  $dV = S dl$ .

П.5А. Определим пределы изменения переменной  $l$ :

$$0 \leq l \leq L.$$

П.6А. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{m}{LS} \cdot r^2 S dl = \frac{m r^2 dl}{L}.$$

П.7А. Выполним замену переменных, используя рис.1.29

$$r = l \sin \alpha, \text{ тогда } dI = \frac{m l^2 \sin^2 \alpha \cdot dl}{L}.$$

П.8А. Найдем суммарный момент инерции:

$$I = \int_0^L \frac{m l^2 \sin^2 \alpha dl}{L} = \frac{m L^2}{3} \sin^2 \alpha,$$

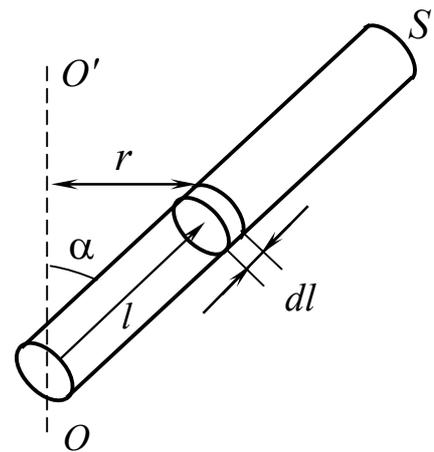


Рис.1.29

для угла  $\alpha = 90^\circ$   $I = \frac{mL^2}{3}$ .

**Пример 9.** Рассчитать момент инерции тонкого стержня, изготовленного из вещества плотностью  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{L}\right)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $L$  – длина стержня,  $r$  – расстояние от конца стержня с минимальной плотностью до точки, в которой берется  $\rho$ . Сечение стержня  $S$ , ось проходит через конец стержня с наименьшей плотностью перпендикулярно стержню.

*Решение*

П.1А. Представим стержень как совокупность очень тонких пластинок сечением  $S$  и длиной  $dr$ . Ось проведем через край стержня. Каждую пластинку можно считать материальной точкой.

$$dI = \rho dV r^2,$$

где  $dV$  – объем пластинки,  $r$  – расстояние от произвольной пластинки до оси.

П.2А. Выполним рис. 1.30.

П.3А. Объемная плотность задана в условии задачи.

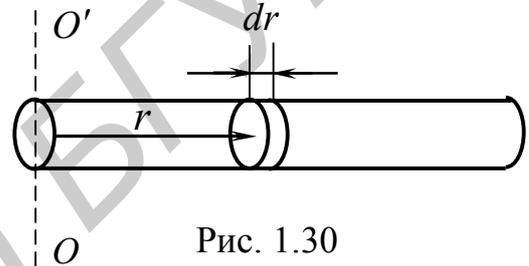


Рис. 1.30

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{L}\right).$$

П.4А. Элементарный объем пластинки  $dV = Sdr$ .

П.5А. Из рисунка видно, что  $0 \leq r \leq L$ .

П.6А. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{L}\right) r^2 S dr.$$

П.7А. В правой части полученного выражения одна переменная  $r$ , поэтому перейдем к п.9.

П.8А. Ищем суммарный момент инерции:

$$I = \int_0^L \rho_0 \left(1 - \frac{r}{L}\right) r^2 S dr = \rho_0 S \left( \int_0^L r^2 dr - \int_0^L \frac{r^3}{L} dr \right) = \rho_0 S \left( \frac{L^3}{3} - \frac{L^4}{4L} \right) = \rho_0 S \frac{L^3}{12}.$$

**Пример10.** Рассчитать момент инерции однородной пластинки в виде прямоугольного треугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , толщиной  $H$ . Масса пластины  $m$ . Ось проходит через сторону  $a$  и лежит в плоскости пластины.

*Решение*

П.1В. Представим пластину как совокупность тонких стержней произвольной длины  $x$  и ширины  $dy$ . Воспользуемся результатом примера 8 для угла  $\alpha = 90^\circ$ :

$$dI = \frac{1}{3} \rho dV x^2,$$

где  $x$  – длина произвольного стержня.

П.2В. Выполним рис. 1.31.

П.3В. Найдем плотность  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot 2}{abH}$ .

П.4В. Выразим элементарный объем  $dV = Hxdy$ .

П.5В. Определим пределы изменения переменных  $0 \leq x \leq b$   $0 \leq y \leq a$ .

П.6В. Подставим  $\rho$  и  $dV$  в формулу для  $dI$ :

$$dI = \frac{1}{3} \frac{2m}{abH} \cdot Hxdy \cdot x^2 = \frac{2mx^3 dy}{3ab}$$

П.7В. Замену переменных выполним, используя рисунок:  $\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$   $x = \frac{by}{a}$ .

П.8В. Используем свойство аддитивности:

$$I = \frac{2m}{3ab} \int_0^a \frac{b^3 y^3}{a^3} dy = \frac{2m}{3ab} \frac{b^3}{a^3} \frac{a^4}{4} = \frac{mb^2}{6}$$

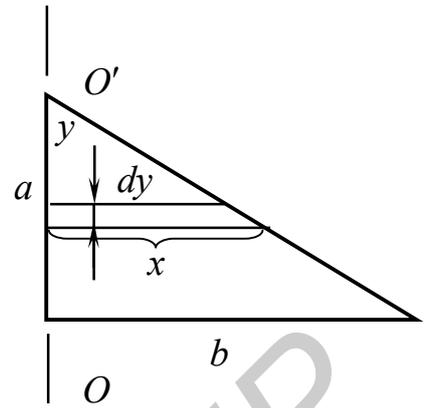


Рис. 1.31

## 1.6. Динамика вращательного движения. Алгоритм решения задач

П.1. Выполнить рисунок, на котором изобразить:

- все тела, которые участвуют в движении;
- векторы сил  $\vec{F}_i$ , действующих на каждое из тел, и точки приложения этих сил;
- указать ось вращения, относительно которой будут определяться моменты сил; провести радиусы-векторы  $\vec{r}_i$  к точкам приложения сил, изображенных на рисунке;
- векторы моментов сил  $\vec{M}_i$ , определив их направление по правилу правого винта;
- оси координат, одну из которых ( $Oz$ ) следует направить по оси вращения, определив направление по правилу правого винта, а другую ( $Oy$ ) по направлению ускорения поступательного движения.

П.2. Записать уравнение динамики вращательного движения тела

$$I\vec{\beta} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i, \text{ где } I \text{ – момент инерции тела относительно оси вращения, выбранной в п.1, } \vec{\beta} \text{ – угловое ускорение тела; } \vec{M}_i \text{ – не равные нулю моменты сил, действующих на вращающееся тело.}$$

П.3. Определить момент инерции тела относительно оси вращения, а также модули моментов сил, определяемые по формуле  $M = Fr \sin \alpha$ .  $\alpha$  – угол между силой и радиусом-вектором. Радиусы-векторы всех сил, входящих в уравнение, выразить через геометрические параметры рисунка.

П.4. Уравнение, полученное в п.2, спроецировать на ось  $Oz$ , совпадающую с осью вращения  $I\beta_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}$ . В полученное скалярное уравнение подставить

модули моментов сил, определенные в п.3, и значение момента инерции.

П.5. В полученном уравнении определить количество неизвестных величин. Если неизвестная величина одна и является искомой величиной в задаче, то перейти к п.8. В том случае, если неизвестных больше одной, либо искомая величина не содержится в уравнении, то перейти к п.6.

П.6. Записать уравнение динамики поступательного движения для тех тел, которые движутся поступательно, или для поступательного движения центра масс

катящегося тела в виде  $m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , где  $\vec{w}$  – ускорение поступательного движе-

ния,  $\vec{F}_i$  – все силы действующие на каждое из тел.

П.7. Спроецировать уравнения п.6 на оси координат  $Ox$  и  $Oy$  (или на одну из этих осей), после чего внести в полученные уравнения выражения для каждой из этих сил.

П.8. Составить систему уравнений из выражений, полученных в п.5. и п.7. Если вращательное движение происходит без проскальзывания, то использовать связь между угловым и линейным ускорениями  $w = \beta R$ , оставив в системе либо только  $w$ , либо только  $\beta$ . При необходимости привлечь алгоритмы других разделов физики.

П.9. Решить полученную систему уравнений (или уравнение) относительно искомой величины.

### 1.6.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** К ободу однородного диска радиусом  $R$  приложена постоянная сила  $\vec{F}$ , направленная по касательной к диску. При вращении на диск действует сила трения, равная  $\vec{F}_{тр.}$ . Определить массу диска, если диск вращается с постоянным угловым ускорением  $\beta$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 1.32.

Сила трения и внешняя сила приложены в одной точке. Их радиусы-векторы одинаковы и равны  $R$ , углы между радиусами-векторами и силами равны  $90^\circ$ . Сила реакции опоры и сила тяжести приложены в т.  $O$  и не имеют радиусов-векторов. Момент силы трения направлен от

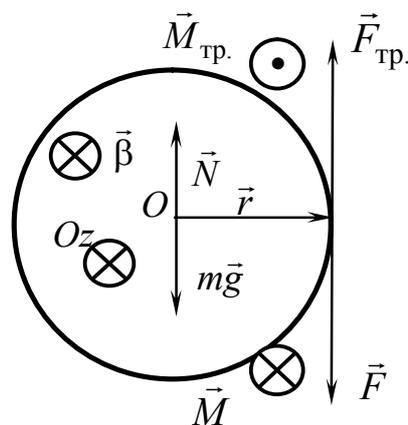


Рис. 1.32

чертежа (к нам), момент силы  $\vec{F}$  – за чертеж (от нас), ось  $Oz$  направим в ту же сторону, что и  $\vec{\beta}$ .

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения тела:  
 $I\vec{\beta} = \vec{M} + \vec{M}_{\text{тр.}}$ .

П.3. Момент инерции однородного диска относительно оси вращения  $I = \frac{mR^2}{2}$ .

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$ :

$$M - M_{\text{тр.}} = \frac{mR^2}{2}\beta, r_1 = r_2 = R,$$

$$M = F \cdot R \sin 90^\circ = FR, M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot R \cdot \sin 90^\circ = F_{\text{тр.}} \cdot R.$$

Подставим значения моментов в динамическое уравне-

$$\text{ние: } F \cdot R - F_{\text{тр.}} \cdot R = \frac{mR^2}{2}\beta.$$

П.5. В полученном выражении одна неизвестная величина  $m$ , поэтому переходим к п.9.

$$\text{П.9. } F - F_{\text{тр.}} = \frac{mR}{2}\beta \rightarrow m = \frac{2(F - F_{\text{тр.}})}{\beta R}.$$

**Пример 2.** На наклонной плоскости с коэффициентом трения  $\mu$ , составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, находится катушка с ниткой. Конец нити закреплен в точке А. Масса и момент инерции катушки относительно ее центра масс равны  $m$  и  $I_0$  соответственно. Радиус слоя ниток  $r$ , внешний радиус катушки –  $R$ . Движение без проскальзывания. Найти угловое ускорение катушки.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 1.33. Сила тяжести  $m\vec{g}$  приложена в центре масс тела, сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр.}}$  – в точке касания катушки и наклонной плоскости, сила натяжения нити  $\vec{T}$  – в точке касания нити с катушкой. Радиус-вектор силы тяжести равен нулю, для  $\vec{F}_{\text{тр.}}$  и  $\vec{N}$  радиус-вектор обозначен  $\vec{r}_2$ , для силы  $\vec{T}$  как  $\vec{r}_1$ . Все углы между силами и радиусами-векторами составляют  $90^\circ$ . Ось  $Oz$  направлена по

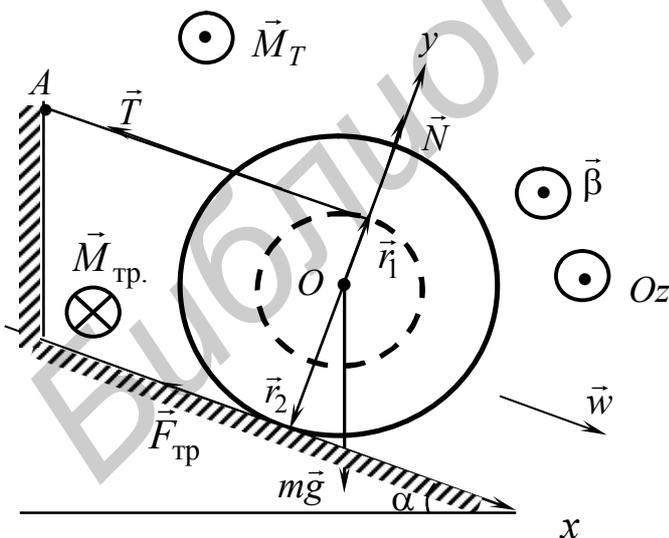


Рис. 1.33

угловому ускорению  $\vec{\beta}$ . Направления моментов определены по правилу правого винта и указаны на рис. 1.33.

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{\text{тр.}} + \vec{M}_T.$$

Учли, что  $M_{\text{тяж.}} = mg \cdot 0 = 0$ ,  $M_N = N \cdot r_2 \cdot \sin 180^\circ = 0$ .

П.3. Момент инерции катушки равен  $I_0$ .

$$M_T = T \cdot r_1 \cdot \sin 90^\circ = T \cdot r_1, \quad M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot r_2 \cdot \sin 90^\circ = F_{\text{тр.}} \cdot r_2.$$

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$

$$Oz: -M_{\text{тр.}} + M_T = I_0\beta,$$

$$-F_{\text{тр.}} \cdot r_1 + T \cdot r_2 = I_0\beta.$$

Поскольку  $r_1 = r$ , а  $r_2 = R$ , то  $-F_{\text{тр.}}R + Tr = I_0\beta$  или  $-\mu NR + Tr = I_0\beta$ .

П.5. В полученном в п.6 уравнении две неизвестные величины, поэтому переходим к п.6.

П.6. Запишем уравнение динамики поступательного движения для катушки:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}} + \vec{T}.$$

П.7. Спроецируем уравнения на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

$$Ox: mw = mg \sin \alpha - F_{\text{тр.}} - T,$$

$$Oy: 0 = N - mg \cos \alpha.$$

Учтем, что  $F_{\text{тр.}} = \mu N$ , т. е.

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - \mu N - T, \\ 0 = N - mg \cos \alpha. \end{cases}$$

Перейдем к п. 8 алгоритма.

П.8. Составим полную систему уравнений:

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - \mu N - T, \\ 0 = N - mg \cos \alpha, \\ -\mu NR + Tr = I_0\beta, \\ w = \beta R. \end{cases}$$

П.9. Решим эту систему относительно  $\beta$ :

$$\begin{cases} m\beta R = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - T, \\ -\frac{\mu mg \cos \alpha \cdot R}{r} + T = \frac{I_0\beta}{r}, \end{cases}$$

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - m\beta R = \frac{I_0\beta}{r} + \mu mg \cos \alpha \frac{R}{r},$$

$$mg \left( \sin \alpha - \mu \cos \alpha - \mu \cos \alpha \frac{R}{r} \right) = \beta \left( \frac{I_0}{r} + mR \right),$$

$$\beta = \frac{mg \left[ \sin \alpha - \mu \cos \alpha \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \right] r}{I_0 + mR \cdot r}.$$

**Пример 3.** На горизонтальной поверхности стола с коэффициентом трения  $\mu$  находится катушка с намотанным слоем ниток, момент инерции которой  $I_0 = \gamma m R^2$ ,

где  $m$  – масса катушки,  $R$  – внешний радиус катушки,  $\gamma$  – положительная константа. Радиус намотанного слоя ниток равен  $r$ . Катушку без скольжения начали тянуть с постоянной силой  $\vec{F}$ , направленной под углом  $\alpha$  к горизонту. Найти модуль горизонтального ускорения оси катушки  $w$ .

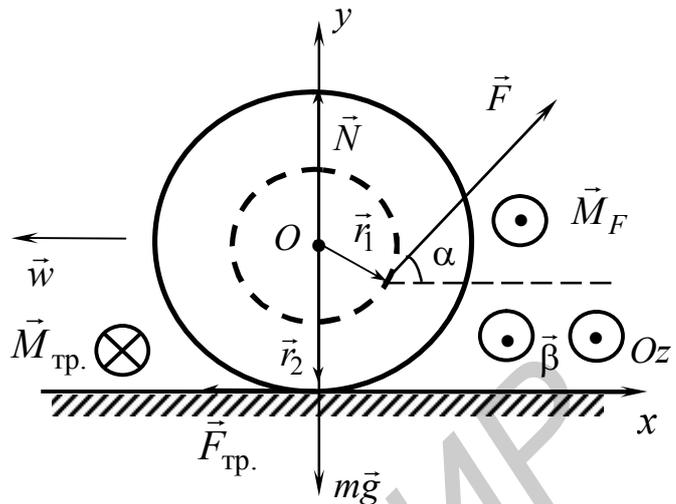


Рис.1.34

*Решение*

П.1. Выполним рис. 1.34.

Силы трения и реакции опоры приложены в точке касания катушки и стола. Сила тяжести приложена в центре масс катушки, сила тяги – в точке касания нити и катушки. Поскольку вращение катушки может происходить как по часовой стрелке, так и против часовой в зависимости от величины и направления силы  $\vec{F}$ , выберем одно из направлений. Будем считать, что катушка вращается против часовой стрелки, а ее центр масс перемещается влево. Правильность или ошибочность такого предположения определит знак полученного ответа.

Точку  $O$  совместим с центром масс катушки. Тогда радиус-вектор силы тяжести равен 0, радиус-вектор силы  $\vec{F}$  обозначен  $\vec{r}_1$  и составляет угол  $90^\circ$  с вектором силы, радиусы-векторы сил реакции опоры  $\vec{N}$  и силы трения  $\vec{F}_{тр.}$  обозначены  $\vec{r}_2$  и составляют с силами углы  $180^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно.

Момент силы реакции опоры  $M_N = N \cdot r_2 \sin 180^\circ = 0$ , момент силы тяжести  $M_{mg} = mg \cdot 0 = 0$  и на рисунке не отображены. По правилу правого винта определяем направление моментов сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_{тр.}$ . Ось  $Oz$  выбираем по направлению  $\vec{\beta}$ .

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тр.}.$$

П.3. Момент инерции тела задан в условии задачи:  $I = \gamma m R^2$ .

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$ .

$$Oz: M_F - M_{тр.} = \gamma m R^2 \beta,$$

$$M_F = F \cdot r \sin 90^\circ = F \cdot r, M_{тр.} = F_{тр.} R \sin 90^\circ,$$

$$F \cdot r - F_{\text{тр.}} \cdot R = \gamma m R^2 \beta.$$

П.5. Поскольку в этом уравнении две неизвестные величины, то перейдем к п.6.

П.6. Запишем уравнение динамики поступательного движения центра катушки

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}} + \vec{T}$$

и перейдем к п.7 алгоритма.

П.7. Спроецируем уравнение п.6 на оси координат:

$$Ox: mw = -F \cos \alpha + F_{\text{тр.}}$$

П.8. Составим полную систему уравнений:

$$\begin{cases} F \cdot r - F_{\text{тр.}} \cdot R = \gamma m R^2 \beta, \\ mw = -F \cos \alpha + F_{\text{тр.}}, \\ \beta R = w. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно  $w$ . Выразим  $F_{\text{тр.}}$

$$F_{\text{тр.}} = F \cos \alpha + mw$$

и подставим в первое уравнение:

$$Fr - (F \cos \alpha + mw) \cdot R = \gamma m R^2 \frac{w}{R},$$

$$w = \frac{F \cdot r - F \cdot R \cos \alpha}{(\gamma + 1)mR}.$$

**Пример 4.** Через блок в виде однородного диска переброшена нерастяжимая, невесомая нить, к концам которой прикреплены грузы  $m_1$  и  $m_2$ ,  $m_1 > m_2$ . Масса диска  $M$ , его радиус  $R$ . Считая, что нить не скользит по блоку, определить угловое ускорение вращающегося диска. Сила трения в опоре отсутствует.

*Решение*

П.1. Выполним рис. 1.35, изобразив все тела, входящие в систему, силы, действующие на каждое из тел, радиусы-векторы этих сил и моменты сил, действующих на вращающийся диск, найдя их направления по правилу правого винта. Направления моментов сил натяжения нитей указаны на рис. 1.35.

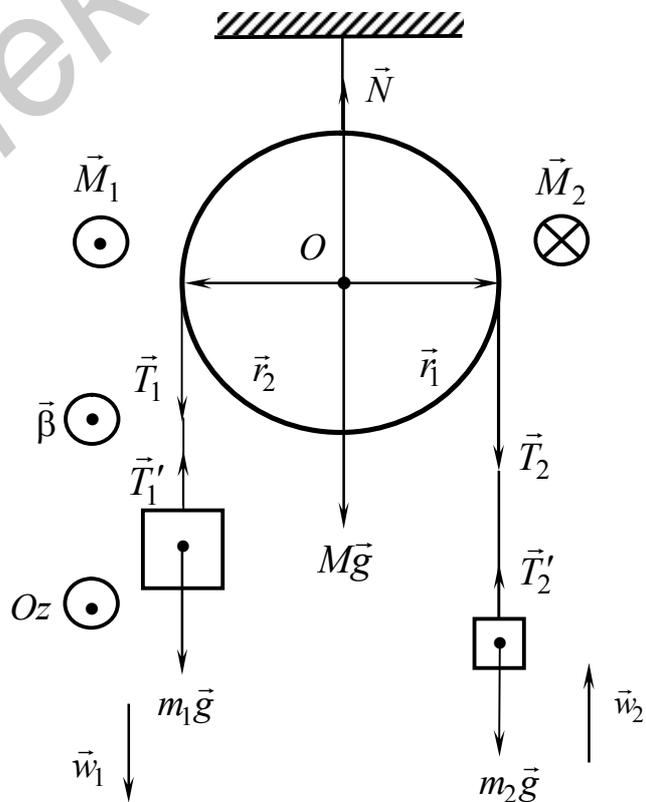


Рис. 1.35

Ось  $Oz$  направим по направлению  $\vec{\beta}$ . Ось  $Oy$  направим по направлению движения массы  $m_1$ . Радиусы-векторы сил  $M\vec{g}$  и  $\vec{N}$  равны нулю, таким образом, моменты этих сил также равны 0.

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения для диска

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

П.3. Момент инерции однородного диска относительно оси  $Oz$ :

$$I = \frac{MR^2}{2}.$$

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$ :

$$Oz: M_1 - M_2 = I\beta, \quad M_1 = T_1 \cdot R \cdot \sin 90^\circ = T_1 R, \quad M_2 = T_2 \cdot R \cdot \sin 90^\circ = T_2 R,$$

$$T_1 R - T_2 R = \frac{MR^2}{2} \beta.$$

П.5. Поскольку в этом уравнении более одной неизвестной величины, перейдем к п.6.

П.6. Запишем уравнение динамики поступательного движения для масс  $m_1$  и  $m_2$ :

$$m_1 \vec{w}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}'_1,$$

$$m_2 \vec{w}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}'_2.$$

П.7. Спроецируем уравнения на ось  $Oy$ .

$$Oy: m_1 w_1 = m_1 g - T'_1,$$

$$Oy: m_2 w_2 = T'_2 - m_2 g.$$

П.8. Составим полную систему уравнений и учтем, что  $w_1 = w_2 = w$ :

$$\begin{cases} T_1 R - T_2 R = \frac{MR^2}{2} \beta, \\ m_1 w = m_1 g - T'_1, \\ m_2 w = T'_2 - m_2 g. \end{cases}$$

По третьему закону Ньютона  $T'_1 = T_1$ ,  $T'_2 = T_2$ . Учтем также, что  $w = \beta \cdot R$ , тогда

$$\begin{cases} T_1 - T_2 = \frac{MR\beta}{2}, \\ m_1 \beta \cdot R = m_1 g - T_1, \\ m_2 \beta \cdot R = T_2 - m_2 g. \end{cases}$$

П.9. Решим эту систему относительно  $\beta$ .

$$m_1 g - m_1 \beta R - m_2 \beta R - m_2 g = \frac{MR\beta}{2},$$

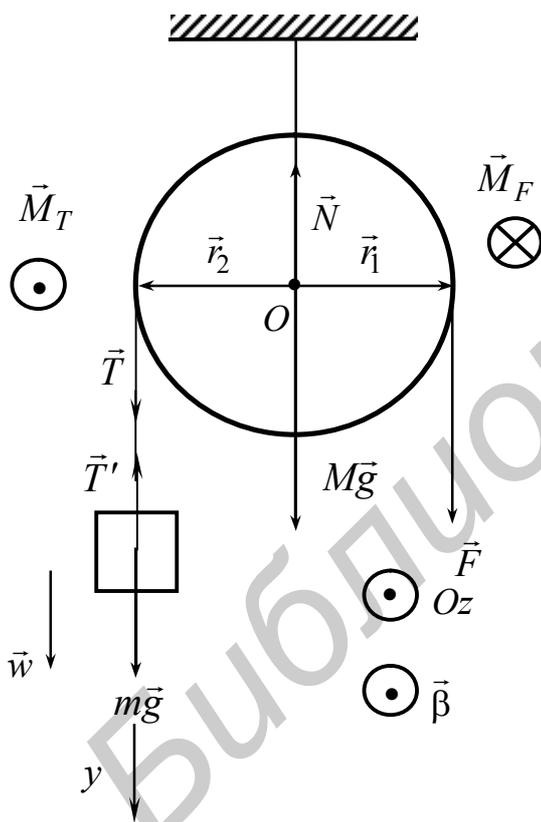
$$(m_1 - m_2)g = R\beta \cdot \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right),$$

$$\beta = \frac{(m_1 - m_2)g}{R \cdot \left( \frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right)}.$$

**Пример 5.** На неподвижный блок в виде однородного диска массой  $M$  и радиусом  $R$  намотана невесомая нерастяжимая нить с грузом массой  $m$ . В некоторый момент времени  $t_0 = 0$  к блоку приложена сила  $F = F_0 - \alpha t$ , как показано на рис. 1.36.  $F_0$  и  $\alpha$  – положительные константы. Определить угловую скорость вращения диска как функцию времени.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 1.36.



Силы тяжести диска и груза приложены в центре масс каждого тела. Сила натяжения нити и сила  $F$  приложены к диску в точках касания. Сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила тяжести диска  $M\vec{g}$  не создают вращательных моментов относительно точки  $O$ , поскольку их радиусы-векторы равны 0. Момент силы  $\vec{F}$  направлен за чертёж, момент силы  $\vec{T}$  – к нам от чертежа. Углы между радиусами-векторами и силами равны  $90^\circ$ .

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения тела:

$$\vec{M}_F + \vec{M}_T = I\vec{\beta}.$$

П.3. Момент инерции однородного диска относительно оси вращения

$$I = \frac{MR^2}{2}.$$

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$ :

$$M_T - M_F = I\beta,$$

$$M_T = T \cdot r_1 \sin \alpha_1 = T \cdot R \sin 90^\circ,$$

$$M_F = F \cdot r_2 \sin \alpha_2 = F \cdot r_2 \sin 90^\circ = F \cdot R = (F_0 - \alpha t)R,$$

$$TR - (F_0 - \alpha t)R = \frac{MR^2}{2}\beta, T - (F_0 - \alpha t) = \frac{MR}{2}\beta.$$

П.5. В полученном выражении более одной неизвестной величины, поэтому перейдем к п.6.

П.6. Запишем уравнение динамики поступательного движения для груза  $m$  :

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}'.$$

П.7. Спроецируем уравнение п.6 на ось  $Oy$ , которую направим по направлению движения груза массой  $m$  :

$$mw = mg - T'.$$

Поскольку  $T' = T$ , а  $w = \beta \cdot R$ , получаем

$$m\beta R = mg - T.$$

П.8. Составим систему уравнений согласно пп.4 и7:

$$\begin{cases} T - (F_0 - \alpha t) = \frac{MR}{2}\beta, \\ mg - T = m\beta R. \end{cases}$$

П.9. Дополним систему уравнений п.8 уравнением кинематики вращательного движения  $d\omega = \beta dt$  :

$$\begin{cases} T - (F_0 - \alpha t) = \frac{MR}{2}\beta, \\ mg - T = m\beta R, \\ d\omega = \beta dt. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений исключим  $T$  :

$$mg - (F_0 - \alpha t) = m\beta R + \frac{MR}{2}\beta.$$

$$\text{Выразим } \beta = \frac{mg - F_0 + \alpha t}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)},$$

$$d\omega = \frac{mg - F_0 + \alpha t}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)} dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_k} d\omega = \int_0^t \frac{mg - F_0 + \alpha t}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)} dt,$$

$$\omega_k - \omega_0 = \frac{mg - F_0}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)} t + \frac{\alpha t^2}{2R\left(m + \frac{M}{2}\right)},$$

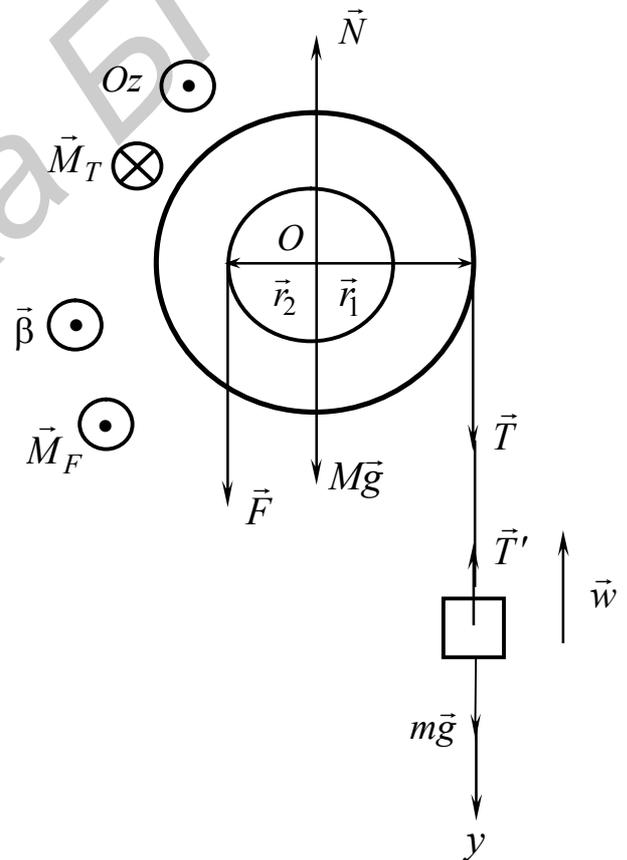


Рис. 1.37

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{(mg - F_0)t + \frac{\alpha t^2}{2}}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)}.$$

**Пример 6.** На ступенчатый блок радиусами  $R$  и  $r$  в противоположных направлениях намотаны две нити. К концу одной из них прикреплен груз массой  $m$ . Момент инерции блока относительно оси вращения равен  $I_0$ . Трения нет. Какую силу  $F$  необходимо приложить к свободному концу нити, чтобы угловое ускорение блока было равно  $\beta$ ?

*Решение*

П.1. Выполним рис.1.37. Укажем направления всех векторов (см. примеры 1–5).

П.2. Запишем динамическое уравнение вращательного движения

$$\vec{M}_T + \vec{M}_F = I\vec{\beta},$$

$$M_{mg} = 0, M_N = 0, \text{ т. к. } r = 0.$$

П.3. Определим модули моментов сил:

$$M_T = T \cdot r_2 \sin 90^\circ = T \cdot R,$$

$$M_F = F \cdot r_1 \sin 90^\circ = F \cdot r.$$

П.4. Спроецируем уравнение динамики на ось  $Oz$ :  $M_F - M_T = I_0 \cdot \beta$ ,

$$F \cdot r - TR = I_0 \cdot \beta.$$

П.5. В полученном выражении две неизвестные величины, поэтому переходим к п.6.

П.6. Для груза:  $m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}'$ .

П.7. В проекции на ось  $Oy$ :  $-mw = -T' + mg$ ,  $T' = T$  по третьему закону Ньютона.

Учтем, что  $w = \beta \cdot R$ ,

$$m\beta R = T - mg.$$

П.8. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} Fr - TR = I_0\beta, \\ m\beta R = T - mg. \end{cases}$$

Решим систему:

$$T = m\beta R + mg,$$

$$Fr - (mg + m\beta R)R = I_0\beta,$$

$$F = \frac{I_0\beta + m(g + \beta R)}{r}.$$

**Пример 7.** Однородный сплошной цилиндр массой  $m$  лежит на двух горизонтальных брусках. На цилиндр намотана нить, за свешивающийся конец которой тянут с постоянной вертикальной силой  $F$ . Коэффициент трения между цилиндром и брусками равен  $\mu$ . Определить значение силы  $F$ , при котором цилиндр будет катиться без скольжения.

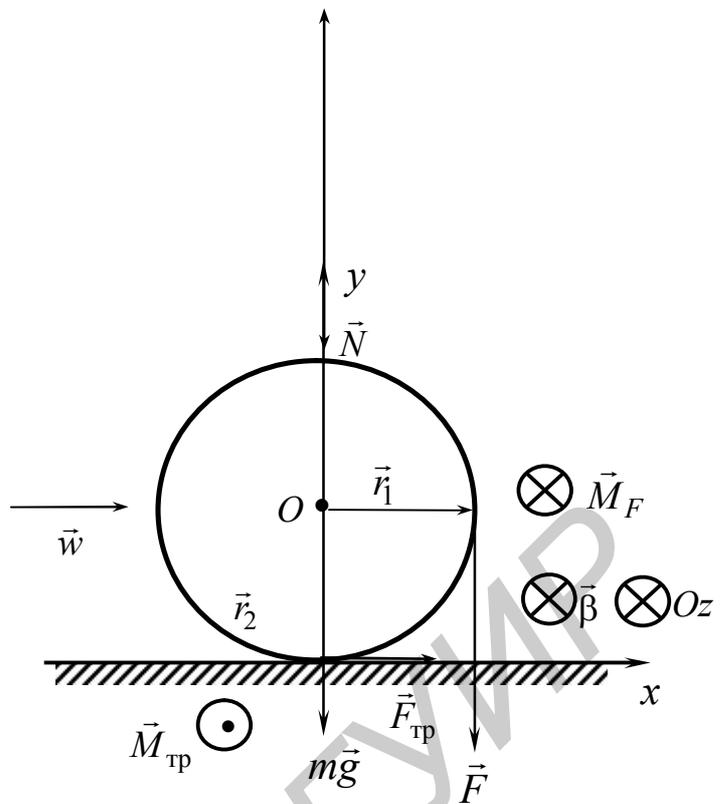


Рис. 1.38

*Решение.*

П.1. Выполним рис. 1.38.

П.2. Так как моменты сил тяжести и реакции опоры равны нулю

(см. предыдущие задачи), то  $\vec{M}_F + \vec{M}_{\text{тр.}} = I\vec{\beta}$ .

П.3. Найдем модули сил  $M_F = F \cdot r_1 \sin 90^\circ = F \cdot r_1$ ,

$$M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot r_2 \sin 90^\circ = F_{\text{тр.}} \cdot r_2.$$

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось  $Oz$ :

$$M_F - M_{\text{тр.}} = I\beta.$$

Учтем, что момент инерции диска относительно оси вращения  $I = \frac{mR^2}{2}$ .

$$F \cdot r_1 - F_{\text{тр.}} \cdot r_2 = \frac{mR^2}{2}\beta, \quad r_1 = r_2 = R,$$

$$F \cdot R - F_{\text{тр.}} \cdot R = \frac{mR^2}{2}\beta,$$

$$F - F_{\text{тр.}} = \frac{mR}{2}\beta.$$

П.5. В полученном уравнении более одной неизвестной величины. Переходим к п.6.

П.6. Запишем динамическое уравнение поступательного движения:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр.}}$$

П.7. Спроецируем на оси:

$$Ox: m\vec{w} = F_{\text{тр.}},$$

$$Oy: 0 = N - mg - F, \quad F_{\text{тр.}} = \mu N.$$

П.8. Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} F - F_{\text{тр.}} = \frac{mR}{2}\beta, \\ mw = \mu N, \\ 0 = N - mg - F. \end{cases}$$

Учтем, что  $w = \beta R$ , а  $F_{\text{тр.}} = \mu N$ .

$$\begin{cases} F - \mu N = \frac{mR}{2}\beta, \\ m\beta R = \mu N, \\ N = mg + F, \end{cases} \begin{cases} m\beta R = 2F - 2\mu N, \\ m\beta R = \mu N, \\ N = mg + F, \end{cases}, 2F - 2\mu N = \mu N, \begin{cases} 2F = 3\mu N, \\ N = mg + F. \end{cases}$$

$$2F = 3\mu mg + 3\mu F, (2 - 3\mu)F = 3\mu mg, F = \frac{3\mu mg}{2 - 3\mu}.$$

**Пример 8.** Однородный диск массой  $m$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . В момент времени  $t_0 = 0$  к ободу диска начинают прижимать тормозную колодку с силой, зависящей от времени по закону  $F = At$ , где  $A = \text{const} > 0$ . Коэффициент трения между диском и колодкой равен  $\mu$ . Сколько оборотов сделает диск до остановки?

*Решение*

П.1. Выполним рис. 1.39. Укажем направления всех векторов (см. предыдущие примеры).

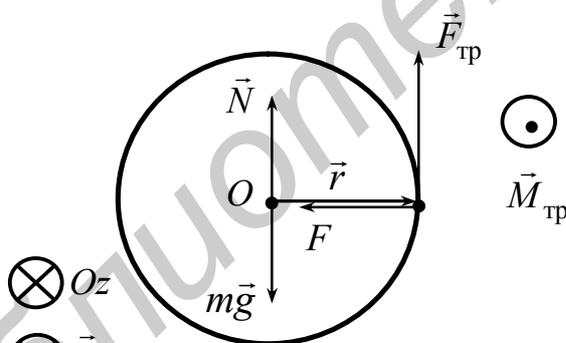


Рис. 1.39

П.2. Запишем уравнение динамики вращательного движения, учитывая, что  $M_F = M_N = M_{mg} = 0$ ,

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{\text{тр.}}$$

П.3. Момент инерции диска относительно оси вращения  $I = \frac{mR^2}{2}$ .

П.4. Спроецируем уравнение п.2 на ось вращения:  $M_{\text{тр.}} = -I\beta$ .

Найдем модуль момента силы трения:  $M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2} = F_{\text{тр.}} \cdot R$ .

Так как  $F_{\text{тр.}} = \mu F = \mu At$ , то  $M_{\text{тр.}} = \mu AtR$ . Следовательно,  $\mu AtR = -\frac{mR^2}{2}\beta$ .

П.5. Искомая величина не содержится в полученном уравнении. Перейдем к п.8.

П.8. Воспользуемся кинематическим уравнением  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ :

$$\mu ARt = -\frac{mR^2}{2} \frac{d\omega}{dt}.$$

Разделим переменные:  $\mu At dt = -\frac{mR}{2} d\omega$ .

Проинтегрируем  $\int_0^t \mu At dt = -\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{mR}{2} d\omega$ , получим

$$\mu A \frac{t^2}{2} = -\frac{mR}{2} (\omega - \omega_0); \quad \omega = -\frac{\mu At^2}{mR} + \omega_0.$$

Время остановки определим из условия  $\omega = 0$ , следовательно,  $t_{\text{ост.}} = \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}}$ .

Еще раз воспользуемся уравнением кинематики:

$$d\varphi = \omega dt; \quad d\omega = \left( \omega_0 - \frac{\mu At^2}{mR} \right) dt; \quad \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \left( \omega_0 - \frac{\mu At^2}{mR} \right) dt.$$

В результате интегрирования  $\varphi = \omega_0 t - \frac{\mu At^3}{3mR}$ .

Подставим  $t_{\text{ост.}}$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}} - \sqrt{\frac{\mu^2 A^2 m^3 R^3 \omega_0^3}{9m^2 R^2 \mu^3 A^3}} = \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}} - \frac{\omega_0}{3} \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}} = \frac{2\omega_0}{3} \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}}. \end{aligned}$$

Найдем число оборотов:  $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0}{3\pi} \sqrt{\frac{mR\omega_0}{\mu A}}$ .

**Пример 9.** К концу веревки, намотанной на цилиндр, который находится на горизонтальной шероховатой поверхности, привязан груз массой  $M$ . Веревка переброшена через блок. Масса цилиндра  $m$ , его радиус  $R$ . Массой веревки, блока, а также силой трения в блоке можно пренебречь. Определить ускорение груза  $M$ .

Решение

П.1. Выполним рис.1.40.

Выполним действия пп. 2 – 4 алгоритма.

Так как  $M_{mg} = mg \cdot 0 = 0$        $M_N = N \cdot r_2 \sin 180^\circ = 0$

$$\vec{M}_{\text{тр.}} + \vec{M}_T = I\vec{\beta}.$$

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

$$M_T = T \cdot r_1 \sin 90^\circ = TR, \text{ (т. к. } r_1 = R), M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot r_2 \sin 90^\circ = F_{\text{тр.}} R,$$

$$\text{(т. к. } r_2 = R), \beta = \frac{w}{R}.$$

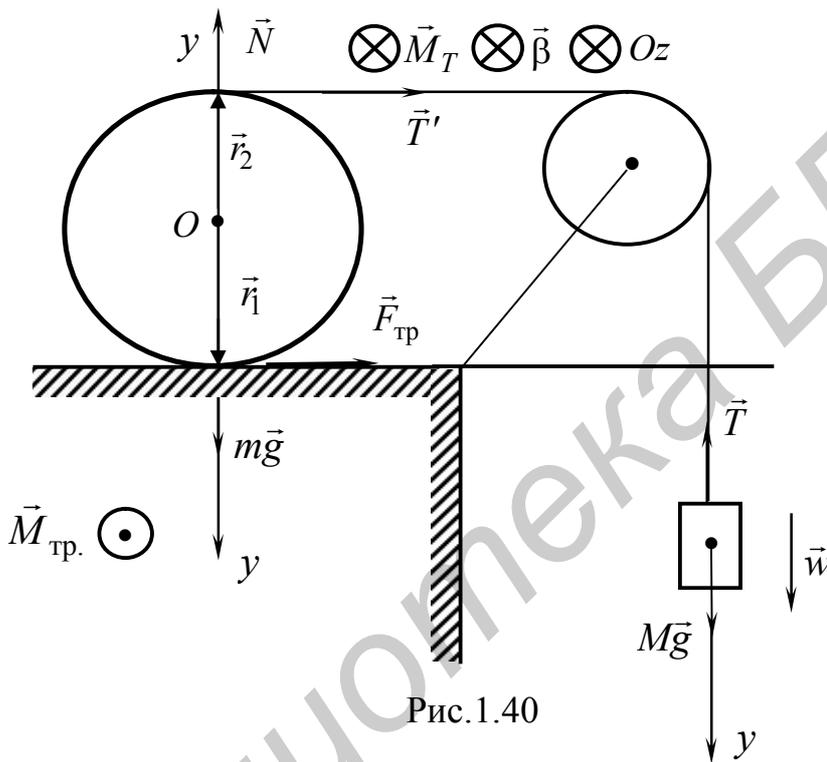


Рис.1.40

В проекциях на ось вращения  $Oz: TR - F_{\text{тр.}} R = I \frac{w}{R}, \quad TR - F_{\text{тр.}} R = \frac{mR^2}{2} \frac{w}{R},$

$$T - F_{\text{тр.}} = \frac{mw}{2}.$$

П.5. В полученном уравнении более одной неизвестной величины. Переходим к п.6.

П.6. Запишем уравнения динамики поступательного движения цилиндра и тела:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}' + \vec{F}_{\text{тр.}} + \vec{N},$$

$$M\vec{w} = M\vec{g} + \vec{T}.$$

П.7. В проекциях на направление поступательного движения

$$Ox: mw = T + F_{\text{тр.}},$$

$$Oy: Mw = Mg - T.$$

П.8. Составим систему:

$$\begin{cases} mw = T + F_{\text{тр.}}, \\ Mw = Mg - T \rightarrow T = Mg - Mw, \\ T - F_{\text{тр.}} = \frac{mw}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} mw = Mg - Mw + F_{\text{тр.}}, \\ Mg - Mw - F_{\text{тр.}} = \frac{mw}{2}. \end{cases}$$

П.9. Решим систему:

$$mw + \frac{mw}{2} = Mg - Mw + F_{\text{тр.}} + Mg - Mw - F_{\text{тр.}},$$

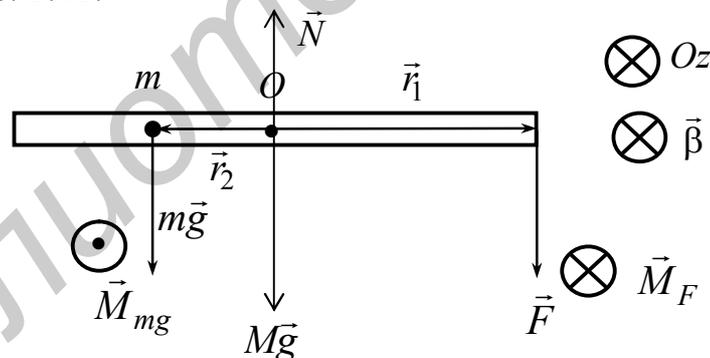
$$\frac{3}{2}mw + 2Mw = 2Mg,$$

$$(3m + 4M)w = 4Mg, \quad w = \frac{4Mg}{3m + 4M}.$$

**Пример 10.** Однородный тонкий стержень массой  $M$  и длиной  $l$  закреплен в горизонтальной плоскости посередине его длины. На расстоянии  $l/4$  от его середины к стержню прикреплена точечная масса  $m$ . Какую угловую скорость приобретает стержень, если к его свободному концу перпендикулярно стержню приложить силу  $F = At - Bt^2$ , где  $A$  и  $B$  – положительные константы.

*Решение*

П.1. Выполним рис. 1.41.



Выполним действия пп.2–4

$$\left. \begin{aligned} M_{mg} &= 0 \\ M_N &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ так как } r = 0.$$

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_F + \vec{M}_{mg}.$$

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции стержня и точечной

$$\text{массы } I = I_{\text{ст.}} + I_{\text{точки}} = \frac{Ml^2}{12} + \frac{ml^2}{16} = \frac{l^2}{4} \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right),$$

$$M_F = F \cdot \frac{l}{2} \sin 90^\circ = (At - Bt^2) \frac{l}{2}; M_{mg} = mg \frac{l}{4} \sin 90^\circ = \frac{mgl}{4}.$$

В проекции на ось  $Oz$ :  $I\beta = M_F - M_{mg}$ ,  $\frac{l^2}{4} \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right) \beta = \frac{(At - Bt^2)l}{2} - \frac{mgl}{4}$ .

П.5. В уравнении п.4 одна неизвестная величина  $\beta$ .

П.8. 
$$\beta = \frac{2(At - Bt^2) - mg}{l \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right)}.$$

П.9. Запишем уравнение кинематики вращательного движения:

$$d\omega = \beta dt, d\omega = \frac{2(At - Bt^2) - mg}{l \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right)} dt.$$

Проинтегрируем 
$$\int_0^\omega d\omega = \frac{1}{l \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right)} \int_0^t (2(At - Bt^2) - mg) dt.$$

Найдем искомую величину 
$$\omega = \frac{2}{l \left( \frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right)} \left( \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3} - mgt \right).$$

### 1.7. Механическая работа. Алгоритм решения задач

В том случае, когда в задаче рассматривается поступательное движение тела, следует пользоваться алгоритмом А. При рассмотрении вращательного движения нужно использовать алгоритм В.

#### Алгоритм А

П.1А. Записать выражение для элементарной работы, которая совершается на бесконечно малом перемещении.

$$\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Определить из условия задачи, работу какой силы или каких сил требуется оп-

ределить. Расписать значение вектора силы  $\vec{F}$  или  $\vec{F}_{\text{рез.}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , если учитыва-  
ется действие нескольких сил.

П.3А. Записать выражение для перемещения тела в виде  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ , а в случае действия на тело силы, постоянной по величине и по направлению, в виде  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_k - \vec{r}_0$ .

П.4А. Собрать в формулу п.1А величины, определенные пп.2А и3А.

п.5А. Определить количество переменных в каждом слагаемом полученного выражения. Если в каждом из слагаемых по одной переменной, т. е. выражение

имеет вид  $\partial A = f(x)dx + f(y)dy + f(z)dz$ , то следует перейти к п.7А. Если это условие не выполнено, то перейти к п.6А.

П.6А. Выполнить замену переменных, используя другие уравнения механики. Привести полученное выражение к виду, указанному в п.5А.

П.7А. Проинтегрировать правую и левую часть уравнения, полученного в п.5А или п.6А.

П.8А. Постоянные интегрирования определить из начальных условий.

### Алгоритм В

П.1В. Записать выражение для элементарной работы, совершенной при повороте на бесконечно малый угол  $d\varphi$ .

$$\partial A = \vec{M}_p d\vec{\varphi},$$

$$\text{где } \vec{M}_p = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

П.2В. Расписать моменты сил, действующих на тело, в виде  $\vec{M} = M \cdot \vec{n}$ , где  $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ .  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ,  $\vec{n}$  – нормаль.

П.3В. Расписать вектор  $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{n}$ .

П.4В. Собрать в формулу п.1В величины, определенные пунктами п.2В и п.3В.

П.5В. Определить количество переменных в полученном выражении. Если переменная одна, следует перейти к п.7В. Если это условие не выполнено, то перейти к п.6В

П.6В. Выполнить замену переменных, используя другие уравнения механики.

П.7В. Проинтегрировать правую и левую часть уравнения, полученного в п.5В или п.6В.

П.8В. Постоянные интегрирования определить из начальных условий.

### 1.7.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** На материальную точку массой  $m$  начинает действовать сила  $\vec{F} = ax \cdot \vec{i} - by^2 \cdot \vec{j}$ , где  $a$  и  $b$  – положительные константы,  $x$  и  $y$  – координаты точки. В начальный момент времени координаты точки имели значения  $x_0$  и  $y_0$ . Какую работу совершит сила  $\vec{F}$  при перемещении в конечную точку с координатами  $x_k$  и  $y_k$ ?

*Решение*

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом А.

П.1А. Запишем выражение для элементарной работы  $\partial A$  на бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$ :  $\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

П.2А. Вектор  $\vec{F}$  возьмем из условия задачи:

$$\vec{F} = ax \cdot \vec{i} - by^2 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}.$$

П.3А.  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

П.4А. Подставим  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  в п. 1А и определим  $\partial A$ :

$$\partial A = (ax \cdot \vec{i} - by^2 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k})(dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}) = axdx - by^2 dy.$$

П.5А. В каждом слагаемом содержится по одной переменной, поэтому перейдем к п.7А.

П.7А. Проинтегрируем выражение п.5А.

$$A = \int axdx - \int by^2 dy,$$

$$A = a \frac{x^2}{2} - b \frac{y^3}{3} + C.$$

П.8А. В начальный момент времени координаты точки равны  $x_0$  и  $y_0$ , а работа не была совершена, поэтому

$$0 = a \frac{x_0^2}{2} - b \frac{y_0^3}{3} + C \Rightarrow C = \frac{by_0^3}{3} - \frac{ax_0^2}{2}.$$

Окончательно

$$A = \frac{a}{2}(x^2 - x_0^2) - \frac{b}{3}(y^3 - y_0^3).$$

**Пример 2.** На тело, находящееся в начальный момент времени в начале системы координат ( $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ ), начинают действовать две силы  $\vec{F}_1 = ax^2 \cdot \vec{i} + bz \cdot \vec{k}$  и  $\vec{F}_2 = ky^3 \cdot \vec{j} + cz^2 \cdot \vec{k}$ . Под действием этих сил тело перемещается поступательно в точку, координаты которой равны  $x_k, y_k$  и  $z_k$ . Определить работу результирующей силы на этом перемещении.

*Решение*

Для решения задачи следует воспользоваться алгоритмом А.

П.1А. Запишем выражение для элементарной работы  $\partial A$  на бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$ .

$$\partial A = \vec{F}_{\text{рез.}} \cdot d\vec{r}.$$

П.2А. Определим  $\vec{F}_{\text{рез.}} = \sum_i \vec{F}_i; \vec{F}_{\text{рез.}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = ax^2 \cdot \vec{i} + ky^3 \cdot \vec{j} + (bz + cz^2) \cdot \vec{k}$ .

П.3А.  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

П.4А. Подставим  $\vec{F}_{\text{рез.}}$  и  $d\vec{r}$  в п.1А и определим  $\partial A$ :

$$\begin{aligned} \partial A &= (ax^2 \cdot \vec{i} + ky^3 \cdot \vec{j} + (bz + cz^2) \cdot \vec{k})(dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}) = \\ &= ax^2 dx + ky^3 dy + (bz + cz^2) dz. \end{aligned}$$

П.5А. Поскольку в каждом слагаемом содержится одна переменная величина, перейдем к п.7А.

П.7А. Проинтегрируем выражение п.5А:

$$A = \int ax^2 dx + \int ky^3 dy + \int (bz + cz^2) dz,$$

$$A = \frac{ax^3}{3} + k \frac{y^4}{4} + b \frac{z^2}{2} + c \frac{z^3}{3} + C_1.$$

П.8А. В начальный момент времени координаты точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ , а работа не была совершена, поэтому  $C_1 = 0$ . Окончательно

$$A = \frac{ax^3}{3} + k \frac{y^4}{4} + b \frac{z^2}{2} + c \frac{z^3}{3}.$$

**Пример 3.** Тело массой  $m$  с начальной скоростью из точки, удаленной от центра поля на  $r_0$ , влетает в центрально-симметричное поле, в котором на нее в любой точке действует сила  $\vec{F} = \frac{B \vec{r}}{r^2 r}$ , где  $B$  – положительная константа,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки относительно центра поля. Какую работу совершат силы поля за время, в течение которого тело приблизится к центру поля на расстояние  $r_k = \frac{r_0}{k}$ ?

*Решение*

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом А.

П.1А. Запишем выражение для элементарной работы  $\partial A$  на бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$ :

$$\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

П.2А. Вектор  $\vec{F}$  возьмем из условия задачи:

$$\vec{F} = \frac{B \vec{r}}{r^2 r} = \frac{B}{r^2} \vec{e}_r.$$

П.3А. Запишем вектор  $d\vec{r}$  в полярных координатах:

$d\vec{r} = -dr \vec{e}_r$ , поскольку  $\vec{r}$  и  $d\vec{r}$  направлены в противоположные стороны.

п.4А. Подставим  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  в п.1А и определим  $\partial A$ :

$$\partial A = \frac{B}{r^2} \vec{e}_r \cdot (-dr \vec{e}_r) = -\frac{B}{r^2} dr.$$

П.5А. В правой части уравнения п.4А содержится лишь одна переменная величина, поэтому переходим к п.7А.

П.7А. Проинтегрируем выражение п.5А.

$$A = \int -\frac{B}{r^2} dr,$$

$$A = \frac{B}{r} + C.$$

П.8А. В начальной точке, когда работа еще не была совершена,  $r = r_0$ ,

$0 = \frac{B}{r_0} + C$ ,  $C = -\frac{B}{r_0}$ , следовательно,

$$A = \frac{B}{r} - \frac{B}{r_0}.$$

Поскольку  $r_k = \frac{r_0}{k}$ , то

$$A = B\left(\frac{k}{r_0} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{B}{r_0}(k-1).$$

**Пример 4.** К однородному диску массой  $M$  и радиусом  $R$ , вращающемуся с угловой скоростью  $\omega_0$  относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска, прижимают тормозную колодку, действующую на диск с силой  $\vec{F}$ . Коэффициент трения между диском и колодкой  $\mu$ . Какую работу совершит сила трения за время  $\tau$ ?

*Решение*

Для решения воспользуемся алгоритмом В.

П.1В. Запишем выражение для элементарной работы  $\partial A$  при повороте на малый угол  $d\varphi$ .

$$\partial A = \vec{M}_{\text{рез}} \cdot d\vec{\varphi}.$$

П.2В. Определим моменты всех сил, действующих на диск, относительно оси вращения

$$M = F \cdot r \cdot \sin 180^\circ = 0,$$

$$M_{\text{тяж.}} = mg \cdot 0 = 0,$$

$$M_{\text{тр.}} = F_{\text{тр.}} \cdot r \cdot \sin 90^\circ = F_{\text{тр.}} \cdot r = F_{\text{тр.}} \cdot R,$$

$$F_{\text{тр.}} = \mu F,$$

Выполним рис. 1.42 и укажем на нем направления оси  $Oz$ , вектора  $\vec{n}$  и вектора  $\vec{M}_{\text{тр.}}$ .

П.3В. Запишем значение вектора  $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{n}$ .

П.4В. Подставим величины, определенные в пп.2В и3В в формулу работы:

$$\partial A = -\mu FR d\varphi = -\mu FR \omega dt. \text{ Использовали } d\varphi = \omega dt.$$

П.5В. В правой части уравнения содержится две переменные величины  $t$  и  $\omega$ , поэтому следует перейти к п.6В.

П.6В. Для нахождения  $\omega$  воспользуемся динамическим уравнением для вращательного движения:

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_{z\text{тр.}}$$

В соответствии с рис. 1.42

$$I d\omega = -\mu FR dt,$$

Разделим переменные и найдем  $\omega$ .

$$\int I d\omega = -\int \mu FR dt,$$

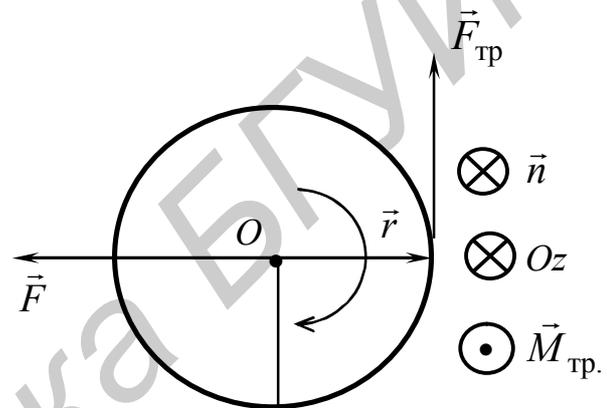


Рис.1.42

$$I\omega = -\mu FRt + C_1.$$

При  $t = 0$   $\omega = \omega_0$ , следовательно,  $C_1 = I\omega_0$ .

Подставим константу:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu FRt}{I}.$$

Перейдем к работе:

$$\partial A = -\mu FR\left(\omega_0 - \frac{\mu FR}{I}t\right)dt.$$

П.7В. Проинтегрируем выражения п.6В.

$$A = -\mu FR \int \left(\omega_0 - \frac{\mu FR}{I}t\right)dt,$$

$$A = -\mu FR \left(\omega_0 t - \frac{\mu FR t^2}{2I}\right) + C_2.$$

П.8В. При  $t = 0$   $A = 0$ , следовательно,  $C_2 = 0$ .

$$A = -\mu FR \left(\omega_0 t - \frac{\mu FR t^2}{2I}\right) = -\mu FR \left(\omega_0 t - \frac{\mu F t^2}{MR}\right).$$

За время  $t = \tau$   $A = -\mu FR \left(\omega_0 \tau - \frac{\mu F \tau^2}{MR}\right).$

**Пример 5.** Тело массой  $m$  начинают поднимать с поверхности земли, прикладывая к нему силу  $\vec{F} = 2(by - 1)m\vec{g}$ , где  $b$  – положительная константа. Найти работу этой силы на пути подъема тела до произвольной высоты  $H$ .

*Решение*

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом А.

П.1А. Запишем выражение для элементарной работы

$$\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

П.2А. Сила, работу которой следует определить,

$$\vec{F} = 2(by - 1)m\vec{g} = -2(by - 1)mg\vec{j}, \text{ т. к. } \vec{g} = -g \cdot \vec{j}.$$

П.3А. Запишем выражение для перемещения  $d\vec{r}$ :

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Поскольку движение происходит только вдоль оси  $Oy$ ,

$$d\vec{r} = dy\vec{j}.$$

П.4А. Определим  $\partial A = (-2(by - 1)mg\vec{j})(dy\vec{j}) = -2(by - 1)mgdy$ .

П.5А. Поскольку в выражении п.4А только одна переменная величина, переходим к п.7А.

П.7А. Проинтегрируем выражение из п.4А.

$$A = \int -(2by - 2)mgdy,$$

$$A = \left(-2\frac{by^2}{2} + 2y\right)mg + C = mg(2y - by^2) + C.$$

Константу  $C$  определим из начальных условий.

П.8А. В начальный момент времени  $y = 0$  и  $A = 0$ , следовательно,  $C = 0$ . Таким образом,

$$A = mg(2y - by^2).$$

В условии задачи  $y = H$ .

Находим искомую величину  $A = mgH(2 - bH)$ .

**Пример 6.** Тело массой  $m$  движется под действием двух сил  $\vec{F}_1 = 3x\vec{i} + 4y\vec{j} - z\vec{k}$  и  $\vec{F}_2 = -2x\vec{i} + 5z\vec{k}$  из точки, заданной радиусом-вектором  $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  в точку с  $\vec{r}_k = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти работу результирующей силы на этом перемещении. Модули сил и радиусы-векторы заданы в СИ.

*Решение*

Выполним пп.1А – 4А.

$$\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

$$\vec{F}_{\text{рез.}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 3x\vec{i} + 4y\vec{j} - z\vec{k} - 2x\vec{i} + 5z\vec{k} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 4z\vec{k}.$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

$$\partial A = \vec{F}_{\text{рез.}} \cdot d\vec{r} = (x\vec{i} + 4y\vec{j} + 4z\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = xdx + 4ydy + 4zdz.$$

П.5А. В каждом слагаемом по одной переменной, поэтому переходим к п.7А.

$$\text{П.7А. } A = \int (xdx + 4ydy + 4zdz) = \int xdx + \int 4ydy + \int 4zdz = \frac{x^2}{2} + 2y^2 + 2z^2 + C.$$

П.8А. В начальный момент времени  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z_0 = -1$  и работа не была совершена:  $A = 0$ .

$$0 = \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2^2 + 2(-1)^2 + C, \quad C = -2 - 8 - 2 = -12.$$

Окончательно

$$A = \frac{x_k^2}{2} + 2 \cdot y_k^2 + 2z_k^2 - 12 = \frac{1}{2} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 - 12 = 28,5 \text{ (Дж)}.$$

**Пример 7.** Однородный стержень массой  $m$  и длиной  $l$  закреплен за один из концов и находится в горизонтальном положении. На противоположный конец стержня действует сила, перпендикулярная стержню, модуль которой  $F = Bt$ , где  $B$  – положительная константа. Определить работу этой силы, как функцию времени.

*Решение*

Воспользуемся алгоритмом В и выполним пп.1В – 4В:

$$\begin{aligned} \partial A &= \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \\ \vec{M} &= Bt \cdot l \sin 90^\circ \vec{n} = Btl \cdot \vec{n} \\ d\vec{\varphi} &= d\varphi \cdot \vec{n} \\ \partial A &= Btl \cdot \vec{n} \cdot d\varphi \cdot \vec{n} = Btld\varphi \end{aligned}$$

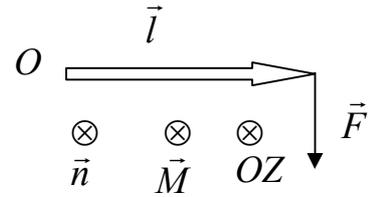


Рис. 1.43

Векторы  $\vec{n}$ ,  $\vec{M}$  и ось  $Oz$  направлены так, как показано на рис. 1.43.

П. 5В. В правой части полученного выражения две переменные величины, поэтому переходим к п.6В.

П. 6В. Заменяем  $d\varphi = \omega dt$ , тогда  $\partial A = Btl\omega dt$ .

Угловую скорость вращения найдем из уравнения динамики вращательного движения:

$$M_z = I \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$Btl = I \frac{d\omega}{dt}$$

Разделим переменные:  $Btldt = Id\omega$ ,

Проинтегрируем  $\int Btldt = \int Id\omega$ ,

$$Bl \frac{t^2}{2} = I\omega + C$$

В момент времени  $t = 0$ ,  $\omega = 0$  следовательно,  $C = 0$ .

Окончательно  $Bl \frac{t^2}{2} = I\omega$ ,

$$I = \frac{ml^2}{3}, \quad Bl \frac{t^2}{2} = \frac{ml^2}{3} \omega, \quad \omega = \frac{3Bt^2}{2ml}$$

$$d\varphi = \frac{3Bt^2}{2ml} dt$$

$$\partial A = Btl \frac{3Bt^2}{2ml} dt = \frac{3B^2 t^3}{2m} dt$$

П. 7В. Проинтегрируем полученное в п. 6В выражение:

$$A = \int \frac{3B^2 t^3}{2m} dt = \frac{3B^2 t^4}{2m \cdot 4} + C_1$$

П. 8В. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  работа не совершалась, поэтому  $C_1 = 0$ . Окончательно  $A = \frac{3B^2 t^4}{8m}$ .

**Пример 8.** На тело массой  $m$ , движущееся из точки с координатой  $x_0$  в направлении оси  $Ox$  с начальной скоростью  $v_0$ , начинает действовать си-

ла  $\vec{F} = -kx^2\vec{i}$ , где  $k$  – положительная константа. Найти работу этой силы как функцию координаты, а также работу к тому моменту, когда координата станет равна  $2x_0$ .

*Решение*

Выполним пп. 1А – 4А.

$$\partial A = \vec{F}d\vec{r}.$$

$$\vec{F} = -kx^2\vec{i}.$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dx\vec{i}, \text{ т. к. движение происходит по оси } Ox.$$

$$\partial A = -kx^2\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kx^2 dx.$$

П.5А. В правой части уравнения одна переменная величина, поэтому перейдем к п.7А.

$$\text{П.7А. } A = \int -kx^2 dx = -\frac{kx^3}{3} + C_1.$$

П.8А. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  координата тела равна  $x_0$ , а работа не совершалась:

$$0 = -\frac{kx_0^3}{3} + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{kx_0^3}{3},$$

$$A = \frac{k}{3}(-x^3 + x_0^3), \text{ при } x = 2x_0 \quad A = \frac{-k}{3}x_0^3(8-1).$$

$$\text{Окончательно } A = \frac{k}{3}(x_0^3 - x^3); \quad A = -\frac{7kx_0^3}{3}.$$

**Пример 9.** Неподвижная частица массой  $m$  в момент времени  $t_0 = 0$  начинает испытывать действие силы  $\vec{F} = F_0 \sin \omega t \vec{i}$ . Найти работу этой силы как функцию времени  $t$ .

*Решение*

Выполним пп. 1А – 4А.

$$\partial A = \vec{F}d\vec{r}.$$

$$\vec{F} = F_0 \sin \omega t \vec{i}.$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dx\vec{i}, \text{ т. к. движение происходит лишь вдоль оси } Ox.$$

$$\partial A = F_0 \sin \omega t \vec{i} dx \vec{i} = F_0 \sin \omega t dx.$$

П.5А. В правой части уравнения содержится две переменные, поэтому перейдем к п.6А.

П.6А. Заменяем  $dx = v dt$ , а зависимость  $v$  от  $t$  получим из основного уравнения динамики поступательного движения:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

В проекции на ось  $Ox$ :  $m \frac{dv}{dt} = F_0 \sin \omega \cdot t$ , разделим переменные:

$$d\nu = \frac{F_0}{m} \sin \omega t dt,$$

$$\int d\nu = \int \frac{F_0}{m} \sin \omega t dt,$$

$$\nu = -\frac{F_0}{m\omega} \cos \omega t + C_1. \text{ В момент времени } t_0 = 0, \nu_0 = 0, \text{ следовательно,}$$

$$C_1 = \frac{F_0}{m\omega} \cos 0^0 = \frac{F_0}{m\omega},$$

$$\nu = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t).$$

$$dx = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) dt.$$

$$\text{Следовательно, } \partial A = F_0 \sin \omega t \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) dt.$$

Перейдем к п. 7А.

п. 7А. В результате интегрирования

$$A = \frac{F_0^2}{m\omega} \int (\sin \omega t - \sin \omega t \cos \omega t) dt.$$

$$A = \frac{F_0^2}{m\omega} \left( \int \sin \omega t dt - \int \sin \omega t \cos \omega t dt \right) \Rightarrow A = \frac{F_0^2}{m\omega} \left( -\frac{\cos \omega t}{\omega} - \int \frac{\sin 2\omega t}{2} dt \right),$$

$$A = \frac{F_0^2}{m\omega^2} \left( -\cos \omega t + \frac{\cos 2\omega t}{4} \right) + C_2.$$

п. 8А. В начальный момент времени работа не совершалась, поэтому

$$0 = \frac{F_0^2}{m\omega^2} \left( -\cos 0 + \frac{\cos 0}{4} \right) + C_2,$$

$$C_2 = \frac{3F_0^2}{4m\omega^2}.$$

$$\text{Окончательно } A = \frac{F_0^2}{m\omega^2} \left( \frac{3}{4} - \cos \omega t + \frac{\cos 2\omega t}{4} \right).$$

**Пример 10.** На материальную точку массой  $m$ , движущуюся в плоскости  $XOY$ , действует сила  $\vec{F} = B \cos bx \vec{i} + C \sin cy \vec{j}$ . Под действием этой силы точка перемещается из положения с  $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$  до  $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j}$ . Определить работу силы.

*Решение*

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом А.

Выполним пп. 1А–4А.

Запишем выражение для элементарной работы:  $\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

Сила, работу которой следует определить,

$$\vec{F} = B \cos bx \vec{i} + C \sin cy \vec{j}.$$

Перемещение точки в плоскость XOY:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}.$$

Определим  $\partial A$ :

$$\partial A = (B \cos bx\vec{i} + C \sin cy\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = B(\cos bx)dx + C(\sin cy)dy.$$

П.5А. Поскольку в каждом из слагаемых только по одной переменной величине, переходим к п.7А.

П.7А. Проинтегрируем выражение п.4А.

$$A = \int (B \cos bx)dx + (C \sin cy)dy,$$

$$A = \frac{B}{b} \sin bx - \frac{C}{c} \cos cy + C_1.$$

П.8А.  $C_1$  определим из начальных условий. Поскольку в момент времени  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , и работа не была совершена, то

$$0 = \frac{B}{b} \sin bx_0 - \frac{C}{c} \cos cy_0 + C_1, \text{ следовательно,}$$

$$C_1 = \frac{C}{c} \cos cy_0 - \frac{B}{b} \sin bx_0.$$

Окончательно

$$A = \frac{B}{b} (\sin bx - \sin bx_0) - \frac{C}{c} (\cos cy - \cos cy_0).$$

### 1.8. Закон сохранения момента импульса. Алгоритм решения задач

П.1. Записать закон изменения момента импульса в виде

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt,$$

где  $\vec{L}$  – момент импульса;  $\vec{M}_i$  – момент силы.

П.2. Определить моменты всех внешних сил, действующих на систему рассматриваемых тел, и убедиться в том, что сумма моментов равна 0  $\left( \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0} \right)$ .

П.3. Подставить в уравнение п.1  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , следовательно,  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

$\vec{L}_0$  – момент импульса системы в начальный момент времени,  $\vec{L}_k$  – момент импульса в конечный момент времени.

П.5. Исходя из условия задачи расписать  $\vec{L}_0$  и  $\vec{L}_k$ :

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{0i}, \quad \vec{L}_k = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{ki}$$

и подставить эти значения в выражение п.4:

$$\vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} + \dots = \vec{L}_{k1} + \vec{L}_{k2} + \dots$$

П.6. Определить направление каждого момента импульса.

П.7. Спроецировать уравнение п.5 на ось  $Oz$ , которую целесообразно совместить с одним из моментов импульса  $\vec{L}_i$ :

$$L_{01z} + L_{02z} + \dots = L_{k1z} + L_{k2z} + \dots$$

П.8. Расписать каждый из моментов импульса, используя одну из формул  $L_i = I_i \omega_i$  или  $L_i = m_i v_i r_i$  и подставить значения  $L_i$  в п.7.

П.9. Расписать значения моментов инерции и подставить в уравнение, полученное в п.8. Из полученного после всех подстановок уравнения определить искомую величину.

### 1.8.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Платформа в виде сплошного диска массой  $M$  и радиусом  $R$  вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_0$ . В центре платформы стоит человек массой  $m$ . Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если перейдет на край платформы?

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: платформа и человек, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0чел.} + \vec{L}_{0пл.}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{kчел.} + \vec{L}_{kпл.}$$

Таким образом,  $\vec{L}_{0чел.} + \vec{L}_{0пл.} = \vec{L}_{kчел.} + \vec{L}_{kпл.}$

П.6. Поскольку направление вращения и человека и платформы совпадают и не изменяются при переходе человека на край платформы, направление всех векторов  $\vec{L}_i$  совпадают.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением векторов  $\vec{L}_i$ .

$$L_{0чел.} + L_{0пл.} = L_{kчел.} + L_{kпл.}$$

П.8. Распишем каждый момент импульса  $L = I\omega$ :

$$I_{кчел.} \omega_k + I_{кпл.} \omega_k = I_{0чел.} \omega_0 + I_{0пл.} \omega_0.$$

П.9. Моменты инерции

$$I_{0чел.} = 0, \quad I_{0пл.} = \frac{MR^2}{2}, \quad I_{кчел.} = mR^2, \quad I_{кпл.} = \frac{MR^2}{2}.$$

$$\left( \frac{MR^2}{2} + mR^2 \right) \omega_k = \frac{MR^2}{2} \omega_0.$$

$$\omega_k = \frac{M\omega_0}{2\left(\frac{M}{2} + m\right)}. \text{ Линейная скорость } v_k = \omega_k R:$$

$$v_k = \frac{M\omega_0 R}{2\left(\frac{M}{2} + m\right)}.$$

**Пример 2.** Платформа с человеком, стоящим в ее центре, вращается с частотой  $n_1$ . На вытянутых руках человек держит две гири массой  $m$  каждая. Первоначальное расстояние между гирями  $\ell_0$  уменьшается до  $\ell_k$ . Какова будет конечная частота вращения платформы  $n_k$ , если ее момент инерции вместе с человеком равен  $I_0$ ?

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят три тела: платформа с человеком и две гири, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{пл.}} + \vec{L}_{01\text{гир.}} + \vec{L}_{02\text{гир.}} = \vec{L}_{0\text{пл.}} + 2\vec{L}_{0\text{гир.}},$$

$$\vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{пл.}} + \vec{L}_{k1\text{гир.}} + \vec{L}_{k2\text{гир.}} = \vec{L}_{k\text{пл.}} + 2\vec{L}_{k\text{гир.}},$$

$$\vec{L}_{0\text{пл.}} + 2\vec{L}_{0\text{гир.}} = \vec{L}_{k\text{пл.}} + 2\vec{L}_{k\text{гир.}}$$

П.6. Поскольку направления вращения всех тел, входящих в систему, совпадают и не изменяются во времени, то все векторы  $\vec{L}_i$  направлены одинаково.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением моментов  $\vec{L}_i$ ,

$$L_{0\text{пл.}} + 2L_{0\text{гир.}} = L_{k\text{пл.}} + 2L_{k\text{гир.}}$$

П.8. Распишем каждый момент импульса  $L = I\omega$ :

$$I_{0\text{пл.}} \omega_0 + 2I_{0\text{гир.}} \omega_0 = I_{k\text{пл.}} \omega_k + 2I_{k\text{гир.}} \omega_k.$$

П.9. Момент инерции гири  $I_{\text{гир.}} = m\ell^2$ . Момент инерции платформы  $I_0$ :

$$\left( I_0 + 2m \left( \frac{\ell_0}{2} \right)^2 \right) \omega_0 = \left( I_0 + 2m \left( \frac{\ell_k}{2} \right)^2 \right) \omega_k.$$

Поскольку  $\omega = 2\pi n$ , получим

$$\begin{aligned} \left( I_0 + 2m \frac{\ell_0^2}{4} \right) 2\pi n_0 &= \left( I_0 + 2m \frac{\ell_k^2}{4} \right) 2\pi n_k, \\ n_k &= \frac{\left( I_0 + m \frac{\ell_0^2}{2} \right) n_0}{I_0 + 2m \frac{\ell_k^2}{2}}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Платформа в виде однородного диска массой  $M$  и радиусом  $R$  может вращаться вокруг оси, проходящей через ее центр перпендикулярно ее плоскости. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если по ее краю пойдет человек массой  $m$  со скоростью  $v$  относительно платформы?

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: платформа и человек, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{пл.}} + \vec{L}_{0\text{чел.}}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{пл.}} + \vec{L}_{k\text{чел.}}.$$

Поскольку вначале человек и платформа неподвижны, то  $\vec{L}_0 = \vec{0}$ .

$$\vec{0} = \vec{L}_{k\text{пл.}} + \vec{L}_{k\text{чел.}}.$$

П.6. Так как направления линейных скоростей человека и точек платформы противоположны, то векторы  $\vec{L}_{k\text{пл.}}$  и  $\vec{L}_{k\text{чел.}}$  направлены в противоположные стороны.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением векторов  $\vec{L}_{k\text{пл.}}$ .

$$L_{k\text{пл.}} - L_{k\text{чел.}} = 0.$$

П.8. Распишем  $L_{k\text{пл.}} = I_{\text{пл.}} \omega_{\text{пл.}}$ ,  $L_{k\text{чел.}} = m v_{\text{чз}} R$ ,

где  $v_{\text{чз}}$  – скорость человека относительно Земли. Воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{чз}} &= \vec{v}_{\text{чпл.}} + \vec{v}_{\text{пл.}} \\ v_{\text{чз}} &= v - v_{\text{пл.}} = v - \omega_{\text{пл.}} R, \end{aligned}$$

$$L_{\text{чел.}} = m(v - \omega_{\text{пл.}} R) R,$$

$$m(v - \omega_{\text{пл.}} R) R = I_{\text{пл.}} \omega_{\text{пл.}}.$$

П.9. Момент инерции диска  $I = \frac{MR^2}{2}$ .

$$m(v - \omega_{\text{пл.}} R) R = \frac{MR^2}{2} \omega_{\text{пл.}},$$

$$mvR - mR^2 \omega_{\text{пл.}} = \frac{MR^2}{2} \omega_{\text{пл.}},$$

$$mv = \left( \frac{MR}{2} + mR \right) \omega_{\text{пл.}},$$

$$\omega_{\text{пл.}} = \frac{2mv}{R(M + 2m)}.$$

**Пример 4.** Горизонтальная платформа, имеющая форму диска массой  $M$ , может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоит человек. На какой угол  $\varphi$  повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: человек и платформа, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{пл.}} + \vec{L}_{0\text{чел.}}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{пл.}} + \vec{L}_{k\text{чел.}}.$$

Поскольку вначале человек и платформа неподвижны, то  $\vec{L}_0 = \vec{0}$ .

$$\vec{0} = \vec{L}_{k\text{пл.}} + \vec{L}_{k\text{чел.}}.$$

П.6. Направления линейных скоростей человека и платформы противоположны, следовательно, и моменты импульса направлены в противоположные стороны.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую по направлению  $\vec{L}_{k\text{пл.}}$ , тогда  $0 = L_{k\text{пл.}} - L_{k\text{чел.}}$ .

П.8. Распишем момент импульса:

$$L_{k\text{пл.}} = I_{\text{пл.}} \omega_{\text{пл.}}, \quad L_{k\text{чел.}} = mv_{\text{чел.}} R,$$

где  $v_{чз}$  – скорость человека относительно Земли.

$$v_{чз} = v_{ч.} - v_{пл.} = v_{ч.} - \omega_{пл.} R.$$

С учетом этого получаем

$$0 = I_{пл.} \omega_{пл.} - mR(v_{ч.} - \omega_{пл.} R).$$

Поскольку  $v_{ч.} = \frac{2\pi R}{t}$ , а  $\omega_{пл.} = \frac{\varphi}{t}$ , получаем

$$0 = \left( \frac{MR}{2} + mR \right) \frac{\varphi}{t} - m \frac{2\pi R}{t} \quad \text{или} \quad 0 = \left( \frac{M}{2} + m \right) \varphi - m2\pi,$$

откуда  $\varphi = \frac{2\pi m}{\frac{M}{2} + m}.$

**Пример 5.** Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции этих дисков относительно этой оси равны  $I_1$  и  $I_2$ , а угловые скорости вращения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. После падения верхнего диска на нижний за счет трения через некоторое время диски стали вращаться как единое целое. Определить установившуюся скорость вращения дисков, если они до взаимодействия: 1) вращаются в одну сторону; 2) вращаются в противоположные стороны и  $\omega_1 > \omega_2$ .

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два диска, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{01} + \vec{L}_{02}.$$

В конце они вращаются как единое целое. Их суммарный момент импульса  $\vec{L}_k$  равен

$$\vec{L}_k = \vec{L}_{01} + \vec{L}_{02}.$$

П. 6. Если направления вращения совпадают, то  $\vec{L}_{01}$ ,  $\vec{L}_{02}$  и  $\vec{L}_k$  направлены одинаково, если в противоположные стороны, то  $\vec{L}_{01}$  и  $\vec{L}_{02}$  противоположны по направлению.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением  $\vec{L}_{01}$ . Тогда в первом случае  $L_k = L_{01} + L_{02}$ , а во втором случае  $L_k = L_{01} - L_{02}$ .

П.8. Распишем каждый момент импульса  $L = I\omega$ :

$$L_{01} = I_1\omega_1, \quad L_{02} = I_2\omega_2, \quad L_k = (I_1 + I_2)\omega_k;$$

$$(I_1 + I_2)\omega_k = I_1\omega_1 \pm I_2\omega_2.$$

П.9. Моменты инерции в задаче определены, поэтому сразу находим  $\omega_k$ :

$$\omega_k = \frac{I_1\omega_1 \pm I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Знак «+» соответствует вращению дисков в одну сторону, а знак «-» – в противоположные.

**Пример 6.** В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень массой  $m$ , длиной  $\ell$  за его середину. Суммарный момент инерции скамьи вместе с человеком равен  $I_0$ . Скамья вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . Какова будет угловая скорость вращения скамьи, если человек возьмет стержень за один из его концов? Стержень перпендикулярен к оси вращения.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: скамья вместе с человеком и стержень, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{ск.}} + \vec{L}_{0\text{ст.}}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{ск.}} + \vec{L}_{k\text{ст.}},$$

$$\vec{L}_{0\text{ск.}} + \vec{L}_{0\text{ст.}} = \vec{L}_{k\text{ск.}} + \vec{L}_{k\text{ст.}}.$$

П.6. Поскольку направление вращения всех тел, входящих в систему, совпадают и не изменяются во времени, то все векторы  $\vec{L}_i$  направлены одинаково.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением моментов  $\vec{L}_i$

$$L_{0\text{ск.}} + L_{0\text{ст.}} = L_{k\text{ск.}} + L_{k\text{ст.}}$$

П.8. Распишем каждый момент импульса по формуле  $L = I\omega$ :

$$I_{0\text{ск.}}\omega_0 + I_{0\text{ст.}}\omega_0 = I_{k\text{ск.}}\omega_k + I_{k\text{ст.}}\omega_k.$$

П.9. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр

$I_{0\text{ст.}} = \frac{m\ell^2}{12}$ , а относительно оси, проходящей через край,  $I_{k\text{ст.}} = \frac{m\ell^2}{3}$ . Поэтому

$$I_0\omega_0 + \frac{m\ell^2}{12}\omega_0 = I_0\omega_k + \frac{m\ell^2}{3}\omega_k,$$

$$\omega_k = \frac{\left( I_0 + \frac{m\ell^2}{12} \right) \omega_0}{I_0 + \frac{m\ell^2}{3}}.$$

**Пример 7.** Человек стоит на краю неподвижной скамьи Жуковского и ловит мяч, массой  $m$ , летящий со скоростью  $v_0$ . Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии  $R$  от оси вращения. Считая, что момент инерции скамьи вместе с человеком равен  $I_0$ , определить, с какой угловой скоростью начнет вращаться скамья.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется:  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: скамья вместе с человеком и мяч, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{ск.}} + \vec{L}_{0\text{м.}}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{ск.}} + \vec{L}_{k\text{м.}}$$

До взаимодействия скамья была неподвижна  $\vec{L}_{0\text{ск.}} = 0$ , следовательно,

$$\vec{L}_{0\text{м.}} = \vec{L}_{k\text{ск.}} + \vec{L}_{k\text{м.}}$$

П.6. Так как направление скоростей всех тел, входящих в систему, непосредственно перед взаимодействием и после одинаковы, то все моменты импульса направлены одинаково.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением моментов  $\vec{L}_i$ .

$$L_{0\text{м.}} = L_{k\text{ск.}} + L_{k\text{м.}}$$

П.8. Распишем каждый момент импульса  $L_{0\text{м.}} = m v_0 R$ ,  $L_k = I_{\text{м.}} \omega_k + I_0 \omega_k$ .

П.9. Момент инерции мяча после взаимодействия  $I_{\text{м.}} = m R^2$ , поэтому

$$m v_0 R = m R^2 \omega_k + I_0 \omega_k,$$

$$\omega_k = \frac{m v_0 R}{I_0 + m R^2}.$$

**Пример 8.** Однородный стержень массой  $M$  и длиной  $\ell$  может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяется пуля массой  $m$ , летящая со скоро-

стью  $v_0$  перпендикулярно стержню и его оси. Найти начальную угловую скорость стержня после соударения.

*Решение*

П.1. Запишем закон изменения момента импульса:

$$d\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i dt.$$

П.2. Сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна 0.

П.3. Поскольку  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$ , получаем  $d\vec{L} = \vec{0}$ .

П.4. Момент импульса системы сохраняется  $\vec{L}_k = \vec{L}_0$ .

П.5. В систему входят два тела: пуля и стержень, поэтому

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{ст.}} + \vec{L}_{0\text{п.}}, \quad \vec{L}_k = \vec{L}_{k\text{ст.}} + \vec{L}_{k\text{п.}}$$

Поскольку  $\vec{L}_{0\text{ст.}} = \vec{0}$ , то  $\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\text{п.}}$ . Следовательно,

$$\vec{L}_{0\text{п.}} = \vec{L}_{k\text{ст.}} + \vec{L}_{k\text{п.}}$$

П.6. Поскольку направления вращения всех тел, входящих в систему, совпадают и не изменяются во времени, то все векторы  $\vec{L}_i$  направлены одинаково.

П.7. Спроецируем уравнение п.5 на ось, совпадающую с направлением моментов  $\vec{L}_i$ .

$$L_{0\text{п.}} = L_{k\text{ст.}} + L_{k\text{п.}}$$

П.8. Распишем  $L_{0\text{п.}} = mv_0\ell$ ,  $L_{k\text{п.}} = I_{\text{п.}}\omega_k$ ,  $L_{k\text{ст.}} = I_{\text{ст.}}\omega_k$ ,

$$mv_0\ell = I_{\text{п.}}\omega_k + I_{\text{ст.}}\omega_k.$$

П.9. Момент инерции стержня и пули после взаимодействия  $I_{\text{ст.}} = \frac{M\ell^2}{3}$ ,

$$I_{\text{п.}} = m\ell^2.$$

$$mv_0\ell = \left( \frac{M\ell^2}{3} + m\ell^2 \right) \omega_k,$$

$$\omega_k = \frac{mv_0\ell}{\frac{M\ell^2}{3} + m\ell^2}, \quad \omega_k = \frac{mv_0}{\ell \left( \frac{M}{3} + m \right)}.$$

### 1.9. Кинематика колебаний. Алгоритм решения задач

П.1. Исходя из условия задачи, записать систему уравнений, определяющих значения координат, как функции времени:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$z = z(t).$$

П. 2. Определить проекции вектора скорости на оси выбранной системы координат путем дифференцирования координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

или взять их из условия задачи.

П. 2'. Найти угловую скорость вращения путем дифференцирования угла поворота тела  $\varphi$  по времени или взять ее из условия задачи.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

П. 3. Определить проекции вектора ускорения на оси выбранной системы координат дифференцированием соответствующих проекций скорости по времени:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

П. 4. Записать вектор скорости колебательного движения через найденные в п. 2 проекции:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, определяющие направления осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  в декартовой системе координат.

П. 5. Модуль вектора скорости колебательного движения определить по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

П. 6. Записать вектор ускорения колебательного движения через найденные в п.3 проекции:

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}.$$

П. 7. Модуль вектора ускорения колебательного движения определить по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

П. 8. Для нахождения траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях из системы уравнений,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

исключить время.

П.9. Определить зависимость одного кинематического параметра от другого, если это требуется по условию задачи:

$$v = f(x), \quad w = f(x), \quad w = f(v)..$$

П.10. Для определения минимальных или максимальных значений  $\vec{v}$  или  $\vec{w}$  воспользоваться условием экстремума:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\max} \text{ при } \vec{v}' = 0,$$

$$\vec{w} = \vec{w}_{\max} \text{ при } \vec{w}' = 0.$$

### 1.9.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Материальная точка движется вдоль оси  $Ox$  по закону  $x = A \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ . Определить скорость и ускорение точки как функцию времени, а также зависимость скорости от координаты. Определить скорость и ускорение в момент времени  $t = \frac{T}{2}$ , где  $T$  – период колебаний.

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функцию времени (из условия задачи):

$$x = A \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad y = 0, \quad z = 0.$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$
$$v_x = 2A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = A\omega \sin 2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0,$$
$$w_x = 2A\omega^2 \cos 2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

П.4. Запишем вектор скорости:

$$\vec{v} = A\omega \sin 2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{i}.$$

Найдем его при  $t = \frac{T}{2}$ :

$$\vec{v} = A\omega \sin 2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{i} = A\omega \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4} \vec{i} = -A\omega \vec{i}.$$

П. 6. Запишем вектор ускорения точки:

$$\vec{w} = 2A\omega^2 \cos 2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{i}.$$

Найдем  $\vec{w}$  в момент времени  $t = \frac{T}{2}$ :

$$\vec{w} = 2A\omega^2 \cos 2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{i} = 2A\omega^2 \cos \frac{3\pi}{2} \vec{i} = \vec{0}.$$

П.9. Выразим скорость колеблющейся точки через координату:

$$\begin{cases} x = A \sin^2 \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right), \\ v = 2A\omega \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{x}{A}}, \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 - \frac{x}{A}}, \\ v = 2A\omega \sqrt{\frac{x}{A}} \sqrt{1 - \frac{x}{A}} = 2\omega \sqrt{xA} \sqrt{1 - \frac{x}{A}}. \end{cases}$$

**Пример 2.** Точка движется в плоскости  $XOY$  по закону  $x = A \sin \omega t$ ,  $y = B \cos \omega t$ , где  $A$ ,  $B$  и  $\omega$  – положительные константы. Определить ускорение точки в зависимости от ее радиуса-вектора.

*Решение*

П.1. Запишем зависимость координат от времени согласно условию задачи:

$$x = A \sin \omega t, \quad y = B \cos \omega t.$$

П.2. Определим проекции вектора скорости на оси выбранной системы координат, дифференцируя по времени соответствующие координаты:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -B\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

П.3. Определим проекции ускорения на оси координат:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = -B\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

П.4. Запишем вектор скорости:

$$\vec{v} = A\omega \cos \omega t \vec{i} - B\omega \sin \omega t \vec{j}.$$

П.6. Запишем вектор ускорение точки:

$$\vec{w} = -A\omega^2 \sin \omega t \vec{i} - B\omega^2 \cos \omega t \vec{j}.$$

П.9. Определим зависимости вектора ускорения  $\vec{w}$  от радиуса-вектора точки  $\vec{r}$ , учитывая, что  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ :

$$\begin{cases} \vec{r} = A \sin \omega t \vec{i} + B \cos \omega t \vec{j}, \\ \vec{w} = -A\omega^2 \sin \omega t \vec{i} - B\omega^2 \cos \omega t \vec{j} = -\omega^2 (A \sin \omega t \vec{i} + B \cos \omega t \vec{j}), \\ \vec{w} = -\omega^2 \vec{r}. \end{cases}$$

**Пример 3.** Найти уравнение траектории колеблющейся точки, которая движется в плоскости  $XOY$  таким образом, что ее координаты зависят от вре-

мени по закону  $x = A \sin \omega t$ ;  $y = A \sin 2\omega t$ . Определить зависимость скорости и ускорения точки от времени.

*Решение*

П.1. Запишем зависимость координат от времени согласно условию задачи:

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin 2\omega t.$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t;$$

$$v_y = 2\omega A \cos 2\omega t.$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = -4\omega^2 A \sin 2\omega t.$$

П.4. Запишем вектор скорости:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = (A\omega \cos \omega t) \cdot \vec{i} + (2A\omega \cos 2\omega t) \cdot \vec{j}.$$

П.6. Запишем вектор ускорения точки:

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} = (-A\omega^2 \sin 2\omega t) \cdot \vec{i} + (-4\omega^2 A \sin 2\omega t) \cdot \vec{j}.$$

П.8. Найдем уравнение траектории, исключив время из системы уравнений для координат:

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t, \\ y = A \sin 2\omega t, \end{cases}$$

$$\sin \omega t = \frac{x}{A}, \quad \sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t,$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \quad \sin 2\omega t = 2 \frac{x}{A} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

$$y = A \cdot 2 \frac{x}{A} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \quad y = 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

**Пример 4.** Найти уравнение траектории колеблющейся точки, которая движется в плоскости  $XOY$  таким образом, что ее координаты зависят от времени по закону  $x = A \sin \omega t$ ;  $y = A \cos 2\omega t$ . Определить зависимость скорости и ускорения точки от времени.

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функцию времени (из условия задачи):

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \cos 2\omega t.$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t ,$$

$$v_y = \frac{dy}{dx} = -2A\omega \sin 2\omega t .$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t , w_y = \frac{dv_y}{dt} = -4\omega^2 A \cos 2\omega t .$$

П.4. Запишем вектор скорости:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = (A\omega \cos \omega t) \cdot \vec{i} - (2A\omega \sin 2\omega t) \cdot \vec{j} .$$

П.6. Запишем вектор ускорения точки:

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} = (-A\omega^2 \sin \omega t) \cdot \vec{i} + (-4A\omega^2 \cos 2\omega t) \cdot \vec{j} .$$

П.8. Найдем уравнение траектории, исключив время из системы уравнений для координат:

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t \\ y = A \cos 2\omega t \end{cases} ;$$

$$\sin \omega t = \frac{x}{A} , \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} ;$$

$$y = A(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = A\left(1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{x^2}{A^2}\right) ,$$

$$y = A\left(1 - \frac{2x^2}{A^2}\right) .$$

**Пример 5.** Точка участвует в двух колебаниях, происходящих в одном направлении по законам  $x_1 = A \cos \omega t$  и  $x_2 = B \sin \omega t$ . Определить модуль максимальной скорости точки.

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функцию времени (из условия задачи):

$$x_1 = A \cos \omega t , x_2 = B \sin \omega t .$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_1 = -A\omega \sin \omega t ,$$

$$v_2 = B\omega \cos \omega t .$$

П.4. Запишем вектор скорости:

$$\vec{v} = (v_{x_1} + v_{x_2}) \vec{i} = (B\omega \cos \omega t - A\omega \sin \omega t) \vec{i} .$$

П.5. Определим модуль скорости:

$$v = |(B\omega \cos \omega t - A\omega \sin \omega t)| .$$

Перейдем к п.10.

П. 10. Найдем производную по времени от скорости и приравняем ее к нулю:

$$v' = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t,$$

$$v' = 0,$$

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t = 0,$$

$$A \cos \omega t = -B \sin \omega t,$$

$$A^2 \cos^2 \omega t = B^2 \sin^2 \omega t,$$

$$A^2 \cos^2 \omega t = B^2 (1 - \cos^2 \omega t),$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{B^2}{A^2 + B^2}.$$

Следовательно,

$$\cos \omega t = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставив эти значения в п.5, получаем

$$v_{\max} = \left| \omega \left( -\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \right|,$$

$$v_{\max} = \frac{|\omega(B^2 - A^2)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Пример 6.** Точка одновременно участвует в двух колебаниях одного направления, которые происходят по закону  $x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  и  $x_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ . Определить ускорение точки в момент времени, равный периоду колебаний от начала движения.

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функцию времени (из условия задачи):

$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad x_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_{x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -A_1 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$v_{x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial t} = A_2 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_{x_1} = \frac{dv_{x_1}}{dt} = -A_1 \omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$w_{x_2} = \frac{dv_{x_2}}{dt} = -A_2 \omega^2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$w_x = w_{x_1} + w_{x_2} = -\omega^2 \left[ A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \right].$$

П. 6. Запишем вектор ускорения точки:

$$\vec{w} = w_x \vec{i} = -\omega^2 \left[ A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \right] \vec{i}.$$

Поскольку  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , а  $t = T$ , получим

$$\begin{aligned} \vec{w} &= -\omega^2 \left[ A_1 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + A_2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \right] \vec{i} = \\ &= -\omega^2 \left[ A_1 \cos \frac{\pi}{3} + A_2 \sin \frac{\pi}{6} \right] \vec{i} = -\omega^2 \left( \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \vec{i}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Точка участвует в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам  $x_1 = A \cos \omega t$  и  $x_2 = A \cos 2\omega t$ . Определить максимальное ускорение точки.

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функции времени (из условия задачи):

$$x_1 = A \cos \omega t,$$

$$x_2 = A \cos 2\omega t.$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = -A \omega \sin \omega t;$$

$$v_{x_2} = \frac{dx_2}{dt} = -2A \omega \sin 2\omega t.$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_1 = \frac{dv_{x1}}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t,$$

$$w_2 = \frac{dv_{x2}}{dt} = -4A\omega^2 \cos 2\omega t.$$

П.6. Запишем вектор ускорения точки:

$$\vec{w} = (w_1 + w_2)\vec{i} = -A\omega^2 (\cos \omega t + 4 \cos 2\omega t)\vec{i}.$$

П.10. Воспользуемся условием нахождения экстремума: ускорение имеет максимальное значение, если  $w' = \frac{dw}{dt} = 0$ .

$$\left| \frac{dw}{dt} \right| = A\omega^2 (\omega \sin \omega t + 8\omega \sin 2\omega t) = 0,$$

$$\sin \omega t + 8 \sin 2\omega t = 0,$$

$$16 \sin \omega t \cos \omega t + \sin \omega t = 0,$$

$$\sin \omega t (16 \cos \omega t + 1) = 0,$$

$$\sin \omega t = 0,$$

$$16 \cos \omega t + 1 = 0,$$

$$\cos \omega t = -\frac{1}{16}.$$

Если  $\sin \omega t = 0$ , то  $\cos \omega t = \pm 1$ , что противоречит условию задачи.

Следовательно,  $\cos \omega t = -\frac{1}{16}$ . Найдем  $\sin \omega t$ , а также  $\cos 2\omega t$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{1}{256}},$$

$$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = \frac{1}{256} - 1 + \frac{1}{256} = -\frac{127}{128}.$$

Таким образом,

$$w_{\max} = A\omega^2 \left| -\frac{1}{16} - 4 \frac{127}{128} \right| = \frac{129}{32} A\omega^2.$$

**Пример 8.** Материальная точка совершает колебания вдоль оси  $Oy$  по закону  $y = A(1 - \cos \omega t)$ . Определить ускорение точки как функцию координаты  $y$  ( $w_y = f(y)$ ).

*Решение*

П.1. Запишем значения координат точки как функции времени (из условия задачи):

$$x = 0, \quad y = A(1 - \cos \omega t), \quad z = 0.$$

П.2. Определим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = 0, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = 0,$$

$$v_x = 0, v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \sin \omega t, v_z = 0.$$

П.3. Определим проекции вектора ускорения на оси координат:

$$w_x = 0, w_y = \frac{dv_y}{dt}, w_z = 0,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = A\omega^2 \cos \omega t, w_z = 0.$$

П. 9. Так как,  $y = A(1 - \cos \omega t)$ , то  $1 - \cos \omega t = \frac{y}{A}$ ;  $\cos \omega t = 1 - \frac{y}{A}$ .

Следовательно,

$$w = (A\omega^2 \cos \omega t) = A\omega^2 \left(1 - \frac{y}{A}\right).$$

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 2.1. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции.

#### Алгоритм решения задач

П. 1. Заряженное тело следует представить как совокупность бесконечно малых объемов, каждый из которых можно рассматривать как точечный заряд, либо как совокупность более простых тел, напряженность поля которых рассчитана предварительно, и перейти соответственно к п. 2 либо к п. 3.

П. 2. Выполнить рисунок, на котором следует изобразить: а) заряженное тело, создающее электрическое поле; б) один из бесконечно малых объемов, из которых состоит тело; в) радиус-вектор, проведенный от этого элементарного объема в точку, в которой нужно найти вектор напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  или силу  $\vec{F}$ ; г) направление вектора  $d\vec{E}$ , созданного зарядом выбранного произвольным образом бесконечно малого объема. Перейти к п. 4.

П. 3. Выполнить рисунок, на котором следует изобразить: а) заряженное тело, создающее электростатическое поле; б) одно из более простых тел (исходное тело), напряженность поля для которого заранее определена; в) геометрические величины (расстояние и углы), входящие в формулу напряженности исходного тела; г) вектор напряженности поля, созданного исходным телом. Перейти к п. 4.

П. 4. Записать выражение для вектора напряженности  $d\vec{E}$ , созданной либо элементарным зарядом, либо исходным телом.

П. 5. Выбрать систему осей координат и определить проекции вектора  $d\vec{E}$  на оси координат  $dE_x, dE_y, dE_z$ .

П. 6. Выразить элементарный заряд  $dq$  и расстояние от заряда до точки, в которой определяется напряженность поля, через данные условия задачи. Подставить эти значения в исходные формулы п. 5.

П. 7. Определить количество переменных в каждом из полученных выражений. Если переменных по одной в каждом выражении, то перейти к п. 9, иначе к п. 8.

П. 8. Выполнить замену переменных, выразив все переменные через одну из них и константы, заданные в условии задачи. Наиболее рационально все переменные выразить через угол, если это возможно.

П. 9. Найти проекции вектора  $\vec{E}$  на оси координат, проинтегрировав выражения  $dE_x, dE_y$  и  $dE_z$ , полученные в п. 7.

П. 10. Исходя из рисунка, определить пределы интегрирования.

П. 11. Вектор напряженности поля определить по формуле  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ .

П. 12. Для нахождения силы, действующей на произвольный заряд, использовать выражение  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

П. 13. Модули векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{F}$  определить как  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$   
либо  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ .

### 2.1.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Тонкий бесконечно длинный стержень равномерно заряжен по всей длине с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Найти напряженность поля в точке  $P$  на расстоянии  $a$  от стержня.

*Решение*

П. 1. Заряженный стержень представим как совокупность бесконечно большого числа участков стержня бесконечно малой длины  $dy$ .

П. 2. Выполним рис. 2.1.

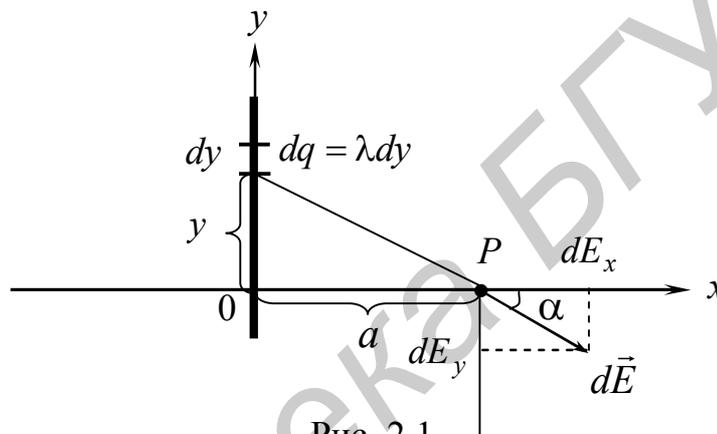


Рис. 2.1

П. 4. Запишем выражение для вектора напряженности электрического поля точечного заряда:

$$d\vec{E} = k \frac{dq \vec{r}}{r^2 r},$$

где  $r$  – расстояние от заряда  $dq$  до точки  $P$ .

П. 5. Найдем проекции вектора  $d\vec{E}$  на координатные оси:

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad dE_x = k \frac{dq}{r^2} \cos \alpha,$$

$$dE_y = -dE \sin \alpha, \quad dE_y = k \frac{dq}{r^2} \sin \alpha,$$

$$dE_z = 0.$$

П. 6. Выразим значения  $dq$  и  $r$  через расстояние  $a$  и угол  $\alpha$ , исходя из рис.2.1.

$$dq = \lambda dy; \quad y = a \operatorname{tg} \alpha, \quad dy = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad r = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad dq = \frac{\lambda a d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

$$dE_x = \frac{k\lambda}{a} \cos \alpha d\alpha, \quad dE_y = -\frac{k\lambda}{a} \sin \alpha d\alpha, \quad dE_z = 0.$$

П. 7. В каждой формуле в п. 6. по две переменные величины, разделенные знаком равенства, поэтому перейдем к п. 9.

П. 9. Проинтегрируем выражения п. 6.

$$E_x = \int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \frac{k\lambda}{a} \cos \alpha d\alpha = k \frac{\lambda}{a} \sin \alpha \Big|_{\alpha_0}^{\alpha_k},$$

$$E_y = - \int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \frac{k\lambda}{a} \sin \alpha d\alpha = - \frac{k\lambda}{a} \cos \alpha \Big|_{\alpha_0}^{\alpha_k},$$

$$E_z = 0.$$

П. 10. Так как стержень бесконечно длинный, то  $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ , следовательно,

$$E_x = 2k \frac{\lambda}{a}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$

П. 11. Вектор напряженности  $\vec{E} = E_x \vec{i} = 2k \frac{\lambda}{a} \vec{i}$ .

П. 13. Модуль вектора напряженности  $E = 2k \frac{\lambda}{a}$ .

**Пример 2.** Тонкая нить длиной  $L$  заряжена с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Определить напряженность поля на продолжении нити в точке 0, расположенной на расстоянии  $a$  от ближайшего конца нити.

*Решение*

П. 1. Заряженную нить представим как совокупность бесконечно малых отрезков длиной  $dx$ .

П. 3. Выполним рис. 2.2.

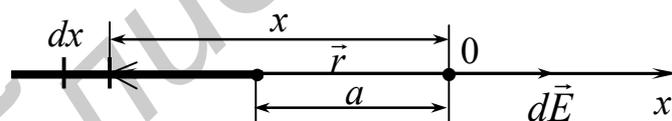


Рис. 2.2

Перейдем к п. 4.

П. 4. Запишем выражение для  $d\vec{E}$ , созданной зарядом  $dq$ , сосредоточенном на участке  $dx$ :

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \vec{i}.$$

П. 5. Определим проекции вектора  $d\vec{E}$  на оси координат:

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2}, \quad dE_y = 0, \quad dE_z = 0.$$

П. 6.  $dq = \lambda dx$ ,  $r = x$ ,  $dE_x = \frac{k\lambda dx}{x^2}$ ,  $dE_y = 0$ ,  $dE_z = 0$ .

П. 7. В полученном выражении по одной переменной с каждой стороны от знака равенства, поэтому переходим к п. 9.

П. 9.  $E_x = \int dE_x$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ ,  $E_x = \int_{x_0}^{x_k} \frac{k\lambda dx}{x^2} = -\frac{k\lambda}{x} \Big|_{x_0}^{x_k}$ .

П. 10. Пределы интегрирования  $x_0 = a$ ,  $x_k = a + L$  определим из рис. 2.2

$$E_x = -\frac{k\lambda}{x} \Big|_a^{a+L} = \frac{k\lambda}{x} \Big|_{a+L}^a = k\lambda \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) = \frac{k\lambda L}{a(a+L)}.$$

П. 11. Вектор напряженности  $\vec{E} = E_x \vec{i} = \frac{k\lambda L}{a(a+L)} \vec{i}$ .

**Пример 3.** Тонкий стержень длиной  $L$  имеет заряд  $q_0$ , равномерно распределенный по всей его длине. Найти напряженность поля  $\vec{E}$  в точке  $P$  на расстоянии  $a$  от середины стержня на перпендикуляре к стержню.

*Решение*

П. 1. Представим стержень как совокупность бесконечно малых участков  $dy$ .

П. 3. Выполним рис. 2.3.

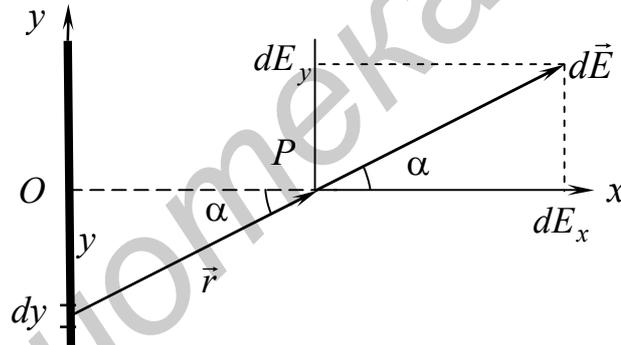


Рис. 2.3

П. 4. Запишем выражение для напряженности поля  $d\vec{E}$ , созданной зарядом  $dq$ , сосредоточенном на участке  $dy$ :

$$d\vec{E} = \frac{k dq \vec{r}}{r^2 r}.$$

П. 5. Определим проекции вектора  $d\vec{E}$  на оси координат:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{k dq}{r^2} \cos \alpha, \quad dE_y = dE \sin \alpha = \frac{k dq}{r^2} \sin \alpha, \quad dE_z = 0.$$

П. 6.  $dq = \lambda dy$ ,  $y = a \operatorname{tg} \alpha$ ,  $dy = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ ,  $dq = \lambda \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ ,  $r = \frac{a}{\cos \alpha}$ ,

$$dE_x = \frac{k\lambda \cos \alpha d\alpha}{a}, \quad dE_y = \frac{k\lambda \sin \alpha d\alpha}{a}, \quad dE_z = 0.$$

П. 7. В полученном выражении по одной переменной с каждой стороны от знака равенства, поэтому переходим к п. 9.

$$\text{П. 9. } E_x = \int dE_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{k\lambda \cos \alpha d\alpha}{a} = \frac{k\lambda}{a} (\sin \alpha_0 - \sin(-\alpha_0)) = \frac{2k\lambda}{a} \sin \alpha_0,$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{k\lambda \sin \alpha d\alpha}{a} = \frac{k\lambda}{a} (\cos \alpha_0 - \cos(-\alpha_0)) = 0; \quad E_z = 0.$$

П. 10. Из рис. 2.3 найдем

$$\sin \alpha_0 = \frac{L}{2\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{L}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad E_x = \frac{2}{a} k\lambda \sin \alpha_0 = 2k\lambda \frac{L}{a\sqrt{4a^2 + L^2}}.$$

$$\text{П. 11. } \vec{E} = 2k\lambda \frac{L}{a\sqrt{4a^2 + L^2}} \vec{i} = \frac{2kq_0}{a\sqrt{4a^2 + L^2}} \vec{i}, \quad \text{т. к. } \lambda L = q_0.$$

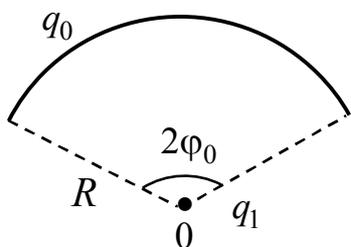


Рис.2.4

**Пример 4.** Тонкая нить изогнута так, как изображено на рис. 2.4. Нить заряжена равномерно распределенным зарядом  $q_0$ . Радиус дуги  $R$ . Определить силу, с которой заряженная нить действует на точечный заряд  $q_1$ , помещенный в центр кривизны нити.

*Решение*

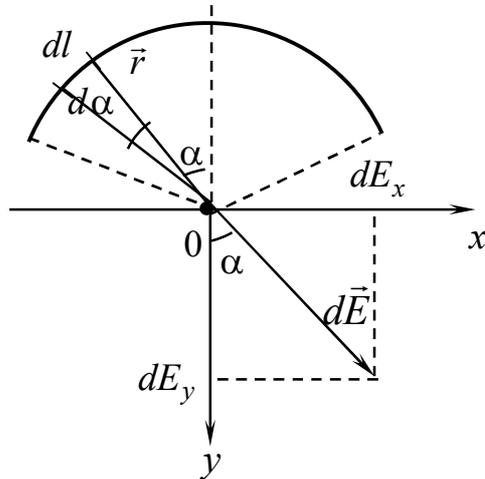
П. 1. Заряженную нить представим, как совокупность бесконечно малых участков длиной  $dl$ . Перейдем к п. 2.

П. 2. Выполним рис. 2.5.

Перейдем к п. 4.

П. 4. Запишем выражение для вектора напряженности  $d\vec{E}$ , созданной зарядом  $dq$ .

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$



2.5

П.5. Найдем проекции вектора  $d\vec{E}$  на оси координат.

$$dE_x = dE \sin \alpha, \quad dE_y = -dE \cos \alpha, \quad dE_z = 0.$$

$$dE_x = k \frac{dq}{r^2} \sin \alpha, \quad dE_y = -k \frac{dq}{r^2} \cos \alpha, \quad dE_z = 0.$$

П. 6. Выразим значения  $dq$  и  $r$  через радиус дуги и угол  $\alpha$ :

$$dq = \lambda dl = \frac{q_0}{L} dl = \frac{q_0}{2\varphi_0 R} R d\alpha, \quad r = R, \quad L = 2\varphi_0 R.$$

$$dE_x = \frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \sin \alpha d\alpha, \quad dE_y = -\frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \cos \alpha d\alpha, \quad dE_z = 0.$$

П. 7. В каждой формуле в п. 6 по две переменные величины, поэтому перейдем к п. 9.

П. 9. Проинтегрируем выражение п. 6.

$$E_x = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \sin \alpha d\alpha, \quad E_y = -\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \cos \alpha d\alpha, \quad E_z = 0.$$

$$E_x = \frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \cos \alpha \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = 0, \quad E_y = -\frac{kq_0}{2\varphi_0 R^2} \sin \alpha \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = -\frac{kq_0}{\varphi_0 R^2} \sin \varphi_0.$$

П. 10. Следовательно,  $E_x = 0$ ,  $E_y = -\frac{kq_0}{\varphi_0 R^2} \sin \varphi_0$ ,  $E_z = 0$ .

П. 11. Вектор напряженности  $\vec{E} = E_y \vec{j} = \left(-\frac{kq_0}{\varphi_0 R^2} \sin \varphi_0\right) \vec{j}$ .

П. 12. Найдем силу, действующую на заряд  $q_1$ ,

$$\vec{F} = q_1 \vec{E} = -\frac{kq_1 q_0}{\varphi_0 R^2} \sin \varphi_0 \vec{j}.$$

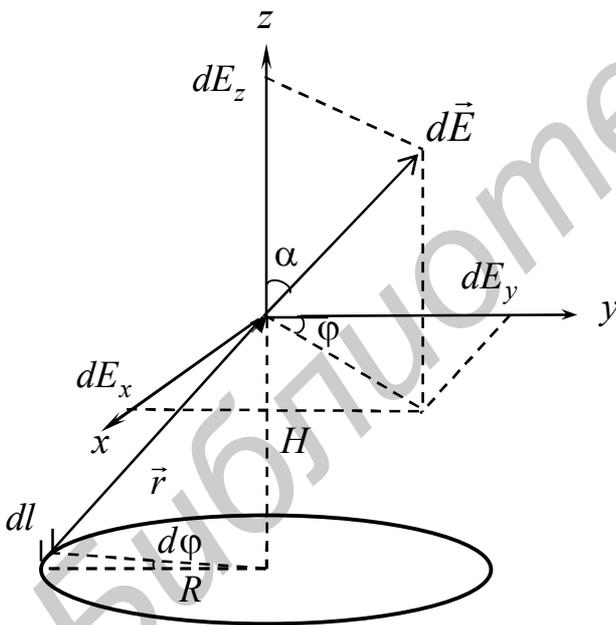


Рис. 2.6

**Пример 5.** Тонкое проволочное кольцо радиусом  $R$  имеет линейную плотность заряда  $\lambda$ . Определить напряженность поля на оси кольца на расстоянии  $H$  от его центра.

*Решение*

П. 1. Заряженное кольцо представим, как совокупность бесконечно малых участков длиной  $dl$ .

П. 2. Выполним рис. 2.6.

П. 4. Запишем выражение для  $dE$

$$d\vec{E} = \frac{k dq \vec{r}}{r^2 r}$$

П. 5. Определим проекции  $d\vec{E}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi, \quad dE_y = \frac{k dq}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi, \quad dE_z = \frac{k dq}{r^2} \cos \alpha.$$

П. 6. Выразим  $dq$  через угол  $\varphi$ :

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi,$$

$$dE_x = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi d\varphi,$$

$$dE_y = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi d\varphi,$$

$$dE_z = \frac{k\lambda R}{r^2} \cos \alpha d\varphi.$$

П. 7. В каждой формуле п. 6 по две переменные, разделенные знаком равенства, поэтому переходим к п. 9.

П. 9.

$$E_x = \int_0^{\alpha_k} \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi d\varphi = -\frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi \Big|_0^{\alpha_k} = -\frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha (\cos \alpha_k - \cos 0),$$

$$E_y = \int_0^{\alpha_k} \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi d\varphi = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi \Big|_0^{\alpha_k} = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin \alpha (\sin \alpha_k - \sin 0),$$

$$E_z = \int_0^{\alpha_k} \frac{k\lambda R}{r^2} \cos \alpha d\varphi = \left(\frac{k\lambda R}{r^2} \cos \alpha\right) \varphi \Big|_0^{\alpha_k}.$$

П. 10. Угол  $\alpha$  изменяется от 0 до  $2\pi$ :

$$E_x = 0, E_y = 0, E_z = 2\pi \frac{k\lambda R}{r^2} \cos \alpha,$$

т. к.  $\cos \alpha = \frac{H}{r}$ , а  $r = \sqrt{R^2 + H^2}$ ,

$$E_z = \frac{2\pi R \lambda k H}{(\sqrt{R^2 + H^2})^3}.$$

П. 11. Вектор  $\vec{E}$  равен

$$\vec{E} = \frac{2\pi R \lambda k H}{(\sqrt{R^2 + H^2})^3} \vec{k} = \frac{k q_k H}{(\sqrt{R^2 + H^2})^3} \vec{k}.$$

**Пример 6.** Тонкий диск радиусом  $R$  толщиной  $h$  равномерно заряжен зарядом  $q$ . Найти вектор напряженности  $\vec{E}$  на оси диска на расстоянии  $H$  от его центра.

*Решение*

П. 1. Заряженный диск представим как совокупность тонких колец шириной  $dr$ . Перейдем к п. 3.

П. 3. Выполним рис. 2.7 в соответствии с п. 1. Выберем произвольное кольцо радиусом  $r$ , шириной  $dr$  (толщина кольца  $h$ ).

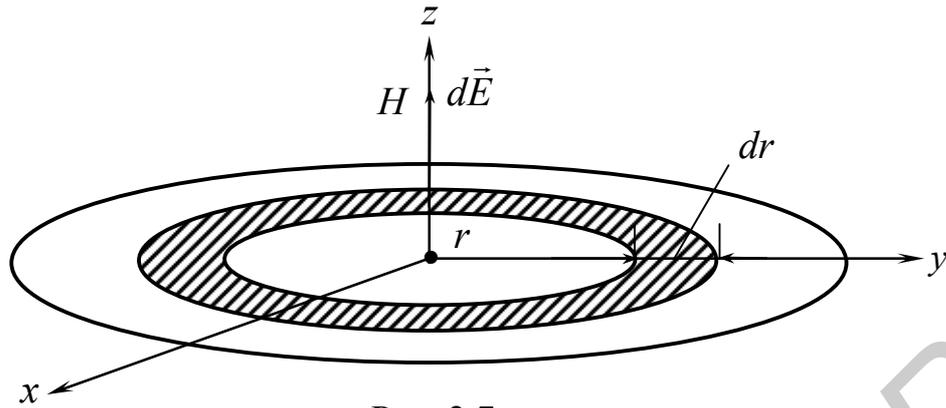


Рис. 2.7

П. 4. Запишем выражение для  $d\vec{E}$ , используя результат примера 5,

$$d\vec{E} = \frac{k dq H}{(\sqrt{r^2 + H^2})^3} \vec{k}.$$

П. 5.  $dE_z = \frac{k dq H}{(\sqrt{r^2 + H^2})^3}$ ,  $dE_x = 0$ ,  $dE_y = 0$ .

П. 6. Определим  $dq = \rho h dS = \rho h 2\pi r dr$ ,  $dE_z = \frac{k \rho H 2\pi r dr h}{(r^2 + H^2)^{3/2}}$ .

П. 7. В правой и левой части равенства имеется по одной переменной величине, поэтому переходим к п. 9.

П. 9.  $E_x = \int dE_x = 0$ ,  $E_y = \int dE_y = 0$ ,

$$E_z = \int_{r_0}^{r_k} \frac{k \rho H 2\pi r h dr}{(r^2 + H^2)^{3/2}} = k \rho H \pi h \int_{r_0}^{r_k} \frac{2r dr}{(r^2 + H^2)^{3/2}}.$$

П. 10. Пределы интегрирования определим из рис. 2.7:  $r_0 = 0$ ,  $r_k = R$ .

$$E_z = k \rho H \pi h \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + H^2)^{3/2}} = -\frac{2k \rho \pi H h}{\sqrt{r^2 + H^2}} \Big|_0^R = 2k \rho \pi h \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right) H =$$

$$= 2k \rho \pi h \left( 1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right).$$

П. 11. Найдем вектор  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ .

Учтем, что  $\rho = \frac{q}{\pi R^2 h}$ .

$$\vec{E} = 2k\rho\pi h \left( 1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right) \vec{k} = \frac{2kq\pi h}{\pi R^2 h} \left( 1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right) \vec{k} =$$

$$= \frac{2kq}{R^2} \left( 1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right) \vec{k}.$$

**Пример 7.** Найти силу взаимодействия тонкой прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$ , заряженной по поверхности зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma = 8x^2$ , и точечного заряда  $q_0$ , расположенного так, как показано на рис. 2.8.

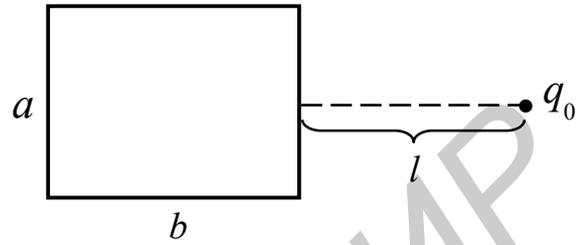


Рис. 2.8

*Решение.*

П. 1. Заряженную пластину представим как совокупность очень тонких стержней и воспользуемся результатом примера 3.

П. 3. Выполним рис. 2.9.

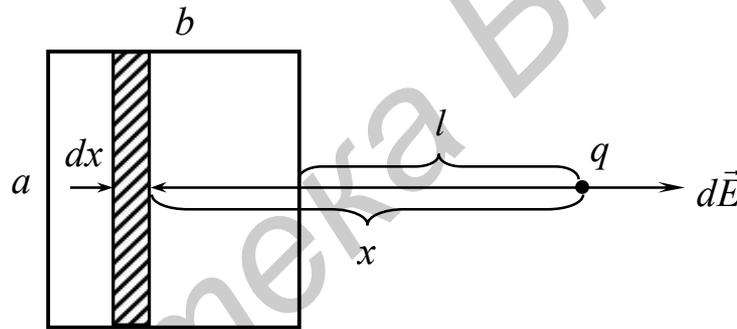


Рис. 2.9

П. 4. Запишем выражение для вектора напряженности поля, созданного бесконечно тонким стержнем:

$$d\vec{E} = \frac{2kdq}{x\sqrt{4x^2 + a^2}} \vec{i}.$$

П. 5. Определим проекции вектора напряженности на координатные оси:

$$dE_x = \frac{2kdq}{x\sqrt{4x^2 + a^2}}, dE_y = 0, dE_z = 0.$$

П. 6. Выразим заряд  $dq = \sigma dx$  и подставим его в формулы п.

5:  $dE_x = \frac{2k\sigma dx}{x\sqrt{4x^2 + a^2}}.$

П. 7. Переменные разделены, переходим к п. 9.

П. 9.  $E_x = \int_{x_0}^{x_k} \frac{2k\sigma dx}{x\sqrt{4x^2 + a^2}} = ka \int_{x_0}^{x_k} \frac{16x^2 dx}{x\sqrt{4x^2 + a^2}}.$

П. 10. Границы интегрирования определим из рис.2.9:  $x_0 = l$ ,  $x_k = l + b$ .

$$E_x = \int_l^{l+b} \frac{16x^2 dx}{x\sqrt{4x^2 + a^2}} = 2ka\sqrt{4x^2 + a^2} \Big|_l^{l+b} = 2ka(\sqrt{4(l+b)^2 + a^2} - \sqrt{4l^2 + a^2}).$$

П. 11. Находим вектор напряженности поля:

$$\vec{E} = 2ka(\sqrt{4(1+b)^2 + a^2} - \sqrt{4l^2 + a^2})\vec{i}.$$

П. 12. Находим силу:

$$\vec{F}_{\text{эп.}} = q\vec{E} = 2qka(\sqrt{4(1+b)^2 + a^2} - \sqrt{4l^2 + a^2})\vec{i}.$$

**Пример 8.** Полушар радиусом  $R$  равномерно заряжен зарядом  $q_0$  по всему объему. Определить напряженность электрического поля в центре полушара, считая диэлектрическую постоянную  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. Представим полушар, как совокупность тонких дисков переменного радиуса  $x$  и толщиной  $dy$ . Воспользуемся результатом примера 6.

П. 3. Выполним рис. 2.10.

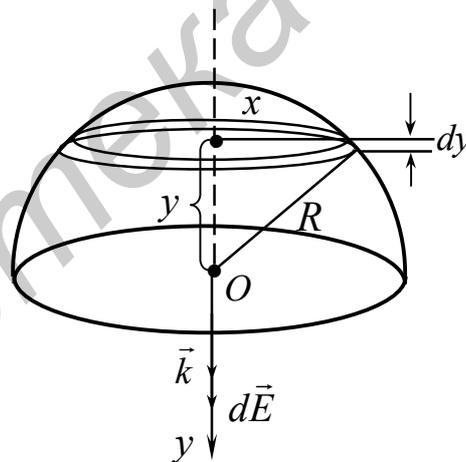


Рис. 2.10

П. 4.  $dE = 2k \frac{dq}{x^2} (1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}).$

П. 5. Ось  $Oy$  направим вниз вдоль вектора  $d\vec{E}$ , следовательно,  $dE_y = dE$ ,  $dE_x = dE_z = 0$ .

П. 6.  $dq = \rho dV = \frac{q_0 \pi x^2 dy}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3q_0 x^2 dy}{2R^3},$

$$dE_y = \frac{2k \cdot 3q_0 x^2 dy}{x^2 \cdot 2R^3} (1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = \frac{3kq_0 dy}{R^3} (1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}).$$

П. 7. В полученном выражении две переменные величины  $x$  и  $y$ .

П. 8. Учитывая, что  $x^2 + y^2 = R^2$ , получаем  $dE_y = \frac{3kq_0 dy}{R^3} (1 - \frac{y}{R})$ .

П. 9.  $E_x = \int dE_x = 0$ ,  $E_y = \int dE_y = \frac{3kq_0}{R^3} \int_0^R (1 - \frac{y}{R}) dy$ ,  $E_z = \int dE_z = 0$ .

П. 10.  $E_y = \frac{3kq_0}{R^3} (y - \frac{y^2}{2R}) \Big|_0^R = \frac{3kq_0}{R^3} \frac{R}{2} = \frac{3kq_0}{2R^2}$ .

Модуль напряженности поля равен  $E = E_y = \frac{3kq_0}{2R^2}$ .

П. 11. Вектор напряженности поля:  $\vec{E} = E_y \vec{j} = \frac{3kq_0}{2R^2} \vec{j}$ .

## 2.2. Теорема Гаусса. Алгоритм решения задач

П. 1. Выполнить рисунок, на котором следует изобразить:

а) заряженное тело;

б) силовые линии электрического поля, созданного этим телом.

П. 2. Провести гауссову поверхность, которая должна удовлетворять следующим условиям:

а) быть конечных размеров;

б) быть замкнутой;

в) проходить через точку, в которой требуется определить напряженность поля  $\vec{E}$ ;

г) силовые линии должны быть либо касательны, либо нормальны к

отдельным частям гауссовой поверхности.

Провести нормали к каждой части гауссовой поверхности и обозначить углы между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  в разных частях гауссовой поверхности.

**П. 3. Расписать поток вектора напряженности электрического поля через гауссову поверхность как алгебраическую сумму потоков через ее отдельные части:**

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} \cdot dS = \int_{(S_1)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n}_1 \cdot dS + \int_{(S_2)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n}_2 \cdot dS + \dots$$

и раскрыть скалярные произведения в подынтегральных выражениях:

$$\Phi = \int_{(S_1)} E dS \cos \alpha_1 + \int_{(S_2)} E dS \cos \alpha_2 + \dots$$

П. 4. Выделить заряд, попадающий внутрь гауссовой поверхности, и записать этот заряд в виде

$$q = \int_{(V)} \rho \cdot dV \text{ — для объемного распределения заряда,}$$

$$q = \int_{(S)} \sigma \cdot dS \text{ — для поверхностного распределения заряда,}$$

$$q = \int_{(L)} \lambda \cdot dl \text{ — для линейного распределения заряда,}$$

где  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$  — объемная, поверхностная и линейная плотности заряда соответственно.

Если  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$  являются константами, перейти к п. 6, иначе к п. 5.

П. 5. Расписать объем  $dV$  через линейные параметры: для шарового слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ , для цилиндрического слоя  $dV = 2\pi r H dr$ , для плоскопараллельного слоя  $dV = S \cdot dr$ .

П. 6. Рассчитать заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности.

Пределы интегрирования определяются той частью объема заряженного тела, которая оказывается внутри гауссовой поверхности.

П. 7. Выражения для потока  $\Phi$  и заряда  $q$ , полученные в пп. 3 и 5, подставить в теорему Гаусса:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} q.$$

П. 8. Из уравнения, полученного в п. 7, определить напряженность поля  $E$ .

### 2.2.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Тонкий бесконечно длинный стержень равномерно заряжен по всей длине с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Найти напряженность поля  $E$  как функцию расстояния  $r$  от стержня. Принять  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. На рис. 2.11 изобразим стержень. Силовые линии в любой точке нормальны к стержню.

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра высотой  $H$ , ось которого совпадает со стержнем, а радиус равен расстоянию от стержня до той точки, где определяется  $E$ .

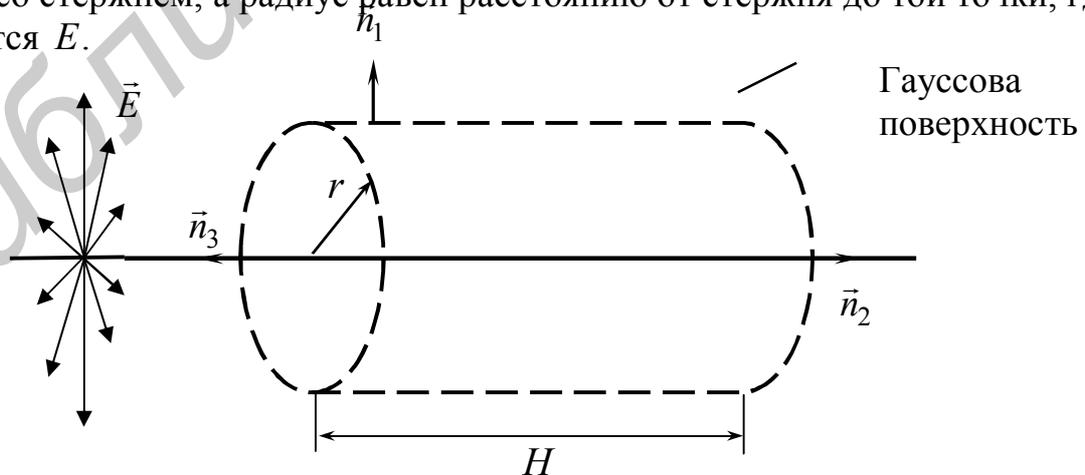


Рис. 2.11

П. 3. Рассчитаем поток вектора напряженности через гауссову поверхность:

$$\Phi = \int_{(S_{\text{бок}})} E(r) dS \cos 0 + \int_{(S_{1\text{осн}})} E(r) dS \cos \frac{\pi}{2} + \int_{(S_{2\text{осн}})} E(r) dS \cos \frac{\pi}{2} = \int_{(S_{\text{бок}})} E(r) dS = E(r) 2\pi \cdot rH.$$

П. 4. Заряд, попадающий внутрь гауссовой поверхности, равен заряду на той части стержня, которая оказалась внутри поверхности.

П. 6.  $q = \int_0^H \lambda dl = \lambda H.$

П. 7. Подставим  $\Phi$  и  $q$  в теорему Гаусса:

$$E(r) 2\pi rH = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \lambda H, \quad \epsilon = 1, \text{ т.к. система находится в воздухе.}$$

П. 8. Определяем напряженность поля  $E(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}.$

**Пример 2.** Сплошной бесконечно длинный цилиндр равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Радиус цилиндра  $R$ . Определить напряженность поля внутри цилиндра.  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. На рис. 2.12 изобразим заряженный цилиндр. Силовые линии представляют собой радиально расходящиеся от оси цилиндра прямые.

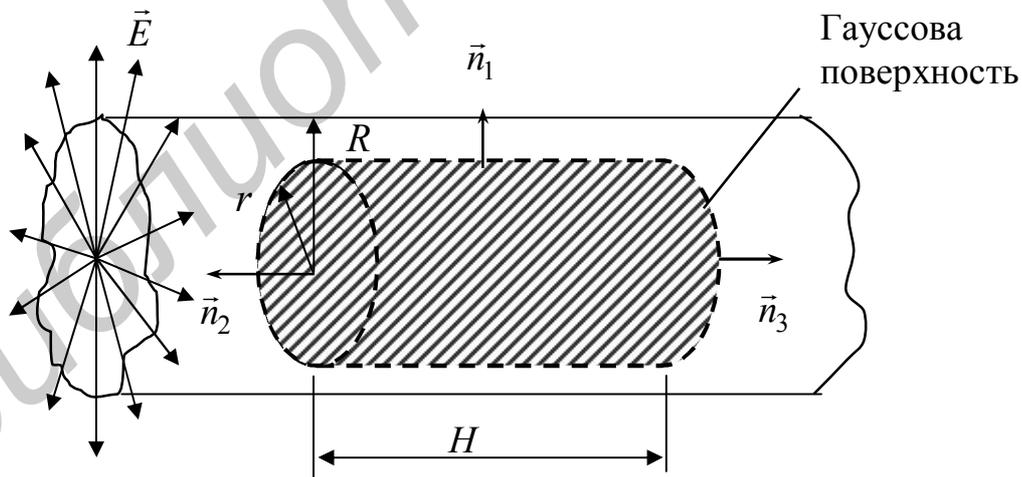


Рис. 1.12

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра произвольного радиуса  $r < R$ , высотой  $H$ , ось которого совпадает с осью заряженного цилиндра.

Проведем нормали к боковой поверхности  $\vec{n}_1$  и к основаниям цилиндра  $\vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$ .

Силловые линии параллельны основаниям и направлены по нормали к боковой поверхности.

П. 3. Расписываем поток вектора  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} ds = \int_{S_{\text{осн1}}} E(r) ds \cos \frac{\pi}{2} + \int_{S_{\text{осн2}}} E(r) ds \cos \frac{\pi}{2} + \int_{S_{\text{бок}}} E(r) ds \cos 0 = \\ &= \int_{S_{\text{бок}}} E(r) ds = E(r) S_{\text{бок}} = E(r) 2\pi r H. \end{aligned}$$

П. 4. Выделяем заряд, попадающий внутрь гауссовой поверхности, – это заряд в объеме цилиндра с радиусом основания  $r$  и высотой  $H$ .

П. 5. Рассчитываем заряд

$$q = \int_{(V)} \rho \cdot dV = \rho V = \rho \pi r^2 H.$$

П. 6. Вносим в теорему Гаусса значения потока  $\Phi$  и заряда  $q$ , учитывая, что  $\epsilon = 1$ :

$$E(r) 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 H.$$

П. 7. Находим  $E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$ ,  $r \leq R$ .

**Пример 3.** Бесконечная пластина, толщина которой  $d_0$ , равномерно заряжена с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Определить напряженность поля  $E(r)$  в пространстве, окружающем пластину.  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.13. Силловые линии представляют собой прямые, перпендикулярные пластине.

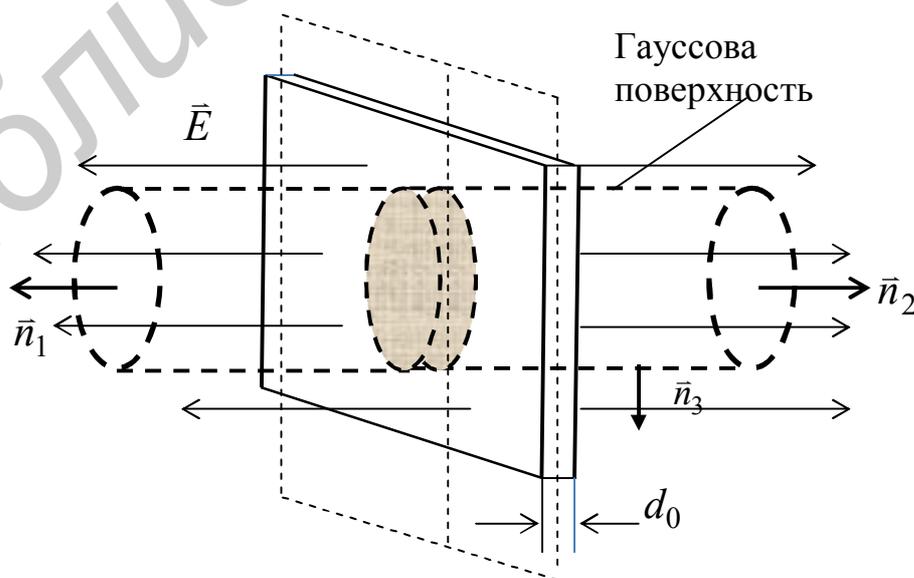


Рис. 2.13

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра с основаниями  $S$ , параллельными пластине, равноудаленными от середины пластины на расстояние  $r$ .

Проведем нормали к боковой поверхности и основаниям цилиндрической поверхности.

Силовые линии перпендикулярны основаниям и параллельны боковой поверхности.

П. 3. Рассчитаем поток вектора напряженности:

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} ds = 2 \int_{S_{\text{осн}}} E(r) \cos 0 ds + \int_{S_{\text{бок}}} E(r) \cos \frac{\pi}{2} ds = 2ES_{\text{осн}}.$$

П. 4. Выделим заряд  $q$ , попавший внутрь гауссовой поверхности.

П. 6. Рассчитаем заряд  $q$ , попавший внутрь гауссовой поверхности:

$$\int_{(V)} \rho dV = \rho \int_{(V)} dV = \rho S_{\text{осн}} d_0.$$

П. 7. Выражения для потока и заряда подставляем в формулу теоремы Гаусса:

$$2ES_{\text{осн}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho S_{\text{осн}} d_0.$$

П. 8. Определяем  $E(r) = \frac{\rho d_0}{2\epsilon_0} = \text{const}.$

Следовательно, за пределами заряженной пластины поле однородно.

**Пример 4.** Шаровой слой, внутренний и внешний радиусы которого равны  $a$  и  $b$  соответственно, равномерно заряжен зарядом  $q_0$ . Определить напряженность поля  $E(r)$  внутри слоя ( $a \leq r \leq b$ ).

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.14:

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде сферы радиусом  $a \leq r \leq b$ . Силовые линии пронизывают гауссову поверхность по нормали к ней в любой точке.

П. 3. Распишем поток вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} ds = \oiint_{(S)} E ds \cos 0 = E \oiint_{(S)} dS = E 4\pi r^2.$$

П. 4. Выделим заряд, попадающий внутрь гауссовой поверхности, и запишем для него формулу

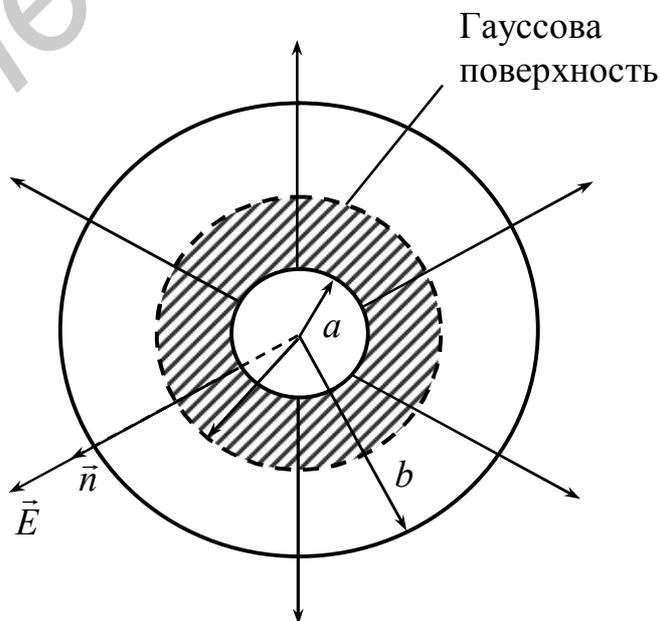


Рис. 2.14

$$q = \int_{(V)} \rho dV$$

Так как плотность заряда является постоянной величиной, перейдем к п. 6.  
 П. 6. Рассчитаем заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности:

$$q = \int_V \rho dV = \rho \int_a^r 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi \frac{r^3}{3} \Big|_a^r = \frac{4\pi\rho}{3} (r^3 - a^3).$$

П. 7. Используем теорему Гаусса:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi\rho}{3} (r^3 - a^3).$$

П. 8. Определяем  $E$ :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right), \quad a \leq r \leq b.$$

**Пример 5.** Шар радиусом  $R$  заряжен по всему объему так, что объемная плотность заряда  $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$ , где  $\rho$  и  $\alpha$  положительные константы,  $r$  – расстояние от центра шара. Определить напряженность поля внутри и вне шара.

$\varepsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.15 для случаев нахождения точки внутри и вне шара.

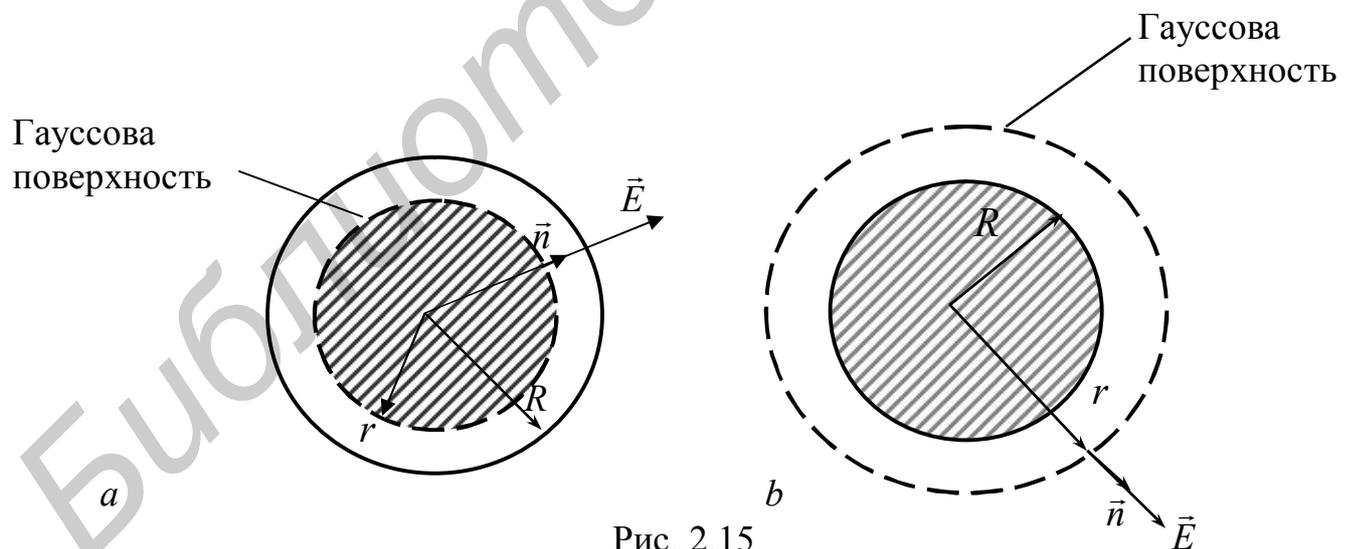


Рис. 2.15

П. 2. Гауссову поверхность выбираем в виде сферы радиусом  $r$ . В случае «а»  $r < R$ , в случае «б»  $r > R$ . Силовые линии пронизывают гауссову поверхность по нормали к ней.

П. 3. Расписываем поток вектора  $\vec{E}$  через сферическую поверхность:

$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} ds = \oint_{(S)} E(r) ds \cos 0 = E(r) \oint_{(S)} dS = E 4\pi r^2.$$

П. 4. Выделим штриховкой заряды, попадающие внутрь гауссовой поверхности в случаях «а» и «б», и запишем расчетную формулу:

$$q = \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} \rho_0 e^{-\alpha r^3} dV.$$

Поскольку  $\rho \neq \text{const}$ , заменим  $dV = 4\pi r^2 dr$  – объем шарового слоя. Тогда

$$q = \int_{(V)} \rho_0 e^{-\alpha r^3} 4\pi r^2 dr.$$

В случае «а» интегрирование ведется в пределах от 0 до  $r$ ; в случае «б» от 0 до  $R$ .

П. 5. Рассчитаем заряды  $q_1$  и  $q_2$ :

$$a) \quad q_1 = \frac{4\pi\rho_0 e^{-\alpha r^3}}{-\alpha} \Big|_0^r = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha r^3}),$$

$$b) \quad q_2 = \frac{4\pi\rho_0}{-\alpha} e^{-\alpha r^3} \Big|_0^R = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R^3}).$$

П. 6. Используем теорему Гаусса:

$$a) \quad E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi\rho_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha r^3}), \quad E_1 = \frac{\rho_0}{\alpha \epsilon_0 r^2} (1 - e^{-\alpha r^3}), \quad r \leq R.$$

$$b) \quad E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0 \alpha} (1 - e^{-\alpha R^3}), \quad E_2 = \frac{\rho_0}{\alpha \epsilon_0 r^2} (1 - e^{-\alpha R^3}), \quad r \geq R.$$

**Пример 6.** Система состоит из шара радиусом  $R$ , заряженного сферически симметрично, и окружающей среды, заряженной с объемной плотностью заряда  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ , где  $\alpha = \text{const}$ ,  $r$  – расстояние от центра шара. Найти заряд шара  $q_{\text{ш}}$ , при котором модуль напряженности поля вне шара не будет зависеть от  $r$ . Чему равно это значение  $E$ ?  $\epsilon = 1$ .

Гауссова поверхность

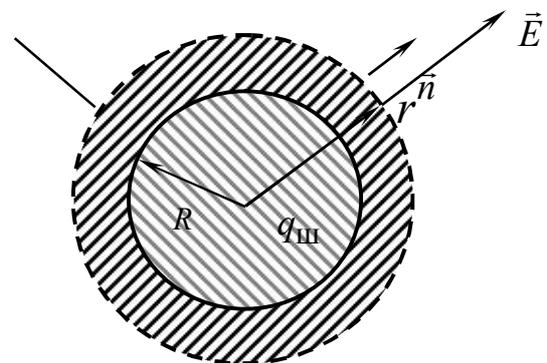


Рис. 2.16

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.16, на котором изобразим шар, окруженный заряженной средой. Силовые линии поля направлены по нормали к шару.

П. 2. Гауссову поверхность выбираем в виде сферы произвольного радиуса  $r$ . Силовые линии во всех точках составляют с нормалью угол  $0^\circ$ .

П. 3. Рассчитаем поток вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} ds = \oint_{(S)} E ds \cos 0 = E \oint_{(S)} dS = E 4\pi r^2.$$

П. 4. Выделим на рис. 2.16 заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности. Он состоит из заряда шара  $q_{\text{ш}}$  и заряда шарового слоя, имеющего радиусы  $R$  и  $r$ .

$$q = q_{\text{ш}} + \int_{(V_{\text{слоя}})} \rho dV.$$

Поскольку  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ , перейдем к п. 5.

П. 5. Распишем объем  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

П. 6. Рассчитаем заряд

$$q = q_{\text{ш}} + \int_R^r \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr = q_{\text{ш}} + 2\pi\alpha(r^2 - R^2).$$

П. 7. Подставим в теорему Гаусса значения  $\Phi$  и  $q$ :

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} (q_{\text{ш}} + 2\pi\alpha(r^2 - R^2)).$$

П. 8. Определим  $E$ :

$$E = \frac{q_{\text{ш}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\alpha}{2\epsilon_0} - \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2}.$$

Напряженность поля  $E$  не будет зависеть от  $r$  в том случае, когда

$$\frac{q_{\text{ш}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2}, \text{ откуда следует, что } q_{\text{ш}} = 2\pi\alpha R^2, \text{ а } E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}.$$

**Пример 7.** Бесконечный цилиндр радиусом  $R$  заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho = \rho_0(R - r)$ .  $\rho_0$  – положительная константа,  $r$  – расстояние от оси цилиндра. Определить максимальное значение напряженности поля  $E_{\text{max}}$  и соответствующее ему расстояние  $r_{\text{max}}$ .  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.17.

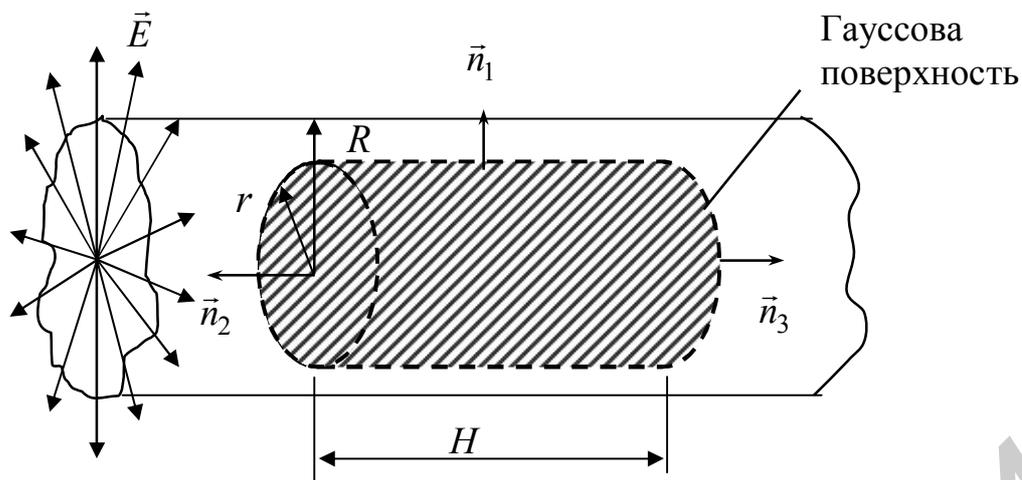


Рис. 2.17

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра с радиусом основания  $r$  и длиной  $H$ .

П. 3. Рассчитаем поток:

$$\Phi = \oiint (S) \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} dS = \int_{S_{\text{бок}}} EdS \cos 0 + 2 \int_{S_{\text{осн}}} EdS \cos \frac{\pi}{2} = E \int_{S_{\text{бок}}} dS = E 2\pi r H.$$

П. 4. Выделим заряд, охваченный гауссовой поверхностью,

$$q = \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} \rho_0 (R - r) dV.$$

П. 5.  $dV = 2\pi r H dr$ , следовательно,  $q = \int_0^r \rho_0 (R - r) 2\pi r H dr$ .

П. 6. Определим заряд:

$$q = 2\pi H \rho_0 \int_0^r (R - r) r dr = 2\pi H \rho_0 \left( R \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) = 2\pi H \rho_0 r^2 \left( \frac{R}{2} - \frac{r}{3} \right).$$

П. 7. Воспользуемся теоремой Гаусса:

$$E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi H \rho_0 r^2 \left( \frac{R}{2} - \frac{r}{3} \right).$$

П. 8. Найдем

$$E = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{R}{2} - \frac{r}{3} \right).$$

$$E = E_{\text{max}}, \text{ если } \frac{dE}{dr} = 0.$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\rho_0 r R}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0} \right) = 0.$$

$$\frac{\rho_0 R}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 2r}{3\epsilon_0} = 0,$$

$$r = \frac{3R}{4},$$

$$E_{\max} = \frac{\rho_0 3R}{4\epsilon_0} \left( \frac{R}{2} - \frac{3R}{4 \cdot 3} \right) = \frac{\rho_0 3R \cdot R}{4\epsilon_0 4} = \frac{3\rho_0 R^2}{16\epsilon_0}.$$

**Пример 8.** Шар радиусом  $R$  заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $r$  – расстояние от центра шара. Определить напряженность поля  $E$  вне шара как функцию  $r$ .  $\epsilon = 1$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рисунок 2.18.

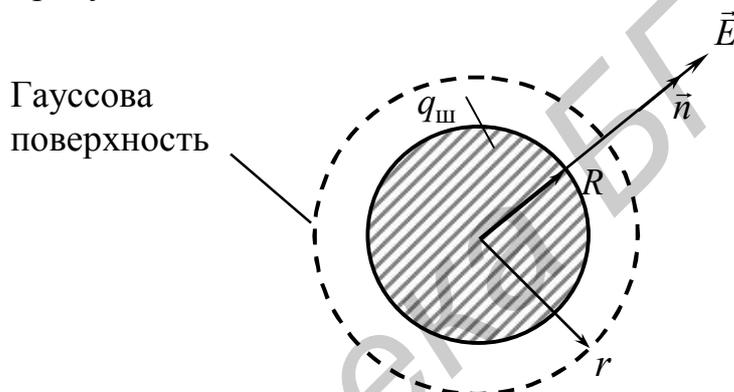


Рис.2.18

П. 2. Гауссову поверхность выбираем в виде сферы произвольного радиуса  $r$ . Силовые линии во всех точках составляют с нормалью угол  $0^\circ$ .

П. 3. Рассчитаем поток:

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} dS = \int_{(S)} E dS \cos 0 = E \iint_{(S)} dS = E 4\pi r^2$$

П. 4. Выделим заряд, охваченный гауссовой поверхностью,  $q = \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dV$ .

П. 5.  $dV = 4\pi r^2 dr$ :

$$q = \int_{(V)} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr.$$

П. 6. Определим заряд:

$$q = 4\pi\rho_0 \left( \int_0^R r^2 dr - \int_0^R \frac{r^4}{R^2} dr \right) = 4\pi\rho_0 \left( \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2} \right) = 4\pi\rho_0 R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}.$$

П. 7. Воспользуемся теоремой Гаусса:

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 8\pi\rho_0 \frac{R^3}{15}.$$

П. 8. Найдем  $E = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2}$ .

**Пример 9.** Бесконечно длинный цилиндрический слой, внутренний и внешний радиусы которого равны  $a$  и  $b$ , заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho = \rho_0 \frac{r}{b}$ . Определить напряженность поля на расстоянии  $r$  от оси цилиндра для случая  $a \leq r \leq b$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.19.

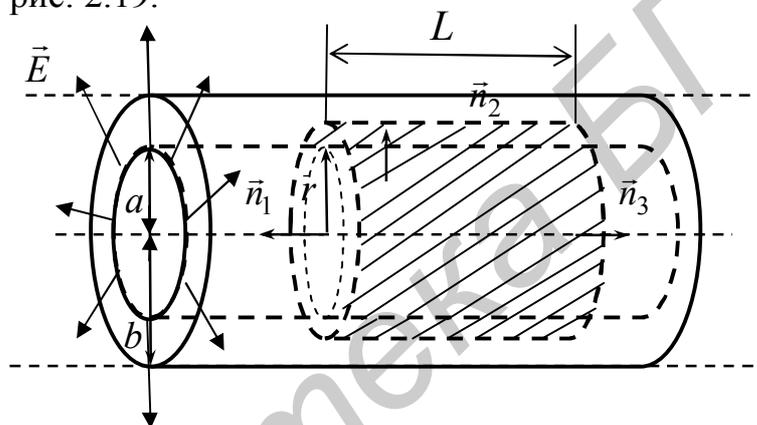


Рис. 2.19

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра с радиусом основания  $r$  и длиной  $L$ .

П. 3. Рассчитаем поток:

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) \vec{n} dS = \int_{S_{\text{бок}}} EdS \cos 0 + 2 \int_{S_{\text{соч}}} EdS \cos \frac{\pi}{2} = E \int_{S_{\text{бок}}} dS = E2\pi rL.$$

П. 4. Выделим заряд, охваченный гауссовой поверхностью:

$$q = \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} \rho_0 \frac{r}{b} dV.$$

П. 5. Используем формулу для расчета объема цилиндрического слоя

$$dV = 2\pi rLdr, \text{ следовательно, } q = \int_{(V)} \rho_0 \frac{r}{b} 2\pi rLdr.$$

П. 6. Определим заряд:

$$q = 2\pi L \frac{\rho_0}{b} \int_a^r r^2 dr = 2\pi L \frac{\rho_0}{b} \frac{r^3}{3} \Big|_a^r = 2\pi L \frac{\rho_0}{3b} (r^3 - a^3).$$

П. 7. Воспользуемся теоремой Гаусса:

$$E 2\pi r L = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi L \frac{\rho_0}{3b} (r^3 - a^3).$$

П. 8. Определим искомую величину  $E = \frac{\rho_0 r}{3b\varepsilon_0} (r^3 - a^3)$ ,  $a \leq r \leq b$ .

**Пример 10.** Бесконечная пластина толщиной  $2d$  заряжена с объемной плотностью заряда  $\rho = \rho_0(1 - \frac{r^2}{d^2})$ , где  $r$  – расстояние от середины пластины до точки, в которой определяют напряженность поля  $E$ . Найти  $E$  как функцию  $r$ .  $\varepsilon = 1$ .

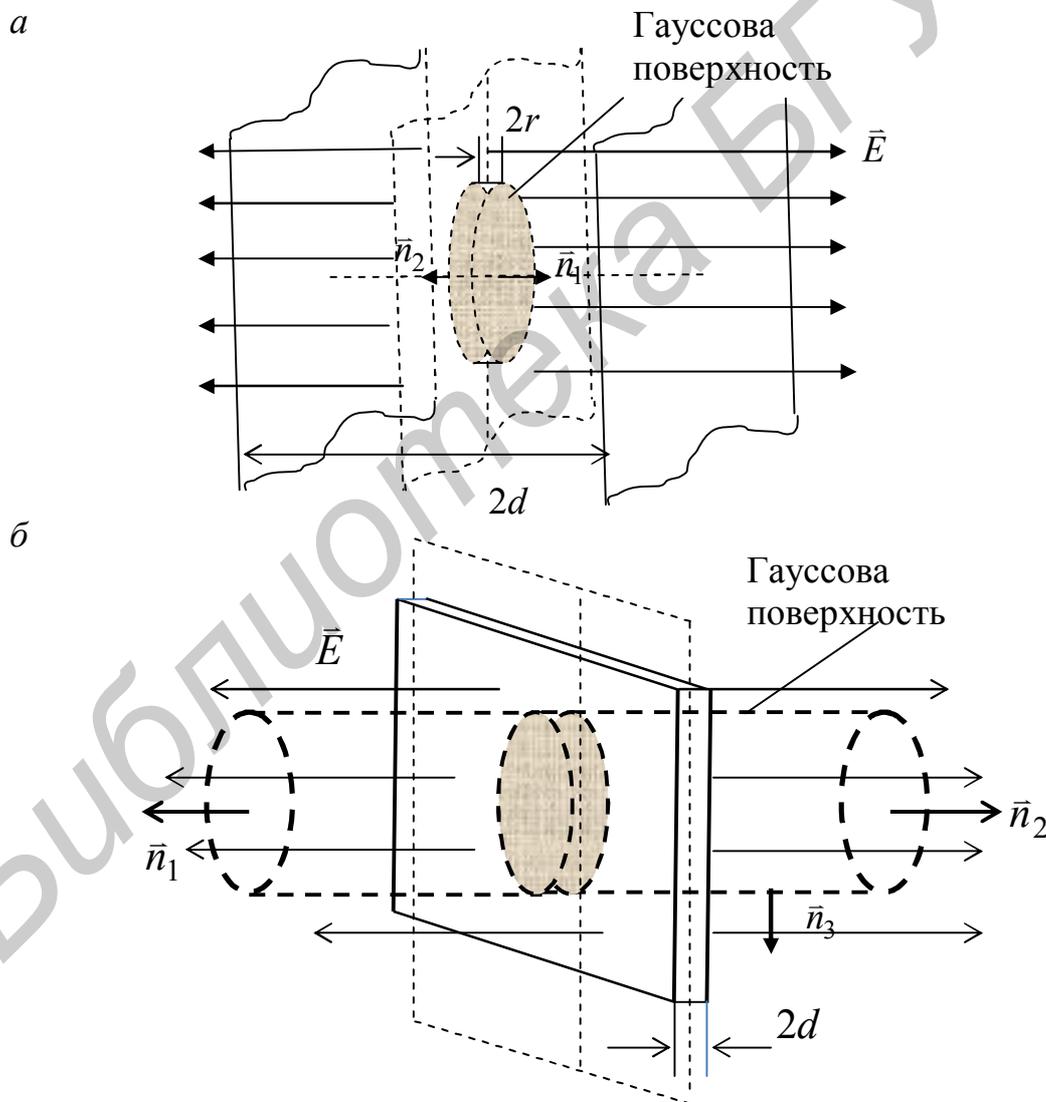


Рис. 2.20

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.20, а для случая  $r < d$  и 2.20, б для случая  $r > d$ .

П. 2. Гауссову поверхность выберем в виде цилиндра с основанием  $S$  и длиной  $2r$ . Силовые линии параллельны боковой поверхности и перпендикулярны основаниям.

П. 3. Рассчитаем поток:

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \int_{S_{\text{бок}}} EdS \cos \frac{\pi}{2} + 2 \int_{S_{\text{осн}}} EdS \cos 0 = 2E \int_{S_{\text{осн}}} dS = 2ES_{\text{осн}}.$$

Пп. 4–6. Рассчитаем заряд, охваченный гауссовой поверхностью для обоих случаев. Границы интегрирования определяем из рис. 2.20.

$$1) q_1 = \int_{(V)} \rho dV,$$

$dV = Sdr$ , следовательно,

$$q_1 = \rho_0 \int_{-r}^{+r} \left(1 - \frac{r^2}{d^2}\right) Sdr, \quad r < d.$$

$$2) q_2 = \rho_0 \int_{-d}^{+d} \left(1 - \frac{r^2}{d^2}\right) Sdr, \quad r > d.$$

$$q_1 = \rho_0 S \left( r - \frac{r^3}{3d^2} \right) \Big|_{-r}^{+r} = \rho_0 S \left( 2r - \frac{2r^3}{3d^2} \right).$$

$$q_2 = \rho_0 S \left( r - \frac{r^3}{3d^2} \right) \Big|_{-d}^{+d} = \rho_0 S \left( 2d - \frac{2d^3}{3d^2} \right) = \rho_0 S d \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\rho_0 S d}{3}.$$

П. 7. Используем теорему Гаусса:

$$1) 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 S \left( 2r - \frac{2r^3}{3d^2} \right),$$

$$2) 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\rho_0 S d}{3}.$$

П. 8. Определяем искомую величину:

$$E_1 = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{r^2}{3d^2} \right), \quad r \leq d.$$

$$E_2 = \frac{2\rho_0 d}{3\epsilon_0}, \quad r \geq d.$$

## 2.3. Потенциал электростатического поля. Связь напряженности и потенциала. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

### 2.3.1. А. Определение напряженности электростатического поля и объемной плотности заряда по заданному потенциалу. Алгоритм решения задач

П. 1(И). Записать потенциал через декартовы координаты  $\varphi = f(x, y, z)$  либо полярные  $\varphi = f(r, \alpha, \theta)$ .

П. 2(И). Записать выражение для вектора  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad } \varphi ;$$

$$\text{в декартовых координатах } \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\text{в полярных координатах } \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right).$$

П. 3(И). Определить составляющие напряженности поля как частные производные от потенциала по координатам  $E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $E_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$  либо

$$E_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, E_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, E_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

П. 4(И). Найти вектор напряженности  $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$  или  $\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\alpha\vec{e}_\alpha + E_\theta\vec{e}_\theta$ , где  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\alpha$  и  $\vec{e}_\theta$  – единичные векторы полярной системы координат.

П. 5(И). Определить модуль вектора напряженности:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

П. 6(И). Найти частные производные от составляющих вектора напряженности по соответствующим переменным

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial y}, \frac{\partial E_z}{\partial z} \text{ – в декартовых координатах}$$

либо

$$\frac{\partial E_r}{\partial r}, \frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}, \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} \text{ – в полярных координатах.}$$

П. 7(И). Найти  $\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  либо  $\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}$ .

П. 8(И). Найти плотность электрического заряда из соотношения

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ т. е. } \rho = \epsilon_0 \text{div}\vec{E}.$$

### 2.3.2. Б. Определение потенциала и напряженности поля

П. 1(II). Записать выражение для вектора напряженности электростатического поля исходя из условия задачи, либо определив напряженность поля с применением теоремы Гаусса (алгоритм 2.2), либо с применением принципа суперпозиции (алгоритм 2.1).

П. 2(II). Определить составляющие вектора напряженности  $E_x$ ;  $E_y$  и  $E_z$  в декартовой системе координат либо  $E_r$ ;  $E_\alpha$  и  $E_\theta$  в полярной системе координат.

П. 3(II). Рассчитать потенциал электростатического поля по формуле

$$\varphi = -\int (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + C,$$

или

$$\varphi = -\int (E_r dr + E_\alpha d\alpha + E_\theta d\theta) + C.$$

П. 4(II). Постоянную интегрирования  $C$  определить исходя из условия задачи.

### 2.3.3. Примеры решения задач по алгоритму А

**Пример 1А.** Потенциал электростатического поля задан в виде  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ . Определить вектор напряженности электростатического поля и его модуль.

*Решение.*

П. 1. Запишем потенциал исходя из условия задачи:  $\varphi(x, y, z) = ax^2 - ay^2$ .

П. 2. Запишем выражение для  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$ .

П. 3. Найдем составляющие вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2ax, E_y = -2ay, E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

П. 4. Найдем вектор напряженности  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -(2ax\vec{i} - 2ay\vec{j}).$$

П. 5. Определим модуль вектора  $\vec{E}$ :

$$|\vec{E}| = \sqrt{(2ax)^2 + (2ay)^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Пример 2А.** Потенциал электрического поля задан в виде  $\varphi = \vec{a}\vec{r}$ , где  $\vec{a} = \text{const}$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки поля. Найти вектор напряженности поля и его модуль.

*Решение*

П. 1. Запишем потенциал исходя из условия задачи  $\varphi = \vec{a}\vec{r}$ , где  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

$$\varphi(x, y, z) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

$$\varphi = a_x x + a_y y + a_z z.$$

П. 2. Запишем выражение для вектора  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

П. 3. Найдем составляющие вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2a_x, E_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_y, E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = a_z.$$

П. 4. Найдем вектор  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = -\vec{a}.$$

П. 5. Определим модуль вектора  $\vec{E}$

$$E = a.$$

**Пример 3А.** Потенциал электрического поля задан в виде  $\varphi = -ar^2 + b$ , где  $a$  и  $b$  – положительные константы,  $r$  – модуль радиуса-вектора точки поля. Найти объемную плотность заряда, создающего поле.

*Решение*

П. 1. Возьмем из условия задачи значение потенциала:

$$\varphi = -ar^2 + b = -a(x^2 + y^2 + z^2) + b.$$

П. 2. Запишем выражение для вектора  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$ .

П. 3. Найдем составляющие вектора  $\vec{E}$ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2ax, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2az.$$

П. 4. Найдем вектор напряженности:

$$\vec{E} = (2ax\vec{i} + 2ay\vec{j} + 2az\vec{k}) = 2a(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2a\vec{r}.$$

П. 6. Найдем частные производные от составляющих вектора напряженности:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 2a, \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2a, \frac{\partial E_z}{\partial z} = 2a.$$

П. 7. Найдем  $\operatorname{div}\vec{E} = 2a + 2a + 2a = 6a$ .

П. 8. Найдем объемную плотность заряда:

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = 6a\varepsilon_0.$$

**Пример 4А.** Потенциал радиально-симметричного поля равен  $\varphi(r) = -\frac{A}{r^2} + C$ , где  $r$  – радиус-вектор точки поля. Определить объемную плотность зарядов, создающих поле.

*Решение*

П. 1. Запишем потенциал исходя из условия задачи  $\varphi(r, \theta, \alpha) = -\frac{A}{r^2} + C$ .

П. 2. Определим вектор  $\vec{E}$  через полярные координаты  $r, \theta, \alpha$ :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e}_\alpha.$$

П. 3. Только одна составляющая вектора  $\vec{E}$  отлична от нуля

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2A}{r^3}, E_\theta = 0, E_\alpha = 0.$$

П. 4. Определим вектор  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\frac{2A}{r^3}\vec{e}_r.$$

П. 6. Найдем частные производные от составляющих вектора  $\vec{E}$  в полярных координатах:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = \frac{6A}{r^4}, \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha} = 0.$$

П. 7. Найдем  $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha} = \frac{6A}{r^4}$ .

П. 8. Определим объемную плотность зарядов:

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}E = \varepsilon_0 \frac{6A}{r^4}.$$

**Пример 5А.** Потенциал электрического поля задан в виде  $\varphi = ax - b\sqrt{y^2 - z} + C$ , где  $a$  и  $b$  – положительные константы. Найти вектор  $\vec{E}$ .

*Решение*

П. 1. Запишем потенциал исходя из условия задачи:

$$\varphi(x, y, z) = ax - b\sqrt{y^2 - z} + C.$$

П. 2. Запишем выражение для  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$ .

П. 3. Найдем составляющие вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -a, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = b \frac{2y}{2\sqrt{y^2 - z}} = \frac{y \cdot b}{\sqrt{y^2 - z}}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{b}{2\sqrt{y^2 - z}}.$$

П. 4. Найдем вектор напряженности  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -a\vec{i} + \frac{by}{\sqrt{y^2 - z}}\vec{j} - \frac{b\vec{k}}{2\sqrt{y^2 - z}}.$$

### 2.3.4. Примеры решения задач по алгоритму Б

**Пример 6Б.** Напряженность электрического поля задана в виде  $\vec{E} = Ax^2\vec{i} - By\vec{j} + D\vec{k}$ , где  $A, B, D$  – положительные константы. Определить потенциал поля как функцию координат, считая, что в начале координат  $\varphi = \varphi_0$ .

*Решение*

П. 1. Запишем выражение для напряженности поля исходя из условия задачи  $\vec{E} = Ax^2\vec{i} - By\vec{j} + D\vec{k}$ .

П. 2. Определим составляющие вектора  $\vec{E}$  в декартовой системе координат:

$$E_x = Ax^2, E_y = -By, E_z = D.$$

П. 3. Рассчитаем потенциал по формуле

$$\begin{aligned}\varphi &= -\int (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -\int (Ax^2 dx - By dy + D dz) = \\ &= -\int Ax^2 dx + \int By dy - \int D dz, \\ \varphi &= -\frac{Ax^3}{3} + \frac{By^2}{2} - Dz + C.\end{aligned}$$

П. 4. Постоянная интегрирования

$$\begin{aligned}C &= \varphi(0, 0, 0) = \varphi_0, \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{Ax^3}{3} + \frac{By^2}{2} - Dz.\end{aligned}$$

**Пример 7Б.** Напряженность электрического поля задана в виде  $\vec{E} = A\sqrt{x}\vec{i} + By^2\vec{j} + Dz\vec{k}$ , где  $A, B, D$  – положительные константы. Определить потенциал поля, считая, что на бесконечном удалении от начала координат по оси  $X$  в точке  $x = \infty, y = 0, z = 0$  потенциал поля равен  $\varphi_0$ .

*Решение*

П. 1. Запишем выражение для напряженности поля исходя из условия задачи:  $\vec{E} = A\sqrt{x}\vec{i} + By^2\vec{j} + Dz\vec{k}$ .

П. 2. Определим составляющие вектора  $\vec{E}$  в декартовой системе координат:

$$E_x = A\sqrt{x}, E_y = By^2, E_z = Dz.$$

П. 3. Рассчитаем потенциал по формуле

$$\begin{aligned}\varphi &= -\int (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -\int (A\sqrt{x} dx + By^2 dy + D zdz) = \\ &= -\int A\sqrt{x} dx - \int By^2 dy - \int D zdz, \\ \varphi &= -\frac{A}{2\sqrt{x}} - B\frac{y^3}{3} - D\frac{z^2}{2} + C.\end{aligned}$$

П. 4. Постоянная интегрирования

$$C = \varphi(\infty, 0, 0) = \varphi_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{A}{2\sqrt{x}} - B\frac{y^3}{3} - D\frac{z^2}{2}.$$

**Пример 8Б.** Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  описывается функцией  $\vec{E}(r) = A \exp(-\alpha r) \vec{e}_r$ , где  $A$  – положительная константа, а  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки. Найти потенциал поля как функцию  $\vec{r}$   $\varphi(\vec{r})$ , считая, что на бесконечном удалении от начала координат при  $r = \infty$   $\varphi(\infty) = 0$ .

*Решение*

П. 1. Запишем выражение для напряженности поля исходя из условия задачи  $\vec{E}(r) = A \exp(-\alpha r) \vec{e}_r$ .

П. 2. Определим составляющие вектора  $\vec{E}$  в полярной системе координат:

$$E_r = A \exp(-\alpha r), \quad E_\theta = 0, \quad E_\alpha = 0.$$

П. 3. Рассчитаем потенциал по формуле

$$\begin{aligned} \varphi &= -\int (E_r dr + E_\theta d\theta + E_\alpha d\alpha) = -\int E_r dr = -\int A \exp(-\alpha r) dr, \\ \varphi &= \frac{A}{\alpha} \exp(-\alpha r) + C. \end{aligned}$$

П. 4. Постоянная интегрирования

$$\varphi(\infty) = C, \quad C = 0,$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{\alpha} \exp(-\alpha r).$$

**Пример 9Б.** Заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиусом  $R$ . Полагая всюду диэлектрическую проницаемость  $\epsilon = 1$ , найти потенциал внутри шара как функцию расстояния от его центра.

*Решение*

П. 1. Поскольку выражение для напряженности поля не задано, получим это выражение, воспользовавшись теоремой Гаусса и соответствующим алгоритмом.

Найдем напряженность поля  $E_1$  внутри шара (рис.2.21, а)

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint E ds \cos 0 = E \oint ds = E 4\pi r^2.$$

$$q_1 = \int \rho dV = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho 4\pi r^3}{3}, \quad \text{т. к. } \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}. \quad E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{qr}{4\pi R^3 \epsilon_0} \quad (\text{внутри шара}).$$

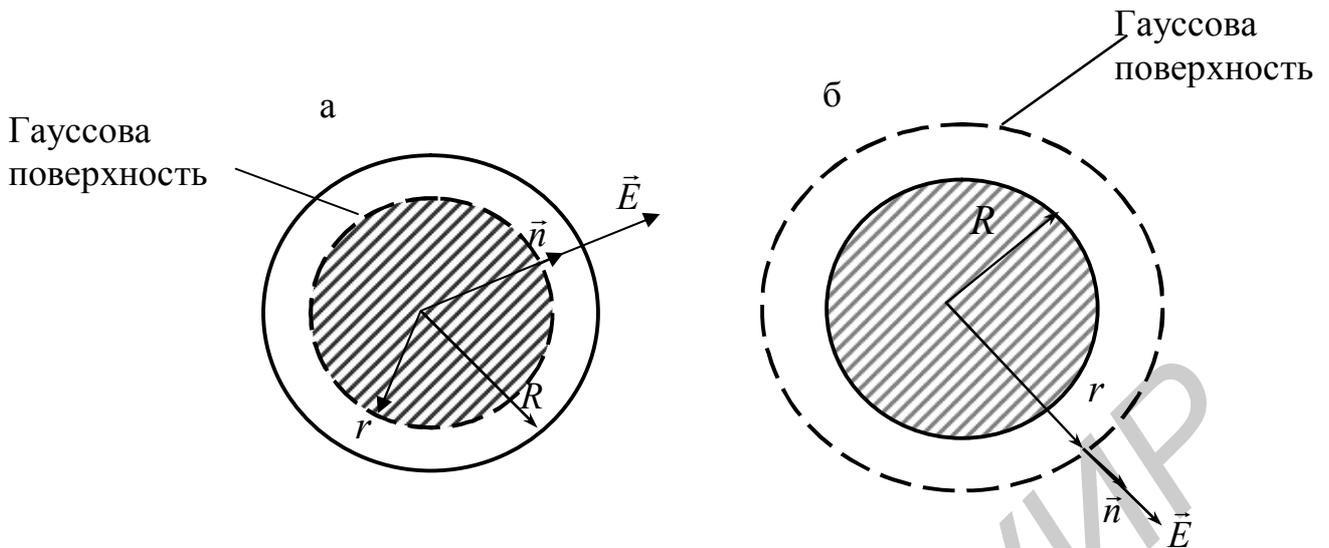


Рис. 2.21

Найдем напряженность  $E_2$  вне шара (рис.2.21, б):

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

П. 2. Определим составляющие вектора  $\vec{E}$  в полярной системе координат для точек внутри ( $\vec{E}_1$ ) и вне ( $\vec{E}_2$ ) заряженного шара:

$$E_{r1} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad E_{r2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\alpha = 0.$$

П. 3. Рассчитаем потенциал внутри ( $\varphi_1$ ) и вне ( $\varphi_2$ ) шара:

$$\varphi_1 = -\int E_{r1} dr = -\int \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int r dr = -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + C_1,$$

$$\varphi_2 = -\int E_{r2} dr = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2.$$

П. 4. Для определения  $C_1$

$$C_1 = \varphi_1 + \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}; \quad C_1 = \varphi_1, \text{ если } r = 0.$$

Таким образом,  $C_1 = \varphi_1(0) = \varphi_0$ , т. е.  $C_1 = \varphi_0$  (в центре шара).

$C_2 = \varphi_2(\infty)$ , т. е.  $C_2 = 0$ .

Для определения  $C_1$  учтем, что  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Если  $r = R$  (на поверхности шара),

$$-\frac{qR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

$$C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Окончательно  $\varphi(r) = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$  внутри шара.

**Пример 10Б.** Бесконечный сплошной цилиндр радиусом  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Найти разность потенциалов между точками, находящимися на расстоянии  $a$  и  $b$  от оси цилиндра, считая, что  $a < R$  и  $b < R$ .

*Решение*

П. 1. Поскольку выражение для напряженности поля не задано, получим это выражение, воспользовавшись теоремой Гаусса и соответствующим алгоритмом

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Выполним рис. 2.22.

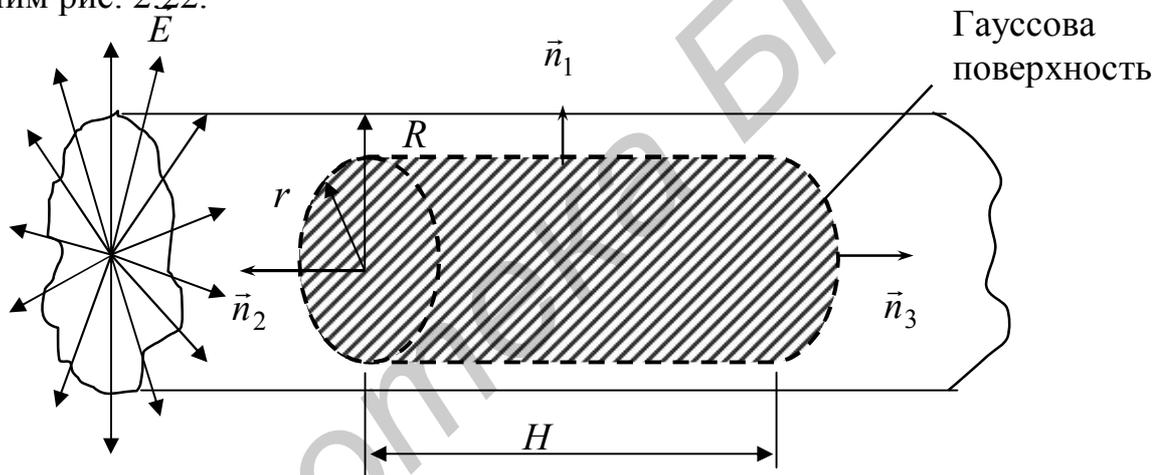


Рис. 2.22

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 2 \int_{S_{\text{осн.}}} E ds \cos \frac{\pi}{2} + \int_{S_{\text{бок.}}} E ds \cos 0 = ES_{\text{бок.}} = E2\pi rH.$$

$$q_1 = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho \pi r^2 H.$$

$$E \cdot 2\pi rH = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 H, \quad E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

П. 2. Определим составляющие вектора  $\vec{E}$  в полярной системе координат:

$$E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\alpha = 0.$$

П. 3. Рассчитаем потенциал внутри:

$$\varphi = -\int E_r dr = -\int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr.$$

Поскольку нам нужна разность потенциалов, то пределы интегрирования возьмем определенные  $a$  и  $b$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_a^b \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\left. \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \frac{r}{2} \right|_a^b = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (b^2 - a^2) = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (a^2 - b^2).$$

#### 2.4. Закон Био–Савара–Лапласа. Алгоритм решения задач

В том случае, если проводник с током можно представить в виде бесконечно малых элементов с током  $d\vec{l}$ , следует пользоваться алгоритмом А, если систему можно представить как совокупность ранее рассмотренных конечных проводников, использовать алгоритм Б.

##### 2.4.1. Алгоритм решения задач А

П. 1. Выполнить рисунок, на котором следует изобразить:

- проводник с током;
- элементарный участок проводника  $d\vec{l}$ , совпадающий по направлению с током;
- вектор  $\vec{r}$ , проведенный от участка  $d\vec{l}$  до той точки, в которой требуется найти вектор  $\vec{B}$ ;
- угол  $\alpha$  между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

П. 2. Записать закон Био–Савара–Лапласа для участка  $d\vec{l}$ :

$$d\vec{B} = k'I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}, \text{ где } k' = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}.$$

П. 3. Определить направление вектора  $d\vec{B}$  по правилу правого винта.

П. 4. Выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор  $d\vec{B}$  было удобно спроецировать на эти оси. В том случае, если все векторы  $d\vec{B}$  направлены одинаково, одну из осей совместить с вектором  $d\vec{B}$ .

П. 5. Найти проекции вектора  $d\vec{B}$  на оси координат:  $dB_x$ ,  $dB_y$ ,  $dB_z$ . Расписать

$$\text{модуль } dB = k'I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$

П. 6. В том случае, если в правой части математических выражений содержится одна переменная, перейти к п. 8А, иначе – к п. 7А.

П. 7. При необходимости выполнить замену переменных, выражая все линейные параметры через угловые и заданные константы.

П. 8. Найти проекции вектора  $\vec{B}$  на оси координат:  $B_x = \int dB_x$ ;  $B_y = \int dB_y$ ;  $B_z = \int dB_z$ . Пределы интегрирования определить из условия задачи.

П. 9. Определить вектор  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$  и модуль вектора  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ .

### 2.4.2. Алгоритм решения задач Б

- П. 1. Представить изучаемое тело как совокупность ранее рассмотренных более простых тел и выполнить рисунок.
- П. 2. Записать выражение для индукции магнитного поля более простого тела, заменив в ранее полученном выражении ток  $I$  на  $dI$ , а все постоянные линейные размеры тела или угол, на переменные величины. Найти проекции  $d\vec{B}$  на оси координат.
- П. 3. Определить количество переменных в правой части полученного выражения. Если переменная одна, то перейти к п. 5В. иначе к п. 4В.
- П. 4. Выполнить замену переменных, используя рисунок. Подставить выполненные замены в выражение п. 3В.
- П. 5. Проинтегрировать полученное выражение. Пределы интегрирования определить из условия задачи.
- П. 6. Записать выражения для вектора  $\vec{B}$  и модуля  $B$ .

### 2.4.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** По тонкому прямолинейному проводнику длиной  $L$  протекает постоянный ток  $I$ . Найти: а) индукцию магнитного поля в точке  $P$ , указанной на рисунке 2.23; б) определить индукцию магнитного поля для бесконечно длинного проводника.

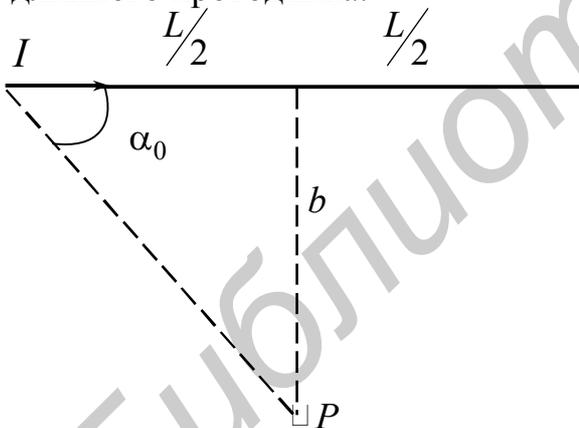


Рис.2.23

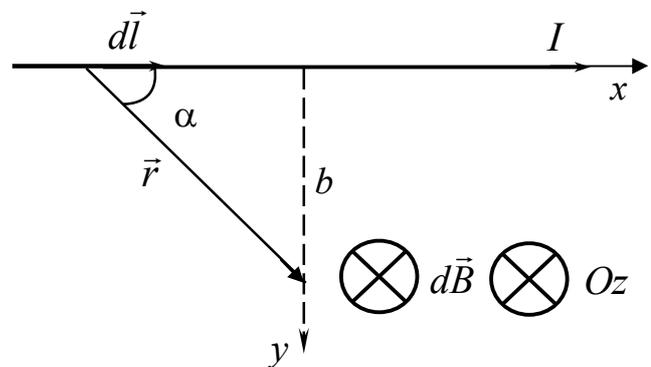


Рис.2.24

*Решение*

Проводник будем рассматривать как совокупность бесконечно малых участков с током  $d\vec{l}$ , поэтому воспользуемся алгоритмом А.

П. 1. Выполним рис. 2.24.

П. 2. Запишем выражение для  $d\vec{B}$ :  $d\vec{B} = kI \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}$ .

П. 3. Определим направление вектора  $d\vec{B}$ . Векторы  $d\vec{B}$  от всех участков проводника будут направлены перпендикулярно плоскости рисунка «за» плоскость.

П. 4 Ось  $Oz$  совместим с вектором  $d\vec{B}$ .

П. 5. Найдем проекции  $d\vec{B}$  на оси координат:  $dB_x = 0$ ,  $dB_y = 0$ ,  
 $dB_z = k'I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$ .

П. 6. Поскольку в правой части уравнения для  $dB_z$  содержится три переменные величины  $r, l, \alpha$ , перейдем к п. 7А.

П. 7. Выполним замену переменных, выразив их через параметр  $b$  и угол  $\alpha$ :

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, l = -b \cdot \operatorname{ctg} \alpha, dl = \frac{b}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

следовательно,  $dB_z = k'I \frac{b}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \sin \alpha \cdot d\alpha = k' \frac{I}{b} \sin \alpha \cdot d\alpha$ .

П. 8. Найдем проекции вектора  $\vec{B}$ :  $B_x = 0, B_y = 0$ ,

$$B_z = \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} k' \frac{I}{b} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{k'I}{b} (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} = 2 \frac{k'I}{b} \cos \alpha_0,$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{L}{2\sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4b^2}}.$$

Для случая «а»  $B_z = 2 \frac{k'I}{b} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4b^2}}, B_x = 0, B_y = 0$ .

Для случая «б» пределы интегрирования меняются от 0 до  $\pi$ , следовательно,

$$B_z = \int_0^{\pi} k' \frac{I}{b} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{k'I}{b} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\pi} = 2 \frac{k'I}{b}.$$

П. 9. Векторы магнитной индукции соответственно равны.

$$\text{а) } \vec{B} = 2 \frac{k'IL}{b\sqrt{L^2 + 4b^2}} \vec{k},$$

$$\text{б) } \vec{B} = \frac{2k'I}{b} \vec{k}.$$

**Пример 2.** Проводник, по которому течет ток  $I$ , изогнут в виде дуги радиусом  $R$ , как показано на рис. 2.25. Найти: а) индукцию магнитного поля в точке  $O$ ; б) индукцию магнитного поля в центре замкнутого кольца.

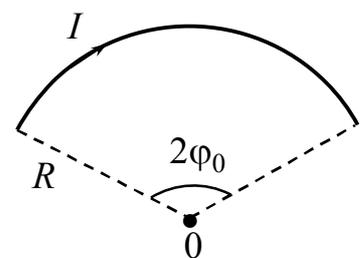


Рис.2.25

*Решение*

Проводник представим, как совокупность бесконечно малых участков с током  $d\vec{l}$ , поэтому воспользуемся алгоритмом А.

П. 1. Выполним рис. 2.26.

П. 2. Запишем выражение для  $d\vec{B}$ :

$$d\vec{B} = k'I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}.$$

П. 3. Все векторы  $d\vec{B}$  будут направлены перпендикулярно плоскости рисунка (за чертеж).

П. 4 Ось  $Oz$  совместим с вектором  $d\vec{B}$ .

П. 5. Найдем проекции  $d\vec{B}$ :  $dB_x = 0$ ,  $dB_y = 0$ ,

$$dB_z = k'I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$

П. 6. Поскольку в правой части уравнения для  $dB_z$  содержится только одна переменная  $dl$ , а  $r = R = \text{const}$  и  $\alpha = 90^\circ = \text{const}$ , то перейдем к п. 8А.

П. 8. Найдем проекции вектора  $\vec{B}$  на оси координат:

$$B_z = \int_0^L k'I \frac{dl \cdot \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{k'I}{R^2} L, \text{ где } L \text{ — длина проводника; } B_y = 0, B_x = 0.$$

Длина дуги  $L = R \cdot 2\varphi_0$ , следовательно,

$$\text{для случая «а» } B_z = \frac{k'I}{R^2} R \cdot 2\varphi_0 = \frac{2k'I\varphi_0}{R},$$

$$\text{для случая «б» } B_z = \frac{2k'I \cdot \pi}{R}.$$

П. 9. В векторной форме:

$$\text{а) } \vec{B}_1 = \frac{2k'I\varphi_0}{R} \vec{k},$$

$$\text{б) } \vec{B}_2 = \frac{2k'I\pi}{R} \vec{k}.$$

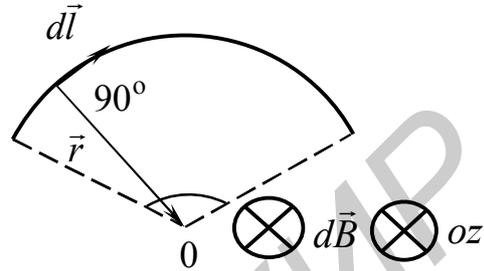


Рис. 2.26

**Пример 3.** По тонкому проволочному кольцу радиусом  $R$  течет ток силой  $I$ . Определить индукцию магнитного поля в точке  $O$ , указанной на рисунке, находящейся на оси кольца на расстоянии  $H$  от его центра.

*Решение*

Проводник будем рассматривать как совокупность бесконечно малых участков с током  $dl$ , поэтому воспользуемся алгоритмом А.

П. 1. Выполним рис. 2.27.

П. 2. Запишем закон Био–Савара–Лапласа для участка  $d\vec{l}$ :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = k'I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}.$$

П. 3. Направление вектора  $d\vec{B}$  для произвольного участка  $d\vec{l}$  указано на рисунке.

П. 4. В качестве осей координат берем такую систему  $XOY$ , для которой ось  $Oz$  совпадает с осью кольца. Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен как вектору  $d\vec{l}$ , так и вектору  $\vec{r}$  для любого участка, поэтому угол  $\alpha = const$ ,  $\alpha$  – угол между вектором  $d\vec{B}$  и осью  $Oz$ .

П. 5. Найдем координаты вектора  $d\vec{B}$  на оси координат:  $dB_x, dB_y, dB_z$

$$dB_x = dB \sin \alpha \sin \varphi,$$

$$dB_y = dB \sin \alpha \cos \varphi,$$

$$dB_z = dB \cos \alpha.$$

$$dB = k'I \frac{dl}{r^2} \sin 90^\circ, \quad \text{поскольку}$$

угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  равен  $90^\circ$ , то

$$dB_x = k'I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi,$$

$$dB_y = k'I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi,$$

$$dB_z = k'I \frac{dl}{r^2} \cos \alpha.$$

П. 6. Так как в правой части каждого из математических выражений п. 5А содержится по две переменные  $l$  и  $\varphi$ , то перейдем к п. 7А.

П. 7. Выполним замену переменных, учитывая то обстоятельство, что  $dl = R d\varphi$ .

П. 8. Найдем проекции вектора  $\vec{B}$  на оси координат:

$$B_x = \int_0^{2\pi R} k'I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi = \frac{k'I \sin \alpha}{r^2} \int_0^{2\pi} R \sin \varphi \cdot d\varphi = -\frac{k'IR \sin \alpha}{r^2} \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$B_y = \int_0^{2\pi R} k'I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha \cos \varphi = \frac{k'I \sin \alpha}{r^2} \int_0^{2\pi} R \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{k'IR \sin \alpha}{r^2} \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

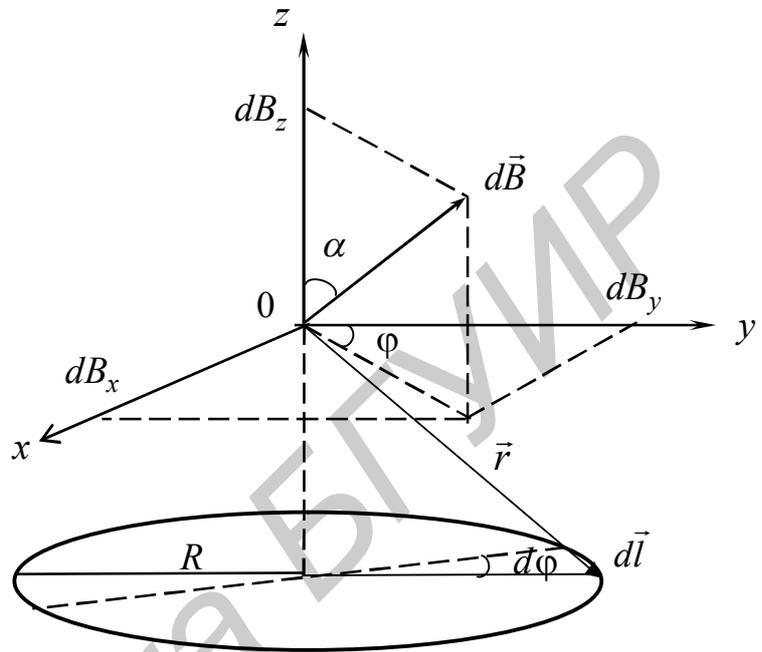


Рис.2.27

$$B_z = \int_0^{2\pi R} k'I \frac{dl}{r^2} \cos \alpha = \frac{k'I \cos \alpha}{r^2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{k'I \cos \alpha}{r^2} 2\pi R,$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + H^2}, \quad B_z = \frac{k'I \cos \alpha}{r^2} 2\pi R = \frac{2\pi k'IR^2}{(R^2 + H^2)^{3/2}}.$$

П. 9. В векторной форме  $\vec{B} = \frac{2\pi k'IR^2}{(R^2 + H^2)^{3/2}} \vec{k}$ .

**Пример 4.** Тонкий непроводящий диск радиусом  $R$ , равномерно заряженный с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска, с угловой скоростью  $\omega$ . Найти индукцию магнитного поля в центре диска.

*Решение*

Представим диск как совокупность очень тонких колец переменного радиуса  $r$  шириной  $dr$  и воспользуемся алгоритмом В.

П. 1. Выполним рис. 2.28.

П. 2. Запишем выражение для индукции магнитного поля в центре кольца, полученное при решении задачи 2 и преобразуем его:

$$B_{\text{кольца}} = \frac{2k'I\pi}{R}, \quad dB = \frac{2k'\pi dI}{r}.$$

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq\omega}{2\pi}, \quad dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi r dr.$$

Таким образом,  $dI = \frac{\sigma \cdot 2\pi\omega r dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr$ ,

$$dB = \frac{2k'\pi\sigma\omega r dr}{r} = 2k'\pi\sigma\omega dr.$$

$d\vec{B} = (2k'\pi\sigma\omega dr) \vec{k}$ , т. к. все  $d\vec{B}$  направлены одинаково.

П. 3. В полученном выражении одна переменная, переходим к п. 5В.

$$\text{П. 5. } \vec{B} = \int_0^R (2k'\pi\sigma\omega dr) \vec{k} = 2k'\pi\sigma\omega R \vec{k}.$$

П. 6. Вектор  $\vec{B} = 2k'\pi\sigma\omega R \vec{k}$ ,

модуль вектора  $B = 2k'\pi\sigma\omega R$ .

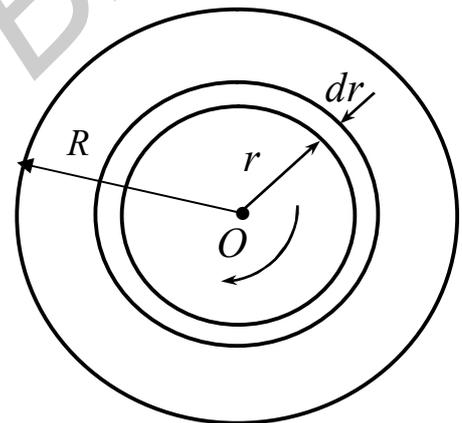


Рис.2.28

**Пример 5.** Ток  $I$  течет по очень длинному прямому проводнику, сечение которого представляет собой тонкое полукольцо радиусом  $R$ . Ток равномерно распределен по сечению трубы. Найти индукцию магнитного поля на оси трубы.

*Решение*

П. 1. Представим наш проводник как совокупность бесконечно длинных тонких проводников шириной  $dh$  и расположенных параллельно оси трубы. Выполним

рис. 2.29, изобразив систему тонких проводников в разрезе. Используем алгоритм В.

П. 2. Запишем выражение для индукции магнитного поля тонкого длинного проводника, взяв формулу из примера 1А.

$$B = \frac{2k'I}{b} \Rightarrow dB = \frac{2k'dI}{R}, \quad b = R.$$

Ток  $dI = \frac{I}{\pi R} dh$ , следовательно-

$$\text{но, } dB = \frac{2k'Idh}{\pi R^2},$$

$$dB_x = dB \cos \alpha = \frac{2k'I \cos \alpha \cdot dh}{\pi R^2},$$

$$dB_y = dB \sin \alpha = \frac{2k'I \sin \alpha \cdot dh}{\pi R^2}, \quad dB_z = 0.$$

П. 3. В полученных выражениях в правой части по две переменные величины  $\alpha$  и  $h$ , поэтому перейдем к п. 4В.

П. 4. Выполним замену переменных  $dh = R d\alpha$ ,

$$dB_x = \frac{2k'IR \cos \alpha \cdot d\alpha}{\pi R^2} = \frac{2k'I \cos \alpha \cdot d\alpha}{\pi R},$$

$$dB_y = -\frac{2k'I \sin \alpha \cdot d\alpha}{\pi R}, \quad dB_z = 0.$$

П. 5. Проинтегрируем полученные выражения, учитывая, что угол  $\alpha$  изменяется от 0 до  $\pi$ .

$$B_x = \int_0^\pi \frac{2k'I}{\pi R} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{2k'I}{\pi R} \sin \alpha \Big|_0^\pi = 0,$$

$$B_y = -\int_0^\pi \frac{2k'I}{\pi R} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{2k'I}{\pi R} \cos \alpha \Big|_0^\pi = -\frac{4k'I}{\pi R}, \quad dB_z = 0.$$

$$\text{П. 6. } \vec{B} = \frac{4k'I}{\pi R} \vec{j}, \quad B = \frac{4k'I}{\pi R}.$$

**Пример 6.** Проводник с током  $I$  изогнут в виде прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$  пересечения диагоналей.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.30. Воспользуемся результатами примера 1. Проводник рассмотрим как систему из четырех проводников конечной длины.

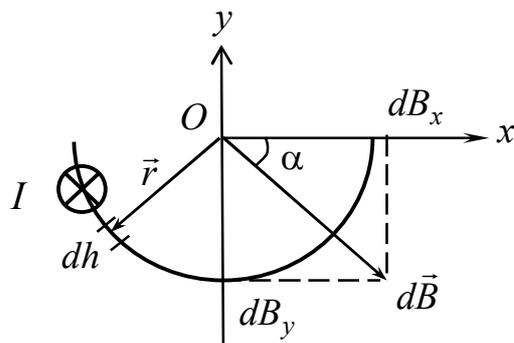


Рис.2.29

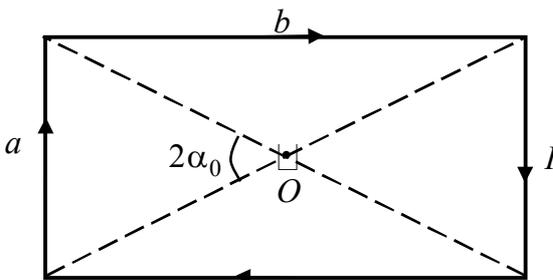


Рис.2.30

П. 2. Запишем выражение для вектора магнитной индукции поля, созданного конечным проводником:

$$\vec{B} = \frac{2}{r} k'I \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4r^2}} \vec{k}, \text{ где } r - \text{расстояние от проводника до точки } 0, \text{ а}$$

$L$  – длина проводника.

Используя параметры рис. 2.30, запишем:

$$\vec{B}_1 = \frac{2}{b/2} k'I \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4(b/2)^2}} \vec{k} = \vec{B}_2, \quad ,$$

$$\vec{B}_3 = \frac{2}{a/2} k'I \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4(a/2)^2}} \vec{k} = \vec{B}_4.$$

Все векторы  $\vec{B}$  будут направлены перпендикулярно плоскости рисунка «за» плоскость.

П. 8. Найдем индукцию результирующего магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = 8k'I \left( \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{k} =$$

$$\frac{8k'I}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \vec{k} = \frac{8k'I}{ab} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{k}.$$

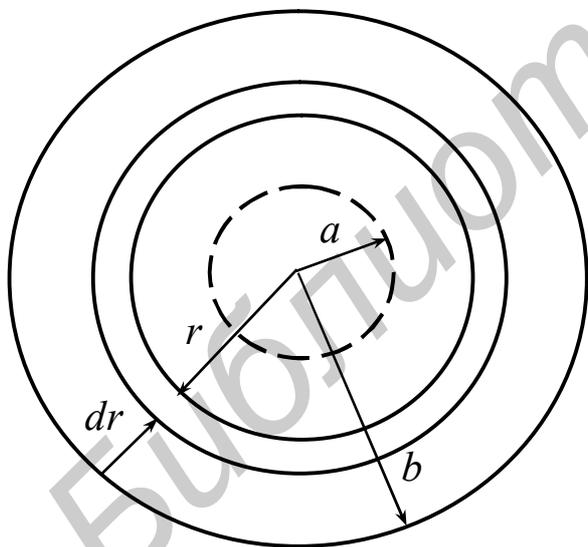


Рис.2.31

**Пример 7.** Тонкий провод образует плоскую спираль из  $N$  плотно расположенных витков, по которым течет ток  $I$ . Радиусы внутреннего и внешнего витков равны  $a$  и  $b$  соответственно. Найти магнитную индукцию в центре спирали.

*Решение*

Спираль представим, как совокупность тонких колец радиусом  $r$  и шириной  $dr$  (рис. 2.31).

Для каждого кольца вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости спирали.

П. 2.  $dB_{\text{кольца}} = \frac{2k'\pi dI}{r}$  (из задачи 2).

$dI = IdN$ , где  $dN$  – число витков, укладываемых на ширину кольца  $dr$ :

$$\frac{N}{b-a} = \frac{dN}{dr} \Rightarrow dN = \frac{Ndr}{b-a}; \quad dI = \frac{INdr}{b-a}; \quad dB = \frac{2\pi k' INdr}{r(b-a)}.$$

П. 3. В правой части полученного выражения одна переменная величина  $r$ , поэтому переходим к п. 5В.

П. 5. Интегрируем  $B = \int_a^b \frac{2\pi k' IN dr}{r(b-a)}$ ;

$$B = \frac{2\pi k' IN}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k' IN}{b-a} \ln|r| \Big|_a^b = \frac{2\pi k' IN}{b-a} (\ln b - \ln a) = \frac{2\pi k' IN}{b-a} \ln \frac{b}{a}.$$

П. 6. В векторной форме  $\vec{B} = \frac{2\pi k' IN}{b-a} \ln \frac{b}{a} \cdot \vec{k}$ .

**Пример 8.** Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$  для проводника с током  $I$ , имеющего конфигурацию, показанную на рис. 2.32, где  $b$  – сторона квадрата,  $a$  – радиус дуги.

*Решение*

Воспользуемся алгоритмом А для каждого из элементов составляющих проводник: I, II, III, IV и V.

Сначала рассмотрим прямоугольные участки.

Для участков I и IV:  $\vec{B}_I = \vec{B}_{IV} = 0$ , т. к. угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  равен 0 и  $180^\circ$  соответственно.

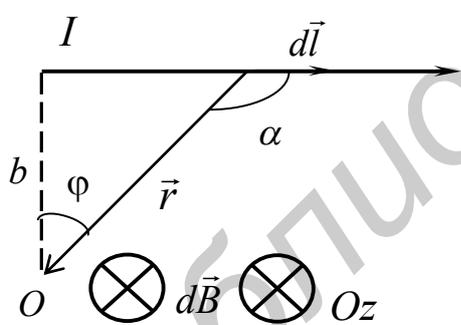


Рис. 2.32

Рис.2.33

Для участков II и III:

П. 1. Выполним рис. 2.33 и выберем произвольный элемент  $d\vec{l}$  (см. задачу 1).

$$\text{П. 2. } d\vec{B} = k'I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{|\vec{r}|^3};$$

все  $d\vec{B}$  перпендикулярны плоскости чертежа и направлены за чертеж. Переходим к п. 5.

$$\text{П. 5. } dB_x = 0; dB_y = 0; dB_z = k'I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha.$$

П. 7. Выполним замену переменных, выразив их через  $b$  и угол  $\alpha$ :

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, l = -b \cdot \text{ctg} \alpha, dl = \frac{b}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

$$\text{следовательно, } dB_z = k'I \frac{b}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \sin \alpha \cdot d\alpha = k' \frac{I}{b} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

П. 8.

$$B_z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha_\kappa} k' \frac{I}{b} \sin \alpha \cdot d\alpha = k' \frac{I}{b} (-\cos \alpha) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha_\kappa} = k' \frac{I}{b} (-\cos \alpha_\kappa) =$$

$$= k' \frac{I}{b} \left( -\cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right) = k' \frac{I}{b} \sin \varphi = k' \frac{I}{b} \sin 45^\circ = \frac{k'I\sqrt{2}}{2b},$$

$$B_{zII} = B_{zIII} = \frac{k'I\sqrt{2}}{2b}.$$

Для участка V (см. задачу 2).

П. 5.  $dB_x = 0; dB_y = 0; dB_z = k'I \frac{dl}{a^2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{k'I dl}{a^2}.$

П. 8.  $B_{zV} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} k' \frac{Idl}{a^2} = \frac{k'I}{a^2} \cdot \frac{3\pi a}{4} = \frac{3k'I\pi}{4a}.$

П. 9. По принципу суперпози-

ции  $\vec{B} = 2\vec{B}_{zII} + \vec{B}_{zV} = 2 \frac{k'I\sqrt{2}}{2b} \vec{k} + \frac{3k'I\pi}{4a} \vec{k} = k'I \left( \frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{3\pi}{4a} \right) \vec{k}.$

**Пример 9.** Вдоль тонкой бесконечно длинной пластины шириной  $2d$  течет ток плотностью  $\vec{j}$ . Найти индукцию магнитного поля как функцию  $r$  от средней линии пластины в случае  $r > d$ .

*Решение*

Воспользуемся алгоритмом В.

П. 1. Представим пластину как совокупность тонких проводников шириной  $dy$  (рис. 2.34).

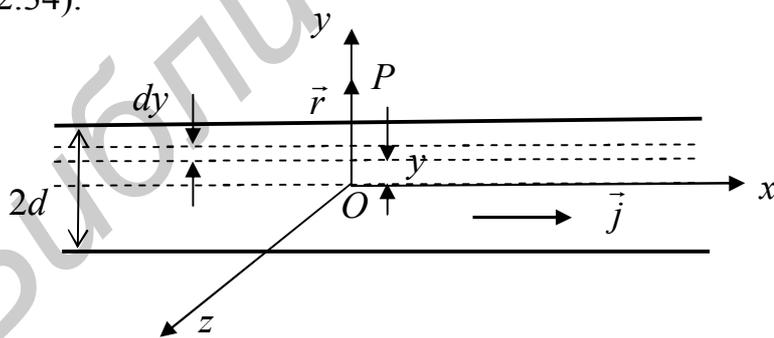


Рис. 2.34

П. 2. Воспользуемся результатом задачи 1. Расстояние от выбранного тонкого проводника до точки  $P$  равно  $r - y$ . Следовательно,

$$dB = \frac{2k'dI}{r-y} = \frac{2k'j}{r-y} dy.$$

П. 3. В правой части одна переменная величина  $y$ , переходим к п. 5.

П. 5. Интегрируем

$$B = \int_{-d}^d \frac{2k'j}{r-y} dy = -2k'j \ln|r-y| \Big|_{-d}^d = -2k'j \ln \left| \frac{r-d}{r+d} \right|.$$

П. 6. В векторной форме

$$\vec{B} = -2k'j \ln \left| \frac{r-d}{r+d} \right| \vec{k}.$$

**Пример 10.** Тонкий заряженный диск радиусом  $R_0$  с отверстием радиусом  $r_0$  вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, с угловой скоростью  $\omega$ . Плотность заряда изменяется по закону  $\sigma = \sigma_0 e^{-Ar}$ , где  $r$  – расстояние от центра диска,  $A$  – положительная константа. Найти вектор магнитной индукции в центре кольца.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.35, разбив диск на кольца радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ .

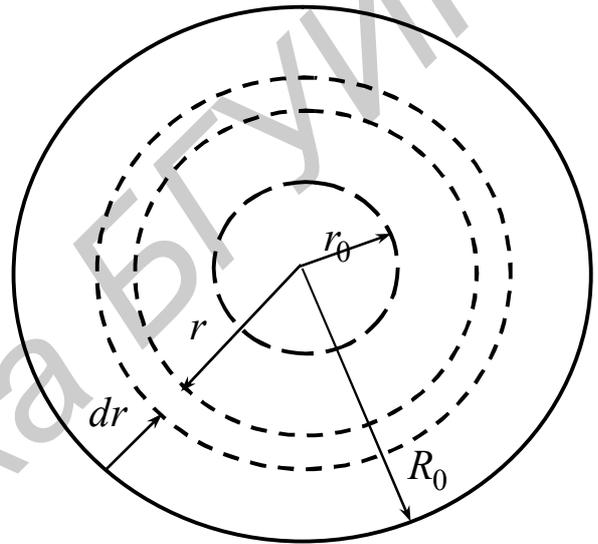


Рис.2.35

П. 2. Запишем выражение для индукции магнитного поля в центре такого кольца, полученное при решении задачи 2.

$$B_{\text{кольца}} = \frac{2k'I\pi}{R}; \quad dB = \frac{2k'dI\pi}{r},$$

$r$  изменяется от 0 до  $R$ :

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq\omega}{2\pi}; \quad dq = \sigma \cdot dS = \sigma 2\pi r dr.$$

Таким образом,

$$dI = \frac{2\sigma\pi\omega r dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr, \quad dB = \frac{2k'\pi\sigma\omega r dr}{r} = 2k'\pi\sigma\omega dr, \quad d\vec{B} = (2k'\pi\sigma\omega dr) \vec{k}.$$

Векторы  $d\vec{B}$  от всех колец направлены одинаково.

$$dB = 2k'\pi\sigma_0 e^{-Ar} \omega dr.$$

П. 3. В полученном выражении одна переменная, переходим к п. 5В.

$$\text{П. 5. } B = \int_{r_0}^{R_0} 2k'\pi\sigma_0 e^{-Ar} \omega dr,$$

$$B = 2k'\pi\omega\sigma_0 \int_{r_0}^{R_0} e^{-Ar} dr = \frac{2k'\pi\omega\sigma_0}{-A} e^{-Ar} \Big|_{r_0}^{R_0} = \frac{2k'\pi\omega\sigma_0}{A} (e^{-Ar_0} - e^{-AR_0}).$$

$$\text{П. 6. } \vec{B} = \frac{2k'\pi\omega\sigma_0}{A} (e^{-Ar_0} - e^{-AR_0}) \vec{k}.$$

## 2.5. Теорема о циркуляции (закон полного тока). Алгоритм решения задач

П. 1. Записать теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I.$$

П. 2. Выполнить рисунок, на котором следует изобразить:

- проводники с током;
- силовые линии магнитного поля.

П. 3. Выбрать контур, по которому будет рассчитываться циркуляция вектора  $\vec{B}$ . Для того чтобы циркуляцию можно было рассчитать наиболее просто, контур следует выбирать, руководствуясь следующими условиями:

- контур должен быть замкнутым;
- проходить через точку поля, в которой определяется значение вектора  $\vec{B}$ ;
- либо полностью совпадать с силовой линией поля, либо составляется из частей, одни из которых совпадают с силовой линией, а другие проходят перпендикулярно силовым линиям;
- отметить на рисунке ток, охватываемый контуром.

П. 4. Рассчитать циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по формуле  $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos \alpha$ .

Если контур состоит из отдельных частей, то  $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L_1)} B dl \cos \alpha_1 + \int_{(L_2)} B dl \cos \alpha_2 + \dots$

Учесть то обстоятельство, что если вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к силовым линиям, т.е. вектор  $d\vec{l}$  совпадает с вектором  $\vec{B}$ , то  $\cos \alpha = 0$ .

Если же вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен  $d\vec{l}$ , то  $\cos \alpha = 1$ .

П. 5. Рассчитать полный ток, охватываемый контуром, учитывая направления токов.

$$I = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S} = \int_{(S)} \vec{j} \vec{n} dS = \int_{(S)} j ds \cos \beta$$

или

$$I = \int_{(S_1)} \vec{j}_1 d\vec{s} + \int_{(S_2)} \vec{j}_2 d\vec{s} + \dots$$

Учесть, что направление нормали связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

П. 6. Результаты, полученные в пп. 4 и 5, подставить в формулу п. 1.

П. 7. Из выражения п. 6 получить величину вектора  $\vec{B}$ .

### 2.5.1. Примеры решения задач

**Пример1.** Ток  $I_0$  течет в одном направлении по длинной трубе, стенки которой имеют радиусы  $a$  и  $b$ , а в обратном направлении течет по тонкому проводнику, расположенному вдоль оси трубы. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния  $r$  от трубы для случая  $a < r < b$ .

*Решение*

П. 1. Запишем теорему о циркуляции:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

П. 2. Выполним рис. 2.36, изобразим трубу и проводник с током в сечении, перпендикулярном направлению протекания тока.

Силовые линии представляют собой концентрические окружности с центром на оси трубы.

П. 3. Контур, по которому будем считать циркуляцию, выберем в виде окружности, совпадающей с силовой линией, проходящей через точку  $A$  (пунктирная линия). Во всех точках контура векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  совпадают по направлению, т. е.  $\cos 0^\circ = 1$ , а  $B = \text{const}$ . Выделим ток, попавший внутрь контура.

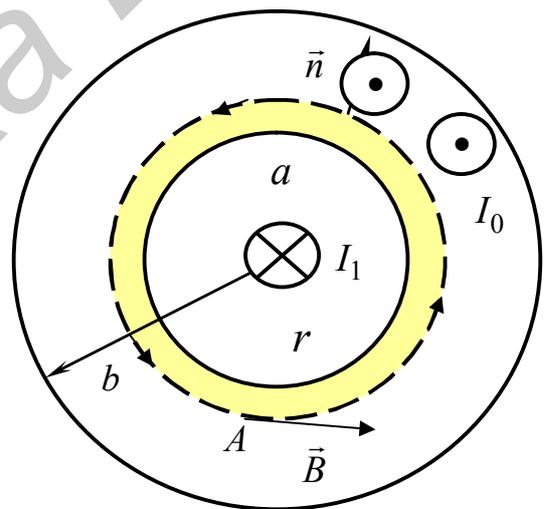


Рис. 2.36

П. 4. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

П. 5. Рассчитаем ток, попавший внутрь контура:

$$I = I_0 + \int_{(S)} j ds \cos \pi = I_0 - j \int_{(S)} ds = I_0 - j S \Big|_{S_1}^{S_2} = I_0 - j\pi(r^2 - a^2),$$

т. к.

$$j = \frac{I_0}{\pi(b^2 - a^2)},$$

следовательно,

$$I = I_0 - \frac{I_0(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}.$$

П. 6. Подставим значения, полученные в пп. 4 и 5, в формулу п. 1.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \left( 1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right).$$

П. 7. Определим  $B$ :  $B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$ ,  $a < r < b$ .

**Пример 2.** По длинному цилиндрическому проводнику радиусом  $R$  течет ток, плотность которого  $j = j_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ , где  $r$  – расстояние от оси трубы. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии  $r < R$  от оси провода.

*Решение*

П. 1. Запишем теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

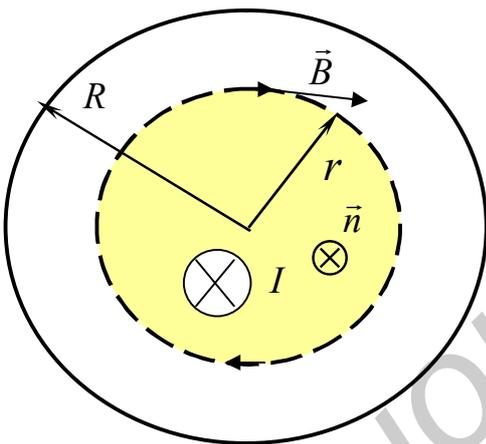


Рис. 2.37

П. 2. Выполним рис. 2.37. Изобразим проводник с током в сечении, перпендикулярном направлению протекания тока. Силовые линии представляют собой концентрические окружности с центром на оси проводника.

П. 3. Контур, для которого будем считать циркуляцию вектора  $\vec{B}$ , совместим с силовой линией, проходящей через произвольную точку (пунктирная линия). Во всех точках такого контура вектор  $\vec{B}$  и вектор  $d\vec{l}$  совпадают по направлению, поэтому  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ . Выделим ток, попавший внутрь контура.

П. 4. Рассчитаем циркуляцию вектора:

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

П. 5. Рассчитаем ток, охватываемый контуром.

$$\begin{aligned} I &= \int j ds \cos 0^\circ = \int j_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) ds = \int_0^r j_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = 2\pi j_0 \int_0^r \left( r dr - \frac{r^3}{R^2} dr \right) = \\ &= 2\pi j_0 \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) = \pi j_0 r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{2R^2} \right). \end{aligned}$$

П. 6. Подставим значения, полученные в пп. 4 и 5, в формулу п. 1.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi j_0 r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

П. 7. Определим  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

**Пример 3.** По длинной трубе, внешний и внутренний радиусы которой равны  $a$  и  $b$  соответственно, течет ток, плотность которого  $j = j_0 e^{-\alpha r^2}$ , где  $j_0$  и  $\alpha$  – постоянные,  $r$  – расстояние от оси трубы. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии  $r$  от оси трубы для  $r > b$ .

*Решение*

П. 1. Запишем теорему о циркуляции вектора:

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

П. 2. Выполним рис. 2.38. Изобразим трубу и проводник с током в сечении, перпендикулярном направлению протекания тока (ток течет от нас).

Силовые линии представляют собой концентрические окружности с центром на оси трубы.

П. 3. Контур (пунктирная линия), по которому будем считать циркуляцию вектора  $\vec{B}$ , совместим с силовой линией, проходящей через некоторую точку. Во всех точках такого контура вектор  $\vec{B}$  и вектор  $d\vec{l}$  совпадают по направлению, поэтому  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ . Выделим ток, попавший внутрь контура.

П. 4. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

П. 5. Рассчитаем ток, попавший внутрь контура:

$$\begin{aligned} \sum I_{\text{охв.}} &= \int_{(S)} j ds = \int_a^b j_0 e^{-\alpha r^2} 2\pi r dr = 2\pi j_0 \int_a^b e^{-\alpha r^2} r dr = -\frac{\pi j_0 e^{-\alpha r^2}}{\alpha} \Big|_a^b = \\ &= \frac{\pi j_0}{\alpha} \left( e^{-\alpha a^2} - e^{-\alpha b^2} \right). \end{aligned}$$

П. 6. Подставим значения, полученные в пп. 4 и 5, в формулу п. 1.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi j_0}{\alpha} \left( e^{-\alpha a^2} - e^{-\alpha b^2} \right).$$

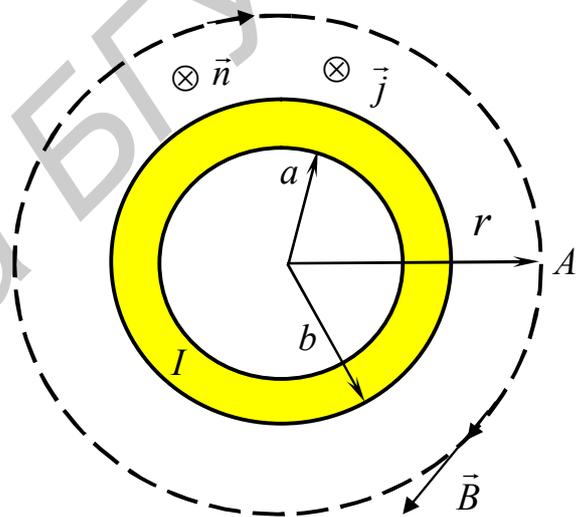


Рис. 2.38

П. 7. Определим  $B$ :  $B = \frac{\mu_0 j_0}{2\alpha r} (e^{-\alpha a^2} - e^{-\alpha b^2})$ .

**Пример 4.** На деревянный тороид малого поперечного сечения намотано равномерно  $N$  витков провода, по которому течет ток  $I_0$ . Найти индукцию магнитного поля внутри тороида.

*Решение*

П. 1. Для определения индукции внутри тороида используем теорему о циркуляции:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

П. 2. Выполним рис. 2.39, на котором изобразим сечение тороида. Силовые линии поля внутри тороида представляют собой концентрические окружности.

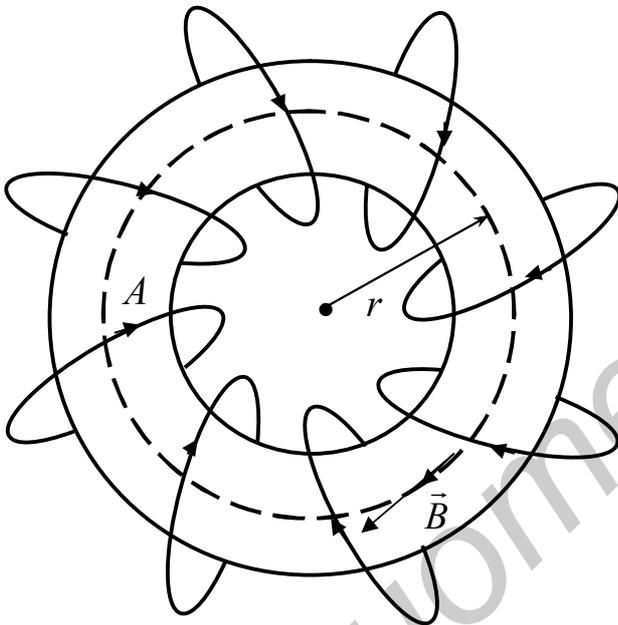


Рис. 2.39

П. 3. Контур (пунктирная линия) выберем в виде окружности, совпадающей с силовой линией, проходящей через т.  $A$ . Во всех точках такого контура векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  совпадают по направлению. Следовательно, угол  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\cos \alpha = 1$ , а  $B = \text{const}$ .

П. 4. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

П. 5. Рассчитаем ток, охватываемый контуром,

$$I = \sum I_{\text{охв.}} = I_0 N.$$

П. 6. Подставим значения, полученные в пп. 4 и 5, в п. 1:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 N.$$

П. 7. Определим  $B$  внутри тороида:

$$B = \frac{\mu_0 I_0 N}{2\pi r},$$

поскольку поперечное сечение тороида мало, т. е.  $R_{\text{внутр.}} \approx R_{\text{внеш.}} \approx R$ , то

$$B = \frac{\mu_0 I_0 N}{2\pi R}.$$

**Пример 5.** Найти плотность тока как функцию расстояния  $r$  от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от  $r$  как

$$B = br^A, \text{ где } b \text{ и } A - \text{положительные константы.}$$

*Решение*

П. 1. Запишем теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

П. 2. На рис. 2.40 изобразим поток частиц в сечении, перпендикулярном направлению движения частиц. Силовые линии представляют собой concentric окружности с центром на оси симметрии потока. На одном и том же расстоянии от оси потока значение  $B = \text{const}$ .

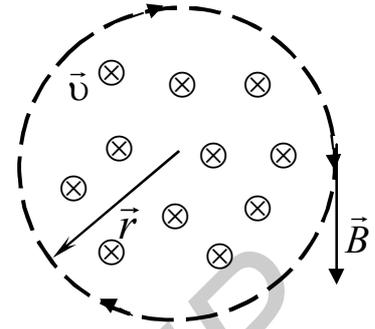


Рис. 2.40

П. 3. Контур (пунктирная линия), для которого будем считать циркуляцию вектора  $\vec{B}$ , совместим с силовой линией, проходящей через некоторую точку. Во всех точках такого контура вектор  $\vec{B}$  и вектор  $d\vec{l}$  совпадают по направлению, поэтому  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ . Ток, попавший внутрь контура, создается зарядами, охваченными контуром.

П. 4. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\int_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = \int_{(L)} br^A dl = br^A \cdot 2\pi r = 2\pi br^{(A+1)}.$$

П. 5. Запишем выражение для тока, охватываемого контуром,

$$\int j ds = \int j \cdot 2\pi r dr.$$

П. 6. Подставим значения, полученные в пп. 4 и 5, в формулу п. 1:

$$2\pi br^{(A+1)} = \mu_0 \int j 2\pi r dr.$$

Продифференцируем обе части уравнения:

$$d(2\pi br^{(A+1)}) = \mu_0 d\left(\int j 2\pi r dr\right),$$

$$2\pi b(A+1)r^A dr = \mu_0 j 2\pi r dr.$$

П. 7. Определим значение  $j$ :

$$j = \frac{b}{\mu_0} (A+1)r^{(A-1)}.$$

**Пример 6.** По длинному сплошному проводнику течет ток, плотность которого зависит от расстояния  $r$  от оси проводника по закону

$$j = j_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \text{ } R - \text{радиус сечения проводника,}$$

$j_0 = \text{const}$ . Определить индукцию магнитного по-

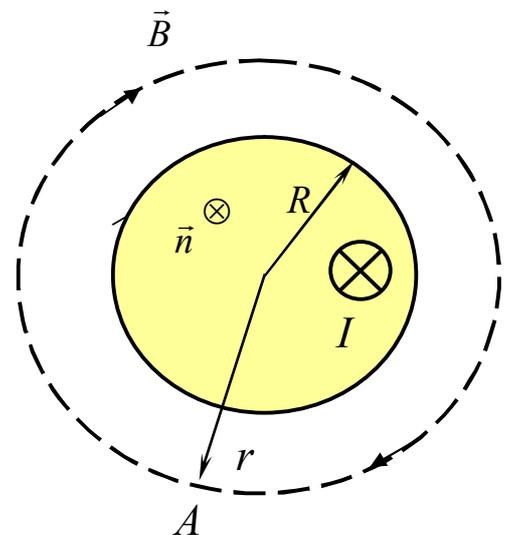


Рис.2.41

ля как функцию  $r$  для случая  $r > R$ .

*Решение*

П. 1.  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$ .

П. 2. Выполним рис. 2.41. Далее смотри решение задачи 2.

П. 3.  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  составляют угол  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\cos \alpha = 1$ .

П. 4.  $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r$ .

П. 5. Рассчитаем ток, охваченный конту-

ром,

$$I = \sum I_{\text{охв.}} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{s} = \int_{(S)} j ds = \int_0^R j_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 2\pi r dr = j_0 2\pi \int_0^R \left(r dr - \frac{r^2}{R} dr\right) =$$

$$= j_0 2\pi \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) = j_0 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2j_0 \pi R^2 \frac{1}{6} = \frac{j_0 \pi R^2}{3}.$$

П. 6. Подставим результаты пп. 4 и 5 в теорему о циркуляции:  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_0 \frac{\pi R^2}{3}$ .

П. 7.  $B = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{6r}$ .

**Пример 7.** По бесконечной длинной трубе, внешний и внутренний радиусы которой соответственно  $a$  и  $b$ , течет ток, плотность которого в зависимости от расстояния от оси трубы имеет вид  $j = j_0 \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)$ . Определить магнитную индукцию на расстоянии  $a \leq r \leq b$  от оси трубы.

*Решение*

П. 1.  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$ .

П. 2. Выполним рис. 2.42.

П. 3. Векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  составляют угол  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\cos \alpha = 1$ .

П. 4. Найдем циркуляцию  $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0^\circ = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r$ .

П. 5. Рассчитаем ток, охваченный контуром (контур совпадает с силовой линией),

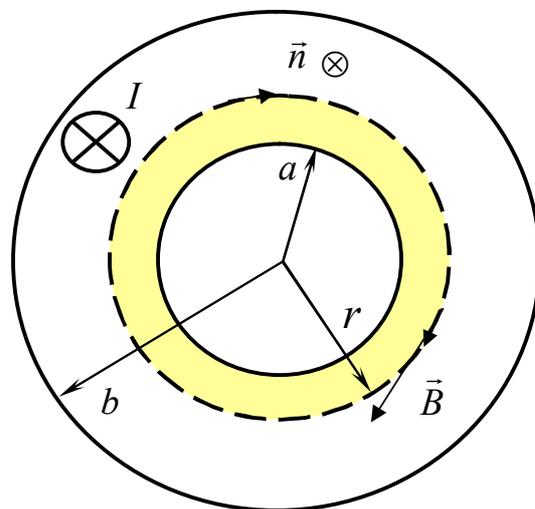


Рис. 2.42

$$I = \sum I_{\text{охв.}} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{s} = \int_a^r j_0 \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right) \cdot 2\pi r dr = 2\pi j_0 \int_a^r \left(r dr + \frac{r^3}{b^2} dr\right) \\ = 2\pi j_0 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4b^2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4b^2}\right).$$

П. 6. Подставим результаты пп. 4 и 5 в теорему о циркуляции:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi j_0 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4b^2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4b^2}\right).$$

П. 7. Окончательно  $B = \frac{\mu_0 \pi j_0}{\pi r} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4b^2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4b^2}\right).$

**Пример 8.** По бесконечно длинному соленоиду, радиус которого  $R$ , течет ток  $I_0$ . Число витков на единицу длины соленоида равно  $n$ . Определить магнитную индукцию внутри соленоида.

*Решение*

П. 1.  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$

П. 2. Выполним рис. 2.43.

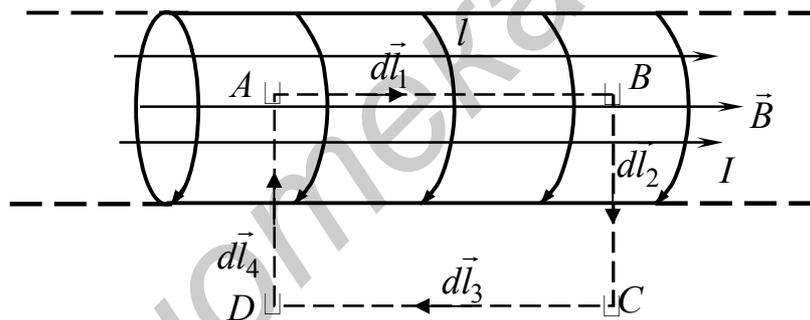


Рис. 2.43

П. 3. Выберем контур в виде прямоугольника (см. рис.2.43). В бесконечно длинном соленоиде поле сосредоточено внутри соленоида, и за его пределами вектор магнитной индукции равен нулю  $B = 0$  (сторона  $CD$ ).

П. 4. Рассчитаем циркуляцию по выбранному контуру:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_{(AB)} B dl \cos 0 + \int_{(BC)} B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_{(CD)} B dl \cos \pi + \int_{(DA)} B dl \cos \frac{\pi}{2} = \\ = \int_{(AB)} B dl + 0 + 0 + 0 = B \int_{(AB)} dl = Bl.$$

П. 5. Рассчитаем ток, охваченный контуром,

$$I = \sum I_{\text{охв.}} = I_0 N_{\text{витков}} = I_0 n \cdot l.$$

П. 6. В соответствии с теоремой о циркуляции

$$B \cdot l = \mu_0 I_0 n \cdot l.$$

П. 7.  $B = \mu_0 I_0 n$ .  $B = \text{const}$ . Поле однородно.

**Пример 9.** Два бесконечно длинных проводника, токи в которых  $I_1$  и  $I_2$ , расположены параллельно друг другу на расстоянии  $2a$  друг от друга. Токи текут в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию в точках, расположенных на расстоянии  $a$  как от первого, так и от второго проводника.

*Решение*

П. 1. Определим индукцию магнитного поля, создаваемую каждым проводником в отдельности.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$$

П. 2. Выполним рис. 2.44.

П. 3. Рассмотрим один проводник с током. Контур выберем в виде окружности радиусом  $a$  с центром на проводнике с током. Контур совпадает с силовой линией.

$$\int_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0 = \int_{(L)} B dl = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi a.$$

$$\text{П. 5. } I = \sum I_{\text{охв.}} = I_0.$$

$$\text{П. 6. } B \cdot 2\pi a = \mu_0 I_0.$$

$$\text{П. 7. } B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}.$$

Изобразим  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  для каждого проводника (рис. 2.45).

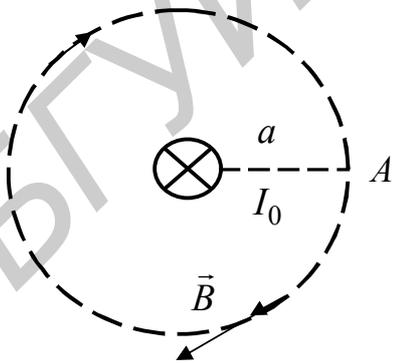


Рис. 2.44

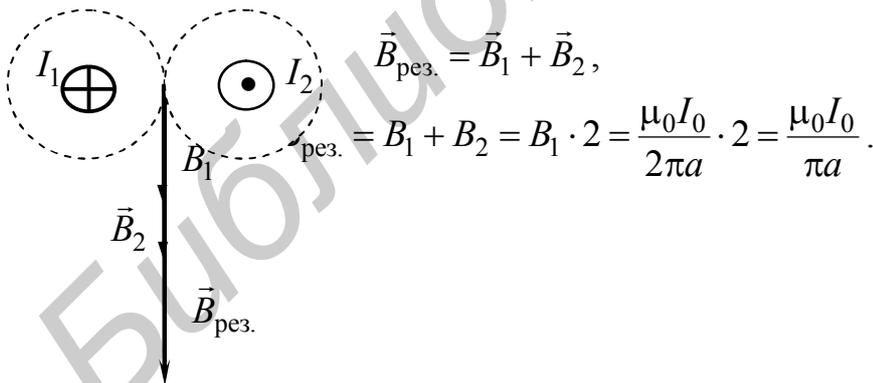


Рис. 2.45

**Пример 10.** Ток  $I_1$  течет в одну сторону по сплошной трубе радиусом  $R_0$ , расположенной вдоль оси полой трубы, радиусы стенки которой  $R_1$  и  $R_2$ , по которой этот же ток течет в обратном направлении. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии  $r$  от общей оси для случая  $R_1 < r < R_2$ .

Решение

П. 1.  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}}$

П. 2. Выполним рис. 2.46.

П. 3. Контур выберем в виде окружности (пунктирная линия).

П. 4. Распишем циркуляцию:

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \int_{(L)} B dl \cos 0 = \int_{(L)} B dl = B \int_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r$$

П. 5. Рассчитаем ток, охваченный контуром,

$$I = \sum I_{\text{охв.}} = I_0 + \int_{(S_1)} j dS \cos \pi = I_0 - jS_1 =$$

$$I_0 - j\pi(r^2 - R_1^2) = I_0 - \frac{I_0}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \pi(r^2 - R_1^2) =$$

$$I_0 \left( 1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right).$$

П. 6. Воспользуемся теоремой о циркуляции:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \left( 1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right).$$

П. 7. Определим

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2 - r^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right); \quad B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left( \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right).$$

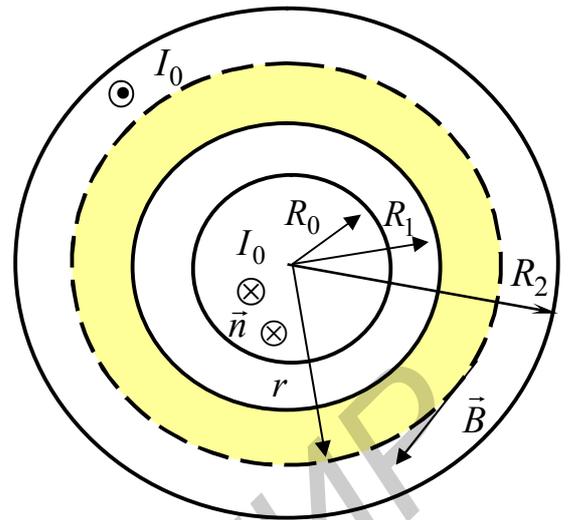


Рис. 2.46

**2.6. Явление электромагнитной индукции. Алгоритм решения задач**

П. 1. Выполнить рисунок, на котором изобразить:

а) контур, в котором требуется определить ЭДС индукции; б) нормаль к этому контуру; в) направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

П. 2. Если в задаче не задано значение вектора  $\vec{B}$ , то рассчитать его, используя закон Био–Савара–Лапласа или теорему о циркуляции, воспользовавшись соответствующими алгоритмами.

П. 3. Полученное в п. 2 или заданное в условии задачи значение вектора  $\vec{B}$  подставить в формулу для определения магнитного потока:  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = \int \vec{B} dS \vec{n} = \int B dS \cos \varphi$ , определив значение угла  $\varphi$  между вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  к плоскости контура. Поскольку для определения ЭДС индукции требуется выразить магнитный поток  $\Phi$  как функцию

времени  $t$ , выполнить замену переменных, введя в формулу для  $\Phi$  время  $t$ , если такая зависимость не задана в условии задачи.

П. 5. Найти ЭДС индукции как производную от магнитного потока по времени:

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

П. 6. Если в задаче требуется определить индукционный ток в контуре, использовать закон Ома  $I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}$ .

П. 7. Если в задаче требуется определить количество теплоты, выделившееся в контуре, воспользоваться законом Джоуля–Ленца  $Q_{\text{дж}} = \int \frac{\varepsilon_i^2}{R} dt$ .

П. 8. Для нахождения заряда  $q$  на обкладках конденсатора емкостью  $C$ , включенного в контур, воспользоваться формулой  $q = C\varepsilon_i$ .

### 2.6.1. Примеры решения задач

**Пример 1.** Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением  $R$  изменяется по закону  $\Phi = At(\tau - t)$ , где  $A = \text{const}$ ,  $\tau$  – время существования магнитного поля. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся в контуре за это время.

*Решение*

Поскольку значение магнитного потока  $\Phi$  задано в условии задачи, начинаем с п. 4.

П. 4. Магнитный поток задан как функция времени. Замены переменных не требуется.

П. 5.  $\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = A\tau - 2At$ .

П. 7. Определим

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\tau} \frac{\varepsilon_i^2}{R} dt = \int_0^{\tau} (A\tau - 2At)^2 \frac{1}{R} dt = \int_0^{\tau} (A^2\tau^2 - 4A^2\tau t + 4A^2t^2) \frac{1}{R} dt = \\ &= \frac{1}{R} \left( A^2\tau^2 t - 4A^2\tau \frac{t^2}{2} + 4A^2 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{\tau} = \frac{1}{R} A^2 \left( \tau^3 - 2\tau^3 + \frac{4}{3}\tau^3 \right) = \frac{1}{R} A^2 \frac{\tau^3}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Контур в виде прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , имеющий сопротивление  $R$ , пронизывается магнитным полем, вектор магнитной индукции которого меняется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ , где  $B_0$  и  $\omega$  – положительные константы. Силовые линии поля составляют угол  $\alpha$  с плоскостью контура.

Определить значение индукционного тока  $I$  как функцию времени, а также максимальное значение тока в контуре.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.46

П. 3. Магнитный поток определим как

$$\begin{aligned}\Phi &= BS \cos \varphi = (B_0 \cos \omega t) S \cos(90 - \alpha) = \\ &= (B_0 \cos \omega t) S \sin \alpha = (B_0 S \sin \alpha) \cos \omega t.\end{aligned}$$

П. 5.

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| -(B_0 S \sin \alpha) \frac{d}{dt} (\cos \omega t) \right| = \\ &= \left| -B_0 S \omega \sin \alpha (-\sin \omega t) \right| = B_0 S \omega \sin \alpha \sin \omega t\end{aligned}$$

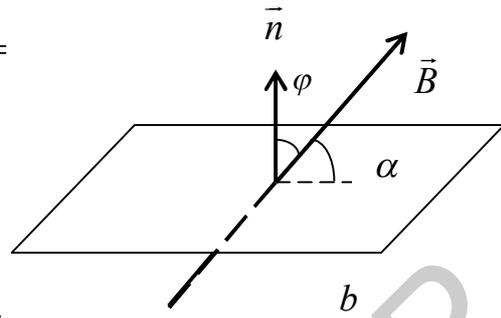


Рис.2.46

П. 6. Индукционный ток определим по закону Ома:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B_0 S \omega \sin \alpha}{R} \sin \omega t.$$

Максимальное значение  $I_i$  соответствует максимальному значению  $\sin \omega t = 1$ :

$$I_{i \max} = \frac{B_0 S \omega \sin \alpha}{R}.$$

**Пример 3.** Контур представляет собой прямоугольник, одна из сторон которого длиной  $l$  неподвижна, а другая перемещается с постоянной скоростью  $v$  вдоль боковых сторон. В начальном положении расстояние между этими сторонами  $l_0$ . В середину подвижной стороны включен конденсатор емкостью  $C$ . Контур пронизывается однородным магнитным полем с индукцией  $B = B_0 + \frac{At^2}{2}$ , силовые линии которого перпендикулярны плоскости контура.

Найти заряд конденсатора как функцию времени.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.47.

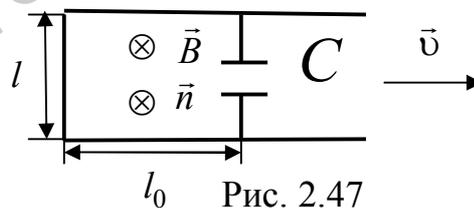


Рис. 2.47

П. 3. Определим изменение магнитного потока, возникающее при движении

подвижной стороны  $d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos 0^\circ$ ,  $dS = l v dt$ ,  $d\Phi = \left( B_0 + \frac{At^2}{2} \right) l v dt$ .

Магнитный поток, пронизывающий контур, равен

$$\Phi = \left( B_0 + \frac{At^2}{2} \right) S_0 + \int_0^t \left( B_0 + \frac{At^2}{2} \right) l v dt = \left( B_0 + \frac{At^2}{2} \right) S_0 + \left( B_0 t + \frac{At^3}{6} \right) l v.$$

П. 5. Магнитный поток является функцией времени, поэтому находим

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|,$$

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d}{dt} \left( B_0 S_0 + \frac{AS_0 t^2}{2} + Blvt + \frac{Alvt^3}{6} \right) \right| = AS_0 t + B_0 lv + \frac{Alv}{2} t^2, S_0 = l \cdot l_0.$$

П. 8. Заряд на обкладках конденсатора

$$q = \varepsilon_i C = Cl \left( Atl_0 + B_0 lv + \frac{At^2 v}{2} \right).$$

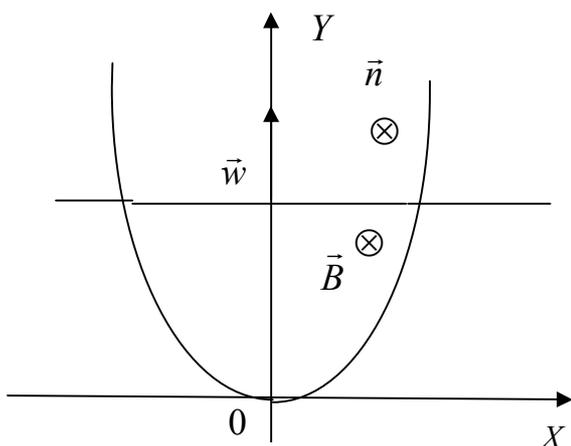


Рис.2.48

**Пример 4.** Провод, имеющий форму параболы, заданной уравнением  $y = Ax^2$ , находится в однородном магнитном поле, силовые линии которого перпендикулярны плоскости параболы. Значение вектора  $\vec{B}$  задано. Из вершины параболы в момент времени  $t=0$  начинают перемещать проводящую перемычку с постоянным ускорением  $\vec{w}$ , направленным перпендикулярно оси  $OY$ . Определить ЭДС индукции как функцию координаты  $y$ .

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.48.

П. 2. Вектор  $\vec{B}$  задан в условии задачи.

П. 3. Определим магнитный поток  $\Phi = \int B dS \cos \varphi$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ ,  $B = const$ , поэтому  $\Phi = B \int dS \cos 0 = BS$ , где  $S$  – площадь, ограниченная перемычкой и той частью параболы, которую прошла перемычка.

Определим площадь  $S$ :

$$S = 2xy - 2 \int x dy = 2 \sqrt{\frac{y}{A}} y - 2 \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A}} dy = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{A}} - \frac{4}{\sqrt{A}} \frac{y\sqrt{y}}{3} = \frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{A}}.$$

П. 4. Учтем, что  $y = \frac{wt^2}{2}$ ,  $S = \frac{2}{3\sqrt{A}} \left( \frac{wt^2}{2} \right)^{3/2}$ ;  $\Phi = B \frac{2}{3\sqrt{A}} \left( \frac{w}{2} \right)^{3/2} \cdot t^3$ .

П. 5. Определим значение  $\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{2B}{3\sqrt{A}} \left( \frac{w}{2} \right)^{3/2} \cdot 3t^2$ .

Учитывая, что при движении с постоянным ускорением  $y = \frac{wt^2}{2}$ , заменим

$$t^2 = \frac{2y}{w}. \text{ Окончательно } \varepsilon_i = \frac{2B}{3\sqrt{A}} \left(\frac{w}{2}\right)^{3/2} \cdot 3 \frac{2y}{w} = \frac{4By}{\sqrt{A}} \frac{w\sqrt{w}}{2\sqrt{2}w} = 2By\sqrt{\frac{w}{2A}}.$$

**Пример 5.** Проводник сопротивлением  $R$  скользит в горизонтальной плоскости по направляющим в виде сторон угла с ускорением  $\vec{w}$ , направленным по биссектрисе угла  $2\alpha$ . Определить количество теплоты, выделяющейся в проводнике, как функцию пройденного расстояния  $y$ , если перпендикулярно плоскости движения создано магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

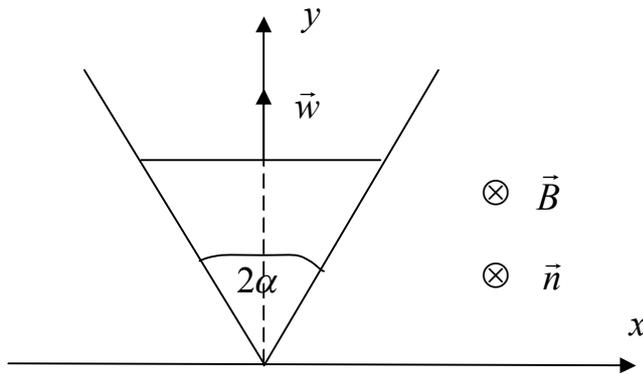


Рис.2.49

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.49.

П. 3. Определим магнитный поток  $\Phi = \int B \cos 0^\circ ds = BS$ . Определим  $S = \frac{1}{2} y \cdot 2x = xy$ . Из рис. 2.49 видно, что  $x = yt \operatorname{tg} \alpha$ , следовательно,  $S = y^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

П. 4. Поскольку перемычка движется с постоянным ускорением  $\vec{w}$ , то  $y = \frac{wt^2}{2}$ ,

а значит,  $S = \frac{w^2 t^4}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , а поток  $\Phi = B \frac{w^2 t^4}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

П. 5. Определим ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \left( \frac{Bw^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) 4t^3.$$

С учетом того, что  $y = \frac{wt^2}{2}$  и, следовательно,  $t = \sqrt{\frac{2y}{w}}$ , получаем

$$\varepsilon_i = \left( \frac{Bw^2}{4} \operatorname{tg} \alpha \right) \left( \frac{2y}{w} \right)^{3/2} \cdot 4 = 2B\sqrt{2wy^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Пример 6.** Квадратная рамка со стороной  $a$  и длинный прямой провод с током находятся в одной плоскости. К рамке подключен конденсатор емкостью  $C$ . Рамку поступательно перемещают вправо со скоростью  $v$ . Найти заряд конденсатора, как функцию расстояния  $x$ .

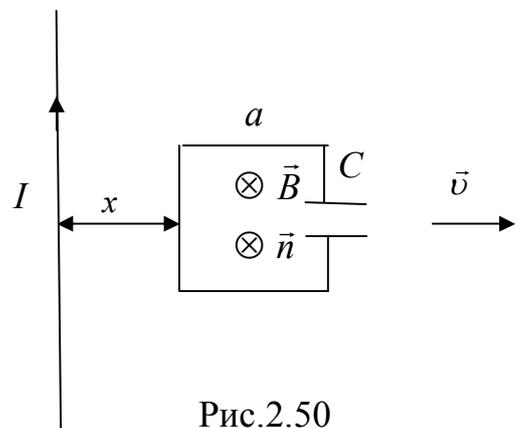


Рис.2.50

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.50.

П. 2. Используя теорему о циркуляции, определим значение вектора  $\vec{B}$  как функцию расстояния от провода до ближайшей стороны рамки (см. соответствующий алгоритм).

$$\oint B dl \cos 0 = \mu_0 I,$$

$$B \cdot 2\pi x = \mu_0 I, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

П. 3. Определим магнитный поток через рамку, учитывая что  $ds = a dx$ , а  $\cos \varphi = 1$ .

$$\Phi = \int B ds \cos \varphi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln \frac{a+x}{x}.$$

П. 4. При равномерном движении  $x = vt$ , следовательно,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+vt}{vt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left( \frac{a}{vt} + 1 \right).$$

П. 5. Найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \ln \frac{a+vt}{vt} \right) \right| = \frac{\mu_0 I l a}{2\pi(a+vt)t},$$

поскольку  $t = \frac{x}{v}$ , окончательно получим  $\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I a l v}{2\pi(a+x)x}$ .

П. 8. Заряд конденсатора определим как  $q = C \varepsilon_i = \frac{\mu_0 I a l v C}{2\pi(a+x)x}$ .

**Пример 7.** Внутри длинного соленоида находится катушка, состоящая из  $N$  витков площадью поперечного сечения  $S_0$ . Магнитное поле в катушке изменяется по закону  $B = B_0 \sin \omega t$  и в момент  $t = 0$  ось катушки совпадает с осью соленоида. Катушку поворачивают вокруг оси, совпадающей с диаметром и перпендикулярной оси соленоида с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти ЭДС индукции как функцию времени.

*Решение*

П. 3. Магнитный поток через виток

$$\Phi = BS \cos \varphi = B_0 \sin \omega t \cdot S_0 \cos \varphi,$$

при вращении рамки угол  $\varphi = \omega t$ , следовательно-

$$\text{но, } \Phi = B_0 S_0 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{B_0 S_0}{2} \sin 2\omega t.$$

П. 5. Определим ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \left| -N \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{B_0 S_0 N}{2} \frac{d}{dt} (\sin 2\omega t) = \frac{B_0 S_0 N}{2} (\cos 2\omega t) 2\omega = B_0 S_0 N \omega \cos 2\omega t.$$

**Пример 8.** На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения  $d$  и содержащий витков  $n$  на единицу длины, плотно надет круговой виток из металла с удельным сопротивлением  $\rho$ . Сечение провода  $S_0$ . Ток в обмотке соленоида увеличивается со скоростью  $I'$ . Найти ток в витке.

*Решение*

П. 1. Выполним рисунок 2.51.

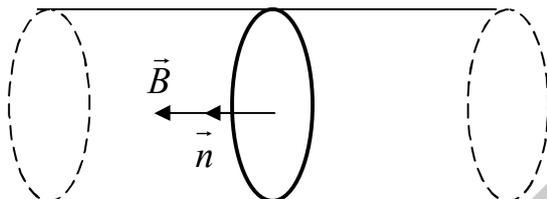


Рис. 2.51

П. 2. Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида  $B = \mu_0 In$ .

П. 3. Определим магнитный поток через виток:

$$\Phi = BS = \mu_0 In \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

П. 5. Определим  $\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 In \frac{\pi d^2}{4} \right) \right| = \mu_0 I' n \frac{\pi d^2}{4}.$

П. 6. Определим  $I_{\text{витка}} = \frac{\varepsilon_i}{R_{\text{витков}}},$

$$R_{\text{витка}} = \frac{\rho l}{S_0} = \frac{\rho \pi d}{S_0}.$$

Следовательно,

$$I_{\text{витка}} = \frac{\mu_0 n \pi d^2 I' S_0}{4 \rho \pi d} = \frac{\mu_0 n d I' S_0}{4 \rho}.$$

**Пример 9.** На расстоянии  $a$  и  $b$  от длинного прямого провода проводника с постоянным током  $I_0$  расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением  $R$ . По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью  $v$  стержень-перемычку. Найти величину индукционного тока в контуре.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2. 52.

П. 2. Значение вектора  $\vec{B}$  как функцию расстояния  $x$  от провода определим по теореме о циркуляции (см. задачу 6).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

П. 3. Магнитный поток через контур  $\Phi = \int B dS \cos \varphi$ . Угол  $\varphi$  между  $\vec{B}$  и нормалью к плоскости контура  $\vec{n}$  равен  $0^\circ$ . Элементарная поверхность, во всех точках которой вектор  $\vec{B}$  имеет одно и то же значение, по площади равна  $dS = \upsilon t dx$ , следовательно, магнитный поток определяется как

$$\Phi = \mu_0 I \int_a^b \frac{\upsilon t}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I \upsilon t}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I \upsilon t}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

П. 5. Поскольку магнитный поток  $\Phi$ , определенный в п. 3, зависит от времени, найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I \upsilon}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

П. 6. Определим значение индукционного тока  $I_i$  по закону Ома:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 I \upsilon}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}.$$

**Пример 10.** Плоский контур, имеющий вид двух квадратов со сторонами  $a$  и  $b$  находится в магнитном поле, индукция которого меняется по закону  $B = B_0 \sin \omega t$ . Силовые линии магнитного поля перпендикулярны плоскости квадратов. Удельное сопротивление проволоки  $\rho$ , сечение проволоки  $S$ . Найти амплитудное значение индукционного тока.

*Решение*

П. 1. Выполним рис. 2.53.

П. 3. Поскольку значение  $\vec{B}$  задано в условии, определим магнитный поток:

$$\Phi = BS \cos 0 = B_0 (a^2 - b^2) \sin \omega t.$$

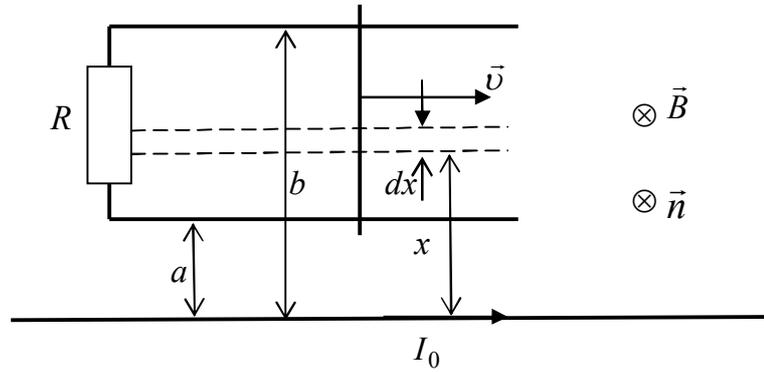
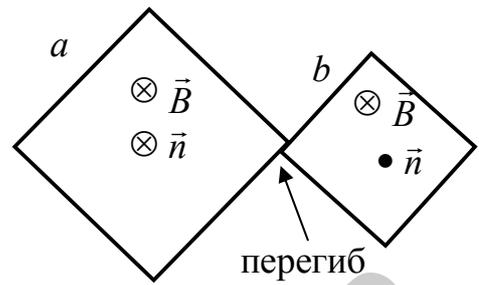


Рис. 2.52

П. 5. Определим ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = B_0(a^2 - b^2)\omega \cos \omega t.$$



П. 6. Определим индукционный ток по закону Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \text{ учитывая, что } R = \frac{\rho l}{S}, \text{ а длина провод-}$$

Рис.2.53

ника  $l = 4a + 4b$ , находим 
$$I = \frac{SB_0\omega(a^2 - b^2)\cos \omega t}{\rho(4a + 4b)} = \frac{SB_0\omega(a - b)}{4\rho}\cos \omega t.$$

Амплитудное значение тока 
$$I_{\max} = \frac{B_0S\omega(a - b)}{4\rho}$$
 при значении  $\cos \omega t = 1$ .

Библиотека БГУИР

## Содержание

Введение.....	3
1.МЕХАНИКА.....	5
1.1. Кинематика материальной точки (прямая задача). Алгоритм решения задач.....	5
1.1.1. Примеры решения задач.....	6
1.2. Кинематика материальной точки (обратная задача). Алгоритм решения задач.....	12
1.2.1. Примеры решения задач.....	14
1.3.Динамика поступательного движения. Алгоритм решения задач.....	23
1.3.1. Примеры решения задач.....	23
1.4. Законы изменения и сохранения импульса. Алгоритм решения задач.....	34
1.4.1. Примеры решения задач.....	35
1.5. Момент инерции твердого тела. Алгоритм решения задач.....	47
1.5.1. Примеры решения задач.....	48
1.6. Динамика вращательного движения. Алгоритм решения задач.....	56
1.6.1. Примеры решения задач.....	57
1.7. Механическая работа. Алгоритм решения задач.....	71
1.7.1. Примеры решения задач.....	72
1.8. Закон сохранения момента импульса. Алгоритм решения задач.....	81
1.8.1. Примеры решения задач.....	82
1.9. Кинематика колебаний. Алгоритм решения задач.....	89
1.9.1. Примеры решения задач.....	91
2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....	99
2.1. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции. Алгоритм решения задач.....	99
2.1.1. Примеры решения задач.....	99
2.2. Теорема Гаусса. Алгоритм решения задач.....	109
2.2.1. Примеры решения задач.....	110
2.3. Потенциал электростатического поля. Связь напряженности и потенциала Теорема Гаусса в дифференциальной форме.....	122
2.3.1А. Определение напряженности электростатического поля и объемной плотности заряда по заданному потенциалу. Алгоритм решения задач.....	122

2.3.2Б. Определение потенциала и напряженности поля .....	123
2.3.3. Примеры решения задач по алгоритму А.....	123
2.3.4. Примеры решения задач по алгоритму Б .....	126
2.4. Закон Био–Савара–Лапласа. Алгоритм решения задач А .....	130
2.4.1. Алгоритм решения задач А .....	130
2.4.2. Алгоритм решения задач Б.....	131
2.4.3. Примеры решения задач.....	131
2.5. Теорема о циркуляции (закон полного тока). Алгоритм решения задач.....	141
2.5.1. Примеры решения задач.....	142
2.6. Явление электромагнитной индукции. Алгоритм решения задач.....	150
2.6.1 Примеры решения задач.....	151

Библиотека БГУИР

*Учебное издание*

**Зенькевич Эдуард Иосифович**  
**Смирнова Галина Федоровна**  
**Сергеева-Некрасова Марина Сергеевна**

***МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.***  
***АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ***

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Гуртатовская*

Подписано в печать 03.11.2015. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 9,42. Тираж 300 экз. Заказ 4.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.

ЛП №02330/264 от 14.04.2014.

220013, Минск, П. Бровки, 6